ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENISE HUET

Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites

Annales de l'institut Fourier, tome 10 (1960), p. 61-150

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1960__10__61_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 61-151.

PHÉNOMÈNES DE PERTURBATION SINGULIÈRE DANS LES PROBLÈMES AUX LIMITES

par **Denise HUET** (Dijon).

INTRODUCTION

Initialement, notre but était l'étude des deux problèmes suivants, où Ω désigne un ouvert de R^n, et ε un paramètre réel strictement positif.

PROBLÈME 1. — Étant donnés deux opérateurs différentiels A et B, avec ordre de A supérieur à ordre de B, que fait, quand $\varepsilon \to 0$, la solution d'un problème aux limites sur Ω, relatif à $(\varepsilon A + B)u_\varepsilon = f$, où f est donnée. En particulier, u_ε converge-t-elle vers la solution u d'un problème aux limites relatif à $Bu = f$.

PROBLÈME 2. — Désignant par t une variable réelle $\geqslant 0$, par D l'opérateur $(\partial/\partial t)$, par $A(t)$ et $B(t)$ deux opérateurs différentiels en x, $(x \in R^n)$, dépendants du temps, avec ordre de $A(t)$ supérieur à ordre de $B(t)$ pour chaque t, que fait, lorsque $\varepsilon \to 0$, la solution u_ε d'un problème de type mixte relatif à $(\varepsilon A(t) + B(t))u_\varepsilon + Du_\varepsilon$ (resp. $D^2u_\varepsilon) = f$, où f est donnée. En particulier, u_ε converge-t-elle vers la solution u d'un problème de type mixte, relatif à $B(t)u + Du$ (resp. $D^2u) = f$.

Pour étudier ces deux problèmes qui entrent dans un nombre important de problèmes de physique mathématique et de mécanique, (cf. Friedrichs [2]) nous avons utilisé systématiquement la méthode de résolution des problèmes aux limites de M. Lions (voir la bibliographie). Ceci nous a amenés à faire entrer les problèm es 1 et 2dans des problèmes plus généraux :

Problème 1 *bis*. — Étant donnés une famille d'opérateurs B_ε et un opérateur B, à quelles conditions la solution d'un problème aux limites relatif à $B_\varepsilon u_\varepsilon = f$, converge-t-elle, vers la solution d'un problème aux limites relatif à $Bu = f$.

Problème 2 *bis*. — Étant donnés un opérateur dépendant du temps $B(t)$ et une famille d'opérateurs dépendants du temps $B_\varepsilon(t)$, à quelles conditions la solution d'un problème mixte relatif à $B_\varepsilon(t)u_\varepsilon + Du_\varepsilon$ (resp. D^2u_ε) $= f$ converge-t-elle vers la solution d'un problème mixte relatif à $Bu + Du$ (resp. D^2u) $= f$.

Le chapitre I étudie le problème 1 *bis* et le chapitre II le problème 2 *bis*.

Chapitre 1.

Après avoir rappelé au n° 1, la méthode de résolution des problèmes aux limites de M. Lions, nous établissons au n° 2, les théorèmes de convergences. On se donne trois espaces de Hilbert, V, W, et H, avec $V \subset W \subset H$, et V dense dans H. On désigne par $\overline{V}_{(W)}$ l'adhérence de V dans W, muni de la topologie induite par W. On prend sur V (resp. W) une famille de formes sesquilinéaires continues $b(\varepsilon; u, v)$ (resp. une forme sesquilinéaire continue $b(u, v)$), qui définit une famille d'opérateurs B_ε (resp. un opérateur B), soit N_ε (resp. N_B) l'espace attaché à $b(\varepsilon; u, v)$ sur V (resp. à $b(u, v)$ sur $\overline{V}_{(W)}$). Le théorème 1. 2, (resp. 1. 3) établit la convergence dans W faible (resp. W fort) de u_ε solution de $B_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in N_\varepsilon$, f donné dans H, vers la solution u de $Bu = f$, $u \in N_B$. Dans le cas particulier du problème 1, on obtient un résultat très simple : si $a(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur V, et si $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$, alors, si $b(u, v)$ est elliptique sur $\overline{V}_{(W)}$, et si $\varepsilon a(u, v) + b(u, v)$ est elliptique sur V, pour ε assez petit, la solution u_ε de $B_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in N_\varepsilon$, converge dans W fort vers la solution u de $Bu = f$, $u \in N_B$, c'est l'objet du théorème 1. 4.

Le n° 3 donne des exemples d'application de ces résultats aux équations aux dérivées partielles et aux systèmes différentiels.

Dans les n° 4 et 5, nous avons essayé d'améliorer (dans le cas du problème 1) les résultats du théorème 1. 4, en faisant des hypothèses de régularité supplémentaires sur Ω, A, B et f, et en utilisant les résultats de Friedrichs [1] Nirenberg [1], et Browder [1]. Les résultats du n° 5, étudiant la convergence à la frontière sont quelque peu négatifs.

Dans le n° 6, nous étudions, dans le cas général, la convergence des valeurs propres et des fonctions propres de B_ε.

Chapitre 2.

Reprenant les notations du chapitre 1, et désignant par $\mathcal{D}'_+(t; E)$, l'espace des distributions en t, à valeurs dans un espace de Banach E, à support limité à gauche, on établit dans le n° 1, la convergence dans $\mathcal{D}'_+(t; W)$ de la solution u_ε du problème mixte $B_\varepsilon u_\varepsilon + Du_\varepsilon$ (resp. $D^2 u_\varepsilon) = T$, $u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; N_\varepsilon)$, où T est donnée dans $\mathcal{D}'_+(t; H)$, vers la solution u de $Bu + Du$ (resp. $D^2 u) = T$, $u \in \mathcal{D}'_+(t; N_B)$.

Les numéros suivants concernent des opérateurs et des conditions aux limites dépendant du temps. On obtient l'opérateur $B_\varepsilon(t)$ (resp. $B(t)$) et l'espace $N_\varepsilon(t)$ (resp. $N_B(t)$) à partir de la famille de formes sesquilinéaire $b(\varepsilon; t; u, v)$ (resp. $b(t; u, v)$). Le n° 3 établit des théorèmes de convergence fine pour chaque $t \geqslant 0$, dans W, et dans $L^2((0, s); W)$ de la solution $u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t)$ de $B_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t) + Du_\varepsilon(t)$ (resp. $D^2 u_\varepsilon(t)) = h(t)$, avec les conditions initiales $u_\varepsilon(0) = 0$ (resp. $u_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(0) = 0$) vers la solution $u(t) \in N_B(t)$, de

$$B(t)u(t) + Du(t) \quad (\text{resp. } D^2 u(t)) = h(t),$$

avec les conditions initiales $u(0) = 0$ (resp. $u(0) = u'(0) = 0$), où $h(t)$ est une fonction donnée à valeurs dans H. C'est l'objet des théorèmes 2. 8, 2. 9, 2. 10 et 2. 11. Le n° 4 donne des applications et des exemples.

L'essentiel de ce travail a été résumé dans D. Huet [1] et [2].

Je suis heureuse de pouvoir remercier très vivement M. Lions de m'avoir suggéré ces problèmes et de m'avoir apporté une aide constante tout au long de ce travail. Ses nombreuses remarques m'ont permis des améliorations très sensibles.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

PERTURBATION SINGULIÈRE D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

1. — Préliminaires.

Nous rappelons dans ce numéro les éléments essentiels de la méthode de résolution des problèmes aux limites de M. Lions [1] que nous utilisons constamment dans la suite.

On se donne un espace de Hilbert H dont on note la norme par $|u|$ et le produit scalaire par (u, v). Soit V un espace de Hilbert avec [2]

$$(1, 1) \qquad V \subset H \quad \text{et } V \text{ dense dans } H.$$

Soit $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur V.

Espace N et opérateur A associés à $a(v, u)$ sur V.

On appelle espace N associé à $a(u, v)$ sur V, l'espace des $u \in V$ tels que l'application $v \to a(u, v)$ soit continue sur V muni de la topologie induite par H. Comme V est dense dans H, pour $u \in N$, il existe $Au \in H$ tel que

$$(1, 2) \qquad a(u, v) = (Au, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in V$$

ce qui définit l'opérateur A application linéaire de N dans H. On munit N de la topologie la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ de N dans V et $u \to Au$ de N dans H.

(1) Voir Lions [1] chapitre I.

(2) E et F étant deux espaces vectoriels topologiques, $E \subset F$ signifie que E est contenu dans F et possède une topologie plus fine que celle induite par F.

Formes $a(u, v)$ V-elliptiques.

DÉFINITION 1. 1. — *Nous dirons que la forme* $a(u, v)$ *est* V-*elliptique, s'il existe un nombre* $\alpha > 0$, *tel que*

$$(1, 3) \qquad \mathrm{Re}[a(u,u)] \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \qquad \textit{pour tout} \qquad u \in V \text{ (3)}$$

Posons

$$(1, 4) \qquad a_1(u, v) = \frac{1}{2}\left(a(u, v) + \overline{a(v, u)}\right)$$

et

$$(1, 5) \qquad a_2(u, v) = \frac{1}{2i}\left(a(u, v) - \overline{a(v, u)}\right).$$

Alors $a(u, v) = a_1(u, v) + ia_2(u, v)$. De plus $a_1(u, v)$ et $a_2(u,v)$ sont hermitiennes. Dire que $a(u, v)$ est elliptique sur V, revient à dire que $a_1(u, v)$ définit sur V un produit scalaire équivalent à $(u, v)_V$.

Théorème d'isomorphisme.

On peut se poser les problèmes suivants :

PROBLÈME 1. 1. — f *étant donnée dans* H, *existe-t-il* u *dans* N *tel que* $Au = f$?

et

PROBLÈME 1. 2. — f *étant donnée dans* H, *existe-t-il* u *dans* V *tel que*

$$(1, 6) \qquad a(u, v) = (f, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in V$$

On a alors les résultats suivants [4] :

PROPOSITION 1. 1. — *Les problèmes* 1. 1 *et* 1. 2 *sont équivalents.*

et

THÉORÈME 1. 1. — *Si* $a(u, v)$ *est* V-*elliptique,* A *est un isomorphisme topologique de* N *sur* H.

Par suite, si $a(u, v)$ est V-elliptique, le problème 1. 1 admet une solution et une seule.

[3] Re désigne la partie réelle. Pour tout espace de Hilbert V, $(u, v)_V$ désigne le produit scalaire, et $\|u\|_V$ la norme dans V.

[4] Voir Lions [3], p. 22.

Problèmes non homogènes.

On suppose qu'il existe une espace vectoriel topologique E, et un opérateur $\tilde{A}$, application linéaire continue V dans E, tel que $\tilde{A}\ h = Ah$ pour tout $h \in N$.

Soit f donnée dans H, et h donnée dans V tel que $\tilde{A}h \in H$. Soit le

PROBLÈME 1. 3. — *Trouver u dans* V *tel que*

$$\tilde{A}u = f; \qquad u - h \in N.$$

On pose $U = u - h$; on alors $\tilde{A}U = AU = f - \tilde{A}h \in H$. On est alors ramené au problème 1. 1 Par suite, si $a(u, v)$ est V-elliptique, le problème 1. 3 admet une solution et une seule

Opérateur de Green.

Dans le cas où $a(u, v)$ est V-elliptique, A est un isomorphisme de N sur H. L'opérateur G, inverse de A, isomorphisme de H sur N est appelé *opérateur de Green de la forme* $a(u, v)$.

Cas particuliers.

Soit Ω un ouvert quelconque de R^n; $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, sur Ω, muni de la topologie limite inductive habituelle ([5]); $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω.

Un cas important pour les équations aux dérivées partielles est celui où V et H sont tels que

$$(1, 7) \qquad \mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset H \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}(\Omega) \text{ dense dans } H.$$

On peut donner alors une autre caractérisation de N et de A. Pour u fixé dans V, $\varphi \to a(u, \varphi)$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, donc définit $\mathcal{A}u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que

$$(1, 8) \qquad a(u, \varphi) = \langle \mathcal{A}u, \bar{\varphi} \rangle$$

(le crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$) ce qui définit $\mathcal{A}$ comme application de V dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\mathcal{N}$ l'espace des $u \in V$ avec $\mathcal{A}u \in H$ et

$$(1, 9) \qquad a(u, v) = (\mathcal{A}u, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in V.$$

([5]) Voir Schwartz [1].

On munit $\mathcal{N}$ de la topologie la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ de $\mathcal{N}$ dans V et $u \to \mathcal{A}u$ de $\mathcal{N}$ dans H. On a alors la [6]

PROPOSITION 1. 2. — $N = \mathcal{N}$ *et* $A = \mathcal{A}$.

Sous l'hypothèse (1, 7), si $a(u, v)$ est V-elliptique, la restriction de l'opérateur de Green à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et réciproquement la restriction de G à $\mathcal{D}(\Omega)$ définit complètement G puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans H. Mais d'après le théorème des noyaux [7], G définit un élément $G_{x,y}$ de $\mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$: *On appelle* $G_{x,y}$ *le noyau de Green de la forme* $a(u, v)$ *sur* V.

Un autre cas important pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles est celui où [8] :

$$(1, 10) \qquad (\mathcal{D}(\Omega))^N \subset V \subset H \subset (\mathcal{D}'(\Omega))^N$$

avec $(\mathcal{D}(\Omega))^N$ dense dans H [9].

Le théorème 1. 1 permet de résoudre de très nombreux problèmes aux limites elliptiques [10]. La résolution de ces problèmes nécessite l'introduction d'un certain nombre d'espaces fonctionnels dont nous allons parler brièvement maintenant.

Espaces $H^k(\Omega)$, pour k entier $\geqslant 0$.

Pour $k = 0$, $H^0(\Omega)$ est l'espace, en général noté $L^2(\Omega)$, des classes de fonctions de carré sommable sur Ω, espace Hilbertien dont on désignera le produit scalaire par $(u, v)_0$ et la norme par $|u|_0$. Pour k entier > 0, $H^k(\Omega)$ désigne l'espace des $u \in L^2(\Omega)$, tels que $D^p u \in L^2(\Omega)$, pour tout $|p| \leqslant k$, [11] muni du produit scalaire $(u, v)_k = \sum_{|p| \leqslant k} (D^p u, D^p v)_0$ qui en fait un espace de Hilbert. On désigne par $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$, muni de la topologie induite. Soit $K^m(\Omega)$ l'orthogonal de $H_0^m(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

(6) Voir Lions [3] p. 29.

(7) Voir Schwartz [4].

(8) De façon générale E étant un espace vectoriel topologique, E^N désigne le produit $E \times \ldots \times E$: N facteurs.

(9) Voir Lions [1], p. 36.

(10) Voir Lions [1], [2], [3], [4], Lions-Schwartz [1]; Schwartz [2] et [3].

(11) On utilise la notation condensée : $p = (p_1, \ldots, p_n)$; $|p| = p_1 + \cdots + p_n$ et $D^p = \dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}$.

On désigne par Γ la frontière de Ω. Dans tout ce qui suit, on suppose que Γ est une variété indéfiniment différentiable, de dimension $n - 1$. Soit $L^2(\Gamma)$ l'espace des classes de fonctions de carré sommable sur Γ pour la mesure superficielle ds.

Espaces $H^m(\Gamma)$ et $H^m_k(\Gamma)$ (12).

Opérateur γ_k.

On sait qu'il existe une application linéaire continue et une seule $u \to \gamma_0 u$ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, telle que $\gamma_0 u$ coïncide avec u sur Γ lorsque $u \in C(\bar{\Omega})$, espace des fonctions qui sont restriction à Ω de fonctions de $\mathcal{D}(R^n)$. Si maintenant $u \in H^m(\Omega)$, et si on désigne par $\partial u/\partial\nu$ la dérivée normale de u par rapport à Γ, on pose $\gamma_k u = \gamma_0 \, (\partial^k u/\partial\nu^k)$, $0 \leqslant k \leqslant m - 1$, ce qui définit une application linéaire continue de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. On définit encore pour $u \in H^m(\Omega)$

$$\gamma(u) = (\gamma_0 u, \ \gamma_1 u, \ \ldots, \ \gamma_{m-1} u) \in (L^2(\Gamma))^m.$$

Espace $H^m(\Gamma)$.

Il est facile de voir, en utilisant une partition de l'unité, puis un système de coordonnées locales, que, pour toute fonction $f \in (\mathcal{D}(\Gamma))^m$, il existe une fonction $P(f) \in H^m(\Omega)$ telle que

$$\gamma(P(f)) = f.$$

Soit $h(f)$ la projection de $P(f)$ sur $K^m(\Omega)$. Alors $h(f)$ est l'unique élément de $K^m(\Omega)$ tel que

$$\gamma(h(f)) = f.$$

On peut donc définir intrinsèquement, sur $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$, une structure préhilbertienne en posant :

$$(1, 11) \qquad (f, g)_{H^m(\Gamma)} = (h(f), h(g))_m$$

$H_m(\Gamma)$ est l'espace de Hilbert, complété de $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ pour la structure (1, 11). C'est un espace de fonctions.

On a la

PROPOSITION 1. 3. — *L'application* $u \to \gamma u$ *de* $C(\bar{\Omega})$ *dans* $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue* $u \to \gamma\, u$ *de* $H^m(\Omega)$ *dans* $H^m(\Gamma)$.

(12) Voir Lions [2].

Espace H_k^m (Γ), $k \leqslant m-1$.

Soit $f \in D(\Gamma)$. On pose $f_k = (\underbrace{0 \ ,\ldots,\ 0}_{k-1}, f, \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{m-k})$ et $P_k(f) = P(f_k)$. Alors on a $\gamma_k(P_k(f)) = f$. Soit V_k le sous-espace orthogonal dans $H^m(\Omega)$ du sous-espace des u tels que $\gamma_k u = 0$. Si on désigne par $h_k(f)$ la projection sur V_k de $P_k(f)$, $h_k(f)$ est uniquement déterminé et est l'élément de V_k vérifiant $\gamma_k(h_k(f)) = f$.

On désigne par $H_k^m(\Gamma)$ l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{D}(\Gamma)$ pour la structure

(1, 12) $$(f, g)_{H_k^m(\Gamma)} = (h_k(f),\ h_k(g))_m.$$

On a la

Proposition 1. 4. — *L'application $u \rightarrow \gamma_k u$ de* $C(\Omega)$ *dans* $\mathcal{D}(\Gamma)$ *se prolonge en une application linéaire continue, encore notée $u \rightarrow \gamma_k u$ de* $H^m(\Omega)$ *dans* $H_k^m(\Gamma)$.

Donnons enfin quelques définitions sur les opérateurs de dérivation transversaux, utiles dans les problèmes de dérivées obliques.

Soit un opérateur différentiel

$$B = \sum_p b_p(x) D^p$$

dont les coefficients $b_p(x)$ sont indéfiniment différentiables, bornés dans R^n ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$. Dans le cas où Ω est l'ouvert $x_n > 0$ de frontière $x_n = 0$, *l'ordre de transversalité de* B *par rapport à* Γ est le plus grand p_n possible pour lequel $b_p(x_1, \ldots\ x_{n-1}, 0)$ ne soit pas identiquement nul. Si l'ouvert Ω a pour frontière une variété indéfiniment différentiable de dimensions $n-1$, quelconque, on définit l'ordre de transversalité de B en un point $a \in \Gamma$, $\mu(a)$, de façon évidente, à l'aide d'une carte locale, déterminée par $x \rightarrow \varphi(x) = \xi$ en prenant pour ξ_n la distance de x à Γ. L'ordre de transversalité de B par rapport à Γ est le plus grand des nombres $\mu(a)$ quand on parcourt Γ.

Opérateurs B^Γ.

On définit une application $u \rightarrow B^\Gamma u$ de $C(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Gamma)$, par $B^\Gamma u = \gamma_0(Bu)$. En imposant certaines conditions à B et à Γ, on peut prolonger cette application en application linéaire continue de $H^m(\Omega)$ dans H'^m_k (Γ) dual de $H_k^m(\Gamma)$.

2. — Position du problème. Théorèmes de convergence.

Soit V et W deux espaces de Hilbert, avec

(1, 13) $\quad V \subset W \subset H, \qquad V$ dense dans H.

On désignera par $\overline{V}_{(W)}$, l'adhérence de V dans W, muni de la topologie induite par W.

