

BRUNO KAHN

**L'anneau de Milnor d'un corps local à
corps résiduel parfait**

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 4 (1984), p. 19-65

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_19_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'ANNEAU DE MILNOR D'UN CORPS LOCAL À CORPS RESIDUEL PARFAIT

par Bruno KAHN

	Pages
Introduction	21
1. Cas d'un corps local	25
1.1. Notations	25
1.2. Les groupes $H(n, K)$	26
2. Énoncé des résultats principaux	28
2.1. La p -partie de $K_*(K)$	28
2.2. Structure de $H(s, K)$	29
2.3. L'anneau $K_*^{\text{top}}(K)$	29
2.4. Torsion	30
3. Applications	31
3.1. Corestriction	31
3.2. Calculs cohomologiques	33
4. Démonstration du théorème 1	38
4.1. Un isomorphisme explicite	39
4.2. Démonstration du théorème de Merkurjev-Suslin (pour les puissances de p)	42
4.3. Démonstration que $K_2(K)/p^n K_2(K) \simeq H(n, K)$ ($n \leq s$)	45
4.4. Démonstration que $p^n K_2(K)$ est p -divisible ($s \geq 1$)	47
4.5. Le cas $s = 0$	48
5. Démonstration du théorème 2	50

6. Démonstration du théorème 3	54
6.1. Un peu d'analyse	54
6.2. Démonstration du théorème 3	58
7. Démonstration des théorèmes 4 et 5	60
Complément	61

0. INTRODUCTION

Dans cet article, nous calculons l'anneau de Milnor d'un corps local à corps résiduel parfait. Les résultats principaux sont énoncés aux §§ 2 et 3. Pour commencer, nous rappelons brièvement quelques résultats et notations concernant l'anneau de Milnor d'un corps commutatif quelconque; on trouvera la plupart d'entre eux dans [8] et [1].

Ce travail a été partiellement annoncé dans une note aux C.R.A.S. (t. 296, 10.1.1983). Il figure également dans notre thèse de 3^e cycle [4], augmenté d'un appendice. Je tiens à remercier ici A. Suslin, grâce à qui j'ai pu découvrir une erreur importante entachant ma première rédaction; C. Soulé, qui a lu une version préliminaire et m'a suggéré des preuves simplifiées des théorèmes 1 et 2; R. Douady qui a tenu le rôle d'un auditeur particulièrement patient; enfin, le rapporteur dont les avis en certains points se sont révélés essentiels.

0.1.

Soit F un corps commutatif et m un entier ≥ 0 ; soit A un groupe commutatif. Si $m \geq 2$, un *symbole de Steinberg d'ordre m* sur F à coefficients dans A est une application

$$c : (F^*)^m \rightarrow A,$$

multilinéaire et vérifiant les identités :

$$\begin{aligned} c(x_1, \dots, x_i, 1 - x_i, \dots, x_m) &= 0, & 1 \leq i < m, \\ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) &\in (F^*)^{m-1}, & x_i \neq 1. \end{aligned}$$

Un tel symbole vérifie également les identités :

$$\begin{aligned} c(x_1, \dots, x_i, -x_i, \dots, x_m) &= 0, & 1 \leq i < m, \\ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) &\in (F^*)^{m-1}. \end{aligned}$$

En particulier, un symbole de Steinberg est *antisymétrique*.

Si $m = 0$ (resp. 1), un symbole d'ordre m est un élément de A (resp. un homomorphisme de F^* dans A). Le *foncteur K_m de Milnor de F* est le groupe, noté $K_m(F)$ dans cet article, universel pour les symboles de Steinberg d'ordre n . On a :

$$\begin{aligned} K_0(F) &= \mathbf{Z}, & K_1(F) &= F^*, \\ K_2(F) &= F^* \otimes F^* / \langle x \otimes (1-x) \mid x \in F^* - \{1\} \rangle \dots \end{aligned}$$

Le groupe $K_m(F)$ est muni d'un symbole de Steinberg appelé *symbole universel*. Si $(x_1, \dots, x_m) \in (F^*)^m$, on note $\{x_1, \dots, x_m\} \in K_m(F)$ son image par le symbole universel. Les groupes $K_m(F)$ sont notés additivement; en particulier,

$$\{x_1 x_2\} = \{x_1\} + \{x_2\}.$$

La somme directe $K_*(F) = \bigoplus_{m \geq 0} K_m(F)$ s'identifie canoniquement au quotient de l'algèbre tensorielle $T(F^*)$ par l'idéal engendré par les $x \otimes (1-x)$, $x \in F^* - \{1\}$. Cette identification munit $K_*(F)$ d'une structure d'anneau gradué anticommutatif pour laquelle

$$\{x_1, \dots, x_m\} \cdot \{x_{m+1}, \dots, x_{m+r}\} = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+r}\}.$$

En particulier, $\{x_1, \dots, x_m\} = \{x_1\} \cdot \dots \cdot \{x_m\}$. L'anneau $K_*(F)$ a été introduit dans [8] par Milnor; pour cette raison on l'appelle l'*anneau de Milnor de F* .

0.2.

Soit n un entier inversible dans F , et F_s une clôture séparable de F . La suite exacte :

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow F_s^* \xrightarrow{n} F_s^* \rightarrow 1$$

fournit un isomorphisme $F^*/F^{*n} \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mu_n)$, appelé *théorie de Kummer*. Pour tout $m \geq 0$, la théorie de Kummer et le cup-produit définissent un homomorphisme :

$$\begin{aligned} K_m(F) &\rightarrow H^m(F, \mu_n^{\otimes m}) \\ \{x_1, \dots, x_m\} &\mapsto |x_1, \dots, x_m|_n, \end{aligned}$$

appelé symbole galoisien (pour plus de détails, voir [5], pp. 309-310, si $m = 2$). A ce sujet, on a :

THÉORÈME DE MERKURJEV-SUSLIN (cf. [14], [18]). — *Supposons $m = 2$. Alors le symbole galoisien induit un isomorphisme :*

$$K_2(F)/nK_2(F) \xrightarrow{\sim} H^2(F, \mu_n^{\otimes 2}).$$

On conjecture que l'énoncé précédent est vrai sans hypothèse sur m .

0.3.

On note $K_*(F)\langle\Pi\rangle$ l'anneau gradué A défini comme suit (cf. [1], pp. 367-368) :

– $A_m = K_m(F) \times K_{m-1}(F)$ comme groupe additif (on pose $K_{-1}(F) = \{0\}$).

– Soient $(a,b) \in A_p$, $(c,d) \in A_q$; alors :

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, ad + (-1)^q bc + bd\{-1\}) \in A_{p+q}.$$

Pour la multiplication ainsi définie, $K_*(F)\langle\Pi\rangle$ est un anneau gradué anticommutatif, d'unité $1 = (1,0) \in A_0$. Posons $\Pi = (0,1) \in A_1$; alors

$$A_m = K_m(F) \oplus K_{m-1}(F)\Pi,$$

d'où la notation.

Soit E un corps muni d'une valuation discrète normalisée v , de corps résiduel F . On note O_E l'anneau de valuation de v , U_E le groupe des unités de O_E , et, pour $i \geq 1$,

$$U_E^{(i)} = \{x \in E \mid v(x-1) \geq i\}.$$

Soit Π une uniformisante de E , c'est-à-dire un élément de valuation 1. On a $E^* = \langle \pi \rangle \cdot U_E$. Pour cette décomposition, l'application

$$\begin{aligned} \{\pi^n u\} &\mapsto (\{\bar{u}\}, n) = \{u\} + n\Pi \\ K_1(E) &\rightarrow K_*(F)\langle\Pi\rangle_1, \end{aligned}$$

où \bar{u} désigne la classe résiduelle de $u \in U_E$, se prolonge en un

homomorphisme d'anneaux surjectif :

$$d_\pi : K_*(E) \rightarrow K_*(F)\langle \Pi \rangle,$$

gradué de degré zéro ([1], p. 368). De plus :

PROPOSITION 0.3. — *Le noyau de d_π est l'idéal engendré par $\{U_E^{(1)}\} \subset K_1(E)$.*

La démonstration est facile : cf. par exemple [5], I, p. 322, preuve de la proposition 1 (i), pour le degré 2.

On note $u_\pi : K_*(E) \rightarrow K_*(F)$ (resp. $\partial : K_*(E) \rightarrow K_{*-1}(F)$) l'homomorphisme obtenu en composant d_π avec la première (resp. la deuxième) projection; ∂ s'appelle le *bord* : il ne dépend pas du choix de π . Les homomorphismes u_π et ∂ sont caractérisés par les propriétés suivantes (on note u_1, \dots, u_m des éléments de U_E , x un élément de E^*) :

$$\begin{aligned} u_\pi(\{\pi^{n_1}u_1, \dots, \pi^{n_m}u_m\}) &= \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} \\ \partial(\{u_1, \dots, u_{m-1}, x\}) &= v(x)\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{m-1}\}. \end{aligned}$$

En particulier, la restriction de u_π au sous-anneau $K_*(O_E)$ engendré par $\{U_E\}$ ne dépend pas du choix de π ; on la note simplement u .

En degré 2, ∂ coïncide avec le « symbole modéré » ([7], p. 98).

Remarque sur la notation $K_(O_E)$.* — On prendra garde que cette notation est ici purement ad hoc, et que les groupes $K_m(O_E)$ définis ici ne coïncident pas avec les groupes de Quillen (ni même *a priori* avec les groupes de Loday généralisant la K-théorie de Milnor).

0.4.

Soit F_1 une extension de F . On a un homomorphisme d'anneaux gradués :

$$\text{Res}_{F_1/F} : K_*(F) \rightarrow K_*(F_1).$$

En particulier, $K_*(F_1)$ est un $K_*(F)$ -module gradué.

Supposons $[F_1 : F] < +\infty$. Bass, Tate ([1], pp. 385-388) et Kato ([5], II, § 1.7) ont défini des homomorphismes

$$\text{Cor}_{F_1/F, m} : K_m(F_1) \rightarrow K_m(F)$$

(notés $N_{F_1/F}$ dans [1] et $\mathcal{N}_{F_1/F}$ dans [5]) tels que :

- a) en dimension zéro, $\text{Cor}_{F_1/F}$ est la multiplication par $[F_1 : F]$,
- b) en dimension un, $\text{Cor}_{F_1/F}$ s'identifie à la norme $N_{F_1/F} : F_1^* \rightarrow F^*$,
- c) si $x \in K_m(F)$, $y \in K_r(F_1)$, $\text{Cor}_{F_1/F}(\text{Res}_{F_1/F}(x) \cdot y) = x \cdot \text{Cor}_{F_1/F}(y)$.

En d'autres termes, $\text{Cor}_{F_1/F}$ est une *forme* $K_*(F)$ -linéaire pour la structure définie ci-dessus.

1. CAS D'UN CORPS LOCAL

1.1. Notations.

Dans tout ce qui suit, K désigne un corps complet pour une valuation discrète normalisée v , de corps résiduel k , parfait de caractéristique $p > 0$. On note :

O_K l'anneau de valuation de v ,

$$U_K (= U) = O_K^* = \{x \in K \mid v(x) = 0\},$$

$U_K^{(i)} (= U^{(i)}) = \{x \in K \mid v(x-1) \geq i\}$ ($i \geq 1$); $K_*^{(i)}(K)$ l'idéal de $K_*(K)$ engendré par $\{U_K^{(i)}\}$,

$R_K^* (= R^*)$ le système multiplicatif de représentants de k^* dans K ([12], p. 44, prop. 8); $R_K = R_K^* \cup \{0\}$,

$W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k ,

${}_0K$ le corps des fractions de $W(k)$: lorsque K est de caractéristique zéro, c'est une extension totalement ramifiée de ${}_0K$, de degré $e_K = v(p)$,

$$W_n(k) = W(k)/p^n W(k),$$

$$\mathcal{D}(k) = {}_0K/W(k) = \varinjlim p^{-n} W(k)/W(K) = \varinjlim W_n(k),$$

F l'automorphisme de Frobenius de k , $W(k)$, $W_n(k)$, ${}_0K$ et $\mathcal{D}(k)$: si $x \in W(k)$, $Fx \equiv x^p \pmod{p}$,

$$\mathcal{P} = F - 1,$$

$$d_n(k) = W_n(k)/\mathcal{P}W_n(k);$$

$$d(k) = \mathcal{D}(k)/\mathcal{P}\mathcal{D}(k).$$

On a encore

$$d(k) = \varinjlim d_n(k).$$

$\text{Br}(\mathbf{K})$ le groupe de Brauer de \mathbf{K} (noté additivement),

\mathbf{K}_{nr} l'extension non ramifiée maximale de \mathbf{K} ,

μ le groupe des racines de l'unité d'une clôture séparable \mathbf{K}_s de \mathbf{K} ,

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu \cap \mathbf{K}.$$

Si \mathbf{A} est un groupe abélien et n un entier on note $\mathbf{A}[n]$ le noyau de la multiplication par n dans \mathbf{A} ; si ℓ est un nombre premier on note

$$\mathbf{A}\{\ell\} = \bigcup_{r \geq 1} \mathbf{A}[\ell^r].$$

On note aussi : $\mu_n = \mu[n]$, $\mu_n(\mathbf{K}) = \mu_n(\mathbf{K})[n]$ et $\mu(\mathbf{K}, \ell) = \mu(\mathbf{K})\{\ell\}$.

Supposons \mathbf{K} de caractéristique zéro. Comme sa valuation est discrète, $\mu(\mathbf{K}, p)$ est fini; cette remarque s'applique également à \mathbf{K}_{nr} et à toute extension finie de \mathbf{K} . On pose :

$$p^{s_0(\mathbf{K})} = \text{Card } \mu(\mathbf{K}, p), \quad s_0(\mathbf{K}) = s_0;$$

$$p^{s(\mathbf{K})} = \text{Card } \mu(\mathbf{K}_{nr}, p), \quad s(\mathbf{K}) = s;$$

$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(\mu(\mathbf{K}_{nr}, p))$. $\tilde{\mathbf{K}}$ est une extension finie, abélienne, non ramifiée de \mathbf{K} . On a :

$$s_0(\tilde{\mathbf{K}}) = s(\tilde{\mathbf{K}}) = s(\mathbf{K}).$$

Si \mathbf{E}/\mathbf{F} est une extension galoisienne de groupe \mathbf{G} , on note

$$\mathbf{H}^i(\mathbf{E}/\mathbf{F}, \mathbf{A}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{G}, \mathbf{A})$$

pour tout \mathbf{G} -module \mathbf{A} . Si \mathbf{E} est une clôture séparable de \mathbf{F} , on note ces groupes simplement $\mathbf{H}^i(\mathbf{F}, \mathbf{A})$.