On prend sur V (resp. W) une famille de formes sesquilinéaires continues $b(\varepsilon; u, v)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ [13], (resp. une forme sesquilinéaire continue $b(u, v)$). On dira que l'hypothèse (1, 14) (resp. (1, 15), (1, 16), (1, 17)) est vérifiée si on a

(1, 14) $\varepsilon \to b(\varepsilon; u, v)$ est continue sur $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, pour tout $u, v \in V$

(resp.

(1, 15) $b(\varepsilon; u, v) \to b(u, v)$ pour tout $u, v \in V$ quand $\varepsilon \to 0$

(1, 16) (condition d'ellipticité) il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ avec ε et $\beta > 0$, tels que :

$$\mathrm{Re}\, b(\varepsilon; u, u) \geqslant \alpha(\varepsilon)\|u\|_V^2 + \beta\|u\|_W^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in V \text{ et } \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

(1, 17) condition d'ellipticité sur $b(u, v)$: il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\mathrm{Re}\, b(u, u) \geqslant \gamma\|u\|_W^2 \qquad \text{pour tout} \qquad (u \in \overline{V}_{(W)})$$

Soit f donné dans H, et une famille f_ε, de H, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Nous dirons que f_ε vérifie (1, 18) (resp. (1, 18′) (1, 18″)) si on a

(1, 18) $\qquad f_\varepsilon \to f$ dans H quand $\varepsilon \to 0$

(resp.

(1, 18′) $\quad f_\varepsilon \to f$ faiblement dans H quand $\varepsilon \to 0$

(1, 18″) $\qquad f_\varepsilon$ est bornée dans H).

Soit N_ε et B_ε (resp. N_B et B) l'espace et l'opérateur attachés à $b(\varepsilon; u, v)$ (resp. à $b(u, v)$) sur V (resp. $\overline{V}_{(W)}$).

Sous l'hypothèse (1, 16), soit u_ε la solution dans V de

(1, 19) $\quad b(\varepsilon; u, v) = (f_\varepsilon, v) \quad$ pour tout $\quad v \in V; \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

[13] Dans tout ce travail, ε désigne un nombre réel > 0. On le ne répètera plus.

(ou ce qui est équivalent, d'après la proposition 1. 1, la solution de

(1, 19') $$B_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon; \qquad u_\varepsilon \in N_\varepsilon).$$

Nous nous proposons d'étudier le comportement de u_ε quand $\varepsilon \to 0$ ([14]).

Nous avons le premier résultat suivant :

PROPOSITION 1. 5. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16) *et* (1, 18"), u_ε *solution de* (1, 19) *est borné dans* W, *et* $|b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon)|$ *est borné. De plus* $(\alpha(\varepsilon))^{1/2}\, u_\varepsilon$ *est borné dans* V.

DÉMONSTRATION. — Écrivons (1, 19) pour $v = u_\varepsilon$:

$$b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (f_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

On en déduit

$$|b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon)| \leqslant |f_\varepsilon|\,|u_\varepsilon| \leqslant K_1\,|f_\varepsilon|\,\|u_\varepsilon\|_W.$$

où K_1 est indépendante de ε. Donc, en particulier :

$$\mathrm{Re}\; b(\varepsilon; u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqslant K_1\,|f_\varepsilon|\,\|u_\varepsilon\|_W$$

On en déduit facilement la proposition, en utilisant (1, 16) pour minorer le premier membre, et (1, 18") pour majorer le second.

Notons que l'on a :

(1, 20) $$\|u_\varepsilon\|_W \leqslant K_2\,|f_\varepsilon|.$$

Où K_2 est indépendante de ε.

Soit, maintenant, sous l'hypothèse (1, 17), u la solution dans $\overline{V}_{(W)}$ de

(1, 21) $$b(u, v) = (f, v) \quad \text{pour tout } v \in \overline{V}_{(W)}$$

ou, ce qui est équivalent de

(1, 21') $$Bu = f;\; u \in N_B.$$

Nous avons alors le premier théorème de convergence :

THÉORÈME 1. 2. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16), (1, 17) (1, 18'), et

(1, 22) $$\left\{\begin{array}{l} \textit{Pour toute famille } w_\varepsilon \textit{ de } V, \textit{ pour laquelle } |b(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)| \\ \textit{est borné, } b(\varepsilon; w_\varepsilon, v) - b(w_\varepsilon, v) \to 0, \textit{ pour tout} \\ v \in V, \textit{ quand } \varepsilon \to 0 \end{array}\right.$$

([14]) Certains aspects de ce problème sont étudiés dans Visik-Liousternik [1] dans le cas du problème de Dirichlet.

u_ε *solution de* (1, 19) *converge, dans* W *faible vers* u *solution de* (1, 21).

Démonstration. — D'après la proposition 1. 5, u_ε est borné dans W. De toute suite u_{ε_i}, on peut donc extraire une sous-suite u_{ε_j}, convergent, dans W faible, vers w; mais on a

$$b(\varepsilon_j;\, u_{\varepsilon_j},\, v) = (f_{\varepsilon_j},\, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in V.$$

Le second membre, d'après (1, 18') converge vers (f, v).
Le premier membre peut s'écrire :

$$\{ b(\varepsilon_j;\, u_{\varepsilon_j},\, v) - b(u_{\varepsilon_j},\, v) \} + b(u_{\varepsilon_j},\, v).$$

D'après la proposition 1. 5, on peut appliquer (1, 22) à u_ε. Par suite le terme entre accolade tend vers 0. D'autre part, comme $u_{\varepsilon_j} \to w$ dans W faible, $b(u_{\varepsilon_j},\, v) \to b(w,\, v)$.
On a donc

$$b(w,\, v) = (f,\, v) \text{ pour tout } v \in V \text{ donc pour tout } v \in \overline{V}_{(W)}.$$

Par suite $w = u$, ce qui démontre le théorème.
Nous avons enfin le théorème de convergence forte :

Théorème 1. 3. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16), (1, 17), (1, 18), (1, 22) *et*
(1, 23) (*resp.* (1, 23')) : *il existe* $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε, (*resp.* $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε, *et* $\lambda > 0$) *tel que*

$$\operatorname{Re}\{ b(\varepsilon;\, v,\, v) - b(v,\, v) \} + \delta(\varepsilon) \operatorname{Re} b(v,\, v) \geqslant 0$$

$$(\textit{resp. } \operatorname{Re}\{ b(\varepsilon;\, v,\, v) - b(v,\, v) \} + \delta(\varepsilon) \operatorname{Re} b(v,\, v) \geqslant \lambda\alpha(\varepsilon) \|v\|_V^2)$$

pour tout $v \in V$.
Alors $u_\varepsilon \to u$ *dans* W *fort* (*resp.* $u_\varepsilon \to u$ *dans* W *fort et* $(\alpha(\varepsilon))^{1/2}\, u_\varepsilon \to 0$ *dans* V).

Démonstration. — On a

$$(1,\ 24) \quad \operatorname{Re}\{ b(\varepsilon;\, u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) - b(u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - u,\, u_\varepsilon - u) \} = \operatorname{Re}\{ (f_\varepsilon,\, u_\varepsilon) - (f,\, u_\varepsilon) + b(u - u_\varepsilon,\, u) \}.$$

D'après (1, 18) et le théorème 1. 2, le second membre de cette égalité tend vers 0. Quant au premier membre, il est minoré, d'après (1, 17) et (1,23) (resp. (1, 23')) par

$$-\delta(\varepsilon) \operatorname{Re} b(u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) + \gamma \|u_\varepsilon - u\|_W^2$$
$$(\text{resp. } \lambda\alpha(\varepsilon) \|u_\varepsilon\|_V^2 - \delta(\varepsilon) \operatorname{Re} b(u_\varepsilon,\, u_\varepsilon) + \gamma \|u_\varepsilon - u\|_W^2).$$

D'où le théorème, puisque, u_ε étant borné dans W, et $\delta(\varepsilon)$ convergent vers 0, $\delta(\varepsilon)\mathrm{Re}\, b(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$ converge vers 0.

Cas particuliers.

1° *Cas où* $b(\varepsilon; u, v)$ *est linéaire en* ε. — On prend V et W avec (1, 13), puis sur V (resp. W) une forme sesquilinéaire continue $a(u, v)$ (resp. $b(u, v)$) et on fait les hypothèses d'ellipticité suivantes :

(1, 25) $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$ est elliptique sur V pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

(1, 26) $b(u, v)$ est elliptique sur $\overline{V}_{(W)}$.

Nous avons dans ce cas le théorème de convergence très simple suivant :

Théorème 1. 4. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 18), (1, 25) *et* (1, 26) *la solution* u_ε *de* (1, 19) *converge, quand* $\varepsilon \to 0$, *dans* W, *vers la solution* u *de* (1, 21). *De plus* $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0$, *dans* V.

Démonstration. — Nous pouvons, sans nuire à la généralité, supposer que $\varepsilon_0 = 1$. L'hypothèse (1, 25), écrite pour $\varepsilon = 1$, signifie qu'il existe $\mu > 0$ tel que

(1, 27) $\mathrm{Re}(a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \mu \|v\|_V^2$ pour tout $v \in V$.

Comme pour tout $v \in V$, $\mathrm{Re}\, b(v, v) \geqslant 0$, on aura :

(1, 28) $$\mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \mu\varepsilon \|v\|_V^2$$

pour tout $v \in V$ et tout $\varepsilon \leqslant 1$.

Cependant, si $\mathrm{Re}\, a(v, v) \leqslant 0$, pour $\varepsilon \leqslant 1$, on a

$$\varepsilon \mathrm{Re}\, a(v, v) \geqslant \mathrm{Re}\, a(v, v),$$

donc

(1, 29) $\mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \mu \|v\|_W^2$ pour $\varepsilon \leqslant 1$,

et tout $v \in V$ vérifiant $\mathrm{Re}\, a(v, v) \leqslant 0$).

L'hypothèse (1, 26) signifie qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\mathrm{Re}\, b(v, v) \geqslant \gamma \|v\|_W^2$$

pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$. On a donc aussi :

(1, 30) $\mathrm{Re}(\varepsilon a(v, v) + b(v, v)) \geqslant \gamma \|v\|_W^2$ pour $\varepsilon \leqslant 1$

et tout $v \in V$ vérifiant $\mathrm{Re}\, a(v, v) > 0$.

Réunissant (1, 29) et (1, 30) on voit qu'il existe $\nu > 0$, tel que

$$(1,\ 31) \qquad Re(\varepsilon a(v,\ v) + b(v,\ v)) \geqslant \nu\|v\|_W^2$$

pour tout $v \in V$ et $\varepsilon \leqslant 1$

Réunissant (1, 28) et (1, 31) on déduit :

$$(1,\ 32) \qquad \begin{cases} Re(\varepsilon a(v,\ v) + b(v,\ v)) \geqslant \frac{\mu}{2}\varepsilon\|v\|_V^2 + \frac{\nu}{2}\|v\|_W^2. \\ \text{pour tout } v \in V \text{ et tout } \varepsilon \leqslant 1. \end{cases}$$

Par suite l'hypothèse (1, 16) du théorème 1. 3 est vérifiée. D'autre part, si $Re(\varepsilon a(w_\varepsilon,\ w_\varepsilon) + b(w_\varepsilon,\ w_\varepsilon))$ est borné, alors, d'après (1, 32) $\varepsilon^{1/2}w_\varepsilon$ est borné dans V, donc $\varepsilon a(w_\varepsilon,\ v) \to 0$ pour tout $v \in V$, ce qui n'est autre que (1, 22).

Enfin, d'après (1, 27) on a :

$$(1,\ 33) \qquad Re\{\varepsilon a(v,\ v)\} + \varepsilon Re\ b(v,\ v) \geqslant \mu\varepsilon\|v\|_V^2 \text{ pour tout } v \in V \text{ et } \varepsilon \leqslant 1.$$

ce qui n'est autre que (1, 23′). Le théorème 1. 4 résulte donc du théorème 1. 3.

REMARQUE. — Posons $u_\varepsilon - u = \varepsilon^{1/2}v_\varepsilon$. On a, pour tout $v \in V$

$$\varepsilon a(u_\varepsilon,\ v) + \varepsilon^{1/2}b(v_\varepsilon,\ v) = 0.$$

Donc, après division par $\varepsilon^{1/2}$, puisque $\varepsilon^{1/2}\ u_\varepsilon \to 0$ dans V, on obtient $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} b\ (v_\varepsilon,\ v) = 0$ pour tout $v \in V$.

2° *Cas où* $b(\varepsilon;\ u,\ v) - b(u,\ v)$ *est elliptique sur* V. — Explicitons encore le théorème, dans ce cas :

THÉORÈME 1. 5. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 15), (1, 17), (1, 18) *et*

(1, 16′) : *il existe* $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε *tel que*

$$Re\{b(\varepsilon;\ v,\ v) - b(v,\ v)\} \geqslant \alpha(\varepsilon)\ \|v\|_V^2 \quad \textit{pour tout} \quad v \in V.$$

Alors u_ε *solution de* (1, 19) *converge dans* W *vers* u *solution de* (1, 21) *et* $(\alpha(\varepsilon))^{1/2}u_\varepsilon \to 0$ *dans* V.

DÉMONSTRATION. — Il nous suffit de montrer que (1, 15) et (1, 16′) entraînent (1, 22). Posons

$$a(\varepsilon;\ u,\ v) = b(\varepsilon;\ u, v) - b(u,\ v) \quad \text{pour} \quad u,\ v \in V.$$

D'après (1, 16') Re $a(\varepsilon, v, v)$ définit sur V, une norme (dépendant de ε) équivalente à $\|v\|_V$. D'autre part, d'après (1, 15), la norme de l'application $u, v \to a(\varepsilon; u, v)$, dans l'espace des formes sesquilinéaires continues sur $V \times V$, est bornée. Par suite

$$|a(\varepsilon; w_\varepsilon, v)| \leqslant K \quad (\mathrm{R}ea(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon))^{1/2} \quad (\mathrm{R}ea(\varepsilon; v, v))^{1/2}$$

où K est indépendante de ε.

Or, dans ce cas, d'après (1, 16'), si $w_\varepsilon \in V$ vérifie $|b(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)|$ borné, alors, on a R$ea(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)$ borné. D'autre part, $a(\varepsilon; v, v)$ converge vers 0, d'après (1, 15). D'où le résultat.

3° *Cas où $b(\varepsilon; u, v)$ et $b(u, v)$ sont hermitiennes.* — Nous nous bornons ici au

Lemme 1. 1. — *Si $b(\varepsilon; u, v)$ et $b(u, v)$ sont hermitiennes, les hypothèses,* (1, 15), (1, 16) et (1, 23) *entraînent* (1, 22).

Démonstration. — D'après (1, 23),

$$c(\varepsilon; u, v) = (b(\varepsilon; u, v) - b(u, v)) + \delta(\varepsilon)\, b(u, v)$$

est alors une forme hermitienne positive. On a donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|c(\varepsilon; w_\varepsilon, v| \leqslant (c(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon))^{1/2} (c(\varepsilon; v, v))^{1/2}.$$

Or, si w_ε vérifie $|b(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)|$ borné, alors $c(\varepsilon; w_\varepsilon, w_\varepsilon)$ est aussi borné, d'après (1, 16), et $c(\varepsilon; v, v) \to 0$ avec ε d'après (1, 15). Par suite $c(\varepsilon; w_\varepsilon, v) \to 0$ pour tout $v \in V$, d'où le résultat.

Cas particulier des équations aux dérivées partielles.

Soit Ω un ouvert de R^n. Prenons V, W et H tels que

(1,33) $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W \subset H$; $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans H.

Nous reprenons ensuite les hypothèses du théorème 1. 3. Soit G_ε (resp. G) l'opérateur de Green attaché à $b(\varepsilon; u, v)$ sur V (resp. à $b(u, v)$ sur W). Désignons par $\tilde{G}_\varepsilon$ (resp. $\tilde{G}$) la restriction de G_ε (resp. G) à $\mathcal{D}'(\Omega_x)$, et par $G^\varepsilon_{x,y}$ (resp. $G_{x,y}$) le noyau de Green défini par G_ε (resp. G).

Il résulte de (1, 20) que les G_ε forment un ensemble équicontinu de $\mathfrak{L}(H; W)$ ([15]). D'autre part, d'après le théorème 1. 3, $G_\varepsilon \to G$ dans $\mathfrak{L}_s(H; W)$. Par suite, les $\tilde{G}_\varepsilon$ forment un ensemble équicontinu de $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$ et $\tilde{G}_\varepsilon \to \tilde{G}$ dans $\mathfrak{L}_s(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$. Mais, sur un ensemble équicontinu de $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$ la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence uniforme sur les parties précompactes de $\mathfrak{D}(\Omega_x)$ sont identiques ([16]). D'autre part, sur $\mathfrak{D}(\Omega_x)$, les ensembles bornés et les ensembles relativement compacts sont aussi identiques ([17]). Par suite, $\tilde{G}_\varepsilon \to \tilde{G}$ dans $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$. Comme d'autre part les espaces $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}(\Omega_x); \mathfrak{D}'(\Omega_y))$ et $\mathfrak{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$ sont isomorphes topologiquement ([18]), $G^\varepsilon_{x,y} \to G_{x,y}$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$. D'où le

THÉORÈME 1. 6. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (1, 16), (1, 17), (1, 22) *et* (1, 23), *le noyau de Green* $G^\varepsilon_{x,y}$ *défini par* $b(\varepsilon; u, v)$ *sur* V, *converge dans* $\mathfrak{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$ *vers le noyau de Green* $G_{x,y}$ *définie par* $b(u, v)$ *sur* $\bar{V}_{(W)}$.

Problèmes aux limites non homogènes.

Reprenons les hypothèses et les notations du théorème 1. 3. Supposons en outre

(1, 34) Il existe un espace E (resp. un espace E_ε, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$) et un opérateur $\tilde{B} \in \mathfrak{L}(W, E)$ (resp. $\tilde{B}_\varepsilon \in \mathfrak{L}(V, E_\varepsilon)$ tel que $\tilde{B}h = Bh$ pour tout $h \in N_B$ (resp. $\tilde{B}_\varepsilon h = B_\varepsilon h$ pour tout $h \in N_\varepsilon$).

Soit $h \in W$ et une famille $h_\varepsilon \in V$, tels que

$$(1, 35) \quad \begin{cases} h_\varepsilon \to h \text{ dans } W \\ \tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon \in H;\ \tilde{B}h \in H \text{ et } \tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon \to \tilde{B}h \text{ dans } H \text{ quand } \varepsilon \to 0. \end{cases}$$

On a alors le

([15]) De façon générale, E et F étant deux espaces vectoriels topologiques, $\mathfrak{L}(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F. Si on munit cet espace de la topologie de la convergence simple (resp. bornée). (Voir Bourbaki [1]) on le note $\mathfrak{L}_s(E; F)$ (resp. $\mathfrak{L}_b(E; F)$).

([16]) Voir Bourbaki [1] chap. III, p. 23, proposition 5.

([17]) Voir Schwartz, [1], tome I, p. 70, théorème VII.

([18]) Voir Schwartz [9], p. 93, proposition 25.

THÉORÈME 1. 7. — *Sous les hypothèses du théorème* 1. 3 *ainsi que* (1, 34) *et* (1, 35) *la solution* u_ε *de*

$$\tilde{B}_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon; \qquad u_\varepsilon - h_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

converge dans W *vers la solution* u *de*

$$\tilde{B}u = f; \qquad u - h \in N_B.$$

DÉMONSTRATION. — Posons $U_\varepsilon = u_\varepsilon - h_\varepsilon$ et $U = u - h$. Alors U_ε (resp. U) est solution de

$$\tilde{B}_\varepsilon U_\varepsilon = B_\varepsilon U_\varepsilon = f_\varepsilon - \tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon = F_\varepsilon \in H; \quad U_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

(resp.

$$\tilde{B}u = BU = f - \tilde{B}h = F \in H; \quad U \in N_B$$

d'après (1, 18) et (1, 35) $F_\varepsilon \to F$ dans H. Le théorème 1. 7 résulte donc du théorème 1. 3.

Propriétés de continuité de l'application $\varepsilon \to u_\varepsilon$.

THÉORÈME 1. 8. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16) *et* (1, 18 *bis*) *l'application* $\varepsilon \to f_\varepsilon$ *est continue de* $]0, \varepsilon_0]$ *dans* H *et*

(1, 22′) *Pour tout* $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$ *et toute famille* w_ε *bornée dans* V *pour* ε *assez voisin de* ε_1,

$$(b(\varepsilon; w_\varepsilon, v) - b(\varepsilon_1; w_\varepsilon, v) \to 0)$$

quand $\varepsilon \to \varepsilon_1$, *pour tout* $v \in V$ (*ceci entraîne* (1. 14))

et

(1, 23″) *Pour tout* $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$, *il existe* $\delta(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, $\delta(\varepsilon, \varepsilon_1) \to 0$ *quand* $\varepsilon \to \varepsilon_1$, *tel que*

$$\mathrm{Re}\{b(\varepsilon; v, v) - b(\varepsilon_1; v, v)\} + \delta(\varepsilon; \varepsilon_1)\,\mathrm{Re}\,b(\varepsilon_1; v, v) \geqslant 0,$$

pour tout $v \in V$.

Alors l'application $\varepsilon \to u_\varepsilon$ *définie par* (1, 19) *est continue de* $]0, \varepsilon_0]$ *dans* V.

La démonstration est celle du théorème 1. 3, avec V = W.

COROLLAIRE 1, 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 1. 3, *ainsi que* (1, 18) *bis* (1, 22′), *et* (1, 23″), $\varepsilon \to u_\varepsilon$ *est continue de* $[0, \varepsilon_0]$ *dans* W (*avec* $u_0 = u$, *solution de* (1, 20)).

REMARQUE. — Les hypothèses (1, 22′) et (1, 23″) sont en particulier vérifiées si on suppose que $\varepsilon \to b\ (\varepsilon;\ u,\ v)$ est

continue pour tout $u, v \in V$, et uniformément sur les ensembles bornés de V, *i.e.* pour tout $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$, il existe $k(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, convergent vers 0 quand $\varepsilon \to \varepsilon_1$, telle que
$|b(\varepsilon; u, v) - b(\varepsilon_1; u, v)| \leqslant k(\varepsilon, \varepsilon_1)||u||_V||v||_V$ pour tout $u, v \in V$.

3. — Exemples d'application du théorème 1. 3.

Naturellement la théorie s'applique à tous les problèmes aux limites couverts par la théorie de Lions. Nous n'en citerons que quelques exemples concernant les équations aux dérivées partielles et les systèmes différentiels.

D'autre part, nous ne considérons que des conditions aux limites homogènes, étant bien entendu qu'à chaque problème homogène correspondent des problèmes aux limites non homogènes.

Nous désignons toujours par Ω un ouvert de R^n, quelconque sauf mention expresse du contraire, de frontière Γ.

1° Nous prenons $H = L^2(\Omega)$.

Puis $W = H^1(\Omega)$. Sur W la forme

$$b(u, v) = ((u, v))_1 + (u, v)_0 \text{ [19]},$$

définit l'opérateur $-\Delta + 1$, où $\Delta = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, et est elliptique.

Nous prenons pour V des sous-espaces V_i fermés de $\mathcal{V}$ formé des $u \in H^1(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, muni de la norme $(||u||^2_{H^1(\Omega)} + |\Delta u|_0^2)^{1/2}$. Nous prenons $a(u, v) = (\Delta u, \Delta v)_0$, qui définit l'opérateur Δ^2.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon(\Delta u, \Delta v)_0 + ((u, v))_1 + (u, v)_0$$

est elliptique sur $\mathcal{V}$.

Soit f donnée dans $L^2(\Omega)$.

Alors u_ε^i désigne la solution dans V_i de

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon^i - \Delta u_\varepsilon^i + u_\varepsilon^i = f; \qquad u_\varepsilon^i \in N_\varepsilon^i$$

et w_i la solution dans $V_{i_{(W)}}$ de

$$-\Delta w_i + w_i = f \quad w_i \in N_B^i.$$

[19] $((u, v))_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_0$.

Il nous reste, dans chacun des quatre exemples qui suivent ($i = 1, \ldots 4$) à préciser les espaces V_i et $\overline{V}_{i_{(w)}}$ et à interpréter les conditions $u_\varepsilon^i \in N_\varepsilon^i$ et $w_i \in N_b^i$. Pour cette interprétation nous utiliserons les formules de Green formelles suivantes

$$(\Delta^2 u, v)_0 = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta u)\bar{v}\,ds - \int_\Gamma \Delta u \frac{\partial \bar{v}}{\partial \nu}\,ds + (\Delta u, \Delta v)_0$$

et

$$(\Delta u, v)_0 = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\bar{v}\,ds - ((u, v))_1.$$

On en déduit

$$((\varepsilon\Delta^2 - \Delta + 1)u, v)_0 = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu}(\varepsilon\Delta u - u)\bar{v}\,ds$$
$$- \varepsilon\int_\Gamma \Delta u \frac{\partial\bar{v}}{\partial\nu}\,ds + \varepsilon(\Delta u, \Delta v)_0 + ((u, v))_1 + (u, v)_0.$$

Exemple 1. 1 : *Problèmes de Dirichlet* (20). — $V_1 = H_0^2(\Omega)$, alors $\overline{V}_{1(w)} = H_0^1(\Omega)$.

Les conditions aux limites formelles, d'après les formules de Green précédentes sont alors, pour u_ε^1 :

$$u_\varepsilon^1\Big|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0$$

et pour w_1

$$w_1|_\Gamma = 0.$$

Exemple 1. 2. — V_2 est le sous-espace de $\mathcal{V}$ des $u \in H_0^1(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Alors $\overline{V}_{2(w)} = H_0^1(\Omega)$. Par suite $w_2 = w_1$.

Quant à u_ε^2 il vérifie les conditions aux limites formelles

$$u_\varepsilon^2|_\Gamma = 0 \qquad \Delta u_\varepsilon^2|_\Gamma = 0.$$

Dans les deux exemples qui suivent, nous supposons que Γ est suffisamment régulière pour que $H^2(\Omega)$ soit dense dans $H^1(\Omega)$ (21).

Exemple 1. 3. — Nous prenons $V_3 = \mathcal{V}$; par suite $\overline{V}_{3(w)} = H^1(\Omega)$. Les conditions satisfaites par u_ε^3 sont :

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\varepsilon\Delta u_\varepsilon^3 - u_\varepsilon^3)|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta u_\varepsilon^3|_\Gamma = 0.$$

(20) Ce cas est étudié dans Morgenstern [1].

(21) On ignore si pour $m > m' \geqslant 0$, $H^m(\Omega)$ est dense dans $H^{m'}(\Omega)$, quelque soit l'ouvert Ω. C'est vrai si la frontière de Ω est assez régulière.

Tandis que w_3 satisfait (condition de Neumann)

$$\left.\frac{\partial w_3}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0.$$

Exemple 1. 4. — V_4 est le sous-espace de $\mathcal{V}$ des u qui vérifient $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0$ [22]. Alors $\overline{V}_{4(W)} = H^1(\Omega)$ et $w_4 = w_3$.

Les conditions satisfaites par u_ε^4 sont :

$$\left.\frac{\partial u_\varepsilon^4}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u_\varepsilon^4)\right|_\Gamma = 0.$$

Dans chacun de ces exemples, d'après le théorème 1. 4, $u_\varepsilon^i \to w_i$ dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 1, 2. — Le problème 1, 3 nous montre que les conditions aux limites du problème perturbé peuvent dépendre de ε.

Remarque 1, 3. — Les exemples 1, 1 et 1, 2 (resp. 1, 3 et 1, 4) nous montrent que deux familles u_ε^1 et u_ε^2 (resp. u_ε^3 et u_ε^4) de solutions de problèmes aux limites distincts peuvent avoir la même limite w_1 (resp. w_3).

2° Nous prenons H, W, $b(u, v)$ et $\mathcal{V}$ comme dans 1°, puis

$$b(\varepsilon;\ u,\ v) = \varepsilon(\Delta u,\ \Delta v)_0 - \varepsilon^2((u,\ v))_1 + ((u,\ v))_1 + (u,\ v)_0$$

qui définit l'opérateur $\varepsilon\Delta^2 + \varepsilon^2\Delta - \Delta + 1$.

Exemple 1. 5. — Soit f donnée dans $L^2(\Omega)$. Soit u_ε la [23] solution dans $\mathcal{V}$ de

$$(\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta u) - \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f \qquad u_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

pour ε assez petit et w la solution dans $H^1(\Omega)$ de

$$-\Delta w + w = f; \qquad w \in N_B$$

les conditions aux limites sont, pour u_ε

$$\left.\frac{\partial}{\partial \nu}(\varepsilon\Delta u_\varepsilon + \varepsilon^2 u_\varepsilon - u_\varepsilon)\right|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta u_\varepsilon|_\Gamma = 0$$

et, pour w $$\left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0.$$

[22] Ceci a un sens : voir Lions [1], p. 71.

[23] $b(\varepsilon;\ u,\ v)$ est elliptique sur $\mathcal{V}$ pour $\varepsilon < 1$.

Il est facile de voir que nous sommes dans les conditions d'application du théorème 1. 3. Par suite $u_\varepsilon \to w$ dans $H^1(\Omega)$, quand $\varepsilon \to 0$.

3° Nous prenons $H = L^2(\Omega)$.

Puis $W = H^{m'}(\Omega)$ et

$$b(u, v) = \sum_{|p|,|q| \leqslant m'} (b_{pq} D^q u, D^p v)_0 \tag{I, 37}$$

avec $b_{pq} \in L^\infty(\Omega)$. ($L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω.) On a alors

$$B = \sum_{|p|,|q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p (b_{pq} D^q). \tag{I, 37'}$$

On suppose $b(u, v)$ elliptique sur $H^{m'}(\Omega)$.

On prendra pour V des sous-espaces fermés V_i de $H^m(\Omega)$, $m > m'$, et sur V

$$a(\varepsilon; u, v) = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (a_{pq}(\varepsilon) D^q u, D^p v)_0 \tag{I, 38}$$

avec $a_{pq}(\varepsilon) \in L^\infty(\Omega)$, $a_{pq}(\varepsilon)$ convergent vers 0 dans $L^\infty(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$.

$a(\varepsilon; u, v)$ définit l'opérateur :

$$A_\varepsilon = \sum_{|p||q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(\varepsilon) D^q). \tag{I, 38'}$$

On suppose que, pour ε assez petit, $a(\varepsilon; u, v)$ est elliptique sur $H^m(\Omega)$ [24], et on prend

$$b(\varepsilon; u, v) = a(\varepsilon; u, v) + b(u, v).$$

Soit f donnée dans $L^2(\Omega)$.

On désigne par u_ε^i, la solution dans V_i de

(I, 39)
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(\varepsilon) D^q u_\varepsilon^i) + \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p (b_{pq} D^q u_\varepsilon^i) = f; \\ u_\varepsilon^i \in N_\varepsilon^i \end{cases}$$

et par w_i la solution dans $\overline{V}_{i(W)}$ de

$$\sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p (b_{pq} D^q w_i) = f; \qquad w_i \in N_B^i. \tag{I. 40}$$

Exemple 1, 6. — Problèmes de Dirichlet.

[24] Au sens de (1, 16').

On prend $V_1 = H_0^m(\Omega)$; alors $\overline{V}_{1(w)} = H_0^{m'}(\Omega)$.

Les conditions aux limites pour u_ε^1 sont :

$$\left.\frac{\partial^k u_\varepsilon^1}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

et pour w_1

$$\left.\frac{\partial^k w_1}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1.$$

Dans les deux exemples qui suivent nous supposons que Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimensions $n-1$. Nous utilisons alors pour interpréter les conditions aux limites le résultat suivant [25] :

Pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$ (resp. $k = 0, 1, \ldots, m'-1$) il existe $S_k^\varepsilon u_\varepsilon^i$ unique dans $H'^m_k(\Gamma)$ (resp. $T_k u_\varepsilon^i$ (ou $T_k w_i$) unique dans $H'^{m'}_k(\Gamma)$) tels que

$$((\Lambda_\varepsilon + B)u_\varepsilon^i, v)_0 = a(\varepsilon; u_\varepsilon^i, v) + b(u_\varepsilon^i, v) + \sum_{k=0}^{m-1} \langle S_\varepsilon^k u_\varepsilon^i, \overline{\gamma_k v} \rangle + \sum_{k=0}^{m'-1} \langle T_k u_\varepsilon^i, \overline{\gamma_k v} \rangle$$

et

$$(Bw_i, v)_0 = b(w_i, v) + \sum_{k=0}^{m'-1} \langle T_k w_i, \overline{\gamma_k v} \rangle.$$

Exemple 1. 7. — Problèmes de Neumann.

Nous prenons $V_2 = H^m(\Omega)$. Donc $\overline{V}_{2(w)} = H^{m'}(\Omega)$.

Les conditions aux limites correspondantes sont donc, pour u_ε^2 :

$$(S_k^\varepsilon + T_k)u_\varepsilon^2 = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1,$$
$$S_k^\varepsilon u_\varepsilon^2 = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{pour} \quad k = m', m'+1, \ldots, m-1$$

et pour w_2 :

$$T_k w_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1.$$

Exemple 1. 8. — Problème de Dirichlet-Neumann mêlés.

Soit Γ_1 un sous-ensemble fermé de Γ de mesure positive. Désignons par C_1 (resp. C_2) le sous-espace de $C(\overline{\Omega})$ des fonctions f qui vérifient $\gamma_k(f) = 0$ sur Γ_1 pour $k = 0, 1, \ldots m-1$ (resp. pour $k = 0, 1, \ldots, m'-1$).

[25] Voir Lions [2], p. 228.

On prend pour V_3 l'adhérence dans $H^m(\Omega)$ de C_1. Alors $\overline{V}_3(w)$ est l'adhérence de C_1 dans $H^{m'}(\Omega)$. Cet espace est identique à l'adhérence dans $H^{m'}(\Omega)$ de C_2.

Alors u_ε^3 satisfait les conditions :

$$\frac{\partial^k u_\varepsilon^3}{\partial \nu^k} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

$$(S_k^\varepsilon + T_k) u_\varepsilon^3 = 0 \quad \text{sur} \quad \complement(\Gamma_1) \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1 \quad (^{26})$$

$$S_k^\varepsilon u_\varepsilon^3 = 0 \quad \text{sur} \quad \complement(\Gamma_1) \quad k = m', m'+1, \ldots, m$$

c'est-à-dire les conditions de Dirichlet sur Γ_1 et les conditions de Neumann sur $\complement(\Gamma_1)$.

Tandis que w_3 vérifie

$$\text{et} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial^k w_3}{\partial \nu^k} &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ T_k w_3 &= 0 \quad \text{sur} \quad \complement(\Gamma_1) \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \ldots, m'-1$$

c'est-à-dire les conditions de Dirichlet sur Γ_1 et les conditions de Neumann sur $\complement(\Gamma_1)$.

L'exemple suivant fait intervenir des dérivées obliques. On suppose toujours que Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$.

On se donne m (resp. m') opérateurs différentiels

$$A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$$

(resp. $B_0, B_1, \ldots, B_{m'-1}$) à coefficients indéfiniment différentiables, bornés ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m (resp. m') avec A_k d'ordre $2m-1-k$, $m-1$ fois transversal à Γ, tel que $A_k^\Gamma \in \mathcal{L}(H^m(\Omega), H_k'^m(\Gamma))$ (resp. B_j d'ordre $2m'-j-1$, $m'-1$ fois transversal à Γ, avec

$$B_j^\Gamma \in \mathcal{L}(H^{m'}(\Omega);\ H_k'^{m'}(\Gamma)).$$

Nous prenons sur $H^{m'}(\Omega)$,

$$b_1(u, v) = \sum_{k=0}^{m'-1} \langle B_k^\Gamma u, \overline{\gamma_k v} \rangle + b(u, v)$$

où $b(u, v)$ est donné par (I, 37). Alors $b_1(u, v)$ définit encore B donné par (I, 37').

(26) $\complement(\Gamma_1)$ désigne le complémentaire de Γ_1.

Nous supposons $b_1(u, v)$ elliptique sur $H^{m'}(\Omega)$.

Nous prenons sur $H^m(\Omega)$:

$$a_1(\varepsilon; u, v) = \varepsilon \sum_{k=0}^{k=m-1} \langle A_k^\Gamma u, \gamma_k v\rangle + a(\varepsilon; u, v)$$

où $a(\varepsilon; u, v)$ est donnée par (I, 38). Alors $a_1(\varepsilon; u, v)$ définit A_ε donné par (I, 38′). Nous supposons $a_1(\varepsilon; u, v)$ elliptique sur V quand $\varepsilon \to 0$.

Dans ces conditions u_ε^i est encore la solution de (I, 39) et w_i la solution de (I, 40).

Exemple 1. 9. — Soit $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des entiers distincts avec $0 \leqslant k_i \leqslant m - 1$. Désignons par C_3 le sous-espace de $C(\overline{\Omega})$ des f *vérifiant* $\gamma_{k_i}(f) = 0$ *sur* Γ, *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$ *et par* C_4 *le sous-espace de* $C(\overline{\Omega})$ *des* f telles que $\gamma_{k_i}(f) = 0$ sur Γ pour tous les i tels que $k_i \leqslant m' - 1$.

Prenons V_4 adhérence dans $H^m(\Omega)$ de C_3. Alors $\overline{V}_{4\,W)}$ est l'adhérence dans $H^{m'}(\Omega)$ de C_4.

Les conditions aux limites sont alors, pour u_ε^4 :

$$\gamma_{k_i}(u_\varepsilon^4) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
$$(S_k^\varepsilon - \varepsilon A_k^\Gamma)\, u_\varepsilon^4 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

pour $k = m', m' + 1, \ldots\ m - 1$, et $k \neq k_i$.

$$(S_k^\varepsilon + T_k)\, u_\varepsilon^4 - (\varepsilon A_k^\Gamma + B_k^\Gamma)\, u_\varepsilon^4 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

pour $k = 0, 1, \ldots, m' - 1$ et $k \neq k_i$; et pour w_4 :

$$\gamma_{k_i}(w_4) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{pour tous les } k_i \quad \text{avec} \quad k_i \leqslant m' - 1.$$
$$T_k w_4 - B_k^\Gamma w_4 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

pour $k = 0, 1, \ldots, m' - 1$, et $k \neq k_i$.

Dans ces conditions aux limites interviennent des dérivées obliques. Dans chacun de ces exemples de 3°, nous sommes dans les conditions d'applications du théorème 1. 5, et par suite $u_\varepsilon^i \to w_i$ dans $H^{m'}(\Omega)$.

4° *Exemples de systèmes.* — Nous prenons $H = (L^2(\Omega))^r$, r entier positif quelconque. Nous désignons par $(\vec{u}, \vec{v})_{r_0}$ le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^r$. Nous prenons ensuite $W = (H^{m'}(\Omega))^r$ et

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{|p||q|\quad m'} (B_{pq} D^q \vec{u},\ D^p \vec{v})_{r_0}$$

où B_{pq} est la matrice (b_{pq}^{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots, r$ et $b_{pq}^{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

On a alors

$$B = \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p (B_{pq} D^q).$$

On suppose $b(\vec{u}, \vec{v})$ elliptique sur $(H^{m'}(\Omega))^r$.

On prend pour V des sous-espaces fermés de $(H^m(\Omega))^r$ avec $m > m'$ et

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{|p||q| \leqslant m} (A_{pq} D^q \vec{u}, \ D^p \vec{v})_{r_0}$$

où A_{pq} est la matrice $(a_{pq}^{ij}) i, j = 1, 2, \ldots, r$ et $a_{pp}^{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

On a alors

$$A = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p (A_{pq} D^q).$$

On suppose $\varepsilon a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{u}, \vec{v})$ elliptique sur $(H^m(\Omega))^r$ pour $\varepsilon \to 0$.