1.2. Les groupes $\mathbf{H}(n, \mathbf{K})$.

Supposons \mathbf{K} de caractéristique zéro; pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbf{H}(n, \mathbf{K})$ le groupe $\mathbf{K}^* \cap \mathbf{K}_{nr}^{p^n} / \mathbf{K}^{*p^n}$. Ce groupe sera noté multiplicativement.

Soient $0 \leq n \leq n'$ deux entiers. L'application $\mathbf{K}^{*p^n} \xrightarrow{p^{n'-n}} \mathbf{K}_{nr}^{*p^{n'}}$

(resp. l'inclusion $K_{nr}^{*p^{n'}} \hookrightarrow K_{nr}^{*p^n}$) induit un homomorphisme

$$\alpha_{n/n'} : H(n, K) \rightarrow H(n', K) \quad (\text{resp. } \beta_{n'/n} : H(n', K) \rightarrow H(n, K)).$$

On a les formules suivantes :

- a) Si $0 \leq n \leq n' \leq n''$, $\beta_{n''/n} = \beta_{n''/n'} \circ \beta_{n'/n}$, $\alpha_{n/n''} = \alpha_{n/n'} \circ \alpha_{n'/n''}$,
 b) $\beta_{n'/n} \circ \alpha_{n/n'} = p^{n'-n}$; $\alpha_{n/n'} \circ \beta_{n'/n} = p^{n'-n}$.

Soit L une extension finie de K , de degré d . L'injection $K^* \rightarrow L^*$ (resp. la norme $L^* \rightarrow K^*$) induit pour tout $n \geq 0$ un homomorphisme

$$\text{Res}_{L/K} : H(n, K) \rightarrow H(n, L) \quad (\text{resp. } \text{Cor}_{L/K} : H(n, L) \rightarrow H(n, K)).$$

Ces homomorphismes commutent de manière évidente aux homomorphismes α et β définis ci-dessus. Si $x \in H(n, K)$, $\text{Cor}_{L/K} \circ \text{Res}_{L/K}(x) = x^d$; si L/K est galoisienne de groupe G , $\text{Res}_{L/K} \circ \text{Cor}_{L/K}(y) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(y)$ pour tout $y \in H(n, L)$.

PROPOSITION 1.2. — a) Pour tout $n \geq 0$, la suite exacte

$$1 \rightarrow \mu_{p^n}(K_{nr}) \rightarrow K_{nr}^* \xrightarrow{p^n} K_{nr}^{*p^n} \rightarrow 1$$

fournit un isomorphisme :

$$\theta_1 : H(n, K) \xrightarrow{\sim} H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^n}(K_{nr})).$$

Pour $0 \leq n \leq n'$, notons i (resp. j) l'inclusion $\mu_{p^n} \hookrightarrow \mu_{p^{n'}}$ (resp. la projection $p^{n'-n} : \mu_{p^{n'}} \rightarrow \mu_{p^n}$). Alors les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} H(n', K) & \xrightarrow{\theta_1} & H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^{n'}}(K_{nr})) \\ \downarrow \beta & & \downarrow j_* \\ H(n, K) & \xrightarrow{\theta_1} & H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^n}(K_{nr})) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow i_* \\ H(n', K) & \xrightarrow{\theta_1} & H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^{n'}}(K_{nr})). \end{array}$$

Pour $0 \leq n \leq n' \leq s$, on a une suite exacte :

$$(E_{n,n'}) \quad 0 \rightarrow \mu_{p^{n'-n}}(\mathbf{K}) \rightarrow \mu_{p^{n'}}(\mathbf{K}) \xrightarrow{p^{n'-n}} \mu_{p^n}(\mathbf{K}) \\ \xrightarrow{\delta} H(n'-n, \mathbf{K}) \xrightarrow{\alpha} H(n', \mathbf{K}) \xrightarrow{\beta} H(n, \mathbf{K}) \rightarrow 0$$

en particulier, $\beta_{n'/n}$ est surjectif si $0 \leq n \leq n' \leq s$, et $\alpha_{n/n'}$ est bijectif si $s \leq n \leq n'$.

b) Si $n \leq s_0$, θ_1 induit un isomorphisme :

$$\theta' : H(n, \mathbf{K}) \xrightarrow{\sim} \mu_{p^n} \otimes d_n(k).$$

Remarque. — On trouvera dans [4], A.1, une étude plus détaillée des groupes $H(n, \mathbf{K})$.

Démonstration. — La première assertion résulte du théorème 90 de Hilbert (et θ_1 est induit par le « connectant » :

$$H^0(\mathbf{K}_{nr}/\mathbf{K}, \mathbf{K}_{nr}^{*p^n}) \rightarrow H^1(\mathbf{K}_{nr}/\mathbf{K}, \mu_{p^n}(\mathbf{K}_{nr})).$$

La deuxième assertion est évidente; la troisième assertion résulte de la deuxième assertion, de la suite exacte $1 \rightarrow \mu_{p^{n'-n}} \xrightarrow{i} \mu_{p^{n'}} \xrightarrow{j} \mu_{p^n} \rightarrow 1$ et du fait que $\text{Gal}(\mathbf{K}_{nr}/\mathbf{K})$, qui s'identifie au groupe de Galois absolu de k , est de p -dimension cohomologique ≤ 1 ([13], p. II-4, prop. 3). Enfin b) résulte de a) et de la « théorie d'Artin-Schreier-Witt » ([12], p. 163). \square

2. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

2.1. La p -partie de $\mathbf{K}_*(\mathbf{K})$.

THÉORÈME 1. — a) Si $m \geq 3$ ou si \mathbf{K} est de caractéristique p , $\mathbf{K}_m(\mathbf{K})$ est p -divisible.

b) Supposons $m = 2$ et \mathbf{K} de caractéristique zéro. Alors, pour $n \leq s$, $\mathbf{K}_2(\mathbf{K})/p^n \mathbf{K}_2(\mathbf{K})$ est isomorphe à $H(n, \mathbf{K})$; $p^n \mathbf{K}_2(\mathbf{K})$ est p -divisible.

Le théorème 1 sera démontré au § 4.

2.2. Structure de $H(s, K)$.

THÉOREME 2. — *Supposons K de caractéristique zéro. Alors $H(s, K)$ est somme directe d'un groupe cyclique d'ordre p^{s_0} et d'un $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ -module libre. Si de plus $s_0 \geq 1$, le rang de $H(s, K)$ est égal à $\dim_{\mathbb{F}_p} d_1(k)$.*

Remarques. — 1) Il est faux en général que lorsque $s_0 = 0$, $\text{rg } H(s, K) = \dim_{\mathbb{F}_p} d_1(k)$. Plus précisément, nous construisons dans [4], A.6., pour tout entier $n \geq 0$, un corps de caractéristique zéro, complet pour une valuation discrète, de corps résiduel k parfait de caractéristique 3, tel que

- * $\mu_3 \not\subset K$
- * $\dim_{\mathbb{F}_3} k/\mathcal{P}k = n$
- * $K_2(K)/3K_2(K)$ est infini.

2) Supposons $s_0 \geq 1$ et $\dim_{\mathbb{F}_p} d_1(k) = 1$. Alors $H(s, K)$ est cyclique d'ordre p^{s_0} , et le théorème 1 se réduit au résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Supposons K de caractéristique zéro, $s_0 \geq 1$ et $\dim_{\mathbb{F}_p} d_1(k) = 1$. Alors $K_2(K)/p^{s_0}K_2(K)$ est cyclique d'ordre p^{s_0} ; $p^{s_0}K_2(K)$ est p -divisible.*

Si k est fini, l'hypothèse $d_1(k) = 1$ est vérifiée; de plus, on peut supprimer l'hypothèse $s_0 \geq 1$ dans le corollaire précédent : c'est ainsi qu'on retrouve le résultat de C. Moore ([9], ou [7], appendice).

Le théorème 2 sera démontré au § 5.

2.3. L'anneau $K_*^{\text{top}}(K)$.

Pour un entier $m \geq 0$, notons $K_m^{\text{top}}(K)$ le groupe défini dans [10] : c'est le complété séparé de $K_m(K)$ pour la topologie la plus fine rendant continu le symbole universel. La structure d'anneau sur $K_*(K)$ induit une structure d'anneau topologique complet sur $K_*^{\text{top}}(K) = \bigoplus_{m \geq 1} K_m^{\text{top}}(K)$.

THÉOREME 3. — *a) L'anneau $K_*^{\text{top}}(K)$ est discret; en particulier, l'application naturelle $K_*(K) \rightarrow K_*^{\text{top}}(K)$, est surjective; son noyau est l'idéal (gradué) engendré par $p^t K_2^{(1)}(K)$, où $t = \begin{cases} s & \text{si } \text{car } K = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$; c'est*

un groupe divisible. Le groupe $K_2^{\text{top}}(K)$ coïncide avec celui défini dans [7], p. 179. Soit π une uniformisante de K et $d_\pi: K_*(K) \rightarrow K_*(k)\langle\Pi\rangle$ l'homomorphisme défini en 0.3.

b) Si K est de caractéristique p , d_π induit un isomorphisme :

$$K_*^{\text{top}}(K) \simeq K_*(k)\langle\Pi\rangle \oplus \{U_K^{(1)}\},$$

où la multiplication par tout élément de $\{U_K^{(1)}\}$ est triviale en degré ≥ 1 . En particulier, pour $m \geq 2$, $K_m^{\text{top}}(K) \simeq K_m(k) \oplus K_{m-1}(k)$.

c) Si K est de caractéristique zéro, d_π et le théorème 1 induisent un isomorphisme :

$$K_*^{\text{top}}(K) \simeq K_*(k)\langle\Pi\rangle \oplus \{U_K^{(1)}\} \oplus H(s, K),$$

où :

la multiplication par tout élément de $H(s, K)$ est triviale en degré ≥ 1 ;
la multiplication par tout élément de $\{U_K^{(1)}\}$ est triviale en degré ≥ 2 ;
si $x, y \in K^*$, alors l'image de $\{x, y\}$ dans $K_*(k)\langle\Pi\rangle_2 \oplus H(s, K)$ est :

$$(d_\pi(x) \cdot d_\pi(y), x \overset{\Delta}{\Delta}_K y),$$

où $x \overset{\Delta}{\Delta}_K y$ est l'image de $\{x, y\}$ dans $H(s, K)$ par l'isomorphisme du théorème 1.

En particulier,

$$K_m^{\text{top}}(K) \simeq \begin{cases} K_m(k) \oplus K_{m-1}(k) & \text{si } m > 2 \\ K_2(k) \oplus k^* \oplus H(s, K) & \text{si } m = 2. \end{cases}$$

Dans tous les cas, $K_m(K) \simeq D_m(K) \oplus K_m^{\text{top}}(K)$.

Le théorème 3 sera démontré au § 6.

2.4. Torsion (voir aussi 3.2. et complément).

On note $D_m(K)$ le noyau de l'homomorphisme $K_m(K) \rightarrow K_m^{\text{top}}(K)$.

THÉORÈME 4. — a) $D_2(K)$ n'a pas de torsion première à p .

b) Supposons K de caractéristique zéro et $s = s_0 \geq 2$. Alors la p -torsion de $D_2(K)$ est concentrée dans $\{R_K^*, U_K^{(1)}\}$.

Remarque. — On trouvera au § 3.2 une *caractérisation* de la p -torsion de $D_2(K)$ (dans le cas où $\text{car } K = 0$ puisque $K_2(F)$ n'a pas de p -torsion lorsque $\text{car } F = p > 0$, cf. [15], th. 1.10).

THÉORÈME 5. — *Si k est fini, où algébrique sur F_p , et si $m \geq 3$, $D_m(K) (= K_m(K))$ n'a pas de torsion première à p .*

La démonstration des théorèmes 4 et 5 sera donnée au § 7.

3. APPLICATIONS

3.1. Corestriction.

Soit L une extension finie de K . Nous nous intéressons au conoyau de la corestriction $\text{Cor}_{L/K} : K_m(L) \rightarrow K_m(K)$ pour un entier $m \geq 2$.

THÉORÈME 6. — *Supposons que le degré résiduel de L/K soit une puissance de p . Alors, pour $m \geq 2$, le conoyau de $\text{Cor}_{L/K} : K_m(L) \rightarrow K_m(K)$ s'identifie à $K_m(k)/eK_m(k)$, où e est l'indice de ramification de L/K .*

Remarque. — Lorsque k est fini, il est bien connu ([7], p. 177, cor. A-15) que $\text{Cor}_{L/K}$ est surjective pour $m = 2$ (sans hypothèse sur l'extension L/K). On en déduit par la formule c) de 0.4 que $\text{Cor}_{L/K}$ est surjective pour tout $m \geq 2$. La démonstration que voici du théorème 6 est différente de celle de [7].

Le théorème 6 est conséquence facile de la proposition et des lemmes suivants :

LEMME 3.1.1. — *Le théorème 6 est vrai lorsque L/K est une extension radicielle de degré p .*

LEMME 3.1.2. — *Il existe $i_0 \geq 1$ tel que :*

$$m \geq 2 \quad \text{et} \quad i \geq i_0 \Rightarrow D_m(K) = K_m^{(i)}(K).$$

LEMME 3.1.3. — *Pour tout $i \geq 1$, il existe $j \geq 1$ tel que :*

$$U_K^{(j)} \subset N_{L/K}(U_L^{(i)}).$$

PROPOSITION 3.1. — *Supposons L/K séparable. Alors les diagrammes suivants sont commutatifs (on note ℓ le corps résiduel de L):*

$$\begin{array}{ccc}
 K_m(L) & \xrightarrow{\partial} & K_{m-1}(\ell) \\
 \text{Cor}_{L/K} \downarrow & & \text{Cor}_{\ell/k} \downarrow \\
 K_m(K) & \xrightarrow{\partial} & K_{m-1}(k)
 \end{array} \quad m \geq 2$$

$$\begin{array}{ccc}
 K_m(O_L) & \xrightarrow{u} & K_m(\ell) \\
 \text{Cor}_{L/K} \downarrow & & e \text{Cor}_{\ell/k} \downarrow \\
 K_m(O_K) & \xrightarrow{u} & K_m(k)
 \end{array} \quad m \geq 2$$

$$\begin{array}{ccc}
 K_2(L) & \xrightarrow{|\cdot|_{p^s}} & H^2(L, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) \\
 \text{Cor}_{L/K} \downarrow & & \text{Cor}_{L/K} \downarrow \\
 K_2(K) & \xrightarrow{|\cdot|_{p^s}} & H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2})
 \end{array}$$

où $K_m(O_K)$, $K_m(O_L)$ et u ont été définis en 0.3. Dans le troisième diagramme, on suppose K de caractéristique zéro.

De plus, $\text{Cor}_{L/K} : K_m(L) \rightarrow K_m(K)$ induit un homomorphisme de $D_m(L)$ sur $D_m(K)$ et dans le troisième diagramme, la deuxième flèche verticale est surjective.

Le lemme 3.1.1 permet de ramener la démonstration du théorème 6 au cas où L/K est une extension séparable. Dans ce cas, comme les groupes $K_m(k)$ sont p -divisibles, toutes les flèches $\text{Cor}_{\ell/k} : K_m(\ell) \rightarrow K_m(k)$ ($m \geq 1$) sont surjectives, ce qui donne le théorème.

Preuve du lemme 3.1.1. — Comme k est parfait, $L = K^{1/p}$. Soit $\{x, y\} \in K_2(K)$; on a :

$$\text{Cor}_{L/K}(\{x^{1/p}, y\}) = \{N_{L/K}(x^{1/p}), y\} = \{x, y\}.$$

Preuve du lemme 3.1.2. — Cela résulte du théorème 3.1 et du fait que les $U_{(K)}^{(1)p^n}$ sont cofinaux aux $U_K^{(i)}$.

Preuve du lemme 3.1.3. — Il suffit de le voir lorsque L/K est galoisienne et cela résulte alors par exemple de [12], p. 90, prop. 3.a) et p. 101, cor. 4 à la prop. 9.

Preuve de la proposition 3.1. — La commutativité du troisième diagramme est bien connue; la surjectivité annoncée est conséquence de [13], p. I-20, lemme 4 et du fait connu que $cd_p(\text{Gal}(K_s/K)) \leq 2$, où K_s est une clôture algébrique de K . Pour montrer la commutativité des deux premiers diagrammes, on se ramène au cas où L/K (séparable) est non ramifiée ou totalement ramifiée.

i) *Supposons L/K non ramifiée.* Vu les définitions de ∂ et u (cf. 0.3) et la propriété c) de 0.4, la commutativité des deux diagrammes est évidente lorsque pour tout $m \geq 2$, $K_m(\ell)$ est engendré par les éléments $\{x_1, y_2, \dots, y_m\}$ où $(x_1, y_2, \dots, y_m) \in k^* \times \ell^* \times \dots \times \ell^*$ et on se ramène à ce cas par les procédés de Bass, Tate et Kato ([1], pp. 387-388, [5], II, § 1.7).

ii) *Supposons L/K totalement ramifiée de degré e* soit Π une uniformisante de L . Alors $\pi = N_{L/K}(\Pi)$ est une uniformisante de K . Si u_1, \dots, u_{m-1} sont des représentants multiplicatifs de L , ils sont rationnels sur K , donc :

$$\begin{aligned} \partial_L(\{u_1, \dots, u_{m-1}, \Pi\}) &= \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{m-1}\} \\ \partial_K \text{Cor}_{L/K}(\{u_1, \dots, u_{m-1}, \Pi\}) &= \partial_K \{u_1, \dots, u_{m-1}, \pi\} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{m-1}\} \end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned} u_L(\{u_1, \dots, u_{m-1}\}) &= \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{m-1}\} \\ u_K(\text{Cor}_{L/K}\{u_1, \dots, u_{m-1}\}) &= u_K(e\{u_1, \dots, u_{m-1}\}) = e\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{m-1}\} \end{aligned}$$

ce qui établit les commutativités demandées.

Enfin la commutativité des trois diagrammes de l'énoncé entraîne que $\text{Cor}_{L/K}$ envoie $D_m(L)$ dans $D_m(K)$, et la surjectivité est une conséquence facile des lemmes 2 et 3. \square

3.2. Calculs cohomologiques.

Dans cette partie, on suppose K de caractéristique zéro. Nous renvoyons à [17] pour la cohomologie et les notations utilisées ici.

THÉORÈME 7. — a) *L'homomorphisme naturel*

$$H^2(K, \mathbb{Z}_p(2)) \rightarrow H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme.

b) $H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ est somme directe de $H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2})$ et de $p^s H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$, qui est divisible. Lorsque $s = s_0$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mu_{p^s}^{\otimes 2} \rightarrow (M/K^* p^s) \otimes \mu_{p^s} \rightarrow p^s H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))[p^s] \rightarrow 0$$

où M est le noyau de l'application $x \rightarrow |x, w|_{p^s}$ de K^* dans

$$H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) = \text{Br}(K)[p^s] \otimes \mu_{p^s}$$

(w est une racine primitive $p^{s\text{ième}}$ de l'unité).

Démonstration. — Le théorème 1 (et le théorème de Merkurjev-Suslin) montrent que pour $s \leq n \leq n'$, l'application naturelle

$$H^2(K, \mu_{p^{n'}}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme. Soient $n \leq n' \leq n''$ et supposons $n' - n \geq s$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^1(K, \mu_{p^{n''}}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^1(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(K, \mu_{p^{n''-n}}^{\otimes 2}) \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \wr \\ H^1(K, \mu_{p^{n'}}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & H^1(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(K, \mu_{p^{n'-n}}^{\otimes 2}) \end{array}$$

commutatif aux lignes exactes montre que $H^1(K, \mu_{p^{n''}}^{\otimes 2})$ et $H^1(K, \mu_{p^{n'}}^{\otimes 2})$ ont même image dans $H^1(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$ ce qui n'est autre que la « condition de Mittag-Leffler » ([16], p. 131, déf. 7.74), donc (loc. cit., th. 7.75) que :

$$\lim^1 \leftarrow H^1(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) = 0.$$

a) résulte donc de la suite exacte connue (cf. [17], p. 261, prop. 2.2) :

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 H^1(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(K, Z_p(2)) \rightarrow \varprojlim H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \rightarrow 0.$$

On voit de même que, pour $n' - n \geq s$ et $n \geq s$, l'application

$$H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(K, \mu_{p^{n'}}^{\otimes 2})$$

est identiquement nulle (en effet,

$$H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(K, \mu_{p^{n'}}^{\otimes 2}) \rightarrow H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$$

est la multiplication par $p^{n'-n}$), par conséquent,

$$H^2(K, Q_p/Z_p(2)) = \varinjlim H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) = 0.$$

Les deux premières affirmations de b) résultent donc du diagramme commutatif aux lignes exactes (pour $n \geq s$) :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(K, Q_p/Z_p(2)) & \xrightarrow{p^n} & H^1(K, Q_p/Z_p(2)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow p^{n-s} & & \parallel & & \downarrow \wr & & \\ H^1(K, Q_p/Z_p(2)) & \xrightarrow{p^s} & H^1(K, Q_p/Z_p(2)) & \xrightarrow{\delta} & H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

(Une chasse aux diagrammes montre que

$$p^n H^1(K, Q_p/Z_p(2)) = p^s H^1(K, Q_p/Z_p(2)),$$

qui est divisible, donc facteur direct dans $H^1(K, Q_p/Z_p(2))$.)

Reste à montrer la dernière assertion, qui est la partie la moins facile du théorème.

Considérons le diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & Z_p(2) & \xrightarrow{p^s} & Z_p(2) & \longrightarrow & \mu_{p^s}^{\otimes 2} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow c & & \downarrow \wr & \\ 0 \longrightarrow & \mu_{p^s}^{\otimes 2} & \longrightarrow & Q_p/Z_p(2) & \xrightarrow{p^s} & Q_p/Z_p(2) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

où c est le composé $Z_p(2) \longrightarrow \mu_{p^{2s}}^{\otimes 2} \hookrightarrow Q_p/Z_p(2)$.

On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^1(K, Z_p(2)) & \xrightarrow{c^*} & H^1(K, \mathbf{Q}_p/Z_p(2)) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow p^s & & \\
 0 & \rightarrow & \mu_{p^s}^{\otimes 2} & \xrightarrow{\delta} & H^1(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) & \rightarrow & H^1(K, \mathbf{Q}_p/Z_p(2)) \xrightarrow{p^s} H^1(K, \mathbf{Q}_p/Z_p(2)) \\
 & & \downarrow \delta_1 & & \downarrow \delta_2 & & \\
 & & H^2(K, Z_p(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) & &
 \end{array}$$

(toutes les flèches non baptisées sont les applications évidentes).

Dans ce diagramme, les deux colonnes sont exactes ainsi que la deuxième ligne (l'exactitude en $\mu_{p^s}^{\otimes 2}$ résulte de l'hypothèse $\mu_{p^s} \subset K$); enfin, l'isomorphisme de la troisième ligne n'est autre que a . Par chasse aux diagrammes, on en déduit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mu_{p^s}^{\otimes 2} \xrightarrow{\delta} \text{Ker } \delta_1 \longrightarrow p^s H^1(K, \mathbf{Q}_p/Z_p(2))[p^s] \longrightarrow 0.$$

Considérons maintenant le diagramme (commutatif aux lignes exactes) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Z_p(1) & \xrightarrow{p^s} & Z_p(1) & \longrightarrow & \mu_{p^s} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow \cap \\
 0 & \longrightarrow & \mu_{p^s} & \longrightarrow & K_s^* & \xrightarrow{p^s} & K_s^* \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où d est le composé $Z_p(1) \longrightarrow \mu_{p^{2s}} \hookrightarrow K_s^*$ (K_s^* clôture séparable de K). On déduit de ce diagramme (en fait, de l'existence de d) un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(K, \mu_{p^s}) & \xrightarrow{\delta_3} & H^1(K, Z_p(1)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^0(K, K_s^*) & \xrightarrow{\delta_4} & H^1(K, \mu_{p^s})
 \end{array}$$

où δ_3 et δ_4 sont les connectants associés aux deux suites exactes ci-dessus (δ_4 est l'« homomorphisme de Kummer ») et les autres flèches sont les

applications évidentes. La functorialité du cup-produit en cohomologie des groupes ([12], p. 139, prop. 5) fournit alors un *cube* commutatif (incomplet) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^1(K, Z_p(1)) \otimes H^0(K, K_s^*) & \xrightarrow{1 \otimes \delta_4} & H^1(K, Z_p(1)) \otimes H^1(K, \mu_{p^s}) \\
 & \nearrow & & & \downarrow \text{cup-produit} \\
 H^1(K, Z_p(1)) \otimes H^0(K, \mu_p) & \xrightarrow{1 \otimes \delta_3} & H^1(K, Z_p(1)) \otimes H^1(K, Z_p(1)) & & \\
 \downarrow \text{cup-produit} & & \downarrow \text{cup-produit} & & \downarrow \text{cup-produit} \\
 H^1(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\delta_1} & H^2(K, Z_p(2)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2})
 \end{array}$$

De plus, il est clair que $\varprojlim^1 H^0(K, \mu_{p^n}) = \varprojlim^1 \mu_{p^n}(K) = 0$; par conséquent, $H^1(K, Z_p(1)) = \varprojlim H^1(K, \mu_{p^n})$ et la théorie de Kummer montre donc que $H^1(K, Z_p(1)) \rightarrow H^1(K, \mu_{p^n})$ est *surjectif*. On déduit de ce fait et du cube ci-dessus que le composé

$$\begin{array}{ccc}
 K^*/K^{*p^s} \otimes \mu_{p^s} & \xrightarrow{\sim} & H^1(K, \mu_{p^s}) \otimes H^0(K, \mu_{p^s}) \xrightarrow{\text{cup-produit}} H^1(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) \\
 & & \xrightarrow{\delta_1} H^2(K, Z_p(2)) \xrightarrow{\sim} H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2})
 \end{array}$$

n'est autre que $x \otimes w \mapsto |x, w|_{p^s}$ (on utilisera la commutativité des triangles :

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(K, Z_p(1)) \otimes H^0(K, \mu_{p^s}) & \longrightarrow & H^1(K, \mu_{p^s}) \otimes H^0(K, \mu_{p^s}) \\
 \searrow \text{cup} & & \swarrow \text{cup} \\
 & & H^1(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2})
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(K, Z_p(1)) \otimes H^1(K, \mu_{p^s}) & \longrightarrow & H^1(K, \mu_{p^s}) \otimes H^1(K, \mu_{p^s}), \\
 \searrow \text{cup} & & \swarrow \text{cup} \\
 & & H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2})
 \end{array}$$

d'où le théorème 7.b).

COROLLAIRE . — Soit K_0 l'adhérence de la fermeture algébrique de \mathbb{Q}_p dans K . Alors, si $s = s_0$, la suite

$$0 \longrightarrow (M_0/K_0^{*p^s}) \otimes \mu_{p^s} \longrightarrow (M/K^{*p^s}) \otimes \mu_{p^s} \xrightarrow{\rho} D_2(K)[p^s] \longrightarrow 0,$$

où $M_0 = K_0^* \cap M$ et ρ est donnée par $x \otimes w \mapsto \{x, w\}$, est exacte. En particulier, si $s \geq 1$, k n'est pas algébrique sur $\mathbb{F}_p \Leftrightarrow K \neq K_0 \Leftrightarrow D_2(K)$ possède de la p -torsion; dans ce cas, $\text{rg } D_2(K)[p]$ est équipotent à $\dim_{\mathbb{F}_p} k$ (donc est infini). Dans tous les cas, la suite :

$$0 \rightarrow H^1(K_0, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))_{\text{div}} \rightarrow H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))_{\text{div}} \xrightarrow{\sigma} D_2(K)\{p\} (= K_2(K)\{p\}_{\text{div}}) \rightarrow 0$$

où σ est déduite de l'application définie par Suslin ([15], cor. 3.11), est exacte.

(N.B. — Si A est un groupe abélien, A_{div} désigne le plus grand sous-groupe divisible de A .)

Démonstration. — La dernière assertion résulte de [15], cor. 3.11, du fait que $H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ est (th. 7b) somme d'un groupe divisible et d'un groupe d'exposant fini (d'où la surjectivité de σ), et du théorème de Merkurjev [19], affirmant que $D_2(K_0)\{p\} = 0$ (ce qui est un cas particulier du théorème 4 du présent article). La première assertion en est conséquence immédiate via le théorème 7b).

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Si K est de caractéristique p , $[K : K^p] = p$; il est bien connu, depuis Tate, que dans ce cas $K_m(K)$ est p -divisible pour $m \geq 2$. [Posons $L = K^{1/p}$: si $x_1, \dots, x_m \in K^*$,

$$\{x_1, \dots, x_m\} = p \text{Cor}_{L/K}\{x_1^{1/p}, x_2^{1/p}, x_3, \dots, x_m\}.$$

A partir de maintenant, on suppose K de caractéristique zéro.