Soit $\vec{f}$ donnée dans $(L^2(\Omega))^r$: $f = (f_1, \ldots, f_r)$, $f_i \in L^2(\Omega)$. Soit $\vec{u}_\varepsilon$ la solution dans V du système

$$(\varepsilon A + B)\vec{u}_\varepsilon = \vec{f}; \qquad \vec{u}_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

et $\vec{w}$ la solution dans $\overline{V}(W)$ du système :

$$B\vec{w} = \vec{f}; \quad \vec{w} \in N_B.$$

En fait $\vec{u}_\varepsilon$ est de la forme $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, \ldots, u_r^\varepsilon)$ avec $u_i^\varepsilon \in H^m(\Omega)$ et $\vec{w}$ est de la forme $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$ avec $w_i \in H^{m'}(\Omega)$. Les systèmes précédents s'écrivent :

$$\varepsilon \sum_{|p|,|q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p \sum_{j=1}^{r} a_{pq}^{ij} D^q u_j^\varepsilon + \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p \sum_{j=1}^{r} b_{pq}^{ij} D^q u_j^\varepsilon = f_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, r$$

et

$$\sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p \sum_{j=1}^{r} b_{pq}^{ij} D^q w_j = f_i \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Exemples 1. 10. — Prenons $r = 3$, et $V = V_1 \times V_2 \times V_3$ avec V_i, $i = 1, 2, 3$ des exemples de 3°.

Alors $V_{(W)} = V_{1(W)} \times \overline{V}_{2(W)} \times V_{3(W)}$.

les conditions aux limites sont donc pour $\overrightarrow{u_\varepsilon}$:

$$\frac{\partial^p u_1^\varepsilon}{\partial \nu^p} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ pour } p = 0, 1, \ldots, m-1.$$

$$(\varepsilon S_k + T_k)u_2^\varepsilon|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour } k = 0, \ldots, \quad m'-1;$$

$$S_k u_2|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour } k = m', \ldots, m-1.$$

$$\left.\frac{\partial^p u_3^\varepsilon}{\partial \nu^p}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad k = 0, \ldots, m-1;$$

$$(\varepsilon S_k + T_k)u_3^\varepsilon\Big|_{\complement(\Gamma_1)} = 0, \quad k = 0, \ldots, m'-1;$$

$$S_k u_3^\varepsilon\Big|_{\complement(\Gamma_1)} = 0, \quad k = m', \ldots, m.$$

et pour $\overrightarrow{w}$

$$\left.\frac{\partial^p w_1}{\partial \nu^p}\right|_\Gamma = 0 \quad p = 0, 1, \ldots, m'-1;$$

$$T_k w_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \text{ pour } k = 0, \ldots, m'-1.$$

et

$$\left.\frac{\partial^k w_3}{\partial \nu^k}\right|_{\Gamma_1} = 0 \quad T_k w_3 = 0 \quad \text{sur } \complement(\Gamma_1) \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1.$$

Nous étudions, dans les deux numéros qui suivent, le cas particulier où $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$, et où (I, 33) est vérifié. Nous allons, dans ce cas, compléter les résultats du théorème 1. 4 en faisant des hypothèses de régularité supplémentaires sur Ω ou sur les opérateurs A et B (A est l'opérateur défini par $a(u, v)$ sur V.)

4. — Théorème de convergence locale pour des opérateurs A et B « réguliers ».

Espaces H^k (27).

Pour k réel quelconque, H^k est l'espace Hilbertien des $T \in \mathcal{S}'$ ($\mathcal{S}'$ est l'espace des distributions tempérées) telles que $(1 + r^2)^{k/2}\ \hat{T} \in L^2$ ($\hat{T}$ étant la transformée de Fourier de T) muni du produit scalaire

$$(S, T)_{H^k} = ((1 + r^2)^{k/2}\,\hat{S},\ (1 + r^2)^{k/2}\,\hat{T})_0 \text{ (28)}.$$

(27) Pour les espaces H^k et $\mathcal{L}^k(\Omega)$. Voir Schwartz [5] pp. 2 et 39.

(28) $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Nous noterons $\|T\|_k$ la norme de T dans H^k.

Pour k entier positif, nous retrouvons l'espace introduit au n° 1, avec $\Omega = R^n$. L'espace H^{-k} est alors formé des distributions de la forme $T = \sum_{|p| \leqslant k} D^p f_p$, où les $f_p \in L^2$. Le dual de H^k, muni de sa structure d'espace de Banach est isomorphe à H^{-k}.

Rappelons quelques propriétés des espaces H^k. Si $k > k'$, $H^k \subset H^{k'}$. L'espace $\mathcal{D}(R^n)$ est dense dans H^k. La dérivation D^r est une application continue de H^k dans $H^{k-|r|}$. Enfin, si $a(x) \in \mathcal{D}$ et si $T \in H^k$, alors $a(x)T \in H^k$, et l'application $T \to a(x)T$ de H^k dans H^k est continue.

Espace $\mathfrak{L}^k(\Omega)$.

C'est l'espace des distributions u telles que $\varphi u \in H^k$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Des $u_j \to 0$ dans $\mathfrak{L}^k(\Omega)$ si et seulement si $\varphi u_j \to 0$ dans H^k pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

L'ouvert Ω est quelconque dans R^n. Nous prenons

$$A = \sum_{|p||q| \leqslant m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x) D^q) \tag{I, 41}$$

$$B = \sum_{|p||q| \leqslant m'} (-1)^{|p|} D^p(b_{pq}(x) D^q) \tag{I, 42}$$

où $a_{pq}(x)$ et $b_{pq}(x)$ *sont des fonctions indéfiniment dérivables sur* Ω. On suppose aussi $m > m'$.

Nous faisons sur A et B les hypothèses d'ellipticité suivantes : il existe des nombres positifs α et β (ε) tels que l'on ait

$$Re(B\varphi, \varphi)_0 \geqslant \alpha \|\varphi\|_m^2 \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1, 43}$$

$$\varepsilon Re(A\varphi, \varphi)_0 + Re(B\varphi, \varphi)_0 \geqslant \beta(\varepsilon)\|\varphi\|_m^2 \tag{1, 44}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et ε assez petit.

Soit, pour ε assez petit, $u_\varepsilon \in \mathfrak{L}^m(\Omega)$ vérifiant

$$(\varepsilon A + B)u_\varepsilon = f. \tag{1, 45}$$

Nous savons, d'après Friedrichs [1] que si $f \in \mathfrak{L}^k(\Omega)$, alors $u_\varepsilon \in \mathfrak{L}^{2m+k}(\Omega)$. Nous allons montrer la

PROPOSITION 1. 6. — *Soit* A (*resp.* B) *un opérateur de la forme* (1, 41) (*resp.* (1, 42)) *avec les conditions d'éllipticité* (1, 43) *et* (1, 44) *et f donnée dans* $\mathfrak{L}^k(\Omega)$, *k entier quelconque. Si* $u_\varepsilon \in \mathfrak{L}^m(\Omega)$, *vérifiant* (1, 45), *est borné dans* $\mathcal{L}^{m'}(\Omega)$ *et si* $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon$ *est borné dans* $\mathcal{L}^{m}(\Omega)$, *alors* u_ε *est borné dans* $\mathcal{L}^{2m'+k}(\Omega)$, $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon$ *est borné dans* $\mathcal{L}^{m+m'+k}(\Omega)$ *et* $\varepsilon u_\varepsilon$ *est borné dans* $\mathcal{L}^{m+k}(\Omega)$.

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Posons $w_\varepsilon = \varphi u_\varepsilon$. Il nous suffit de montrer

a) $D^j w_\varepsilon$ est borné dans $H^{m'}$ pour $|j| \leqslant k + m'$,

b) $\varepsilon^{1/2} D^j w_\varepsilon$ est borné dans H^m pour $|j| \leqslant k + m'$,

c) $\varepsilon D^j w_\varepsilon$ est borné dans H^m pour $|j| \leqslant k + m$.

Calculons tout d'abord, pour $|j| \leqslant k + m$, $(\varepsilon A + B)\, D^j w_\varepsilon$.

Nous utilisons le résultat suivant : Λ étant un opérateur différentiel d'ordre 2μ, à coefficients indéfiniment dérivables sur Ω, on a

$$(1, 46) \qquad \Lambda(D^j(\varphi u)) = D^j(\varphi \Lambda u) + D^j(\Lambda_2 u) + \Lambda_1(\varphi u).$$

où Λ_1 (resp. Λ_2) est un opérateur d'ordre $2\mu + |j| - 1$ (resp. $2\mu - 1$) à coefficients indéfiniment dérivables (resp. indéfiniment dérivables à support compact) sur Ω.

En effet en utilisant la formule de Leibnitz, on obtient :

$$\Lambda(D^j(\varphi u)) - D^j \Lambda(\varphi u) = \Lambda_1(\varphi u)$$

où Λ_1 est un opérateur à coefficients indéfiniment dérivables d'ordre

$$2\mu + |j| - 1$$

et

$$\Lambda(\varphi u) = \varphi(\Lambda u) + \Lambda_2 u$$

où Λ_2 est un opérateur d'ordre $2\mu - 1$ à coefficients indéfiniment dérivables à support compact. D'où (1, 46).

On en déduit :

$$B(D^j w_\varepsilon) = D^j(\varphi B u_\varepsilon) + D^j B^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon + B^{(1)} w_\varepsilon$$

où $B^{(1)}$ (resp. $B^{(2)}_{(\varphi)}$) est un opérateur d'ordre $2m' + |j| - 1$ (resp. $2m' - 1$)) à coefficients indéfiniment dérivables (resp. indéfiniment dérivables à support compact) et

$$A(D^j w_\varepsilon) = D^j(\varphi A u_\varepsilon) + D^j A^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon + A^{(1)} w_\varepsilon$$

où $A^{(1)}$ (resp. $A^{(2)}_{(\varphi)}$) est un opérateur d'ordre $2m + |j| - 1$ (resp. $2m - 1$) à coefficients indéfiniment dérivables (resp. indéfiniment dérivables à support compact).

D'où finalement, en tenant compte de (1, 45)

$$(1, 47)\quad (\varepsilon A + B)D^j w_\varepsilon = D^j(\varphi f) + D^j((\varepsilon A^{(2)}_{(\varphi)} + B^{(2)}_{(\varphi)})u_\varepsilon) + \varepsilon A^{(1)} w_\varepsilon + B^{(1)} w_\varepsilon.$$

Montrons maintenant les assertions *a*) et *b*) par récurrence ([29]). Elles sont vraies pour $j = 0$, par hypothèse. Supposons qu'elles soient vraies pour tout r avec $|r| \leqslant |j| - 1$ et montrons les pour j avec $|j| \leqslant k + m'$. Il résulte des propriétés des espaces H^k, des propriétés des opérateurs $A^{(1)}$, $A^{(2)}_{(\varphi)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}_{(\varphi)}$, et des hypothèses de récurrence que $D^j(\varepsilon^{1/2}A^{(2)}_{(\varphi)}u_\varepsilon) + \varepsilon^{1/2}A^{(1)}w_\varepsilon$ (resp. $D^j(B^{(2)}_{(\varphi)}u) + B^{(1)}w_\varepsilon$) est borné dans H^{-m} (resp. $H^{-m'}$). D'autre part $D^j(\varphi f)$ est dans $H^{k-|j|}$, donc dans $H^{-m'}$, puisque $|j| \leqslant k + m'$. On déduit donc de (1, 47) :

$$(1, 48)\quad |\langle(\varepsilon A + B)D^j w_\varepsilon, \overline{D^j w_\varepsilon}\rangle| \leqslant \|D^j(\varphi f)\|_{-m'}\|D^j w_\varepsilon\|_{m'} + C_1\|D^j(\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon)\|_m + C_2\|D^j w_\varepsilon\|_{m'}$$

où le crochet désigne la dualité entre H^m et H^{-m}([30]), et où les constantes C_1 et C_2 sont indépendantes de ε et de f. Or, on déduit de (1, 43) et (1, 44) : il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que l'on ait :

$$(1, 49)\quad Re(B\varphi, \varphi)_0 \geqslant \alpha\|\varphi\|^2_{m'}, \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et

$$(1, 50)\quad Re(\varepsilon(A\varphi, \varphi)_0 + (B\varphi, \varphi)_0) \geqslant \beta\varepsilon\|\varphi\|^2_m$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\varepsilon \leqslant 1$.

Par suite, si $Re(A\varphi, \varphi)_0 > 0$, on a

$$(1, 51)\quad Re(\varepsilon(A\varphi, \varphi)_0 + (B\varphi, \varphi)_0) \geqslant \frac{1}{2}(\alpha\|\varphi\|^2_{m'} + \beta\varepsilon\|\varphi\|^2_m).$$

et si $Re(A\varphi, \varphi)_0 \leqslant 0$:

$$(1, 52)\quad Re\{\varepsilon(A\varphi, \varphi)_0 + (B\varphi, \varphi)_0\} \geqslant \beta\|\varphi^2_m\|.$$

On déduit facilement *a*) et *b*) de (1, 48), (1, 51) et (1, 52), comme il est fait dans la démonstration du théorème 1. 4.

Nous montrons *c*) également par récurrence, puisque cette assertion est vraie d'après *b*) pour $|j| \leqslant k + m'$ ([31]). Reprenons

([29]) Nous supposons $k + m' > 0$. En effet, si nous avons $k + m' \leqslant 0$, alors $\mathcal{L}^{m'}(\Omega) \subset \mathcal{L}^{2m'+k}(\Omega)$ et $\mathcal{L}^m(\Omega) \subset \mathcal{L}^{m+m'+k}(\Omega)$.

([30]) Pour $T \in H^{-m}$ et $\varphi \in H^m$, on a

$$\langle T, \varphi\rangle = ((1 + r^2)^{-m/2}T, (1 + r^2)^{m/2}\varphi)_0 \quad \text{et} \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \|T\|_{-m}\|\varphi\|_m.$$

([31]) On peut aussi supposer $k + m > 0$.

(1, 47). Pour $|j| \leqslant k+m$, $D^j(\varphi f) \in H^{-m}$, chacun des termes dans l'expression de $B(D^j w_\varepsilon)$ est borné dans H^{-m}, d'après *a*), et d'après l'hypothèse de récurrence, $\varepsilon(D^j A^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon + A^{(1)} w_\varepsilon)$ est borné dans H^{-m}. Par suite $A(\varepsilon D^j w_\varepsilon)$ est borné dans H^{-m}. Mais d'après (1, 50) et *b*), on a

$$(1, 53) \qquad \beta \| \varepsilon D^j w_\varepsilon \|_m^2 \leqslant |\langle \varepsilon A D^j w_\varepsilon, \overline{\varepsilon D^j w_\varepsilon} \rangle| - K\varepsilon$$

où K est une constante indépendante de ε. D'où le résultat.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de convergence locale suivant

THÉORÈME 1. 9. — *Soit* A (*resp.* B) *un opérateur de la forme* (1, 41) (*resp.* (1, 42)) *à coefficients indéfiniment dérivables sur* Ω, *avec les conditions d'éllipticité* (1, 43) *et* (1, 44) *et f donnée dans* $\mathcal{L}^k(\Omega)$ *k entier quelconque. Si lorsque* $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^m(\Omega)$, *vérifiant* (1, 45) *converge dans* $\mathcal{L}^{m'}(\Omega)$ *vers* w *vérifiant*

$$(1, 54) \qquad Bw = f$$

et si $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0$ *dans* $\mathcal{L}^m(\Omega)$, *alors* $u_\varepsilon \to w$ *dans* $\mathcal{L}^{2m'+k}(\Omega)$, $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon \to 0$ *dans* $\mathcal{L}^{m+m'+k}(\Omega)$ *et* $\varepsilon u_\varepsilon \to 0$ *dans* $\mathcal{L}^{2m+k}(\Omega)$.

Démonstration [32]. — Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Posons $\tilde{u}_\varepsilon = \varphi u_\varepsilon$ et $\tilde{w} = \varphi w$.

Par hypothèse, $\tilde{u}_\varepsilon$ (resp. $\varepsilon^{1/2} \tilde{u}_\varepsilon$) est borné dans $H^{m'}$ (resp. H^m). Par suite de la proposition 1. 6, $\tilde{u}_\varepsilon$ (resp. $\varepsilon^{1/2} \tilde{u}_\varepsilon$) est donc borné dans H^{2m+k} (resp. $H^{m+m'+k}$). De toute suite $\tilde{u}_{\varepsilon_n}$, on peut donc extraire une sous-suite $\tilde{u}_{\varepsilon_p}$, telle que $\tilde{u}_{\varepsilon_p}$ (resp. $\varepsilon_p^{1/2} \tilde{u}_{\varepsilon_p}$) converge faiblement dans $H^{2m'+k}$ (resp. $H^{m+m'+k}$) vers une limite qui ne peut être que $\tilde{w}$ (resp. 0), puisque $\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{w}$ dans $H^{m'}$ (resp. $\varepsilon^{1/2} \tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans H^m) par hypothèse. Mais on a, d'après (1, 45) :

$$(1, 55) \qquad B(D^j \tilde{w}) = D^j(\varphi f) + B^{(1)} \tilde{w} + D^j(B^{(2)}_{(\varphi)} w).$$

D'où, en tenant compte de (1, 47)

$$(1, 56) \qquad (\varepsilon A + B) D^j \tilde{u}_\varepsilon = B(D^j \tilde{w}) + \varepsilon a_j^\varepsilon + b_j^\varepsilon$$

avec

$$(1, 57) \qquad a_j^\varepsilon = D^j(A^{(2)}_{(\varphi)} u_\varepsilon) + A^{(1)} \tilde{u}_\varepsilon$$

et

$$(1, 58) \qquad b_j^\varepsilon = D^j(B^{(2)}_{(\varphi)}(u_\varepsilon - w)) + B^{(1)}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}).$$

[32] On peut supposer $k + m' > 0$.

Nous raisonnons par récurrence. Supposons que $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{w}$ dans $H^{m'+|j|-1}$ et que $\varepsilon^{1/2}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^{m+|j|-1}$, où $|j| \leqslant k + m'$. Alors $\varepsilon^{1/2}a_j^\varepsilon \to 0$ dans H^{-m} et $b_j^\varepsilon \to 0$ dans $H^{-m'}$. D'autre part, on a :

$$\varepsilon\langle AD^j\tilde{u}_\varepsilon,\ \overline{D^j\tilde{u}_\varepsilon}\rangle + \langle BD^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}),\ \overline{D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})}\rangle$$
$$= \langle BD^j\tilde{w} + \varepsilon a_j^\varepsilon + b_j^\varepsilon,\ \overline{D^j\tilde{u}_\varepsilon}\rangle + \langle BD^j\tilde{w},\ \overline{D^j(\tilde{w} - \tilde{u}_\varepsilon)}\rangle - \langle BD^j\tilde{u}_\varepsilon,\ \overline{D^j\tilde{w}}\rangle.$$

Il résulte des propriétés de a_j^ε et b_j^ε, de la proposition 1. 5, et de la convergence faible $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{w}$ dans $H^{2m'+k}$, que le second membre converge vers 0.

Or, comme $D^j\tilde{u}_\varepsilon$ est borné dans $H^{m'}$, on a d'après (1, 49) et (1, 50) :

$$\beta\|\varepsilon^{1/2}D^j\tilde{u}_\varepsilon\|_m^2 - K\varepsilon + \alpha\|D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})\|_{m'}^2$$
$$\leqslant \operatorname{Re}\{\varepsilon\langle AD^j\tilde{u}_\varepsilon,\ \overline{D^j\tilde{u}_\varepsilon}\rangle + \langle BD^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}),\ \overline{D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})}\rangle\}$$

où K est une constante indépendante de ε. On en déduit donc que $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{w}$ dans $H^{m'+|j|}$ et que $\varepsilon^{1/2}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^{m+|j|}$.

Supposons enfin que $\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^{m+|j|-1}$, avec $|j| \leqslant k + m$. Alors $\varepsilon a_j^\varepsilon \to 0$ dans H^{-m}. De plus, d'après les résultats précédents, b_j^ε ainsi que $B(D^j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}))$ convergent vers 0 dans H^{-m}, et par suite de (1, 56) $A(\varepsilon D^j\tilde{w}_\varepsilon)$ converge vers 0 dans H^{-m}. D'où le résultat, d'après (1, 53).

Applications aux problèmes aux limites.