Pour démontrer l'isomorphisme $K_2(K)/p^n K_2(K) \simeq H(n, K)$ lorsque $n \leq s$, nous employons une méthode différente de notre méthode originale, que l'on trouvera dans [4], A.4. La méthode suivie ici a été suggérée

par C. Soulé : elle consiste à utiliser le théorème de Merkurjev-Suslin rappelé dans l'introduction puis à démontrer un isomorphisme $H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^n}) \simeq H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$, $n \leq s$, à l'aide d'une suite spectrale (cf. 4.3). Nous nous proposons de plus de donner ici une démonstration élémentaire du théorème de Merkurjev-Suslin (pour les puissances de p), (cf. 4.2); cette démonstration nous paraît intéressante par son côté « explicite ».

4.1. Un isomorphisme explicite.

PROPOSITION 4.1. — *Supposons $n \leq s_0$, i.e. $\mu_{p^n} \subset K$, et soit π une uniformisante de K . L'application $a \mapsto |a, \pi|_p$ induit un isomorphisme $\theta_2 : H(n, K) \xrightarrow{\sim} H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$, indépendant du choix de π .*

Remarque. — On peut montrer, cf. A.1, que cet isomorphisme n'est autre que le composé :

$$\begin{aligned} H(n, K) &\xrightarrow{\theta_1} H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^n}) \xrightarrow{\sim} H^1(K_{nr}/K, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \otimes \mu_{p^n} \xrightarrow{\theta_3^{-1} \otimes 1} \\ &\xrightarrow{\theta_3^{-1} \otimes 1} \text{Br}(K)[p^n] \otimes \mu_{p^n} = H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}), \end{aligned}$$

où $\theta_3 : \text{Br}(K)[p^n] \xrightarrow{\sim} H^1(K_{nr}/K, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ se déduit de [12], p. 194, th. 2.

Observons que la « théorie d'Artin-Schreier-Witt »

$$d_n(k) \simeq H^1(K_{nr}/K, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$$

et l'isomorphisme θ_3 fournissent pour tout n un isomorphisme :

$$\theta_4 : \text{Br}(K)[p^n] \xrightarrow{\sim} d_n(k).$$

A ce sujet, on a le lemme suivant, qui généralise [12], p. 201, prop. 7 :

LEMME 4.1.1. — Soit L une extension finie de K , de corps résiduel ℓ . Alors les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Br}(K)[p^n] & \xrightarrow{\theta_4} & d_n(k) \\
 \text{Res} \downarrow & & \downarrow e \cdot \text{Res} \\
 \text{Br}(L)[p^n] & \xrightarrow{\theta_4} & d_n(\ell)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Br}(L)[p^n] & \xrightarrow{\theta_4} & d_n(\ell) \\
 \text{Cor} \downarrow & & \downarrow \text{Cor} \\
 \text{Br}(K)[p^n] & \xrightarrow{\theta_4} & d_n(k),
 \end{array}$$

où e est l'indice de ramification de L/K , et où $\text{Res} : d_n(k) \rightarrow d_n(\ell)$ (resp. $\text{Cor} : d_n(\ell) \rightarrow d_n(k)$) est induite par l'application naturelle $W_n(k) \rightarrow W_n(\ell)$ (resp. par la trace : $W_n(\ell) \rightarrow W_n(k)$).

Démonstration. — Pour les restrictions, la commutativité se démontre comme dans loc. cit., pp. 201-202 : on décompose l'extension L/K en une extension non ramifiée suivie d'une extension totalement ramifiée. Le cas non ramifié est évident; dans le cas totalement ramifié, on remplace le carré

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
 e \downarrow & & \downarrow e \\
 H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}
 \end{array}$$

de [12], p. 202 par

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(k, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) & \longrightarrow & d_n(k) \\
 e \downarrow & & \downarrow e \\
 H^1(k, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) & \longrightarrow & d_n(k).
 \end{array}$$

Pour les corestrictions, le cas non ramifié est de nouveau évident; le cas totalement ramifié résulte de ce qui précède, de la formule $\text{Cor} \circ \text{Res} = e$ et du fait que $d(k) = \bigcup_{n \geq 1} d_n(k)$ est un groupe divisible (comme quotient du groupe divisible ${}_0\mathbf{K}$).

Corollaires au lemme 4.1.1.

COROLLAIRE 1. — Si L/K est totalement ramifiée, de degré e , la corestriction $\text{Cor} : \text{Br}(L)\{p\} \rightarrow \text{Br}(K)\{p\}$ est bijective; moyennant cette bijection, la restriction s'identifie à la multiplication par e .

COROLLAIRE 2. — Si L/K est totalement ramifiée, galoisienne de groupe G , l'action de G sur $\text{Br}(L)\{p\}$ est triviale; si $n \leq s_0(L)$, G opère sur $H(n, L)$ par multiplication par le caractère cyclotonique.

Il suffit de le voir lorsque $[L : K] < +\infty$. Notons $N = \sum_{g \in G} g \in \mathbf{Z}[G]$; on sait que $\text{Res} \circ \text{Cor}$ s'identifie à la multiplication par N dans $\text{Br}(L)$. Moyennant le corollaire précédent, on en déduit que la multiplication par N dans $\text{Br}(L)\{p\}$ s'y identifie à la multiplication par $e = [L : K]$. Soit $c \in \text{Br}(L)\{p\}$: il existe par divisibilité $c_1 \in \text{Br}(L)\{p\}$ tel que $c = e \cdot c_1 = N \cdot c_1$. Alors $gc = gNc_1 = Nc_1 = c$ pour tout $g \in G$; l'assertion concernant $H(n, L)$ résulte de l'isomorphisme équivariant $H(n, L) \simeq \text{Br}(L)[p^n] \otimes \mu_{p^n}$.

COROLLAIRE 3. — Soit $x \in K^*$ un élément tel que $K(x^{p^{-n}})$ ($n \leq s_0$) soit totalement ramifié sur K , de degré p^n . Alors tout élément de $H^2(K, \mu_p^{\otimes 2})$ s'écrit $|x, y|_{p^n}$, où $y \in K^*$.

Cela résulte du corollaire 1 et du lemme suivant, qui n'est autre que [12], p. 211, corollaire 2 à la proposition 2 :

LEMME 4.1.2. — Soit F un corps commutatif contenant les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité (m est inversible dans F) et soit $x \in F^*$. Pour qu'un élément $c \in H^2(F, \mu_m^{\otimes 2})$ puisse s'écrire $|x, y|_m$, $y \in F^*$, il faut et il suffit que $\text{Res}_{F_1/F}(c) = 0$, où $F_1 = F(\sqrt[m]{x})$.

La proposition 4.1. résulte maintenant du corollaire 3 précédent et du lemme suivant :

LEMME 4.1.3. — Soit L une extension finie, non ramifiée de K , de degré p^n . Alors la norme $N_{L/K} : U_L \rightarrow U_K$ est surjective; la valuation induit un isomorphisme $K^*/N_L^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.

En effet, soit ℓ le corps résiduel de L . Comme k est parfait, la norme $N : \ell^* \rightarrow k^*$ est surjective; l'assertion résulte donc de [12], p. 90, corollaire à la proposition 3 (et de l'exercice de la même page).

Démonstration de la proposition 4.1. — D'après le lemme 4.1.3, l'homomorphisme θ_2 ne dépend pas du choix de π : si $a \in H(n, K)$, on applique ce lemme à l'extension non ramifiée $K(\sqrt[n]{a})/K$ et on utilise la propriété bien connue des symboles galoisiens, par exemple [12], p. 213, proposition 4 (iii); comme $\mu_{p^n} \subset K$, $|x, y|_p = 0$ si et seulement si y est norme dans l'extension $K(\sqrt[n]{x})/K$. Le corollaire 3 ci-dessus appliqué à π montre la surjectivité de θ_2 : enfin, si $a \in H(n, K)$ et $|a, \pi|_{p^n} = 0$, π est norme dans l'extension non ramifiée $K(\sqrt[n]{a})/K$, donc $a = 1$ dans $H(n, K)$.

C.Q.F.D.

Notation. — Si $a, b \in K^*$, on note $a \overset{n}{\wedge}_K b = \theta_2^{-1}(|a, b|_{p^n}) \in H(n, K)$.

Vu la définition de θ_2 , $a \overset{n}{\wedge}_K b$ est un symbole de Steinberg jouissant de la propriété suivante:

Si $a \in H(n, K)$, $a \overset{n}{\wedge}_K b = a^{v(b)}$.

De plus, le symbole $a \overset{n}{\wedge}_K b$ jouit de propriétés de fonctorialité; pour plus de détails, voir [4], A.2.

Remarque. — Ce symbole coïncide (au signe près) avec le symbole défini dans [11] par Šafarevič (pour $p \neq 2$); pour cette raison, nous l'appellerons *symbole de Šafarevič*.

4.2. Démonstration du théorème de Merkurjev-Suslin (pour les puissances de p).

Il est bien connu ([14], VI-3) qu'il suffit de faire cette démonstration dans le cas $n = 1 \leq s_0$, c'est-à-dire de démontrer $K_2(K)/pK_2(K) \simeq H^2(K, \mu_p^{\otimes 2})$ lorsque $\mu_p \subset K$. On va en fait montrer que le symbole de Šafarevič $x \overset{1}{\wedge}_K y = x \wedge_K y$ induit un isomorphisme $K_2(K)/pK_2(K) \xrightarrow{\sim} H(1, K)$, d'où le résultat par 4.1. On en déduira le fait que $K_m(K)$ est p -divisible pour $m \geq 3$.

Pour démontrer ce résultat, on va écrire une *décomposition canonique* de tout élément $x \in U_K^{(1)}$. Pour cela, notons que par hypothèse, $s_0 \geq 1$, donc que e_K est divisible par $p - 1$. On pose $t = e_K p / (p - 1)$; il est bien connu que $U_K^{(t)} \subset K^{*p} H(1, K)$. On se donne une uniformisante π .

Le résultat qui suit est dû à Hensel ([11], p. 79, où l'on en trouvera une démonstration) :

LEMME 4.2.1. — Soit $S = \{i \in [1, t] \mid (i, p) = 1\} \cup \{t\}$, et soit $\gamma : S \times \mathbf{R}_K \rightarrow \mathbf{U}_K^{(1)}$ une application telle que, pour tout

$$(i, \lambda) \in S \times \mathbf{R}, \quad \gamma(i, \lambda) = 1 + \lambda \pi^i \pmod{\pi^{i+1}}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{U}_K^{(1)}$ est engendré (mod. $\mathbf{U}_K^{(n)}$) par les $\gamma(i, \lambda)$.

Nous utiliserons ce lemme plus loin. Énonçons et démontrons en tout de suite une version plus précise dans un cas particulier, intéressante en soi et suffisante pour la démonstration de $\mathbf{K}_2/p\mathbf{K}_2 \simeq \mathbf{H}(1, \mathbf{K})$.

LEMME 4.2.2. — Soit $i < t$: si $i = p^j k$, avec $(p, k) = 1$, posons, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $c_i(\lambda) = (1 + \lambda \pi^k)^{p^j}$. Alors tout élément de $\mathbf{U}_K^{(1)}$ s'écrit de manière unique sous la forme $c_1(\lambda_1) \dots c_{t-1}(\lambda_{t-1}) \tilde{x}$, où $\tilde{x} \in \mathbf{U}^{(t)}$. De plus, $\tilde{x} = x \overset{1}{\wedge} (-\pi)$.

Démonstration. — Il suffit visiblement de prouver que si $1 \leq i < t$ et $y \in \mathbf{U}_K^{(i)}$, il existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ et un seul tel que $yc_i(\lambda)^{-1} \in \mathbf{U}_K^{(i+1)}$. Or, par hypothèse, $y = 1 + \mu \pi^i = 1 + \mu \pi^{kp^j}$, $\mu \in \mathbf{O}_K$. Comme k est parfait, il existe un unique $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\lambda^{p^j} \equiv \mu \pmod{\pi}$. On observe que, puisque $i < t$,

$$c_i(\lambda) = (1 + \lambda \pi^k)^{p^j} \equiv 1 + \lambda^{p^j} \pi^{kp^j} \equiv 1 + \mu \pi^i \pmod{\pi^{i+1}}.$$

Montrons maintenant que $\tilde{x} = x \overset{1}{\wedge} (-\pi)$. A cet effet, on observe que, comme \mathbf{R}^* est p -divisible, $c(\mathbf{R}^*, \mathbf{K}^*) = 0$ pour tout symbole c annulé par une puissance de p . Pour un tel symbole, on a, lorsque $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $i < t (i = p^j k, (p, k) = 1)$:

$$kc(-\pi, c_i(\lambda)) = c((-1)^k \pi^k, (1 + \lambda \pi^k)^{p^j}) = p^j c((-1)^k \pi^k, 1 + \lambda \pi^k) \\ p^j c((-1)^k \lambda \pi^k, 1 + \lambda \pi^k).$$

Si p est impair, $-1 \in \mathbf{R}^*$ et $c(-1, \mathbf{K}^*) = 0$; il en résulte que l'expression précédente est nulle. Si $p = 2$, k est impair, donc $(-1)^k = -1$ et l'expression en question est encore nulle. Dans tous les cas, on a :

$$kc(-\pi, c_i(\lambda)) = 0,$$

d'où $c(-\pi, c_i(\lambda)) = 0$ puisque k est premier à p . Revenant à x , on en conclut :

$$c(-\pi, x) = c(-\pi, \tilde{x}),$$

et en particulier, $\tilde{x} = x \overset{1}{\wedge} (-\pi)$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Cette démonstration est constructive; elle fournit une *méthode pratique* pour le calcul de $x \overset{1}{\wedge} (-\pi)$ (et c'est là son principal intérêt).