Reprenons les hypothèses et les notations du théorèmes 1. 4. Chaque fois que la topologie de V (resp. W) coïncide *localement* avec la topologie de H^m (resp. $H^{m'}$), et que $a(u, v)$ (resp. $b(u, v)$) définit un opérateur de la forme (1, 41) (resp. 1, 42), à coefficients indéfiniment dérivables sur Ω, on aura le théorème suivant :

THÉORÈME 1. 10. — *Dans les conditions précédentes, pour tout ouvert borné avec* $\overline{\mathcal{A}} \subset \Omega$, *pour lequel* $f \in H^k(\mathcal{A})$, *k entier, alors* $u_\varepsilon \rightharpoonup w$ *dans* $H^{2m'+k}(\mathcal{A})$, $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon \to 0$ *dans* $H^{m+m'+k}(\mathcal{A})$ *et* $\varepsilon u_\varepsilon \to 0$ *dans* $H^{2m+k}(\mathcal{A})$.

Exemples. — Reprenons les exemples 1-1, 1-2, 1-3 et 1-4 du n° 3. La topologie de V coïncide localement avec celle de H^2. Par suite pour tout ouvert borné $\mathcal{A}$ avec $\overline{\mathcal{A}} \subset \Omega$, pour lequel $f \in H^k(\mathcal{A})$, on aura $u_\varepsilon^i \rightharpoonup w_i$, pour $i = 1, \ldots, 4$, dans $H^{2+k}(\mathcal{A})$.

Remarque. — Les résultats précédents s'appliquent aux systèmes différentiels du n° 3 dans lesquels on suppose que les b_{pq}^{ij} et les a_{pq}^{ij} sont indéfiniment dérivables sur Ω.

5. — Théorème de convergence à la frontière pour un ouvert régulier et des opérateurs A et B réguliers.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

a) Ω est borné et sa frontière Γ est une variété indéfiniment dérivable de dimension $n-1$;

b) $W = H^{m'}(\Omega)$; $V = H^m(\Omega)$ (resp. $H_0^m(\Omega)$) $m > m'$.

Nous prenons sur W (resp. V) $b(u, v)$ définie par

$$b(u, v) = \sum_{|p||q| \leqslant m'} (b_{pq} D^q u, D^p v)_0 \tag{1, 59}$$

(resp. $a(u, v)$ définie par

$$a(u, v) = \sum_{|p||q| \leqslant m} (a_{pq} D^q u, D^p v)_0 \tag{I, 60}$$

avec

c) a_{pq} et b_{pq} sont indéfiniment dérivables sur $\overline{\Omega}$.

d) $b(u, v)$ est elliptique sur $H^{m'}(\Omega)$,

e) $\varepsilon a(u, v) + b(u, v)$ est elliptique sur $H^m(\Omega)$ (resp. $H_0^m(\Omega)$) pour ε assez petit.

Soit f donnée dans $H^k(\Omega)$, k entier $\geqslant 0$.

Soit u_ε la solution de

$$u_\varepsilon \in H^m(\Omega) \text{ (resp. } H_0^m(\Omega)) \tag{1, 61}$$

et

$$\varepsilon a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) = (f, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in H^m(\Omega) \text{ (resp. } H_0^m(\Omega))$$

et w la solution de

$$w \in H^{m'}(\Omega) \text{ (resp. } H_0^{m'}(\Omega)) \tag{1, 62}$$

et

$$b(w, v) = (f, v) \qquad \text{pour tout} \qquad v \in H^{m'}(\Omega) \text{ (resp. } H_0^{m'}(\Omega)).$$

Nous savons d'après Nirenberg [1] et Browder [1] ([33]) que $u_\varepsilon \in H^{2m+k}(\Omega)$ et que $w \in H^{2m'+k}(\Omega)$.

([33]) Cf. aussi une démonstration dans Lions [3].

On pourrait croire que, lorsque $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to w$ dans $H^{2m'+k}(\Omega)$. Ce résultat est faux en général comme le montre l'exemple trivial suivant :

Nous prenons $V = H^1(\Omega)$ (resp. $H^1_0(\Omega)$) et $W = L^2(\Omega)$.

$a(u, v) = (u, v)_1$ qui définit l'opérateur $-\Delta$.

$$b(u, v) = (u, v)_0.$$

Soit $f \in H^k(\Omega)$ et u_ε la solution dans $H^1(\Omega)$ (resp. $H^1_0(\Omega)$) de

$$-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f; \qquad u_\varepsilon \in N_\varepsilon$$

alors $u_\varepsilon \to w = f$ dans $L^2(\Omega)$. Supposons que $u_\varepsilon \to w$ dans $H^k(\Omega)$, $k > 1$. Comme u_ε satisfait la condition aux limites $(\partial u_\varepsilon/\partial \nu)_\Gamma = 0$ (resp. $u_\varepsilon\, |_\Gamma = 0$) on aurait

$$(\partial w/\partial \nu)_\Gamma = (\partial f/\partial \nu)_\Gamma = 0 \quad (\text{resp. } w = |_\Gamma = f\,|_\Gamma = 0)$$

ce qui est absurde puisque f est quelconque dans $H^k(\Omega)$.

Cependant nous obtenons le résultat suivant sur la convergence des dérivées tangentielles, notées D^j_t :

Théorème 1.11. — *Sur toute carte locale* U, *sous les hypothèses a), b), c), d), e) :*

$$\begin{aligned} D^j_t u_\varepsilon &\to D^j_t w \quad \textit{dans} \quad H^{m'}(U) \quad \textit{pour} \quad |j| \leqslant k + m' \\ \varepsilon^{1/2} D^j_t u_\varepsilon &\to 0 \quad \textit{dans} \quad H^{m}(U) \quad \textit{pour} \quad |j| \leqslant k + m' \\ \varepsilon D^j_t u_\varepsilon &\to 0 \quad \textit{dans} \quad H^{m}(U) \quad \textit{pour tout} \quad |j| \leqslant k + m. \end{aligned}$$

Démonstration. — Nous faisons la démonstration pour $V = H^m(\Omega)$ et $W = H^{m'}(\Omega)$. Il n'y a pas de difficulté à l'étendre au cas où $V = H^m_0(\Omega)$ et $V_{(W)} = H^{m'}_0(\Omega)$.

Soit 0 un ouvert le long de Γ, applicable par un homéomorphisme indéfiniment différentiable ψ sur W(*) défini par $\{0 < \xi_i < 1,\ i = 1, \ldots, n-1$ et $-1 < \xi_n < 1\}$; tel que $U = 0 \cap \Omega$ s'applique sur W^+ défini par $\{0 < \xi_i < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ et $0 \cap \Gamma$ sur $W_0 = W \cap \{\xi_n = 0\}$.

Pour tout $\delta > 0$, désignons par W^+_δ l'ensemble défini par $\{\delta < \xi_i < 1 - \delta,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ 0 < \xi_n < 1 - \delta\}$. Soit $U_\delta = \psi^{-1}(W^+_\delta)$.

Par transport de structure [34], ψ définit un isomorphisme de $H^s(U)$ sur $H^s(W^+)$, pour tout s entier $\geqslant 0$. De même ψ définit un isomorphisme entre le sous-espace $H^s_\Gamma(U)$ de $H^s(U)$

[34] Voir Schwartz [6], p. 21.

(*) Aucune confusion n'est possible avec l'espace de Hilbert W qui est ici $H^{m'}(\Omega)$.

des fonctions identiquement nulles près de $\partial U - \Gamma$ ([35]), et le sous-espace $H^s_1(W^+)$ de $H^s(W^+)$ des fonctions identiquement nulles près de $\partial W^+ - W_0$.

Soit $\delta > 0$. Il existe δ_1 avec $0 < \delta_1 < \delta$. Alors, toujours par transport de structure, ψ définit un isomorphisme entre le sous-espace C_δ des fonctions de $C(\overline{U})$, égales à 1 sur U_δ et identiquement nulles sur $U - U_{\delta_1}$ et le sous-espace $\tilde{C}_\delta$ des fonctions de $C(\overline{W^+})$ égales à 1 sur W^+_δ et identiquement nulles sur $W^+ - W^+_{\delta_1}$.

La forme sesquilinéaire $b(u, v)$ définit par restriction une forme sesquilinéaire continue sur $H^{m'}(U)$. On peut donc définir, l'image par ψ de $b(u, v)$, soit $\tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v}) = b(\psi^{-1}\tilde{u}, \psi^{-1}\tilde{v})$, qui est une forme sesquilinéaire continue sur $H^{m'}(W^+)$. On définira de même sur $H^m(W^+)$ l'image par ψ de $a(u, v)$ soit $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) = a(\psi^{-1}u, \psi^{-1}v)$. Par définition même $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v})$ et $\tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v})$ sont de la forme :

$$(1, 63) \qquad \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{|p||q| \leqslant m} (\tilde{a}_{pq} D^q \tilde{u}, D^p \tilde{v})_0$$

et

$$(1, 64) \qquad \tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{|p|, |q| \leqslant m'} (\tilde{b}_{pq} D^q \tilde{u}, D^p \tilde{v})_0$$

où $\tilde{a}_{pq}$ et $\tilde{b}_{pq}$ sont indéfiniment dérivables sur $\overline{W^+}$.

Désignons par $(u_\varepsilon)_U$, $(w)_U$ et $(f)_U$ les restrictions à U de u_ε w et f. D'après (1, 61) (resp. (1, 62)) nous avons

$$\varepsilon a((u_\varepsilon)_U, v) + b((u_\varepsilon)_U, v) = ((f)_U, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^m_1(U)$$
$$(\text{resp. } b((w)_U, v) = ((f)_U, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^{m'}_1(U))$$

et, par suite, en désignant par $\tilde{u}_\varepsilon$, $\tilde{w}$ et $\tilde{f}$ les images par ψ de $(u_\varepsilon)_U$, $(w)_U$ et $(f)_U$:

$$(1, 65) \quad \varepsilon\tilde{a}(\tilde{u}_\varepsilon, v) + \tilde{b}(\tilde{u}_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^m_1(W^+)$$

et

$$(1, 66) \quad b(\tilde{w}, \tilde{v}) = (\tilde{f}, v)_0 \quad \text{pour tout} \quad v \in H^{m'}_1(W^+).$$

Remarquons enfin que $b(u, v)$ (resp. $\varepsilon a(u, v) + b(u, v)$) étant elliptique par restriction sur $H^{m'}_1(U)$ (resp. $H^m_1(U)$ quand $\varepsilon \to 0$) $\tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v})$ (resp. $\varepsilon\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \tilde{b}(\tilde{u}, \tilde{v})$) est elliptique sur

([35]) Pour un ouvert Ω, $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω.

$H_1^{m'}(W)^+$ (resp. $H_1^m(W^+)$ quand $\varepsilon \to 0$). Par suite il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\mathrm{Re}(\tilde{b}(u,u)) \geqslant \alpha\|u\|^2_{m'} \quad \text{pour tout} \quad u \in H_1^{m'}(W^+)\ ^{(36)}$$
$$\mathrm{Re}(\tilde{a}(u,u) + \tilde{b}(u,u)) \geqslant \beta\|u\|^2_m \quad \text{pour tout} \quad u \in H_1^m(W^+).$$

On en déduit comme au n° 3, pour $\varepsilon \leqslant 1$:

(1, 67)

$$\mathrm{Re}(\varepsilon\tilde{a}(u,u)+\tilde{b}(u,u)) \geqslant \frac{1}{2}(\alpha\|u\|^2_{m'}+\beta\varepsilon\|u\|^2_m) \begin{cases}\text{pour tout } u \in H_1^m(W^+)\\ \text{avec } \mathrm{Re}(a(u,u)) > 0\end{cases}$$

et

$$(1,\ 68) \qquad \mathrm{Re}(\varepsilon\tilde{a}(u,\ u) + \tilde{b}(u,\ u)) \geqslant \beta\|u\|^2_m$$

pour tout $u \in H_1^m(W^+)$ avec $\mathrm{Re}(a(u,\ u)) \leqslant 0$.

Enfin, si u est dans un borné B de $H_1^{m'}(W^+)$ pour lequel $\mathrm{Re}\tilde{b}(u,\ u) < K$, alors

$$(1,\ 69) \quad \mathrm{Re}(\varepsilon\tilde{a}(u,\ u) + \tilde{b}(w,\ w)) \geqslant \alpha\|w\|^2_{m'} + \beta\varepsilon\|u\|^2_m - K\varepsilon$$

pour tout $u \in B$, $w \in H_1^{m'}(W^+)$.

Nous devons montrer que pour tout $\delta > 0$, étant donnée $\varphi \in C_\delta$, alors $D_\xi^j(\varphi u_\varepsilon) \to D_\xi^j(\varphi u)$ dans $H^{m'}(U)$ pour $|j| \leqslant k + m'$ etc..., ce qui revient à montrer, d'après ce qui précède que $D_\xi^j\tilde{\varphi}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}) \to 0$ dans $H^{m'}(W^+)$ et $D_\xi^j(\varepsilon^{1/2}\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$ pour $|j| \leqslant k + m'$ et que $\varepsilon D_\xi^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$ pour $|j| \leqslant k + m$, où $j = (j_1,\ \ldots,\ j_{n-1},\ 0)$ (37).

Nous savons que $u_\varepsilon \in H^{2m+k}(\Omega)$. Par suite $\tilde{u}_\varepsilon \in H^{2m+k}(W^+)$. Calculons pour $|j| \leqslant k + m$, et pour $v \in C(\overline{W^+})$, identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$:

$$\varepsilon\tilde{a}(D_\xi^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon),\ v) + \tilde{b}(D_\xi^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon),\ v).$$

D'après la formule (1, 46) du n° 4, on aura pour $|p|\,|q| \leqslant m'$

$$(1,\ 70) \quad \tilde{b}_{pq}D^qD_\xi^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) = D_\xi^j(\tilde{b}_{pq}\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon) + D_\xi^j(B_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + B_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon).$$

où

$$B_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) = -\sum_{1\leqslant|r|\leqslant|j|} \alpha_r D_\xi^r(\tilde{b}_{pq})D_\xi^{j-r}D^q(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$$

et

$$B_{pq}^{(2)}(\tilde{u}_\varepsilon) = \tilde{b}_{pq}\sum_{1\leqslant|r|\leqslant|q|} \beta_r D^r(\tilde{\varphi})D^{q-r}(\tilde{u}_\varepsilon).$$

(36) On désigne par $\|u\|_s$ la norme de u dans $H_1^s(W^+)$.

(37) $\tilde{\varphi} = \psi(\varphi)$. Dans l'espace des $\{\xi_i\}$ nous notons par D_ξ^s toute dérivée avec $s = s_1,\ \ldots,\ s_{n-1},\ 0)$.

On aura de même pour $|p||q| \leqslant m$.

(1, 71) $\tilde{a}_{pq}D^qD_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) = D_t^j(\tilde{a}_{pq}\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon) + D_t^j(A_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + A_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$

avec pour $A_{pq}^{(2)}$ et $A_{pq}^{(1)}$ des expressions analogues à celles de $B_{pq}^{(2)}$ et $B_{pq}^{(1)}$.

D'autre part, puisque $\tilde{\varphi}$ et v sont identiquement nulles près de $\partial W^+ - W_0$, nous avons pour $|p||q| \leqslant m'$ (resp. $|p||q| \leqslant m$) :

(1, 72) $(D_t^j(\tilde{b}_{pq}\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon),\ D^pv)_0 = (-1)^{|j|}(\tilde{b}_{pq}D^q\tilde{u}_\varepsilon,\ \bar{\tilde{\varphi}}D_t^jD^pv)_0$

(resp.

(1, 73) $(D_t^j(\tilde{a}_{pq}\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon), D^pv)_0 = (-1)^{|j|}(\tilde{a}_{pq}D^q\tilde{u}_\varepsilon,\ \bar{\tilde{\varphi}}D_t^jD^pv)_0$.

Mais, d'après la formule de Leibnitz, pour $|p| \leqslant m$:

$$\bar{\tilde{\varphi}}D^pD_t^jv = D^p(\bar{\tilde{\varphi}}D_t^jv) + C_p^jv.$$

où

(1, 74) $$C_p^jv = -\sum_{1\leqslant|r|\leqslant p} \alpha_rD^r(\bar{\tilde{\varphi}})D^{p-r}D_t^jv.$$

On en déduit finalement, en tenant compte de (1, 65)

(1, 75) $$\begin{aligned}\varepsilon\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) &+ \tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v)\\ &= (-1)^{|j|}(f, \bar{\tilde{\varphi}}D_t^jv)_0 + \varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) + b_j(\tilde{u}_\varepsilon, v)\end{aligned}$$

où

(1, 76) $$\begin{aligned}a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) = \sum_{|p||q|\leqslant m} &(D_t^j(A_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + A_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^pv)_0\\ &+ (-1)^{|j|}(\tilde{a}_{pq}D^q\tilde{u}_\varepsilon, C_p^jv)_0\end{aligned}$$

et

(1, 77) $$\begin{aligned}b_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) = \sum_{|p||q|\leqslant m'} &(D_t^j(B_{pq}^{(2)}\tilde{u}_\varepsilon) + B_{pq}^{(1)}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^pv)_0\\ &+ (-1)^{|j|}(\tilde{b}_{pq}D^q{}_\varepsilon\tilde{u}, C_p^jv)_0.\end{aligned}$$

Nous savons que $u_\varepsilon \to w$ dans $H^{m'}(\Omega)$ et que $\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon \to 0$ dans $H^m(\Omega)$. Par suite, $\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{w}$ dans $H^{m'}(W^+)$ et $\varepsilon^{1/2}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^m(W^+)$.

Montrons tout d'abord la :

Proposition 1. 7. — *$D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ (resp. $\varepsilon^{1/2}D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$) est borné dans $H^{m'}(W^+)$ (resp. $H^m(W^+)$) pour $|j| \leqslant k + m'$.*

Démonstration. — Nous raisonnons par récurrence, la proposition étant vraie pour $j = 0$. Supposons la démontrée jusqu'à l'ordre $j - 1$, $|j| \leqslant k + m'$.

Il résulte des hypothèses de récurrence, des propriétés des opérateurs $A^{(1)}_{pq}$ et $A^{(2)}_{pq}$ que pour $|p||q| \leqslant m$:

$$\varepsilon^{1/2}[D^j_t(A^{(2)}_{pq}\tilde{u}_\varepsilon) + A^{(1)}_{pq}(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)]$$

est borné dans $L^2(W^+)$. D'autre part, $(\tilde{a}_{pq}D^q\tilde{u}_\varepsilon, C^j_p v)_0$ est, d'après (1, 74) somme de termes de la forme:

$$(\tilde{a}_{pq}D^r(\tilde{\varphi})D^q(\tilde{u}_\varepsilon), \quad D^{p-r}D^j_t v)_0 \quad \text{avec} \quad |r| \geqslant 1,$$

ce qui s'écrit encore, au signe près:

$$(D^{j-s}_t(\tilde{a}_{pq}D^r\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon), \ D^\alpha v)_0 \quad \text{avec} \quad |s| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqslant m.$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $\varepsilon^{1/2}D^{j-s}_t(\tilde{a}_{pq}D^r\tilde{\varphi}D^q\tilde{u}_\varepsilon)$, pour $|s| \geqslant 1$ est borné dans $L^2(W^+)$.

Par suite, il existe une constante indépendante de ε et de v telle que

$$(1, 78) \qquad |Re\ \varepsilon a_j(u_\varepsilon, v)| \leqslant K_1\ \varepsilon^{1/2}||v||_{m'}$$

pour tout $v \in C(\overline{W^+})$ identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$.

On montrerait de la même façon que,

$$(1, 79) \qquad |Re\ b_j(u_\varepsilon, v)| \leqslant K_2\ ||v||_{m'}$$

pour tout $v \in C(\overline{W^+})$ identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$, K_2, étant indépendante de ε et de v.

Enfin pour $|j| \leqslant k + m'$, nous pouvons écrire $(\tilde{f}, \tilde{\varphi}D^j_t v)_0$, au signe près, sous la forme

$$(D^s_t(\tilde{\varphi}\tilde{f}), \ D^\alpha_t v) \quad \text{avec} \quad |s| \leqslant k \quad \text{et} \quad |\alpha| \leqslant m'.$$

Par suite:

$$(1, 80) \qquad |Re(\tilde{\varphi}\tilde{f}, \ D^j_t v)_0| \leqslant K_3\ ||v||_{m'},$$

pour tout $v \in C(\overline{W^+})$, identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$.

Les inégalités (1, 78), (1,79) et (1,80) sont encore vraies pour $v = D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ ce qui donne en tenant compte de (1, 75)

$$(1, 81) \quad Re\{\varepsilon\tilde{a}(D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \tilde{b}(D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)\} \leqslant K_4||D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_{m'} + K_5||\varepsilon^{1/2}D^j_t(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_m.$$

D'où le résultat, en tenant compte de (1, 67) et (1, 68).

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la:

Proposition 1. 8. — *Quand* $\varepsilon \to 0$,

$$D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w}) \ (\textit{resp.}\ \varepsilon^{1/2} D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0)$$

dans $H^{m'}(W^+)$ (*resp. dans* $H^m(W^+)$) *pour* $|j| \leqslant k + m'$.

Démonstration. — D'après la proposition 1. 6, de toute suite u_{ε_n} on peut extraire une sous-suite u_{ε_p} telle que $D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_{\varepsilon_p})$ (resp. $(\varepsilon_p)^{1/2} D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_{\varepsilon_p})$) converge dans $H^{m'}(W^+)$ faible (resp. $H^m(W^+)$ faible) vers une limite qui ne peut être que $D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w})$ (resp. 0) puisque $\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon \to \tilde{\varphi}\tilde{w}$ dans $H^{m'}(W^+)$ (resp. $\varepsilon^{1/2}\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon \to 0$ dans $H^m(W^+)$).

Pour montrer les convergences fortes nous raisonnons par récurrence : supposons la proposition établie jusqu'à l'ordre $j - 1$, avec $|j| \leqslant k + m'$.

Nous avons pour $v \in C(\overline{W^+})$ identiquement nulle près de $\partial W^+ - W_0$,

$$\tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w}), v) = (-1)^{|j|}(\tilde{f}, \tilde{\varphi} D_t^j v)_0 + b_j(\tilde{w}, v)$$

donc

$$\begin{aligned} &\varepsilon\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) + \tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), v) \\ &\qquad = \tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w}), v) + \varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v) + b_j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}, v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\varepsilon\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \tilde{b}\big(D_t^j(\tilde{\varphi}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w})), D_t^j(\tilde{\varphi}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}))\big) \\ &= \varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + b_j((\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \tilde{b}\big(D_t^j(\tilde{\varphi}(\tilde{w} - \tilde{u}_\varepsilon)), D_t^j\tilde{\varphi}\tilde{w}\big). \end{aligned}$$

La proposition 1. 7 sera complètement démontrée, d'après (1, 69), si nous montrons que la partie réelle du second membre tend vers 0.

Or, d'après la convergence faible $\tilde{b}(D_t^j\tilde{\varphi}(\tilde{w} - \tilde{u}_\varepsilon)), (D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{w})) \to 0$. D'autre part, il résulte des hypothèses de récurrence, de la proposition 1. 7 et de l'expression même de $a_j(u, v)$ et de $b_j(u, v)$ que

$$Re\{\varepsilon a_j(\tilde{u}_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + b_j(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{w}, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon))\} \to 0$$

d'où la proposition.

Il nous reste à montrer que pour $|j| \leqslant k + m$, $\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$. Ceci est vrai pour $|j| \leqslant k + m'$, d'après la proposition 1. 8, et par suite nous pouvons raisonner par récurrence. Supposons donc que $\varepsilon D_t^s(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ pour tout $|s| \leqslant |j| - 1$, $|j| \leqslant k + m$.

Montrons d'abord que $\varepsilon D_t^s(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ est borné dans $H^m(W^+)$. Reprenons (1, 75) et multiplions les deux membres par ε. Nous savons d'après la proposition 1. 7, que $\varepsilon^{1/2}D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^{m'}(W^+)$ pour $|j| \leqslant k + m$. On a donc en particulier $|Re\varepsilon b_j(\tilde{u}_\varepsilon, v)| \leqslant K_1\varepsilon^{1/2}||v||_{m'}$.

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|Re(\varepsilon^2 a_j(\tilde{u}_\varepsilon, v))| \leqslant K_2\varepsilon\, ||v||_m.$$

Enfin $(\tilde{\varphi}\tilde{f}, D_t^j(v))_0$ peut s'écrire au signe près $(D_t^s(\tilde{\varphi}\tilde{f}), D^\alpha v)_0$ avec $|s| \leqslant k$ et $|\alpha| \leqslant m$. Donc

$$|Re\varepsilon(\tilde{f}, \tilde{\varphi}D_t^j v)|_0 \leqslant K_3\varepsilon||v||_m.$$

Finalement on obtient

$$Re\{\varepsilon^2\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \varepsilon\tilde{b}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon))$$
$$\leqslant K_1\varepsilon^{1/2}||D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_{m'} + K_4||\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)||_m.$$

D'où le résultat en tenant compte de (1, 67) et (1, 68).

Il en résulte que $\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon) \to 0$ dans $H^m(W^+)$ faible. Par suite :

$$(\tilde{f}, \tilde{\varphi}D_t^jD_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0$$

D'autre part, d'après la proposition 1, 8

$$Re\varepsilon b_j(u_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0.$$

Enfin, d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que $\varepsilon D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)$ est borné dans $H^m(W^+)$.

$$Re\varepsilon^2 a_j(u_\varepsilon, D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) \to 0.$$

Donc

$$Re\{\varepsilon^2\tilde{a}(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon)) + \varepsilon b(D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon), D_t^j(\tilde{\varphi}\tilde{u}_\varepsilon))\} \to 0.$$

D'où le résultat d'après (1, 69).

Le théorème 1. 11 est ainsi complètement démontré. Bien entendu nous n'avons pas de théorème analogue pour les dérivées normales, car on pourrait alors par recollement des morceaux, obtenir la convergence $u_\varepsilon \to u$ dans $H^{2m+k}(\Omega)$ et nous avons vu que cela était impossible, en général.

6. — Valeurs propres et fonctions propres.

Préliminaires. — Soit K un espace de Hilbert, dont le produit scalaire est noté (x, y) et la norme par $||x||$. Soit A un opérateur dans K, hermitien, complètement continu, positif et tel que $Ax = 0$ entraîne $x = 0$. Alors A possède un spectre dénombrable

$$(1, 82) \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant \cdots \to 0.$$

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$, les vecteurs propres correspondants avec

$$(1,83) \qquad Ae_n = \lambda_n e_n \quad \text{et} \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}\ ([38])$$

Notation : $f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant n vecteurs de K linéairement indépendants, nous désignons par $R^n(f_i)$ le sous-espace de K engendré par les n vecteurs f_i. La proposition suivante est classique ([39]) :

Proposition 1, 9. — *On a*

$$\lambda_n = \sup_{f_1, \ldots, f_n \in K} \left[\inf_{x \in R^n(f_i)} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} \right]$$

$f_1, \ldots f_n$, *étant linéairement indépendants dans* K.

Reprenons alors les espaces de Hilbert H et V, avec (1, 1), puis sur V une forme sesqui-linéaire continue *hermitienne*, $a(u, v)$ qui définit l'opérateur A et l'espace N. On pose la

Définition 1, 2. — $a(u, v)$ *est dite elliptique sur* V *au sens de Garding* ([40]) *s'il existe* $\alpha > 0$ *et* ξ *tels que :*

$$a(u, u) + \xi\, |u|^2 \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \quad \textit{pour tout } u \in V.$$

Si $a(u, v)$ est hermitienne et elliptique sur V au sens de Garding alors

$$((u, v)) = a(u, v) + \xi(u, v)$$

définit sur V un produit scalaire équivalent à $(u, v)_V$.

Il est également classique ([41]) que l'on a

Théorème 1, 11. — *Soit f donnée dans* H. *Si $a(u, v)$ est hermitienne et elliptique sur* V *au sens de Garding, et si l'injection de* V *dans* H *est complètement continue, alors le problème :*

$$(1, 84) \qquad Au - \mu u = f; \qquad u \in N$$

([38]) δ_{ij}, symbole de Kronecker.
([39]) Voir Courant-Hilbert [1].
([40]) Voir Garding [1].
([41]) Voir Courant-Hilbert [1].

admet une solution unique sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de μ

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \leqslant \ldots$$

qui constituent le spectre du problème, et on a

$$(1,\ 85) \qquad \mu_n = \operatorname*{Inf}_{f_1, \ldots, f_n \in V} \left[\operatorname*{Sup}_{u \in R^n(f_i)} \left[\frac{a(u,\ u)}{|u|^2} \right] \right]$$

Perturbation singulière. — On reprend V, W et H, avec (1, 13) et

(1, 86) L'injection de W dans H est complètement continue [42].

On prend sur V (resp. W) une famille de formes sesqui-linéaires continues $b(\varepsilon;\ u,\ v)$ (resp. une forme sesqui-linéaire continue $b(u,\ v)$).

On suppose que $b(\varepsilon;\ u,\ v)$ et $b(u,\ v)$ sont *hermitiennes*, qu'elles vérifient (1, 15) et que l'on a les hypothèses d'ellipticité :

(1,87) Il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ avec ε, $\eta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon) \to \eta$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\beta > 0$ tels que pour tout $u \in V$ et tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, on ait :

$$b(\varepsilon;\ u,\ u) + \eta(\varepsilon)|u|^2 \geqslant \alpha(\varepsilon)||u||_V^2 + \beta||u||_W^2$$

et

(1, 88) $b(u,\ v)$ est elliptique sur $\overline{V}_{(W)}$, au sens de Garding, i,e,. il existe ξ et $\gamma > 0$, tels que pour tout $u \in \overline{V}_{(W)}$, on ait :

$$b(u,\ u) + \xi|u|^2 \geqslant \gamma||u||_W^2.$$

Soit B (resp. B_ε) et N_B (resp. N_ε) l'opérateur et l'espace attachés à $b(u,\ v)$ (resp. $b(\varepsilon;\ u,\ v)$) sur $\overline{V}_{(W)}$ (resp. sur V).

Soit $\lambda_n(\varepsilon)$ la $n^{\text{ième}}$ valeur propre du problème

$$(1,\ 89) \qquad B_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda(\varepsilon) u_\varepsilon; \quad u_\varepsilon \in N_\varepsilon; \quad |u_\varepsilon| = 1;$$

ε assez petit avec

$$\lambda_1(\varepsilon) \leqslant \lambda_2(\varepsilon) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \cdots$$

Soit $v_n(\varepsilon)$ les vecteurs propres associés, auxquels on impose de former un système orthonormé dans H.

[42] Il en résulte que l'injection de V dans H est aussi complètement continue.

Soit μ_n la $n^{\text{ième}}$ valeur propre du problème

$$\text{(1, 90)} \qquad Bu = \mu u; \qquad u \in N_B \, |u| = 1$$

avec

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant \cdots$$

Soit w_n les vecteurs propres associés auxquels on impose de former un système orthonormé dans H.

THÉORÈME 1, 12. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 86), (1, 15) *où* $b(\varepsilon; u, v)$ *et* $b(u, v)$ *sont hermitiennes, ainsi que* (1, 87), (1, 88) *et*

(1, 91) *Il existe* $\delta(\varepsilon)$ *et* $\tau(\varepsilon)$ *convergent tous deux vers* 0 *avec* ε, *tels que*

$$b(\varepsilon; u, u) - b(u, u) + \delta(\varepsilon) b(u, u) + \tau(\varepsilon) |u|^2 \geqslant 0$$

pour tout $u \in V$ *et* ε *assez petit.*
$\lambda_n(\varepsilon)$ *converge vers* μ_n, *quand* $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. — D'après le théorème 1, 11, on a :

$$\lambda_n(\varepsilon) = \operatorname*{Inf}_{f_1, f_2, \ldots f_n \in V} \left[\operatorname*{Sup}_{u \in R^n(f_i)} \frac{b(\varepsilon; u, u)}{|u|^2} \right]$$

et

$$\mu_n = \operatorname*{Inf}_{f_1, f_2, \ldots f_n \in \bar{V}_{(W)}} \left[\operatorname*{Sup}_{u \in R^n(f_i)} \frac{b(u, u)}{|u|^2} \right].$$

Mais d'après (1, 91), on a pour tout $u \in V$

$$\frac{b(\varepsilon; u, u)}{|u|^2} \geqslant [1 - \delta(\varepsilon)] \frac{b(u, u)}{|u|^2} - \tau(\varepsilon)$$

d'où il résulte :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{Inf} \lambda_n(\varepsilon) \geqslant \mu_n.$$

Il nous suffit alors de montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{Sup} \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \mu_n.$$

Or, en désignant par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les n premiers vecteurs propres de B, normalisés dans $\bar{V}_{(W)}$, on a

$$\mu_n = \operatorname*{Sup}_{u \in R^n(e_i)} \left[\frac{b(u, u)}{|u|^2} \right].$$

Pour $\delta > 0$ donné, il existe un espace à n dimensions dans V, $R^n(g_i)$ tel que l'on ait

$$\operatorname*{Sup}_{u \in R^n(g_i)} \left[\frac{b(u, u)}{|u|^2}\right] \leqslant \mu_n + \delta.$$

Or

$$\lambda_n(\varepsilon) \leqslant \operatorname*{Sup}_{u \in R^n(g_i)} \left[\frac{b(\varepsilon; u, u)}{|u|^2}\right]$$

donc, d'après (1, 15)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{Sup} \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \operatorname*{Sup}_{u \in R^n(g_i)} \frac{b(u, u)}{|u|^2} \quad \text{donc} \quad \leqslant \mu_n + \delta$$

d'où le résultat puisque δ est un nombre positif quelconque.

THÉORÈME 1. 13. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, 12, $v_n(\varepsilon) \to w_n$ *dans* W.

Démonstration. — 1° Supposons que μ_n est valeur propre simple du problème (1, 90). Alors, d'après le théorème 1, 12, pour ε assez petit, $\lambda_n(\varepsilon)$ est aussi valeur propre simple du problème (1, 89).

On a

$$b(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon)) = \lambda_n(\varepsilon), \qquad (|v_n(\varepsilon)| = 1).$$

Il en résulte, en tenant compte du théorème 1, 12, que $b(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon))$ est borné, et en tenant compte de (1, 87), que $v_n(\varepsilon)$ est borné dans W. De toute suite $v_n(\varepsilon_i)$ on peut donc extraire une sous-suite $v_n(\varepsilon_j)$ convergent dans W faible vers w. Montrons que $w = w_n$.

On a

$$(1, 92) \quad b(\varepsilon_j; v_n(\varepsilon_j), v) = \lambda_n(\varepsilon_j)\,(v_n(\varepsilon_j), v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

Posons :

$$c(\varepsilon; u, v) = b(\varepsilon; u, v) - b(u, v) + \delta(\varepsilon) b(u, v) + \tau(\varepsilon)\,(u, v).$$

D'après (1, 91), $c(\varepsilon; u, v)$ est pour ε assez petit une forme hermitienne positive. On a donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|c(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v)| \leqslant \left(c(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon))^{1/2}\,(c(\varepsilon; v, v))^{1/2}\right)$$

mais $c(\varepsilon; v_n(\varepsilon), v_n(\varepsilon))$, est borné, et $c(\varepsilon; v, v) \to 0$ (en tenant compte de (1, 15)). Par suite $c(\varepsilon;\, v_n(\varepsilon),\, v) \to 0$ pour tout $v \in V$. Il en résulte que $b(\varepsilon;\, v_n(\varepsilon),\, v) - b(v_n(\varepsilon),\, v) \to 0$ pour tout $v \in V$ ([43]).

Or

$$b(\varepsilon_j;\, v_n(\varepsilon_j),\, v) - b(w,\, v)$$
$$= \big(b(\varepsilon_j;\, v_n(\varepsilon_j),\, v) - b(v_n(\varepsilon_j),\, v)\big) + \big(b(v_n(\varepsilon_j),\, v) - b(w,\, v)\big).$$

où le second membre converge vers 0.

D'autre part, le second membre de (1, 92) converge vers $\mu_n(w,\, v)$. On a donc :

$$b(w,\, v) = \mu_n(w,\, v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V \quad \text{donc pour tout} \quad v \in \overline{V}_{(W)}.$$

Par suite $w = w_n$.

Il nous reste à montrer que $v_n(\varepsilon) \to w_n$ dans W fort.

Remarquons tout d'abord que la convergence $v_n(\varepsilon)$ vers w_n dans W faible entraîne, d'après l'hypothèse (1, 86), la convergence dans H fort.

On a de plus

$$b(\varepsilon\,;\, v_n(\varepsilon),\, v_n(\varepsilon)) - b(v_n(\varepsilon),\, v_n(\varepsilon)) + b(v_n(\varepsilon) - w_n,\, v_n(\varepsilon) - w_n)$$
$$= \lambda_n(\varepsilon) + \mu_n - b(v_n(\varepsilon),\, w_n) - b(w_n,\, v_n(\varepsilon)).$$

Le second membre converge vers 0 avec ε. Quant au premier membre il est minoré d'après (1, 88) et (1, 91) par :

$$-\delta(\varepsilon)\, b(v_n(\varepsilon),\, v_n(\varepsilon)) - \tau(\varepsilon) + \gamma\|v_n(\varepsilon) - w_n\|_W^2 - \xi|v_n(\varepsilon) - w_n|^2.$$

D'où le résultat.

2° Supposons que μ_n est dégénéré, d'ordre de multiplicité p. On a donc :

$$\mu_{n-1} < \mu_n = \mu_{n+1} = \cdots = \mu_{n+p-1} < \mu_{n+p}.$$

Rien ne permet d'affirmer que

$$\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_{n+1}(\varepsilon) = \cdots = \lambda_{n+p-1}(\varepsilon)$$

Mais on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_{n+j}(\varepsilon) = \mu_n$ pour $j = 0, 1, \ldots, p-1$.

Soit $v_{n+j}(\varepsilon)$ le vecteur propre correspondant à $\lambda_{n+j}(\varepsilon)$, et w_{n+j}, $i = 0, 1, \ldots, p-1$ les vecteurs propres correspondants à μ_n.

([43]) Comparez lemme 1. 1, page 22.

En utilisant la démonstration de 1° on voit que pour tout $j \in (0, 1, \ldots, p-1)$ il existe $i_j \in (0, 1, \ldots, p-1)$ tel que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} v_{n+j}(\varepsilon) = w_{n+i_j}$ dans W. De plus si $j \neq k$, on a $i_j \neq i_k$, puisque $(v_{n+j}(\varepsilon), v_{n+k}(\varepsilon))_0 = 0$. Pour simplifier l'écriture, nous appellerons w_n la limite, quand $\varepsilon \to 0$, de $v_n(\varepsilon)$. Moyennant cette notation, le théorème 1, 12 est complètement démontré.

On en déduit immédiatement le

THÉORÈME 1, 14. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, 13, $\dfrac{v_n(\varepsilon)}{\sqrt{\lambda_n(\varepsilon)}} \to \dfrac{w_n}{\sqrt{\mu_n}}$ *dans* W, *quand* $\varepsilon \to 0$.

Les résultats de ce n° 6 complètent, dans une certaine mesure, les résultats de nombreux auteurs : voir Kato [1], Moser [1], Morgenstern [1], Glasko [1], Kostomarov [1], Visik-Liousternik [1].

CHAPITRE II

APPLICATION AUX PROBLÈMES MIXTES

Dans tout ce paragraphe, t désigne une variable réelle, et, pour tout espace de Banach E, $\mathfrak{D}'(t, \mathrm{E})$ (resp. $\mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{E})$) désigne l'espace des distributions en t à valeurs dans E (resp. l'espace des distributions en t, à valeurs dans E, à support limité à gauche) [44]. On pose $\mathrm{D} = (\partial/\partial t)$.

1. — Convergence, au sens des distributions de la solution d'un problème mixte relatif à $\mathrm{B}_\varepsilon + \mathrm{D}$ (resp. $\mathrm{B}_\varepsilon + a\mathrm{D}^2 + b\mathrm{D}$, avec a et b réels et $a > 0$).

a-préliminaires [45]. — On se donne comme au nº 1 du chapitre I, un espace de Hilbert H, puis un espace de Hilbert V, avec

$$(2, 1) \qquad \mathrm{V} \subset \mathrm{H} \text{ et } \mathrm{V} \text{ dense dans } \mathrm{H}.$$

Soit $a(u, v)$ une forme sesqui-linéaire continue sur V, à laquelle sont attachés, l'espace N et l'opérateur A.