Montrons maintenant que $K_2(K)/pK_2(K) \simeq H(1, K)$. Soit c un symbole annulé par p : commençons par remarquer que si $x \in K^{*p}H(1, K)$, $c(x, \pi)$ ne dépend pas du choix de l'uniformisante π . En effet, si $u \in U_K$, u est norme dans l'extension $K(\sqrt[p]{x})/K$ (lemme 4.1.3) donc, d'après [7], p. 141, corollaire 14-3, $\{x, u\} \in pK_2(K)$ et $c(x, \pi u) = c(x, \pi)$. On peut donc poser $\varphi(x) = c(x, \pi)$ ($x \in K^{*p}H(1, K)$) et nous allons voir que $c(x, y) = \varphi(x \overset{1}{\wedge} y)$ pour tous $x, y \in K^*$. D'après le lemme 4.2.2 (et sa démonstration), pour tout $u \in U_K$,

$$c(u, -\pi) = c(u \overset{1}{\wedge} (-\pi), -\pi) = \varphi(u \overset{1}{\wedge} (-\pi)).$$

Si $y \in K^*$, on peut écrire $y = \pi^n u$, $u \in U_K$. On a alors :

$$\begin{aligned} c(y, -\pi) &= nc(\pi, -\pi) + c(u, -\pi) \\ &= \varphi(u \overset{1}{\wedge} (-\pi)) \\ &= \varphi(u \overset{1}{\wedge} (-\pi)) + n\varphi(\pi \overset{1}{\wedge} (-\pi)) \\ &= \varphi(y \overset{1}{\wedge} (-\pi)). \end{aligned}$$

Si π' est une autre uniformisante, on a aussi :

$$\forall y \in K^*, \quad c(y, -\pi') = \varphi(y \overset{1}{\wedge} (-\pi'));$$

comme les $-\pi'$ engendrent K^* , on a bien $c(x, y) = \varphi(x \overset{1}{\wedge} y)$ pour tous $(x, y) \in K^* \times K^*$.

En appliquant ceci à $c(x, y) = \{x, y\} \pmod{p} \in K_2(K)/pK_2(K)$, on obtient une section de $K_2(K)/pK_2(K) \rightarrow H(1, K)$. De plus, la formule $x \overset{1}{\wedge} \pi = x$ pour $x \in H(1, K)$ montre que cette section est uniquement déterminée; d'où la bijectivité de $K_2(K)/pK_2(K) \rightarrow H(1, K)$.

COROLLAIRE AU LEMME 4.2.2. — Si $m \geq 3$, $K_m(K)$ est p -divisible (d'où le théorème 1.a).

Montrons que $K_m(K)/pK_m(K)$ est nul. Soit

$$c(x_1, \dots, x_m) = \{x_1, \dots, x_m\} \pmod{p}.$$

D'après la démonstration ci-dessus, si π est une uniformisante, on a :

$$\begin{aligned} c(x_1, x_2, \dots, x_m) &= c(x_1 \wedge x_2, \pi, x_3, \dots, x_m) \\ &= c(x_1 \wedge x_2, \pi \wedge x_3, \pi, \dots, x_m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(puisque les deux premiers termes $\in H(1, K)$).

4.3. Démonstration que $K_2(K)/p^n K_2(K) \simeq H(n, K)$ ($n \leq s$).

Le résultat suivant est dû à Soulé (et donne l'isomorphisme) :

PROPOSITION 4.3. — La suite spectrale

$$H^p(K_{nr}/K, H^q(K_{nr}, \mu_{p^n}^{\otimes 2})) \Rightarrow H^{p+q}(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$$

donne un isomorphisme

$$H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^n}) \simeq H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \quad \text{pour tout } n \leq s.$$

Remarque. — J'ignore (et il serait intéressant de savoir), si l'homomorphisme ci-dessus coïncide, pour $n \leq s_0$, avec celui de la proposition 4.1, et plus généralement avec celui induit par les raisonnements de [4], A.3.

Démonstration. — On sait que $cd_p(K_{nr}/K) \leq 1$ ([13], p. II-4, prop. 3). De même, $cd_p(K_{nr}) \leq 1$: il suffit de remarquer que par les calculs précédents, $\text{Br}(K_{nr})[p] = H^2(K_{nr}, \mu_p) = 0$ et que ceci s'applique à toute extension algébrique de K_{nr} (cela provient aussi des résultats généraux de Kato). La suite spectrale ci-dessus fournit donc un isomorphisme :

$$(\forall n) \quad H^1(K_{nr}/K, H^1(K_{nr}, \mu_{p^n}^{\otimes 2})) \simeq H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}).$$

Supposons maintenant $\mu_{p^n} \subset K_{nr}$, c'est-à-dire $n \leq s$. La théorie de Kummer donne alors un isomorphisme équivariant :

$$H^1(K_{nr}, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) \simeq K_{nr}^* \otimes \mu_{p^n}.$$

LEMME 4.3.1. — *La valuation induit un isomorphisme :*

$$H^1(K_{nr}/K, K_{nr}^* \otimes \mu_{p^n}) \xrightarrow{v_*} H^1(K_{nr}/K, \mu_{p^n}).$$

Ce lemme donne évidemment la proposition 4.3.

Démonstration. — Le foncteur $\cdot \otimes \mu_{p^n}$ (resp. $H^1(K_{nr}/K, \cdot)$) étant exact à droite (resp. exact à droite pour les modules de torsion p -primaire), on déduit de toute suite exacte :

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

une suite exacte :

$$H^1(K_{nr}/K, A \otimes \mu_{p^n}) \rightarrow H^1(K_{nr}/K, B \otimes \mu_{p^n}) \rightarrow H^1(K_{nr}/K, C \otimes \mu_{p^n}) \rightarrow 0.$$

Appliquant ceci à la suite exacte $U_{K_{nr}} \rightarrow K_{nr}^* \xrightarrow{v} \mathbf{Z} \rightarrow 0$, on voit que tout revient à démontrer :

$$\text{LEMME 4.3.2. — } H^1(K_{nr}/K, U_{K_{nr}} \otimes \mu_{p^n}) = 0.$$

On a une filtration $U_{K_{nr}} = U \supset U^{(1)} \supset \dots \supset U^{(n)} \supset \dots$ avec $U/U^{(1)} \simeq k_s^*$; $U^{(i)}/U^{(i+1)} \simeq k_s^+$, $i \geq 1$, où k_s est une clôture algébrique de k . Comme k_s^* est uniquement p -divisible, $U^{(1)} \otimes \mu_{p^n}$ s'envoie isomorphiquement sur $U \otimes \mu_{p^n}$. Comme k_s^+ est induit, on déduit de la suite exacte

$$U^{(i)} \otimes \mu_{p^n} \rightarrow U^{(i-1)} \otimes \mu_{p^n} \rightarrow k_s^+ \otimes \mu_{p^n} \rightarrow 0$$

une surjection

$$H^1(K_{nr}/r, U^{(i)} \otimes \mu_{p^n}) \twoheadrightarrow H^1(K_{nr}/K, U^{(i-1)} \otimes \mu_{p^n}).$$

Par conséquent, pour tout $i \geq 1$, l'application composée

$$H^1(K_{nr}/K, U^{(i)} \otimes \mu_{p^n}) \rightarrow H^1(K_{nr}/K, U^{(1)} \otimes \mu_{p^n})$$

est surjective; mais elle est nulle pour i assez grand, dès que $U^{(i)} \subset (U^{(1)})^{p^n}$. \square

4.4. Démonstration que $p^s K_2(K)$ est p -divisible ($s \geq 1$).

On suppose ici que $s \geq 1$. Rappelons que l'on note \tilde{K} l'extension $K(\mu_{p^s})$ de K (cf. introduction).

LEMME 4.4.1. — L'extension $\tilde{K}(\mu_{p^{2s}})/\tilde{K}$ est totalement ramifiée de degré p^s .

Si $p^s = 2$, cela résulte de la définition de s . Supposons $p^s > 2$: alors, d'après [6], p. 221, th. 6, l'extension ci-dessus est de degré p^s . C'est une extension cyclotomique : son groupe de Galois s'identifie (par le caractère cyclotomique) au sous-groupe de $(\mathbf{Z}/p^{2s}\mathbf{Z})^*$ fixant (multiplicativement) $p^s \in \mathbf{Z}/p^{2s}\mathbf{Z}$. Ce sous-groupe n'est autre que $(1+p^s\mathbf{Z})/p^{2s}\mathbf{Z}$; en d'autres termes, $\tilde{K}(\mu_{p^{2s}})/\tilde{K}$ est cyclique de degré p^s . Soit L/\tilde{K} la plus grande sous-extension non ramifiée de $\tilde{K}(\mu_{p^{2s}})/\tilde{K}$: comme cette dernière est cyclique, L est nécessairement de la forme $\tilde{K}(\mu_{p^{s+r}})$, $0 \leq r \leq s$. Par définition de s , on a $r = 0$, donc $L = \tilde{K}$.

LEMME 4.4.2. — Soit $f: A \rightarrow B$ un homomorphisme de groupes abéliens, et supposons que l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{f} B \rightarrow B/pB$ soit surjectif. Alors, pour tout $n \geq 0$, l'homomorphisme composé $A \rightarrow B \rightarrow B/p^n B$ est surjectif.

Démonstration. — Ce lemme est trivial.

Montrons maintenant que $p^s K_2(K)$ est p -divisible. D'après le lemme 4.4.1 et le corollaire 3 au lemme 4.1.1, appliqué à une racine primitive $p^{s-i\text{ème}}$ de l'unité w , tout élément de $H(s, \tilde{K})$ s'écrit $x \Delta_{\mathbf{R}}^s w$, $x \in \tilde{K}^*$ (où $x \Delta_{\mathbf{R}}^s w$ est l'image de $|x, w|_{p^s}$ par l'isomorphisme de la proposition 4.3). De plus, le lemme 4 de [13], p. I-20, montre que la corestriction

$$\text{Cor}_{\tilde{K}/K} : H(s, \tilde{K}) \rightarrow H(s, K)$$

est surjective; tout élément de $H(s, K)$ s'écrit donc

$$\text{Cor}_{\tilde{K}/K}(x \Delta_{\mathbf{R}}^s w), \quad x \in \tilde{K}^*.$$

De plus, la functorialité de la suite spectrale de la proposition 4.3 permet de

montrer que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} K_2(\tilde{K}) & \longrightarrow & H(s, \tilde{K}) \\ \text{cor} \downarrow & & \text{cor} \downarrow \\ K_2(K) & \longrightarrow & H(s, K) \end{array}$$

est commutatif (le vérifier sur $\{\pi, \tilde{K}^*\}$, où π est une uniformisante de K). Il s'ensuit que l'homomorphisme $x \mapsto \text{Cor}_{\tilde{K}/K}(\{x, w\})$ de \tilde{K}^* dans $K_2(K)$ est surjectif (mod. p^s). D'après le lemme 4.4.2, il est aussi surjectif (mod. p^{s+1}); comme le groupe image est tué par p^s , cela prouve bien que $p^s K_2(K)$ est p -divisible. On a en fait montré :

COROLLAIRE 4.4 (à la démonstration). —

$$K_2(K) = p^s K_2(K) + \text{Cor}_{\tilde{K}/K}(\{\mu_{p^s}, \tilde{K}^*\}).$$

4.5. Le cas $s = 0$.

Nous devons montrer que $K_2(K)$ est p -divisible. Plus généralement :

PROPOSITION 4.5. — Soit F un corps commutatif et soit p un nombre premier différent de la caractéristique de F . Supposons que F ne contienne pas les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et soit $E = F(\mu_p)$. Notons $G = \text{Gal}(E/F)$ et soit $\theta : G \rightarrow (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ le caractère cyclotomique.

a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $K_2(K)$ est p -divisible;

ii) L'application $\tilde{N} = \sum_{g \in G} \theta(g)g$ induit 0 sur $\text{Br}(E)[p]$.

b) Soit E_1/F une sous-extension de E/F , avec $E_1 \neq E$, telle que $\text{Cor} : \text{Br}(E)[p] \rightarrow \text{Br}(E_1)[p]$ soit injective. Alors les conditions i) et ii) de a) sont vérifiées.

On applique 4.5b) à K en remarquant que, par hypothèse, $K(\mu_p)/K$ est ramifiée, et en utilisant le lemme 4.1.1.

Démonstration de la proposition 4.5. — Nous nous appuyons sur l'équivalence suivante :

$$(E) \quad \ll K_2(F) \text{ est } p\text{-divisible} \gg \Leftrightarrow \ll H^2(F, \mu_p^{\otimes 2}) = 0 \gg.$$

Le fait que $(|G|, p) = 1$ fournit pour tout groupe de p -torsion A sur lequel opère $\text{Gal}(\ /F)$ des isomorphismes :

$$H^n(F, A) \xrightarrow{\sim} H^n(E, A)^G$$

déduits de la restriction (en effet, $\text{Res } H^n(F, A) \subset H^n(E, A)^G$, $\text{Cor} \circ \text{Res} = |G|$ et $\text{Res} \circ \text{Cor} = N_G$ s'identifie sur $H^n(E, A)^G$ à la multiplication par $|G|$).

Cette remarque s'applique à $\mu_p^{\otimes 2}$; elle fournit un isomorphisme :

$$H^2(F, \mu_p^{\otimes 2}) \simeq H^2(E, \mu_p^{\otimes 2})^G \simeq (\mu_p \otimes H^2(E, \mu_p))^G \simeq (\mu_p \otimes \text{Br}(E)[p])^G.$$

Comme G opère sur μ_p au moyen du caractère θ , cet isomorphisme montre que $H^2(F, \mu_p^{\otimes 2})$ est isomorphe au groupe

$$B = \{c \in \text{Br}(E)[p] \mid \forall g \in G, \theta(g)gc = c\},$$

et ce groupe n'est autre que $\tilde{N}\text{Br}(E)[p]$, d'où a).

Pour montrer b), on peut supposer $E_1 = F$ (puisque $[E_1 : F]$ est premier à p). Soit $c \in B$; pour tout $g \in G$, on a $gc = \theta(g)^{-1}c$, d'où

$$Nc = \sum_{g \in G} \theta(g)^{-1} . c = 0.$$

Or $N = \text{Res}_{E/F} \circ \text{Cor}_{E/F}$; on a donc :

$$\text{Cor}_{E/F}(Nc) = \text{Cor} \circ \text{Res} (\text{Cor } c) = [E : F] \text{Cor}_{E/F}c = 0,$$

d'où $c = 0$ puisque $[E : F]$ est premier à p et que $\text{Cor}_{E/F}$ est injective par hypothèse.

C.Q.F.D.

Remarque. — Contrairement aux apparences, la partie \Leftarrow de l'équivalence (E) ne fait pas appel au théorème de Merkurjev-Suslin. Elle est en fait conséquence du lemme élémentaire suivant :

LEMME 4.5. — *Pour deux éléments $x, y \in F^*$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) y est norme dans l'extension $F(\sqrt[p]{x})/F$,
- ii) $\{x, y\} \in pK_2(F)$,
- iii) $|x, y|_p = 0$.

Démonstration. — Voir [7], p. 153, th. 15.12.

Par contre, l'implication \Rightarrow utilise la surjectivité du symbole galoisien.