PROBLÈME 2, 1. (*resp.* 2, 2). — *Soit* T *donnée dans* $\mathrm{D}'_+(t; \mathrm{H})$. *Existe-t-il* u *avec*

$$(2, 1) \qquad \mathrm{A}u + \mathrm{D}u = \mathrm{T}; \qquad u \in \mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{N})$$

(resp.

$$(2, 2) \quad \mathrm{A}u + a\mathrm{D}^2u + b\mathrm{D}u = \mathrm{T}; \qquad u \in \mathfrak{D}'_+(t; \mathrm{N}); \ a \text{ et } b \text{ réels}).$$

[44] Voir Schwartz [8], [9], ou [3]. Les résultats essentiels utilisés concernant ces espaces, sont également rappelés dans Lions, [1] chap. II, § 1.

[45] On rappelle dans ces préliminaires les résultats, utilisés dans la suite de Lions [1] chap. II et Lions [5].

Définition 2, 1. — Nous dirons que $a(u, v)$ vérifie l'hypothèse (E) sur V, s'il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\mathrm{Re}\, a(u, u) + c\,|u|^2 \geqslant \alpha\, \|u\|_V^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in V.$$

Théorème 2, 1. — *Sous l'hypothèse* (2, 1) *si* $a(u, v)$ *vérifie* (E) *sur* V, (*resp. est hermitienne et vérifie* (E) *sur* V) *l'opérateur* $A + D$ (*resp.* $A + aD^2 + bD$, *avec* a *et* b *réels et* $a > 0$) *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}'_+(t;\, N)$ *sur* $\mathcal{D}'_+(t;\, H)$ *et par suite le problème* 2, 1 (*resp.* 2, 2) *admet une solution unique.*

Remarque 2, 1. ([46]). — En posant $S = e^{-\lambda t}u$, on peut toujours supposer, pour résoudre le problème 2. 1 (resp. 2, 2) au lieu de (E)

$$\mathrm{Re}\, a(u, u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \quad \text{pour tout} \quad u \in V$$

(*i.e.* $a(u, v)$ est elliptique sur V au sens de la définition 1, 1).

Distribution de Green.

Sous les hypothèses du théorème 2, 1, il existe une distribution unique G_1 (resp. G_2) élément de $\mathcal{D}'_+(t;\, \mathcal{L}_b(H;\, N))$ telle que la solution u_1 (resp. u_2) du problème 2,1 (resp. du problème 2,2) soit donnée par $u_1 = G_1 * T$ (resp. $u_2 = G_2 * T$). On appelle G_1 (resp. G_2) la distribution de Green de l'opérateur $A + D$ (resp. $A + aD^2 + bD$) relativement à l'espace N.

Problèmes non homogènes. — On suppose comme au chapitre I, p. 13, qu'il existe un espace vectoriel topologique E, et un opérateur $\tilde{A} \in \mathcal{L}(V;\, E)$ tel que $\tilde{A}h = Ah$ pour tout $h \in N$. soit T donnée dans $\mathcal{D}'_+(t;\, H)$ et h donnée dans $\mathcal{D}'_+(t;\, V)$ avec $\tilde{A}h \in \mathcal{D}'_+(t;\, H)$.

Problème 2, 3. (*resp.* 2, 4). — *Trouver* u *avec*

$$(2, 3) \qquad \tilde{A}u + Du = T; \quad u - h \in \mathcal{D}'_+(t;\, N)$$

(resp.

$$(2, 4) \quad \tilde{A}u + aD^2u + bDu = T; \quad u - h \in \mathcal{D}'_+(t;\, N.)$$

On se ramène au problème 2, 1 (resp. 2, 2) en posant $U = u - h$.

([46]) Cf. par exemple Lions [6] p. 8.

b) *Perturbation singulière : opérateurs de la forme* $B_\varepsilon + D$. — On reprend les notations du chapitre I, n° 2, avec les hypothèses (1, 13), (1, 16) et (1, 17).

Soit $T \in \mathscr{D}'_+(t;\ H)$ et une famille $T_\varepsilon \in \mathscr{D}'_+(t;\ H)$ tels que

$$(2,\ 5) \qquad T_\varepsilon \to T \quad \text{dans} \quad \mathscr{D}'_+(t;\ H)$$

Soit u_ε (resp. u) la solution de

$$(2,\ 6) \qquad B_\varepsilon u_\varepsilon + Du_\varepsilon = T_\varepsilon;\ u_\varepsilon \in \mathscr{D}'_+(t;\ N_\varepsilon)$$

(resp.

$$(2,\ 7) \qquad Bu + Du = T;\ u \in \mathscr{D}'_+(t;\ N_B).$$

(On rappelle que N_B est l'espace attaché à $b(u, v)$ sur $\overline{V}_{(W)}$.)

Théorème 2. 2. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 16), (1, 17) *ainsi que* (1, 22), (1, 23) et (2,5), *la solution* u_ε *de* (2, 6) *converge dans* $\mathscr{D}'_+(t;\ W)$ *vers la solution* u *de* (2, 7).

Avant de donner la démonstration de ce théorème, notons le lemme :

Lemme 2. 1. — *On pourra toujours se ramener aux hypothèses* (1, 16) *et* (1, 17) *si on a*

(2, 8) *Il existe* $c_1(\varepsilon) > 0$, $c_1(\varepsilon) \leqslant c_1$, $\alpha(\varepsilon) > 0$, *avec* $\alpha(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε *et* $\beta > 0$, *tels que*

$$\mathrm{Re}\, b(\varepsilon;\ u,\ u) + c_1(\varepsilon)|u|^2 \geqslant \alpha(\varepsilon)\|u\|_V^2 + \beta\|u\|_W^2$$

pour tout $u \in V$.

et

(2, 9) $b(u, v)$ *vérifie* (E) *sur* $\overline{V}_{(W)}$, *i.e. il existe* $c_2 > 0$ *et* $\gamma > 0$ *tels que*

$$\mathrm{Re}\, b(u,\ u) + c_2|u|^2 \geqslant \gamma\|u\|_W^2 \quad \textit{pour tout} \quad u \in \overline{V}_{(W)}.$$

Ce lemme résulte de la remarque 2, 1. Il suffit de poser

$$S_\varepsilon = e^{-\lambda t}u_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad S = e^{-\lambda t}u$$

et de choisir $\lambda \geqslant \mathrm{Sup}\ (c_1,\ c_2)$.

Démonstration du théorème 2-2.

D'après (2, 5), T_ε et T ont leur support limité à gauche par un point fixe que nous pouvons toujours supposer être l'origine. Alors u_ε et u ont aussi leur support dans $(0, +\infty)$ et il nous suffit de montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'(t;\, W)$.

1° Supposons que T_ε et T aient leur support dans un même compact de $(0, +\infty)$. Remarquons qu'il résulte alors de (2, 5) :

(2, 5′) $T_\varepsilon \to T$ dans $\mathcal{E}'(t;\, H)$, espace des distributions en t, à valeurs dans W à support compact, muni de sa topologie habituelle [47].

Dans ce cas T_ε et T admettent une transformée de Laplace [48] $\hat{T}_\varepsilon(p)$ et $\hat{T}(p)$, $p = \xi + i\eta$. Soit $\hat{u}_\varepsilon(p)$ (resp. $\hat{u}(p)$) la transformée de Laplace de u_ε (resp. u). Il existe alors $\xi_0 > 0$, indépendant de ε, tel que dans le demi-plan P, $\xi > \xi_0$, $\hat{T}_\varepsilon(p)$, $\hat{T}(p)$, $\hat{u}_\varepsilon(p)$ et $\hat{u}(p)$ soient des fonctions holomorphes de p à valeurs dans H (pour $\hat{T}_\varepsilon(p)$ et $\hat{T}(p)$), V et W.

Pour $p \in P$, $\hat{u}_\varepsilon(p)$ (resp. $\hat{u}(p)$) est l'élément de V (resp. $\overline{V}_{(W)}$) vérifiant :

$$b(\varepsilon;\, \hat{u}_\varepsilon(p), v) + p(\hat{u}_\varepsilon(p), v) = (\hat{T}_\varepsilon(p), v) \tag{2, 10}$$

pour tout $v \in V$

(resp.

$$b(\hat{u}(p), v) + p(\hat{u}(p), v) = (\hat{T}(p), v) \tag{2, 11}$$

pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$).

Puisque $\mathrm{R}e\,p > 0$, il résulte du théorème 1. 3, appliqué à $b_1(\varepsilon;\, u, v) = b(\varepsilon;\, u, v) + p(u, v)$ que, pour chaque $p \in P$, $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans W.

De plus d'après (1, 20) nous avons la majoration :

$$\|\hat{u}_\varepsilon(p)\|_W \leqslant K\, |\hat{T}_\varepsilon(p)| \quad \text{où K est indépendante de } \varepsilon. \tag{2, 12}$$

Or, d'après (2, 5′), $|\hat{T}_\varepsilon(p)|$ est majoré par un polynôme en $|p|$ indépendant de ε. On a donc

$$\|\hat{u}_\varepsilon(p)\|_W \leqslant \mathfrak{L}(|p|) \tag{2, 13}$$

où $\mathfrak{L}(|p|)$ est un polynôme en $|p|$ indépendant de ε.

Il résulte de (2, 13) et des propriétés des fonctions holomorphes, que sur tout compact de P, les $\hat{u}_\varepsilon(p)$ forment un ensemble équicontinu de fonctions à valeurs dans W. Par

[47] Voir Schwartz [1] tome I p. 89.

[48] Voir Schwartz [7] ou [8] p. 48 ou [3] exp. 2.

suite la convergence $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans W, pour tout $p \in P$, entraîne

(2, 14) $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans W, uniformément sur tout compact de P.

Il résulte de (2, 13), (2, 14), des propriétés des fonctions holomorphes et de la transformation de Laplace, que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'(t; W)$.

2° T et T_ε sont quelconque dans $\mathcal{D}'_+(t; H)$.

Soit G_ε (resp. G) la distribution de Green de l'opérateur $B_\varepsilon + D$ (resp. $B + D$) relativement à l'espace N_ε (resp. N_B). Nous devons montrer que $G_\varepsilon * T_\varepsilon \to G * T$ dans $\mathcal{D}'(t; W)$. Pour tout j, considérons une fonction $a_j(t) \in \mathcal{D}_-$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support limité à droite) avec $a_j(t) = 1$ pour $t < j$. Alors $a_j(t)T$ et $a_j(t)T_\varepsilon$ sont dans $\mathcal{E}'(t; H)$ et ont leur support dans un même compact de $(0, +\infty)$. Par suite d'après 1°, $G_\varepsilon * a_j(t)T_\varepsilon \to G * a_j(t)T$ dans $\mathcal{D}'(t; W)$. Or $a_j(t)T_\varepsilon - T_\varepsilon$ et $a_j(t)T - T$ ont leur support dans $t > j$. Par suite, sur l'ouvert $t < j$, $G_\varepsilon * T_\varepsilon$, (resp. $G * T$) coïncide avec $G_\varepsilon * a_j(t)T_\varepsilon$ (resp. $G * a_j(t)T$). Donc la restriction, à l'ouvert $t < j$, de $G_\varepsilon * T_\varepsilon$ converge, dans $\mathcal{D}'(t < j; W)$ vers $G * T$. D'où le résultat puisque j est quelconque.

c) *Perturbation singulière. — Opérateurs de la forme* $B_\varepsilon + aD^2 + bD$ *où* a *et* b *sont des constantes réelles, avec* $a > 0$. — On reprend les notations de *b*) avec l'hypothèse (1, 13), ainsi que

(2, 15) $b(\varepsilon; u, v)$ et $b(u, v)$ sont hermitiennes.

et (1, 16) et (1, 17). Soit T donnée dans $\mathcal{D}'_+(t; H)$ et une famille $T_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; H)$ avec (2, 5). Soit u_ε (resp. u) la solution de

(2, 16) $B_\varepsilon u_\varepsilon + aD^2 u_\varepsilon + bDu_\varepsilon = T_\varepsilon; \quad u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; N_\varepsilon)$

(resp.

(2, 17) $Bu + aD^2 u + bDu = T; \quad u \in D'_+(t; N_B)$)

avec a, b réels et $a > 0$.

Théorème 2. 3. — *Sous les hypothèses* (1, 13), (1, 15), (1, 16) (1, 17), (2, 15), (1, 23), (2, 5) *la solution* u_ε *de* (2, 16) *où* a *et* b *sont réels positifs, converge vers la solution* u *de* (2, 17) *dans* $\mathcal{D}'_+(t; W)$.

Notons le lemme :

LEMME 2. 2. — *On pourra se ramener aux hypothèses* (1, 16), (1, 17) *et a, b réels positifs, si on a* (2, 8) (2, 9), *a réel positif, b réel quelconque.*

Démonstration. — Posons $S_\varepsilon = u_\varepsilon e^{-\lambda t}$, $S = ue^{-\lambda t}$, λ réel.
(2, 16) (resp. (2, 17)) devient :

$$(2,\ 16')\quad \tilde{B}_\varepsilon S_\varepsilon + aD^2S_\varepsilon + \tilde{b}DS_\varepsilon = e^{-\lambda t}T_\varepsilon;\quad S_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_\varepsilon)$$

(resp.

$$(2,\ 17')\quad \tilde{B}S + aD^2S + \tilde{b}DS = e^{-\lambda t}T;\quad S \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B)$$

avec

$$\tilde{B}_\varepsilon = B_\varepsilon + b\lambda + a\lambda^2;\quad \tilde{B} = B + b\lambda + a\lambda^2;\quad \tilde{b} = 2a\lambda + b.$$

Posons

$$\tilde{b}(u,\ v) = b(u,\ v) + (b\lambda + a\lambda^2)\,(u,\ v)$$

et

$$\tilde{b}(\varepsilon;\ u,\ v) = b(\varepsilon;\ u,\ v) + (b\lambda + a\lambda^2)\,(u,\ v).$$

Il est alors toujours possible, d'après (2, 8) et (2, 9) de choisir λ de façon que $\tilde{b}(\varepsilon;\ u,\ v)$ vérifie (1, 16) et $\tilde{b}(u,\ v)$ (1, 17), et que l'on ait $\tilde{b} = 2\lambda a + b > 0$.

Démonstration du théorème 2-3.

Comme dans *b*) les u_ε ont leur support limité à gauche par un point fixe que nous supposons être l'origine. Il nous suffit de montrer que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(t;\ W)$. Nous faisons la démonstration uniquement dans le cas où T et T_ε ont leur support dans un compact fixe de $(0,\ +\infty)$. Le cas où T_ε et T sont quelconques s'en déduit exactement comme dans *b*).

Supposons donc T_ε et T à support dans un même compact de $(0,\ +\infty)$, et faisons une transformation de Laplace. On reprend les notations de *b*, 1°. Il existe $\xi_0 > 0$, tel que, pour $p \in P$, demi-plan $\xi > \xi_0$, $\hat{u}_\varepsilon(p)$ (resp. $\hat{u}(p)$) soit la solution dans V (resp. dans $\overline{V_{(W)}}$) de

$$(2,\ 18)\quad b(\varepsilon;\ \hat{u}_\varepsilon(p),\ v) + (ap^2 + bp)\,(\hat{u}_\varepsilon(p),\ v) = (\hat{T}_\varepsilon(p),\ v)$$

pour tout $v \in V$

(resp.

$$(2, 19) \quad b(\hat{u}(p), v) + (ap^2 + bp)(\hat{u}(p), v) = (\hat{T}(p), v)$$

pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$.

Nous allons montrer que l'on a :

$$(2, 20) \quad \text{pour chaque} \quad p \in P, \ \hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p) \quad \text{dans} \quad W$$

et

$$(2, 21) \quad \|\hat{u}_\varepsilon(p)\|_W \leqslant \mathcal{L}(|p|), \text{ où } \mathcal{L}(|p|) \text{ est un polynôme en } |p| \text{ indépendant de } \varepsilon.$$

Si $\mathrm{R}e p^2 \geqslant 0$, (2, 20) résulte du lemme 1, 1 et du théorème 1. 3 appliqué à $b_1(\varepsilon; u, v) = b(\varepsilon; u, v) + (ap^2 + bp)(u, v)$, et (2, 21) de (1, 20) et (2, 5').

Cas où $\mathrm{R}e p^2 < 0$, *i.e.* $|\eta| > \xi > \xi_0$.

En écrivant (2, 18) pour $v = \hat{u}_\varepsilon(p)$, en prenant les parties réelles des deux membres, on obtient

$$(2, 22) \quad b(\varepsilon; \hat{u}_\varepsilon(p), \hat{u}_\varepsilon(p)) \leqslant (|\hat{T}_\varepsilon(p)|\,|u_\varepsilon(p)| + \eta^2|\hat{u}_\varepsilon(p)|^2)$$

et en prenant les parties imaginaires des deux membres

$$(2, 22') \qquad |\hat{u}_\varepsilon(p)| \leqslant \frac{|\hat{T}_\varepsilon(p)|}{\xi_0(2a\xi_0 + b)}.$$

On déduit alors facilement (2, 21), de (1, 16), (2, 22), (2, 22') et (2, 5'). Il n'y a pas de difficulté à montrer, par adaptation convenable de la démonstration du théorème 1. 2 (en tenant compte du lemme 1, 1), que $\hat{u}_\varepsilon(p)$ converge pour tout $p \in P$, vers $\hat{u}(p)$ dans W faible, donc aussi dans H faible. Mais on a alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\hat{u}_\varepsilon(p)|^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Im(\hat{T}_\varepsilon(p), \hat{u}_\varepsilon(p))}{2a\xi\eta + b\eta} = |\hat{u}(p)|^2 \text{ [49]}$$

donc $\hat{u}_\varepsilon(p) \to \hat{u}(p)$ dans H fort.

Mais alors,

$$b(\varepsilon; \hat{u}_\varepsilon(p), \hat{u}_\varepsilon(p)) - b(\hat{u}(p), \hat{u}(p)) + b(\hat{u}_\varepsilon(p) - \hat{u}(p), \hat{u}_\varepsilon(p) - u(p))$$

converge vers 0, d'où (2, 20).

On déduit alors, comme dans *b*), de (2, 20) et (2, 21) que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'(t; W)$ d'où le théorème.

[49] *Im* désigne la partie imaginaire.

Problèmes non homogènes. — Reprenons l'hypothèse (1, 34). Soit T_ε et T avec (2, 5). Soit h donnée dans $\mathcal{D}'_+(t; W)$, et une famille h_ε de $\mathcal{D}'_+(t; V)$ telle que $h_\varepsilon \to h$ dans $\mathcal{D}'_+(t; W)$, avec $\tilde{B}h \in \mathcal{D}'_+(t; H)$, $\tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; H)$, $\tilde{B}_\varepsilon h_\varepsilon$ convergent vers $\tilde{B}h$ dans $\mathcal{D}_+(t; H)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Soit, sous les hypothèses (1, 16) et (1, 17), S_ε (resp. U_ε) la solution de

$$(2, 23) \quad \tilde{B}_\varepsilon S_\varepsilon + DS_\varepsilon = T_\varepsilon; \qquad S_\varepsilon - h_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; N_\varepsilon)$$

(resp.

$$(2, 24) \quad \tilde{B}_\varepsilon U_\varepsilon + aD^2U_\varepsilon + bDU_\varepsilon = T_\varepsilon; \qquad U_\varepsilon - h_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t; N_\varepsilon)$$

et S (resp. U) la solution de

$$(2, 25) \quad \tilde{B}S + DS = T; \qquad S - h \in \mathcal{D}'_+(t; N_B)$$

(resp.

$$(2, 26) \quad \tilde{B}U + aD^2U + bDU = T; \qquad U - h \in \mathcal{D}'_+(t; N_B).$$

On a alors :

THÉORÈME 2. 4. — *Sous les hypothèses du théorème* 2. 2. (*resp.* 2. 3) *la solution* S_ε *de* (2, 23) (*resp.* U_ε *de* (2, 24)) *converge dans* $\mathcal{D}'_+(t; W)$ *vers la solution* S *de* (2, 25) (*resp.* U *de* (2, 26)).

Démonstration. — On se ramène facilement au théorème 2. 2 (resp. 2. 3) en posant

$s_\varepsilon = S_\varepsilon - h_\varepsilon$ et $s = S - h$(resp. $u_\varepsilon = U_\varepsilon - h_\varepsilon$ et $u = U - h$).