Remarque. — La proposition 1.2.a) et le théorème 1 montrent qu'en définitive, pour tout $n \geq 0$, $K_2(K)/p^n K_2(K)$ est isomorphe à $H(n, K)$. On pourrait espérer supprimer les discussions 4.4 et 4.5 en montrant a priori, pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme $H(n, K) \simeq H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$ à l'aide de la suite spectrale de la proposition 4.3; nous allons expliquer que c'est impossible à cause de la fonctorialité de la suite spectrale. En effet, cette fonctorialité, ainsi que le théorème 1, montrent que pour $s \leq n \leq n'$, l'application naturelle

$$H^1(K_{nr}/K, H^1(K_{nr}, \mu_{p^n}^{\otimes 2})) \xrightarrow{\rho} H^1(K_{nr}/K, H^1(K_{nr}, \mu_{p^n}^{\otimes 2}))$$

est un isomorphisme. Or l'application correspondante $\beta_{n'/n}$:

$$H(n', K) \rightarrow H(n, K)$$

est nulle dès que $n' - n \geq s$ (cf. 3.2), ce qui interdit de trouver des isomorphismes

$$H^1(K_{nr}/K, H^1(K_{nr}, \mu_{p^n}^{\otimes 2})) \xrightarrow{\sim} H(n, K),$$

commutant à ρ et β . L'isomorphisme $K_2(K)/p^n K_2(K) \simeq H(n, K)$ est réalisé pour $n \geq s$ par le schéma :

$$\begin{array}{ccccc} K_2(K)/p^n K_2(K) & \xrightarrow{\sim} & H^2(K, \mu_{p^n}^{\otimes 2}) & & H(n, K) \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow & & \wr \uparrow \alpha \\ K_2(K)/p^s K_2(K) & \xrightarrow{\sim} & H^2(K, \mu_{p^s}^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\sim} & H(s, K) \end{array}$$

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

On peut démontrer le théorème 2 « à la main » en utilisant les vecteurs de Witt, cette démonstration est assez pénible et oblige à distinguer les cas $p \neq 2$, $p = 2$. La démonstration ci-dessous, uniforme, nous a été

suggérée par Soulé; elle n'utilise que la suite exacte de la proposition 1.2.a).
En fait :

THÉORÈME 2 bis. — Soit E/F une extension galoisienne de corps de caractéristique différente de p , vérifiant les hypothèses suivantes :

- a) $\mu(F, p) = \mu_{p^{s_0}}$, $s_0 \in \mathbf{N}$,
- b) $\mu(E, p) = \mu_{p^s}$, $s \in \mathbf{N}$,
- c) $H^2(E/F, \mu_p) = 0$.

Alors $H^1(E/F, \mu_{p^s})$ est somme directe d'un groupe cyclique d'ordre p^{s_0} et d'un $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ -module libre.

Démonstration. — Observons d'abord que les suites exactes :

$$H^2(E/F, \mu_{p^{n'-n}}) \rightarrow H^2(E/F, \mu_{p^{n'}}) \rightarrow H^2(E/F, \mu_{p^n})$$

et c) entraînent que pour tout $n \leq s$, $H^2(E/F, \mu_{p^n}) = 0$. Par conséquent, les suites exactes de la proposition 1.2.a) restent valables dans ce contexte. Pour simplifier les notations, posons $H^i(n) = H^i(E/F, \mu_{p^n})$, $i = 0, 1, n \leq s$. Les groupes $H^0(n)$ sont cycliques; de plus, pour $0 \leq n \leq n' \leq s$, on a une suite exacte :

$$(E_{n,n'}) \quad 0 \rightarrow H^0(n'-n) \rightarrow H^0(n') \xrightarrow{p^{n'-n}} H^0(n) \\ \xrightarrow{\delta} H^1(n'-n) \xrightarrow{\beta} H^1(n') \xrightarrow{\alpha} H^1(n) \rightarrow 0.$$

Pour $n \leq n' \leq s$, on note

$$\alpha_{n'/n} : H^1(n') \rightarrow H^1(n) \quad \text{et} \quad \beta_{n/n'} : H^1(n) \rightarrow H^1(n')$$

les applications déduites de $\mu_{p^{n'}} \rightarrow \mu_{p^n}$ et $\mu_{p^n} \rightarrow \mu_{p^{n'}}$; on a

$$\alpha_{n'/n} \circ \beta_{n/n'} = \beta_{n/n'} \circ \alpha_{n'/n} = p^{n'-n}.$$

Supposons $s_0 = 0$ ou $s_0 = s$. Les suites exactes (E) se réduisent alors à :

$$(E_{n,n'}) \quad 0 \rightarrow H^1(n'-n) \xrightarrow{\beta} H^1(n') \xrightarrow{\alpha} H^1(n) \rightarrow 0.$$

Les suites exactes $(E_{s-1,s})$ et $(E_{1,s})$ montrent alors que $H^1(s)$ satisfait la condition a) du lemme suivant (lorsque $s \geq 2$), pour $k = s - 1$:

LEMME 5.1. — Pour un groupe abélien A et $s \geq 2$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Il existe k , $1 \leq k \leq s - 1$, tel que la suite $A \xrightarrow{p^k} A \xrightarrow{p^{s-k}} A$ soit exacte.
- b) Pour tout k , $1 \leq k \leq s - 1$, la suite $A \xrightarrow{p^k} A \xrightarrow{p^{s-k}} A$ est exacte.
- c) $p^s A = 0$ et A est enveloppe $\mathbf{Z}/p^s \mathbf{Z}$ -projective de A/pA .
- d) $A[p^s] = A$ et A est enveloppe $\mathbf{Z}/p^s \mathbf{Z}$ -injective de $A[p]$.
- e) A est un $\mathbf{Z}/p^s \mathbf{Z}$ -module libre.

Ce lemme est classique et sa démonstration est laissée au lecteur.

Lorsque $s \geq 2$ et $s_0 = 0$ ou s , le théorème 2 bis est donc vérifié; lorsque $s \leq 1$ il est trivial. A partir de maintenant, on suppose donc $0 < s_0 < s$.

Considérons la suite exacte $(E_{s_0, s})$. Comme $\alpha_{s/s-s_0}$ est surjective, il existe $\xi \in H^1(s)$ tel que $\alpha_{s/s-s_0}(\xi)$ engendre $\delta(H^0(s_0)) \subset H^1(s-s_0)$. Nous allons montrer que le sous-groupe $\langle \xi \rangle$ engendré par ξ est *facteur direct* dans $H^1(s)$, et que $H^1(s)/\langle \xi \rangle$ est un $\mathbf{Z}/p^s \mathbf{Z}$ -module libre. Comme $\xi \in \text{Im } \delta$,

$$p^{s_0}(\xi) = \beta_{s-s_0/s} \circ \alpha_{s/s-s_0}(\xi) = 0.$$

LEMME 5.2. — a) L'image de $p^{s_0-1}\xi$ dans $H^1(s-1)$ engendre le noyau de $\beta_{s-1/s}$; $p^{s_0-1}\xi \neq 0$.

- b) L'image de ξ dans $H^1(s-s_0-1)$ engendre le noyau de $\beta_{s-s_0-1/s}$,
 c) $\xi \notin pH^1(s)$.

Démonstration. — a) On écrit le diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H^1(s) & & \\
 & & & & \downarrow \alpha & & \\
 & & & & H^1(s-s_0) & \xrightarrow{\beta} & H^1(s) \\
 H^0(s_0) & \xrightarrow{\delta} & & & \downarrow \beta & & \parallel \\
 \downarrow & & & & H^1(s-1) & \xrightarrow{\beta} & H^1(s) \\
 H^0(s) \rightarrow & H^0(1) & \xrightarrow{\delta} & & & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

La surjectivité de $H^0(s_0) \rightarrow H^0(1)$ montre que le noyau de $\beta_{s-1/s}$ est engendré par l'image de ξ via

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(s) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(s-1) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(s-s_0) & \xrightarrow{\beta} & H^1(s-1) \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha} & & \uparrow & & \end{array}$$

Comme la composée des deux dernières flèches est p^{s_0-1} , on trouve bien l'image de $p^{s_0-1}\xi$ dans $H^1(s-1)$. Comme $H^0(s) \rightarrow H^0(1)$ est nulle, δ est injective et en particulier $p^{s_0-1}\xi \neq 0$.

b) On écrit le diagramme (commutatif aux lignes exactes) :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^1(s) & & \\ & & \downarrow \alpha & & \\ H^0(s_0) & \xrightarrow{\delta} & H^1(s-s_0) & \xrightarrow{\beta} & H^1(s) \\ \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow p \\ H^0(s_0+1) & \xrightarrow{\delta} & H^1(s-s_0-1) & \xrightarrow{\beta} & H^1(s) \end{array}$$

La flèche verticale de gauche est un isomorphisme, d'où l'assertion b).

c) Supposons $\xi = p\xi'$. Comme $p^{s_0+1}\xi' = 0$, l'image de ξ' dans $H^1(s-s_0-1)$ est dans le noyau de $\beta_{s-s_0-1/s}$. D'après b), il existe $\lambda \in \mathbf{Z}$ tel que

$$(\lambda p - 1)\xi' \in \text{Ker } \alpha_{s/s-s_0-1}, \quad \text{donc} \quad \xi' \in \text{Ker } \alpha_{s/s-s_0-1}.$$

Or :

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_{s-s_0-1/s-s_0} \circ \alpha_{s/s-s_0-1}(\xi') \\ &= \beta_{s-s_0-1/s-s_0} \circ \alpha_{s-s_0/s-s_0-1} \circ \alpha_{s/s-s_0}(\xi') = \alpha_{s/s-s_0}(p\xi') = \alpha_{s/s-s_0}(\xi), \end{aligned}$$

et ce dernier élément engendre le noyau de $\beta_{s-s_0/s}$. Pour que ce noyau soit nul, il faut et il suffit que $H^0(s) \rightarrow H^0(s_0)$ soit injective; or ceci est impossible puisque $0 < s_0 < s$.

LEMME 5.3. — *Le groupe $H^1(s)/\langle \xi \rangle$ est un $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$ -module libre.*

Démonstration. — On va utiliser l'implication $a) \Rightarrow c)$ du lemme 5.1 avec $k = s - 1$. Il est clair que ce groupe est d'exposant p^s . Soit $x \in H^1(s)$ avec $px = \lambda\xi$, $\lambda \in \mathbf{Z}$. D'après le lemme 5.2.c), $\lambda = p\mu$ ($\mu \in \mathbf{Z}$) et $p(x - \mu\xi) = 0$, donc l'image de $x - \mu\xi$ dans $H(s-1)$ est annihilée par $\beta_{s-1|s}$. En appliquant $a)$, on trouve $v \in \mathbf{Z}$ tel que $x - (\mu + vp^{s-1})\xi \in \text{Ker } \alpha_{s/s-1} = \text{Im } \beta_{1|s-1}$. Comme $\alpha_{s/1} : H^1(s) \rightarrow H^1(1)$ est surjective, on a :

$$x - (\mu + vp^{s-1})\xi = p^{s-1}y \quad (y \in H^1(s))$$

donc

$$x \equiv p^{s-1}y \pmod{\xi}.$$

Fin de la démonstration. — La suite exacte

$$0 \rightarrow \langle \xi \rangle \rightarrow H^1(s) \rightarrow H^1(s)/\langle \xi \rangle \rightarrow 0$$

est scindée d'après le lemme 5.3 et $\langle \xi \rangle$ est d'ordre p^{s_0} d'après le lemme 5.2.a).

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

6.1. Un peu d'analyse.

Les résultats de cette partie peuvent être regardés comme une généralisation partielle de ceux de Graham [20].

Parših [10] a défini pour tout corps topologique F et tout entier $m \geq 0$ un groupe $K_m^{\text{top}}(F)$: c'est le complété séparé de $K_m(F)$ pour la topologie de groupe la plus fine rendant continu le symbole universel. Il est clair que $K_m(F)$, muni de cette topologie, est le groupe universel pour les symboles de Steinberg continus à valeurs dans un groupe topologique commutatif. Si A_1, \dots, A_m sont des parties de F^* , notons $\{A_1, \dots, A_m\}$ le sous-ensemble de $K_m(F)$ formé des éléments $\{a_1, \dots, a_m\}$, où (a_1, \dots, a_m) décrit $A_1 \times \dots \times A_m$. Soit $(U_i)_{i \in 1}$ une base de voisinages de 1 dans F^* : alors la topologie de Parših sur $K_m(F)$ est *moins fine* que la topologie engendrée par les translatés des $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_m}\}$ et *plus fine* que la topologie définie par les sous-groupes de $K_m(F)$ engendrés par ces ensembles. Ceci s'applique notamment lorsque les U_i peuvent être choisis comme sous-groupes ouverts de F^* , comme c'est le cas ci-dessous.

D'autre part, Milnor ([8], p. 179) a défini également un groupe $K_2^{\text{top}}(F)$: c'est le groupe (topologique) universel pour les symboles continus sur F , à valeurs dans un groupe séparé, et vérifiant la « condition de Matsumoto » :

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} c(x, 1+xy) = 0.$$

Soit F un corps muni d'une valuation $v: F^* \rightarrow G$, où G est un groupe ordonné archimédien noté additivement. Pour $\alpha \in G$, $\alpha > 0$, notons $U_\alpha = \{x \in F^* \mid v(x-1) \geq \alpha\}$: c'est un sous-groupe de F^* , et les U_α définissent sur F^* la topologie induite par la valuation v . Notons également, pour $m \geq 1$, $K_m^{(\alpha)}(F)$ le sous-groupe de $K_m(F)$ engendré par $\{F^*, \dots, F^*, U_\alpha\}$ et $U_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ le sous-groupe de $K_m(F)$ engendré par $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}\}$ (où $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont des éléments de G strictement positifs).

THÉORÈME 8. — a) Supposons $m \geq 2$. Alors les groupes $K_m^{(\alpha)}(F)$ et $U_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ sont cofinaux dans $K_m(F)$.

b) Supposons $m \geq 2$, et soit $c: (F^*)^m \rightarrow A$ un symbole de Steinberg continu à valeurs dans un groupe séparé A . Alors, $\lim_{y \rightarrow 1} c(x_1, \dots, x_{m-1}, y) = 0$ uniformément sur $(F^*)^{m-1}$. En particulier, si $m = 2$, c est strictement continu (i.e. vérifie la condition de Matsumoto).

Remarque. — On trouvera dans [21] (prop. 2) un énoncé analogue au théorème 8 a), dans un cadre légèrement différent.

COROLLAIRE 1. — Le groupe de Milnor est le séparé de $K_2(F)$ pour la topologie de Paršin. En particulier, le $K_2^{\text{top}}(F)$ de Paršin est le complété de celui de Milnor.

Ce corollaire est conséquence immédiate de b). Les parties a) et b) du théorème 8 résultent formellement du lemme plus précis suivant :

LEMME 6.1. — Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des éléments de G strictement positifs. Alors on a les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}\} &\subset 2^{m-1} \{F^*, \dots, F^*, U_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}\}; \\ \{F^*, \dots, F^*, U_{2\alpha_1 + \dots + 2\alpha_m}\} &\subset 4^{m-1} \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}\}. \end{aligned}$$

Si X est une partie de $\bar{K}_m(F)$, on convient de noter ici nX l'ensemble des sommes $x_1 + \dots + x_n$ de n éléments de x .

Démonstration. — Il suffit de démontrer le lemme 6.1 pour $m = 2$.

a) Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in G$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$; soient $a_0, b \in F^*$, $v(a_0) = \alpha_1$, $v(b) \geq \alpha_2$. On a :

$$\{1 - a_0, 1 - b\} = \{1 - a_0, a_0(1 - b)\} = \left\{ \frac{1 - a_0}{1 - a_0(1 - b)}, a_0(1 - b) \right\}$$

et

$$\frac{1 - a_0}{1 - a_0(1 - b)} = 1 - \frac{a_0 b}{1 - a_0(1 - b)} \in U_{\alpha_1 + \alpha_2}; \quad v(a_0(1 - b)) = \alpha_1,$$

donc

$$\{1 - a_0, 1 - b\} \in \{U_{\alpha_1 + \alpha_2}, v^{-1}(\alpha_1)\}.$$

Soit $a \in F^*$ tel que $v(a) > \alpha_1$. Alors $(1 - a)(1 - a_0) = 1 - a'$, où

$$a' = a_0 + a + a_0 a, \quad v(a') = \alpha_1,$$

d'où

$$\{(1 - a)(1 - a_0), 1 - b\} \subset \{U_{\alpha_1 + \alpha_2}, v^{-1}(\alpha_1)\},$$

et

$$\{1 - a, 1 - b\} \subset 2\{U_{\alpha_1 + \alpha_2}, v^{-1}(\alpha_1)\}.$$

Par conséquent,

$$(1) \quad \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}\} \subset 2\{v^{-1}(\alpha_1), U_{\alpha_1 + \alpha_2}\}.$$

Ceci démontre la première inclusion.

b) Soit $a \in F^*$, $v(a) = \alpha_1$. Pour tout $\lambda \in U_{\alpha_2}$,

$$\{a, 1 - \lambda a\} = \{1 - \lambda a, \lambda\} \in \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}\}.$$

Soit $\mu \in U_{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\mu = 1 - b$. Alors $(1 - a)\mu = 1 - va$, avec :

$$v = \lambda + \frac{b}{a} - \lambda b \in U_{\alpha_2}.$$

Par conséquent on a aussi $\{a, (1 - \lambda a)\mu\} \in \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}\}$. On en déduit que $\{a, \mu\} \in 2\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}\}$.

c) Soit x un élément quelconque de F^* . Comme G est archimédien, il existe un entier n tel que $n\alpha_1 \leq v(x) \leq (n + 1)\alpha_1$; alors

$\alpha_1 \leq v(x) \leq 2\alpha_1$, où $x' = x/a^{n-1}$. Posons $\beta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2$: alors, si $u \in U_\beta$, on a d'après b):

$$\{x', u\} \in 2\{U_{v(x)}, U_{\beta-v(x)}\};$$

Par hypothèse, $v(x') \geq \alpha_1$, $\beta - v(x') \geq \alpha_2$, donc $\{x', u\} \in 2\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}\}$. On en déduit que

$$\{x, u\} = \{x', u\} + \{a^{n-1}, u\} = \{x', u\} + \{a, u^{n-1}\} \in 4\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}\},$$

c'est-à-dire $\{F^*, U_\beta\} \subset 4\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}\}$. Ceci achève la démonstration. \square

Remarques. — 1) Il est clair que les estimations du lemme 6.1 ne sont pas les meilleures possibles. Par exemple, dans c) ci-dessus, on aurait pu choisir $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2$; d'autre part, si $G = \mathbb{Z}$ et si α_1 et α_2 sont premiers entre eux, on peut même choisir $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$. Toutefois ces raffinements ne sont pas nécessaires pour notre propos.

2) Il est probable que le théorème 8 est valable dans un contexte plus général, par exemple lorsque la topologie de F^* est induite par celle d'un sous-anneau semi-local de dimension 1 de corps des fractions F (cf. [21], prop. 2).

3) Il n'est pas évident que la topologie de Paršin coïncide avec la topologie définie sur $K_m(F)$ par les sous-groupes $K_m^{(q)}(F)$. Toutefois, nous pouvons montrer que cette dernière est universelle pour une large classe de groupes topologiques. Plus précisément, notons $K'_m(F)$ le séparé de $K_m(F)$ pour la topologie définie par les sous-groupes $K_m^{(q)}(F)$; d'autre part, définissons deux catégories de groupes topologiques séparés commutatifs C_0 et C_1 de la manière suivante :

C_0 est la catégorie des groupes n'ayant pas de sous-groupes arbitrairement petits (en d'autres termes, pour tout objet A de C_0 , il existe un voisinage de zéro dans A qui ne contient aucun sous-groupe non réduit à $\{0\}$);

un groupe A est un objet de C_1 si et seulement si pour tout voisinage V de zéro dans A , il existe un homomorphisme continu de A dans un objet de C_0 , dont le noyau est contenu dans V .

COROLLAIRE 2. — *Le groupe $K'_m(F)$ est universel pour les symboles de Steinberg continus à valeurs dans un objet de C_1 .*

Démonstration. — Supposons d'abord que A soit un objet de C_0 . Soit c un symbole continu à valeurs dans A et soit V un voisinage de

zéro dans A qui ne contient aucun sous-groupe non réduit à zéro. Par le théorème 8 b), il existe $\alpha \in G$, $\alpha > 0$, tel que $c(x_1, \dots, x_{m-1}, y) \in V$ pour tout $(x_1, \dots, x_{m-1}, y) \in (F^*)^{m-1} \times U_\alpha$. Lorsque l'on fixe x_1, \dots, x_{m-1} , $c(x_1, \dots, x_{m-1}, y)$ décrit un sous-groupe de A contenu dans V ; on en conclut que $c(x_1, \dots, x_{m-1}, y) = 0$, donc que c induit un homomorphisme de $K_m(F)/K_m^{(\alpha)}(F)$ dans A .

Supposons maintenant que A soit un objet de C_1 , et soit c un symbole continu à valeurs dans A . Soit V un voisinage de zéro dans A : par hypothèse, il existe un homomorphisme continu de A dans un objet de C_0 , dont le noyau B est contenu dans V . D'après le paragraphe précédent, il existe $\alpha \in G$, $\alpha > 0$, tel que $c(K_m^{(\alpha)}(F)) \subset B$; ceci conclut la démonstration, compte tenu du fait évident que $K_m^l(F)$ est un objet de C_1 . \square

Remarque. — Par dualité de Pontrjagin, C_1 contient les groupes localement compacts; elle contient aussi les limites projectives de groupes discrets.

6.2. Démonstration du théorème 3.

Dans cette partie, K est de nouveau un corps satisfaisant les hypothèses et notations de 1.1.

PROPOSITION 6.1. — *Supposons $m > 2$. Pour la topologie de Paršin (mentionnée ci-dessus), notons $D_m(K)$ l'adhérence de zéro dans $K_m(K)$. Alors $D_m(K) = p^r K_m^{(1)}(K)$, où*

$$\begin{cases} r = s & \text{si car } K = 0 \text{ et } m = 2; \\ r = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les groupes $K_m^{\text{top}}(K)$ et $K_m^l(K)$ définis en 6.1 coïncident avec $K_m(K)/D_m(K)$; ils sont discrets.

Démonstration. — On procède comme dans [8], appendice. Tout d'abord, on prouve :

LEMME 6.2. — *Soit $t = e_{Kp}/(p-1)$; soit $c: K^* \times K^* \rightarrow A$ un symbole de Steinberg à valeurs dans un groupe topologique commutatif séparé A . Alors, si $(x, y) \in K^* \times U_K^{(1)}$, on a $t' \cdot c(x, y) = 0$, où t' est la plus grande puissance de p divisant t .*

En effet, dans le lemme 4.2.1., on peut choisir

$$\gamma(i, \lambda) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{\langle i \rangle} \pi^i\right)^{-i} & \text{si } i < t; \\ \left(1 - \frac{\lambda}{\langle t/t' \rangle} \pi^t\right)^{-t/t'} & \text{si } i = t. \end{cases}$$

(On note π une uniformisante de K et $\langle i \rangle$ le représentant multiplicatif de $i \in k^*$ dans K). Prouvons que pour tout $(\lambda, i) \in R^* \times \mathbb{N}$, on a $c(\pi, (1 - \lambda\pi^i)^{-i}) = 0$; le lemme 6.2 résultera alors du lemme 4.2.1 et de la continuité de c . Il suffit de montrer que $c(\lambda, 1 - \lambda\pi^i) = 0$; or comme k est parfait, il existe pour tout n un élément μ de R^* tel que $\lambda = \mu^{p^n}$. On a donc $c(\lambda, 1 - \lambda\pi^i) = c(\mu, (1 - \lambda\pi^i)^{p^n})$; comme $(1 - \lambda\pi^i)^{p^n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, la conclusion résulte du théorème 8 b). \square

Montrons maintenant la proposition 6.1. Le théorème 1 énonce que $p^r K_m(K)$ est p -divisible pour tout $m \geq 2$; la proposition 0.3 énonce que

$$K_m(K)/K_m^{(1)}(K) \simeq K_m(k) \oplus K_{m-1}(k).$$

En particulier, puisque k est parfait, la multiplication par p dans $K_m(K)/K_m^{(1)}(K)$ est bijective: on en déduit que, pour tout $m \geq 2$, $p^r K_m^{(1)}(K)$ est p -divisible. Soit $i \geq 1$: il existe n tel que $(U_K^{(1)})^{p^n} \subset U_K^{(i)}$; on en conclut que pour tout i assez grand, $p^r K_m^{(1)}(K) = K_m^{(i)}(K)$. Le lemme 6.2 entraîne d'autre part que $D_m(K)$ contient $t^r K_m^{(1)}(K)$; mais les symboles d_π et (lorsque $m = 2$ et $\text{car } K = 0$), $\Delta: K^* \times K^* \rightarrow H(s, K)$ sont continus (c'est évident pour le premier, et le deuxième s'annule sur l'ouvert K^{*p^s} de K^*); comme leur noyau commun est $p^r K_m^{(1)}(K)$, il résulte de tout ceci que $D_m(K) = p^r K_m^{(1)}(K)$, et que $K_m^{\text{top}}(K)$, $K_m^t(K)$ et $K_m(K)/D_m(K)$ coïncident. De plus, ces groupes sont discrets, puisque les symboles ci-dessus sont à valeurs discrètes.

COROLLAIRE 1. — Pour tout $m \geq 2$, $K_m^{\text{top}}(K)$ est discret, isomorphe à

$$\begin{aligned} & K_m(k) \oplus K_{m-1}(k) && \text{si } \text{car } K = p \text{ ou } m > 2; \\ & K_2(k) \oplus K_1(k) \oplus H(s, K) && \text{si } \text{car } K = 0 \text{ et } m = 2. \end{aligned}$$

C'est clair.

COROLLAIRE 2. — $D_m(K)$ est divisible.

On a vu que $D_m(K)$ est p -divisible. Soit n un entier premier à p :

comme K est complet, $U_K^{(1)}$ est divisible par n (lemme de Hensel), donc $D_m(K)$ aussi.

Enfin, les assertions concernant la structure d'anneau de $K_*^{\text{top}}(K)$ sont faciles à établir, et laissées au lecteur. \square

7. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 4 ET 5

a) THÉORÈME 4. — La démonstration de b) est entièrement identique à celle de Merkurjev [19]; nous ne la reproduisons pas et nous nous bornons à montrer a).

Soit ℓ un nombre premier $\neq p$. Pour montrer que $D_2(K)$ n'a pas de ℓ -torsion, on peut supposer $\mu_\ell \subset K$ (argument de transfert habituel). Si $c \in D_2(K)$ et $\ell c = 0$, [15], th. 1.8, permet d'écrire $c = \{x, w\}$, $w^\ell = 1$, $x \in K^*$. On a $1 = \partial c = w^{-v(x)}$ donc on peut supposer $x \in U_K$ et même $x \in R^*$. Par spécialisation, $\{\bar{x}, \bar{w}\} = 0$ dans $K_2(k)$ donc d'après [15], th. 3.5, $\bar{x} = \bar{x}_0 \bar{x}_1$ où \bar{x}_1 est algébrique sur F_p , donc est une racine de l'unité. Si x_1 est le représentant multiplicatif de \bar{x}_1 , $c = \{x_1, w\}$; comme x_1 est une racine de l'unité d'ordre premier à p , il est bien connu ([2], pp. 465-466) que $c = 0$. C.Q.F.D.

b) THÉORÈME 5. — Soit ℓ un nombre premier $\neq p$; Carroll ([2], p. 469) a défini un endomorphisme β_ℓ de $K_2(K)$:

$$\beta_\ell(\{\pi^m a v, \pi^n b w\}) = \left\{ \pi, (-1)^{\ell mn} \left(\frac{w^m}{v^n} \right)^{1/\ell} \right\} + \{v, w^{1/\ell}\}$$

pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mu(K, \ell)$ et $v, w \in \mu(K, \ell')$. $U_K^{(1)}$ ($\ell' = \llcorner$ premier à $\ell \llcorner$).

LEMME 7.1. — Pour tous $x, y, z \in K^*$, $\beta_\ell(\{x, y\}) \cdot \{z\} = \{x\} \cdot \beta_\ell(\{y, z\})$ dans $K_3(K)$.

Il suffit de le vérifier pour x, y, z de la forme π ou $w \in \mu(K, \ell') U_K^{(1)}$; on trouve :

i) $\beta_\ell(\{\pi, \pi\})\{\pi\} = \{\pi, \pm 1\}\{\pi\} = \{\pi\}\{\pi, \pm 1\} = \{\pi\}\beta_\ell(\{\pi, \pi\})$

ii) $\beta_\ell(\{\pi, \pi\})\{w\} = \{\pi(-1)^\ell\}\{w\};$

$$\{\pi\}\beta_\ell(\{\pi, w\}) = \{\pi\}\{\pi, w^{1/\ell}\} = \{\pi, -1, w^{1/\ell}\}.$$

Si $\ell \neq 2$, $\{(-1)^\ell, w\} = \{-1, w^{1/\ell}\}$; si $\ell = 2$, $\{-1, w\} = 0$ par Carroll, pp. 465-466 et parce que $U_K^{(1)}$ est 2-divisible (en effet $p \neq 2$); dans tous les cas,

$$\beta_\ell(\{\pi, \pi\})\{w\} = \{\pi\}\beta_\ell(\{\pi, w\}).$$

$$\text{iii) } \beta_\ell(\{\pi, w\})\{\pi\} = \{\pi, w^{1/\ell}\}\{\pi\} = \{\pi\}\{w^{1/\ell}, \pi\} = \{\pi\}\beta_\ell(\{w, \pi\}).$$

$$\text{iv) } \beta_\ell(\{w, \pi\})\{\pi\} = \{w\}\beta_\ell(\{\pi, \pi\}) \text{ comme en ii).}$$

$$\text{v) } \beta_\ell(\{\pi, w_1\})\{w_2\} = \{\pi, w_1^{1/\ell}\}\{w_2\} = \{\pi, w_1, w_2^{1/\ell}\} = \{\pi\}\beta_\ell(\{w_1, w_2\}).$$

$$\begin{aligned} \text{vi) } \beta_\ell(\{w_1, \pi\})\{w_2\} &= \{w_1^{1/\ell}, \pi\}\{w_2\} = \{w_1, \pi, w_2^{1/\ell}\} \\ &= \{w_1\}\{\pi, w_2^{1/\ell}\} = \{w_1\}\beta_\ell(\{\pi, w_2\}). \end{aligned}$$

$$\text{vii) } \beta_\ell(\{w_1, w_2\})\{\pi\} = \{w_1\}\beta_\ell(\{w_2, \pi\}) \text{ comme en v).}$$

$$\text{viii) } \beta_\ell(\{w_1, w_2\})\{w_3\} = \{w_1, w_2^{1/\ell}, w_3\} = \{w_1\}\beta_\ell(\{w_2, w_3\}).$$

C.Q.F.D.

LEMME 7.2. — Soit $w \in \mu(K, \ell)$. Alors $\{w, U_K\} = 0$; $\{w\}K_2(K) = 0$.

Démonstration. — D'après Carroll [2], pp. 465-466, $\{w, R_K^*\} = 0$; comme $U_K^{(1)}$ est ℓ -divisible, on a aussi $\{w, U_K^{(1)}\} = 0$, d'où la première assertion. La deuxième assertion résulte de la première et du fait facile que $K_2(K) = \{U_K, K^*\}$.

Fin de la démonstration. — Le lemme 1, permet de définir pour tout $m \geq 2$ un endomorphisme β_ℓ de $K_m(K)$ par la formule

$$\beta_\ell(\{x, y\}.c) = \beta_\ell(\{x, y\}).c \quad \text{pour } (x, y, c) \in K^* \times K^* \times K_{m-2}(K).$$

D'après Carroll (p. 741), pour tout $c \in K_2(K)$, $\ell\beta_\ell(c) \equiv c \pmod{\{\mu(K, \ell), K^*\}}$, donc, d'après le lemme 2, si $m \geq 3$, $\ell\beta_\ell = \text{Id}_{K_m(K)}$, ce qui achève la démonstration.

COMPLÉMENT

Dans ce complément, nous démontrons un résultat supplémentaire sur la torsion dans l'anneau de Milnor d'un corps complet pour une valuation

discrète, à corps résiduel parfait. Ceci nous a été suggéré par le rapporteur. Nous gardons les notations en vigueur dans les pages précédentes.

THÉORÈME C.1. — Pour $m \geq 3$, $K_m(K)$ n'a pas de p -torsion.

Pour démontrer ce théorème, on commence par prouver :

PROPOSITION C.1. — Supposons que K contienne une racine de l'unité ζ d'ordre p . Alors, pour $m \geq 3$, $K_m(K)[p] = \{\zeta, K_{m-1}(K)\}$.

Démonstration (Je remercie cordialement le rapporteur, à qui cette démonstration est entièrement due). — Soit c un élément de K^* . Posons $L = K(c^{1/p})$: si $c \notin K^{*p}$, l'extension L/K est cyclique et on note σ un générateur de son groupe de Galois; si $c \in K^{*p}$, on pose $\sigma = 1$. Soient a, b deux éléments de K^* ; d'après le théorème 6, il existe $\beta \in K_2(L)$ tel que $\text{Cor}_{L/K}\beta = \{a, b\}$. Alors l'image de $\text{Cor}_{L/K}\{\beta, c^{1/p}\}$ dans $K_3(K)/\{\zeta, K_2(K)\}$ ne dépend pas du choix de β : en effet, si β' est un autre élément de $K_2(L)$ satisfaisant $\text{Cor}_{L/K}\beta' = \{a, b\}$, le « théorème 90 de Hilbert pour K_2 » de Merkurjev et Suslin ([15], th 1.3) montre que $\beta' - \beta = \sigma(\alpha) - \alpha$, pour un certain $\alpha \in K_2(L)$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Cor}_{L/K}\{\beta', c^{1/p}\} - \text{Cor}_{L/K}\{\beta, c^{1/p}\} &= \text{Cor}_{L/K}\{\sigma(\alpha), c^{1/p}\} - \text{Cor}_{L/K}\{\alpha, c^{1/p}\} \\ &= \text{Cor}_{L/K}\{\alpha, \sigma^{-1}(c^{1/p})\} - \text{Cor}_{L/K}\{\alpha, c^{1/p}\}. \end{aligned}$$

L'affirmation résulte maintenant de ce que $\sigma^{-1}(c^{1/p}) = \zeta^r c^{1/p}$ pour un entier r convenable. Il en résulte que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & (K^*)^m \rightarrow K_m(K)/\{\zeta, K_{m-1}(K)\} \\ & (a, b, c, d_1, \dots, d_{m-3}) \mapsto \text{Cor}_{L/K}\{\beta, c^{1/p}, d_1, \dots, d_{m-3}\} \end{aligned}$$

est bien définie.

LEMME C.1. — φ induit un homomorphisme de $K_m(K)$ dans $K_m(K)/\{\zeta, K_{m-1}(K)\}$, inverse de la multiplication par p .

Démonstration. — La deuxième assertion se déduit facilement de la première. Pour démontrer la première assertion, il suffit de prouver :

- (i) $\varphi(a, 1 - a, c, d_1, \dots, d_{m-3}) = 0$;
- (ii) $\varphi(a, 1 - c, c, d_1, \dots, d_{m-3}) = 0$;
- (iii) $\varphi(a, b, c, 1 - c, d_2, \dots, d_{m-3}) = 0$;

(iv) $\varphi(a, b, c, d_1, \dots, d_i, 1 - d_i, \dots, d_{m-3}) = 0$ pour $1 \leq i < m - 3$;

(v) φ est multilinéaire.

(i) et (iv) sont évidents. Pour prouver (ii) et (iii), on peut supposer $c^{1/p} \notin K^*$. On observe que $1 - c = \prod_{i=0}^{p-1} (1 - \zeta^i c^{1/p})$; on en déduit d'abord que

$$\varphi(a, 1 - c, c, d_1, \dots, d_{m-3}) = \text{Cor}_{L/K} \{a, 1 - c^{1/p}, c^{1/p}, d_1, \dots, d_{m-3}\}$$

(ce qui démontre (ii)), puis que

$$\begin{aligned} \varphi(a, b, c, 1 - c, \dots, d_{m-3}) &= \sum_{i=0}^{p-1} \text{Cor}_{L/K} \{\beta, c^{1/p}, 1 - \zeta^i c^{1/p}, \dots, d_{m-3}\} \\ &= - \sum_{i=0}^{p-1} \text{Cor}_{L/K} \{\beta, \zeta^i, 1 - \zeta^i c^{1/p}, \dots, d_{m-3}\} \in \{\zeta, K_{m-1}(K)\} \end{aligned}$$

(ce qui démontre (iii)).

Prouvons enfin (v) : le seul fait non trivial est la linéarité en c . Pour la démontrer nous utilisons un argument de Tate ([22]) : soient c_1 et c_2 deux éléments de K^* et posons $M = K(c_1^{1/p}, c_2^{1/p})$; soit (toujours grâce au théorème 6) γ un élément de $K_2(M)$ de corestriction $\{a, b\}$. Alors, si L désigne l'un des trois corps $K(c_1^{1/p})$, $K(c_2^{1/p})$, $K((c_1 c_2)^{1/p})$, $\text{Cor}_{M/L} \gamma$ est un élément de corestriction $\{a, b\}$; la linéarité en résulte par la formule de projection et par transitivité des corestrictions. Ceci achève la démonstration du lemme C.1 et la proposition C.1 en résulte. \square

Démontrons maintenant le théorème C.1. On peut évidemment supposer K de caractéristique zéro ([1], prop. 5.13) et par l'argument habituel, supposer que K contient les racines p -ièmes de l'unité. Lorsque $m \geq 4$, le théorème C.1 résulte alors directement de la proposition C.1 et du fait que $K_{m-1}(K)$ est p -divisible (th. 1.a)).

Supposons maintenant $m = 3$. Puisque $K_3(K)$ est p -divisible, sa p -torsion l'est aussi; en utilisant l'argument de transfert, on en déduit qu'il suffit de montrer que $K_3(L)[p] = 0$ pour une extension convenable L de K ; grâce à Merkurjev ([19], prop. 2), on en déduit qu'on peut supposer (quitte à adjoindre à K des racines de l'unité) que K contient une racine de l'unité w d'ordre p^n , où n est tel que p^{2n-1} ne divise pas l'indice de ramification absolu e de K .

Soient a, b deux éléments de K^* : le symbole $\{a, b, w\}$ ne dépend que de $\{a, b\}$ (mod p^n) ; le théorème 1.b) et la proposition 4.1 entraînent donc que $\{a, b, w\} = \{u, \pi, w\}$, où $u \in H(n, K)$ et π est une uniformisante de K . De même, notons $\zeta = w^{p^{n-1}}$; alors $\{a, b, \zeta\} = \{u', \pi, \zeta\}$ où $u' \in H(1, K)$. Il est clair que

$$\{u, 1-w, w\} = 0.$$

De plus, si $u \in H(n, K)$, pour tout x on a $\{u, x, w\} = v(x)\{u, \pi, w\}$ (prop. 4.1) ; appliquant ceci avec $x = 1 - w$, on en déduit que pour tout $u \in H(n, K)$, $(e/p^{n-1}(p-1)) \cdot \{u, \pi, w\} = 0$. Or, par hypothèse, $e/p^{n-1}(p-1)$ n'est pas divisible par p^n ; comme $H(n, K) \rightarrow H(1, K)$ est surjective (prop. 1.2.a)), on en conclut que pour tout $u' \in H(1, K)$, $\{u', \pi, \zeta\} = 0$; vu la proposition C.1 et la remarque qui précède, cela achève de montrer que $K_3(K)[p] = 0$. \square

COROLLAIRE. — Supposons le corps résiduel k de K algébrique sur F_p ; alors, pour $m \geq 3$, $K_m(K)$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel (de dimension la puissance du continu d'après [1], p. 389, prop. 5.10).

Cela résulte du théorème C.1 et du théorème 5.

Remarque. — Ceci montre que, contrairement au résultat de Suslin pour K_2 ([15], th. 3.5), il n'est pas vrai en général que pour un corps F et une racine de l'unité d'ordre p , w de F , les éléments x de $K_2(F)/pK_2(F)$ tels que $\{w, x\} = 0$ dans $K_3^M(F)$ proviennent de $K_2(F_0)/pK_2(F_0)$ où F_0 est la fermeture algébrique dans F de son sous-corps premier.

BIBLIOGRAPHIE

- [0] Algebraic K-theory, II, *Lect Notes in Math.*, 342 (1973).
- [1] H. BASS, J. TATE, The Milnor ring of a global field, in Algebraic K-theory, II, *Lect. Notes in Math.*, 342 (1973), 349-428.
- [2] J. E. CARROLL, On the torsion in K_2 of local fields, in Algebraic K-theory, II, *Lect. Notes in Math.*, 342 (1973), 464-473.
- [3] K. DENNIS, M. STEIN, K_2 of discrete valuation rings, *Adv. in Math.*, 18, n° 2 (1975), 182-238.
- [4] B. KAHN, Thèse de 3^e cycle, Université de Bordeaux I, 1983.
- [5] K. KATO, A generalization of class field theory by using K-groups, I : *Journ. Fac. Sci. Tokyo*, 26 (1979), 303-376, II ; *ibid.* 27 (1980), 603-683.
- [6] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.
- [7] J. MILNOR, Introduction to algebraic K-theory, *Ann. of Math. Studies*, 72, Princeton, 1971.

- [8] J. MILNOR, Algebraic K-theory and quadratic forms, *Inv. Math.*, 9 (1969-70), 318-344.
- [9] C. MOORE, Group extensions of p -adic and adelic linear groups, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 35 (1969).
- [10] A. PARSIN, Abelian coverings of arithmetic schemes, *Soviet. Math. Dokl.*, vol. 19, n° 6 (1978), 1438-1442.
- [11] I. R. ŠAFAREVIČ, A general reciprocity law, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 4 (1956), 73-105.
- [12] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, 2^e éd., Hermann, Paris, 1968.
- [13] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne, *Lect. Notes in Math.*, 5 (1964).
- [14] C. SOULÉ, K_2 et le groupe de Brauer, Séminaire Bourbaki (1982), n° 601.
- [15] A. SUSLIN, *Torsion in K_2 of fields*, prépublication, Léninegrad, 1982.
- [16] R. SWITZER, *Algebraic topology-Homotopy and homology*, Springer, 1975.
- [17] J. TATE, Relations between K_2 and Galois cohomology, *Inv. Math.*, 36 (1976), 257-274.
- [18] A. MERKURJEV and A. SUSLIN, K-cohomology of Severi-Brauer varieties and norm residue homomorphism, *Math. USSR, Izvestija*, 21 (1983), (trad. anglaise).
- [19] A. MERKURJEV, On the torsion in K_2 of local fields, *Ann. of Math.*, 118 (1983), 375-381.
- [20] J. GRAHAM, Continuous symbols on fields of formal power series, Algebraic K-theory, II, *Lect. Notes in Math.*, 342 (1973), 474-486.
- [21] K. KATO, *Milnor's K-theory and the Chow group of zero cycles*, prépublication.
- [22] J. TATE, On the torsion in K_2 of fields, in *Algebraic Number Theory Conference*, Kyoto Intern. Symposium 1976, 243-261, Japan Soc. Prom. Sci., 1977.
- [23] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, 2^e édition, Hermann, Paris, 1965.

Manuscrit reçu le 20 juin 1983
révisé le 29 décembre 1983.

Bruno KAHN,
22 bis, rue Jouvenet
75016 Paris.