REMARQUE. — Les résultats du théorème 2. 3 se généralisent à l'aide des transmutations ([50]), à des opérateurs de la forme :

$$B_\varepsilon + D^2 + r(t)D + s(t).$$

Exemples. — 1° On prend un ouvert Ω de R^n, de frontière Γ. Puis $H = L^2(\Omega)$, $W = H^1(\Omega)$ et

$$b(u, v) = ((u, v))_1 + (u, v)_0 \qquad \text{qui définit} \qquad -\Delta + 1.$$

Exemple 2. 1. — Prenons $V = H^2_0(\Omega)$, donc $\overline{V}_{(W)} = H^1_0(\Omega)$.

$$b(\varepsilon;\ u,\ v) = \varepsilon\big((\Delta u,\ \Delta v)_0 - ((u,\ v))_1\big) + ((u,\ v))_1 + (u,\ v)_0$$

définit $\varepsilon(\Delta^2 + \Delta) - \Delta + 1$.

([50]) Voir Lions [7].

Soit $T \in \mathcal{D}'_+(t;\ L^2(\Omega))$.

Soit u_ε la solution de

$$\varepsilon(\Delta^2 + \Delta)u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + Du_\varepsilon = T; \qquad u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_\varepsilon)$$

et u la solution de

$$-\Delta u + u + Du = T; \qquad u \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B).$$

Alors, d'après le théorème 2. 2, $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathcal{D}'_+(t;\ H^1(\Omega))$.

Il reste à interpréter les conditions aux limites.

La condition $u_\varepsilon(x,\ t) \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_\varepsilon)$ signifie que pour toute fonction $\varphi(t)$ de l'espace $\mathcal{D}_-$, $\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle$ est dans N_ε, donc ici :

$$\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle|_\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle\Big|_\Gamma = 0.$$

La condition $u \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B)$ signifie ici, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_-$, $\langle u(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle|_\Gamma = 0$.

2° On pourrait reprendre tous les exemples du chapitre I, n° 3. Bornons-nous à l'un d'entre eux :

Exemple 2. 2. — On suppose Γ régulière, et on prend H, W, et $b(u,\ v)$ comme dans 1°. Prenons ensuite $V = \mathcal{V}$, espace des $u \in L^2(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ muni de la norme $(|u|_0^2 + |\Delta u|_0^2)^{1/2}$. Alors $\overline{V}_{(W)} = H^1(\Omega)$. On prend

$$b(\varepsilon;\ u,\ v) = \varepsilon(\Delta u,\ \Delta v)_0 - \varepsilon^2((u,\ v))_1 + b(u,\ v)$$

qui définit $\varepsilon\Delta^2 + (\varepsilon^2 - 1)\Delta + 1$.

Soit T donnée dans $D'_+\ (t;\ H)$.

Soit u_ε la solution de

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon + (\varepsilon^2 - 1)\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + D^2 u_\varepsilon = T; \quad u_\varepsilon \in \mathcal{D}'_+(t,\ N_\varepsilon).$$

Les conditions aux limites sont ici : pour toute $\varphi(t) \in \mathcal{D}_-$,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(\varepsilon\langle\Delta u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle + (\varepsilon^2 - 1)\langle u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle)\Big|_\Gamma = 0$$

et
$$\langle\Delta u_\varepsilon(x,\ t),\ \varphi(t)\rangle|_\Gamma = 0.$$

Soit u la solution de

$$-\Delta u + u + D^2 u = T;\ u \in \mathcal{D}'_+(t;\ N_B)$$

pour laquelle les conditions aux limites sont : pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}_-$, on a $\frac{\partial}{\partial \nu}\langle u(x, t), \varphi(t)\rangle\Big|_\Gamma = 0$.

Alors, d'après le théorème 2. 3, $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathfrak{D}'_+(t;\ H^1(\Omega))$.

2. Problèmes mixtes fins pour des opérateurs de la forme $A(t) + D$; théorèmes d'existence et d'unicité ([51]).

On se propose dans ce numéro, d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de problèmes mixtes pour l'opérateur $A(t) + D$, par la méthode de Galerkine, utilisée par de nombreux auteurs ([52]), pour les opérateurs du 2e ordre en t.

On reprend H comme au n° 1, puis V séparable avec (1, 1).

On se donne sur V, une famille de formes sesquilinéaires continues, $a(t;\ u,\ v)$, $t \geqslant 0$, $u, v \in V$.

Espace $N(t)$ **et opérateur** $A(t)$ **associés à** $a(t;\ u,\ v)$.

Pour t fixé, $N(t)$ est l'espace des $u \in V$ tels que l'application $v \to a(t;\ u,\ v)$ soit continue sur V muni de la topologie induite par H. Comme V est dense dans H, il existe $A(t)u \in H$, tel que $a(t;\ u,\ v) = (A(t)u,\ v)$ pour tout $v \in V$. On munit $N(t)$ de la norme

$$\|u\|_{N(t)} = (\|u\|_V^2 + |A(t)u|^2)^{1/2}$$

qui en fait un espace de Hilbert. Alors $A(t) \in \mathfrak{L}(N(t);\ H)$.

On dira que $a(t;\ u,\ v)$, vérifie sur V, l'hypothèse (2, 27) (resp. (2, 28)) si on a

(2, 27) $t \to a(t;\ u,\ v)$ est deux fois continûment différentiable.

(resp.

$$(2,\ 28)\ \text{(ellipticité)}\ \begin{cases} \text{pour tout } c > 0 \text{ il existe } \alpha(c) = \alpha > 0 \\ \text{et } \lambda(c) = \lambda \text{ tels que, pour tout} \\ t \in (0,\ c) \text{ et tout } u \in V \text{ on ait} \\ \operatorname{Re} a(t;\ u,\ u) + \lambda\,|u|^2 \geqslant \alpha \|u\|_V^2. \end{cases}$$

([51]) Les résultats de ce n° 2 ne sont pas nouveaux ; ils sont implicitement contenus dans Trèves [1] et Lions [6]. Nous les donnons ici explicitement pour la commodité du lecteur.

([52]) Voir Lions [6], Faedo [1], Visik [1] et Visik-Ladyzenskaia [1].

De (2, 27) résulte :

(2, 29) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } c > 0 \text{ il existe } \mu_1(c) = \mu_1 \text{ et } \mu_2(c) = \mu_2 \\ \text{tels que, pour tout } t \in (0, c) \text{ et tout } u, v \in V, \\ \text{on ait} \\ \qquad |a'(t; u, v)| \leqslant \mu_1 \|u\|_V \|v\|_V \\ \text{et} \quad |a''(t; u, v)| \leqslant \mu_2 \|u\|_V \|v\|_V \text{ (53)}\end{array}\right.$

Nous désignons par $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) l'ensemble des applications continues (resp. une fois continûment différentiable) de $t \geqslant 0$ dans H, avec $h' \in L^2((o, s); H)$ (54) (resp. $h'' \in L^2((o, s); H)$ pour tout $s > 0$.

Nous avons le :

THÉORÈME 2. 5. — *Soit* $h(t) \in \mathcal{C}_2$, *avec* $h(0) \in N(0)$. *Sous les hypothèses* (2, 27) *et* (2, 28), *il existe une fonction et une seule* $t \to u(t)$, *une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$, *dans* V, *solution de :*

$$(2, 30) \qquad A(t)u(t) + Du(t) = h(t), \quad u(t) \in N(t)$$

pour $t \geqslant 0$ et $u(0) = 0$.

De plus u, u' *et* u'' *sont dans* $L^2((0, s); V)$ *pour tout* $s > 0$.

Il nous suffit de montrer le théorème pour $t \in (0, c)$, c fixé quelconque.

LEMME 2. 3. — *On peut toujours remplacer* (2, 28) *par*

(2, 31) $\left\{\begin{array}{l}\textit{pour tout } c > 0 \textit{ il existe } \alpha(c) = \alpha > 0, \textit{ tel que} \\ \operatorname{Re} a(t; u, u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2 \textit{ pour tout } u \in V \textit{ et tout } t \in (0, c).\end{array}\right.$

Démonstration. — Pour λ réel, on pose $v(t) = e^{-\lambda t}u(t)$. Il est facile de voir qu'on peut toujours choisir λ tel que

$$a(t; u, v) + \lambda(u, v)$$

vérifie (2, 31).

Démonstration du théorème 2. 5. — Nous nous plaçons sur l'intervalle $(0, c)$, c fixé, et nous supposons que $a(t; u, v)$ vérifie (2, 27) et (2, 31).

(53) On pose $a'(t; u, v) = Da(t; u, v)$; $a''(t; u, v) = D^2a(t; u, v)$ et plus généralement

$$a^{(n)}(t; u, v) = D^n(a(t; u, v)).$$

(54) $L^2((o, s); H)$ est l'espace des fonctions de carré sommable sur $(0, s)$ à valeurs dans H, muni de sa structure Hilbertienne naturelle.

Démonstration de l'unicité. — Nous supposons dans (2, 30), $h(t)=0$, et nous devons montrer que $u(t)=0$. Or, on a

$$a(t;\, u(t),\, u(t)) + (u'(t),\, u(t)) = 0.$$

On en déduit, en tenant compte de (2, 31) et de la condition $u(0)=0$,

$$2\alpha \int_0^s \|u(t)\|_V^2\, dt + |u(s)|^2 \leqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad s \in (0,\, c).$$

Par suite $u(t)$ est nulle pour tout $t \in (0,\, s)$ donc pour tout $t \in (0,\, c)$.

Démonstration de l'existence. — Soit $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ une suite totale dans V, telle que pour tout p, $w_1, \ldots w_p$ soient linéairement indépendants. Soit $g_{in}(t)$ la solution du système différentiel :

$$(2,\, 32) \quad D^2 \left\{ \sum_{i=1}^n g_{in}(t)\, a(t; w_i, w_j) + \sum_{i=1}^n g'_{in}(t)\,(w_i,\, w_j) \right\} = D^2((h(t), w_j)$$
$$j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

avec

$$(2,\, 33) \quad g_{in}(0) = 0; \quad g'_{in}(0) = \beta_{in} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \beta_{in} w_i \to h(0) \quad \text{dans V}$$
$$g''_{in}(0) = \gamma_{in} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \gamma_{in} w_i \to h'(0) - A(0)\, h(0) \quad \text{dans H.}$$

Le système admet une solution unique g_{in} qui est deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$, avec $g'''_{in} \in L^2(0,\, s)$ pour tout $s > 0$.

Posons

$$(2,\, 34) \qquad u_n(t) = \sum_{i=1}^n g_{in}(t)\, w_i.$$

On déduit de (2, 32) :

$$a(t;\, u''_n(t),\, u''_n(t)) + 2a'(t;\, u'_n(t),\, u''_n(t)) + a''(t;\, u_n(t),\, u''_n(t))$$
$$+ (u'''_n(t),\, u''_n(t)) = (h''(t),\, u''_n(t)).$$

D'où, en prenant les parties réelles des deux membres et en intégrant de 0 à s :

$$2\int_0^s \mathrm{Re}\, a(t;\, u''_n(t),\, u''_n(t))\, dt \leqslant |u''_n(0)|^2$$
$$+ \int_0^s |2\mathrm{Re}\{(h''(t), u''_n(t)) - 2a'(t; u'_n(t), u''_n(t)) - a''(t; u_n(t), u''_n(t))\}|\, dt.$$

D'où, pour $s \in (0, c)$, en tenant compte, d'une part de (2, 29) et (2, 31), d'autre part de

$$(2,\ 35)\qquad \|u_n(t)\|_V^2 \leqslant t \int_0^t \|u_n'(x)\|_V^2\, dx \quad (\text{puisque } u_n(0) = 0)$$

et

$$(2,\ 36)\qquad \|u_n'(t)\|_V^2 \leqslant 2\,\|u_n'(0)\|_V^2 + 2t \int_0^t \|u_n''(x)\|_V^2\, dx.$$

$$2\alpha \int_0^s \|u_n''(t)\|_V^2\, dt \leqslant |u_n''(o)|^2 + (k_1 s + k_2)\|u_n'(0)\|_V^2 + \left(k_3 s \int_0^s \|u_n''(t)\|_V^2\, dt\right) + \mathrm{K}\left(\int_0^s |h''(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^s \|u_n''(t)\|_V^2\, dt\right)^{1/2}$$

où les constantes k_1, k_2, k_3 et K ne dépendent que de c.

En tenant compte de (2, 33) on en déduit qu'il existe s_0, ne dépendant que de c, tel que

$$\int_0^{s_0} \|u_n''(t)\|_V^2\, dt \leqslant \mathrm{C}(s_0).$$

On en déduit, d'après (2, 35) et (2, 36) :

$$\int_0^{s_0} (\|u_n''(t)\|_V^2 + \|u_n'(t)\|_V^2 + \|u_n(t)\|_V^2)\, dt \leqslant \mathrm{C}(s_0).$$

On peut donc extraire une sous-suite u_ν, telle que u_ν, u_ν', u_ν'', convergent faiblement dans $\mathrm{L}^2\ ((o,\ s_0);\ \mathrm{V})$. Soit u la limite de u_ν; alors u est une fois continûment différentiable de (o, s_0) dans V, et pour chaque $t \in (o, s_0)$, $u_\nu(t) \to u(t)$ et $u_\nu'(t) \to u'(t)$ dans V faible.

Intégrons alors deux fois (2, 32) en tenant compte de (2, 33). On obtient :

$$a(t;\ u_n(t),\ w_j) + (u'_n(t),\ w_j) = (h(t),\ w_j) + (u_n'(0) - h(0),\ w_j) + ta(0;\ u_n'(0),\ w_j) + t(u_n''(0) - h'(0),\ w_j).$$

Prenons $n = \nu$ et faisons tendre ν vers l'∞. Le premier membre de l'égalité précédente tend vers :

$$a(t;\ u(t),\ w_j) + (u'(t),\ w_j).$$

Le deuxième membre tend vers $(h(t),\ w_j)$ puisque, d'après (2, 33) $u_n'(0) \to h(0)$ dans V, et que, d'autre part :

$$a(0;\ u_n'(0),\ w_j) \to a(0;\ h(0),\ w_j) = (\mathrm{A}(0)\,h(0),\ w_j).$$

puisque $h(0) \in \mathrm{N}(0)$.

Par suite $u(t)$ vérifie :

$$(2,\ 37)\qquad a(t;\ u(t),\ w_j) + (u'(t),\ w_j) = (h(t),\ w_j) \quad \text{pour tout } j.$$

Par suite $u(t)$ est solution de (2, 30), pour $t \in (0, s_0)$.

Désignons par $u_1(t)$ la solution de (2, 30) dans (o, s_0). Nous sommes amenés à chercher une fonction $u_2(t)$, définie sur $t \geqslant s_0/2$, une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans V, vérifiant :

$$(2, 38) \quad A(t)u_2(t) + Du_2(t) = h(t)\,;\; u_2(t) \in N(t)\,;\; u_2(s_0/2) = u_1(s_0/2).$$

Soit $p(t)$ une fonction indéfiniment différentiable, avec $p(t) = 1$ pour $t \leqslant (s_0/2) + \tau$, $\tau < s_0/4$, $p(t) = 0$ si $t \geqslant s_0 - \tau$. Posons $v_1(t) = p(t)u_1(t)$. Pour tout $t \geqslant 0$, $v_1(t) \in N(t)$. Posons $w_2(t) = u_2(t) - v_1(t)$. Il est équivalent de chercher $u_2(t)$ solution de (2, 38), ou de chercher $w_2(t)$, une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans V, vérifiant :

$$(2, 39) \quad \begin{cases} A(t)w_2(t) + Dw_2(t) = h_2(t)\,;\; w_2(t) \in N(t),\; w_2(s_0/2) = 0 \\ \text{avec} \qquad h_2(t) = h(t)\,(1 - p(t)) - p'(t)u_1(t). \end{cases}$$

Or, $h_2(t)$ est une fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans H, et $h_2'' \in L^2((s_0/2, s)\,;\, H)$ pour tout $s > s_0/2$, puisque $u_1'' \in L^2((0, s_0)\,;\, H)$. De plus $h_2(s_0/2) = 0$, donc est dans $N(s_0/2)$.

Le problème (2, 39) est donc équivalent au problème (2, 30) avec $s_0/2$ à la place de 0. Par suite il existe une solution unique de (2, 39), dans $(s_0/2, \operatorname{Inf}(3s_0/2, c))$, et ainsi de suite si $c > 3s_0/2$.

On peut obtenir un théorème analogue au théorème 2. 5, en affaiblissant les conditions sur $h(t)$, mais en faisant des hypothèses supplémentaires sur $a(t;\, u, v)$. De façon précise, nous posons :

$$(2, 40) \qquad a(t;\, u, v) = a_0(t;\, u, v) + a_1(t;\, u, v)$$

avec

$$(2, 41) \quad a_0(t;\, u, v) = \overline{a_0(t;\, v, u)} \quad \text{pour tout} \quad u, v \in V$$

et, nous supposons :

$$(2, 42) \quad \begin{cases} \text{pour tout } c > 0, \text{ il existe } \lambda(c) = \lambda \text{ et } \alpha(c) = \alpha > 0, \\ \quad \text{tels que, pour tout } t \in (o, c) \text{ et tout } u \in V, \text{ on ait :} \\ \qquad a_0(t;\, u, u) + \lambda|u|^2 \geqslant \alpha\|u\|_V^2 \end{cases}$$

et

$$(2, 43) \quad \begin{cases} \text{pour tout } c > 0, \text{ il existe } \nu(c) = \nu, \text{ tel que, pour} \\ \quad \text{tout } t \in (o, c) \text{ et tout } u, v \in V, \text{ on ait :} \\ \qquad |\mathrm{Re}\, a_1(t;\, u, v)| \leqslant \nu\|u\|_V|v|. \end{cases}$$

On a alors le

THÉORÈME 2. 6. — *Soit* $h(t) \in \mathcal{C}_1$, *avec* $h(0) \in V$. *Sous les hypothèses* (2, 27), (2, 42), et (2, 43), *il existe une fonction et une seule, continue* (*resp. une fois continûment différentiable*) *de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp. dans* H), *solution de* (2, 30). *De plus* u *et* u' *sont dans* $L^2((0, s); V)$ *et* u'' *est dans* $L^2((0, s)); H)$ *pour tout* $s > 0$.

Démonstration. — Il suffit de montrer le théorème dans (o, c), c fixé. Nous pouvons remplacer (2, 42) par :

(2, 44) il existe $\alpha(c) = \alpha > 0$, tel que, pour tout $t \in (0, c)$ et tout $u \in V$, on ait : $a_0(t; u, u) \geqslant \alpha \, ||u||_V^2$.

L'unicité s'établit comme pour le théorème 2. 5. Montrons l'existence.

Les w_i étant définis comme précédemment, soit $g_{in}(t)$ la solution du système :

$$\text{(2, 45)} \quad D\left(\sum_{i=1}^{n} g_{in}(t)a(t; w_i, w_j) + \sum_{i=1}^{n} g'_{in}(t)(w_i, w_j)\right) = D(h(t), w_j),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

avec les conditions :

$$\text{(2, 46)} \quad g_{in}(0) = 0; \quad g'_{in}(0) = \beta_{in} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_{in} w_i \to h(0) \quad \text{dans V.}$$

Ce système admet une solution unique, qui est une fois continûment différentiable, avec $g''_{in} \in L^2(o, s)$.

Posons encore $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{in}(t) w_i$.

On déduit de (2, 45)

$$a(t; u'_n(t), u'_n(t)) + a'(t; u_n(t), u'_n(t)) + (u''_n(t), u'_n(t)) = (h'(t), u'_n(t)).$$

D'où en prenant les parties réelles et en intégrant de 0 à s :

$$2\int_0^s a_0(t; \; u'_n(t), \; u'_n(t)) \, dt$$
$$\leqslant |u'_n(0)|^2 + 2\int_0^s |Re\{(h'(t), \; u'_n(t)) - a'(t; \; u_n(t), \; u'_n(t))\}| \, dt.$$

On en déduit très facilement par des majorations analogues à celles du théorème 2. 5, qu'il exite s_0 ne dépendant que de c, tel que

$$\text{(2, 47)} \qquad \int_0^{s_0} (||u'_n(t)||_V^2 + ||u_n(t)||_V^2) \, dt \leqslant C(s_0).$$

Mais on déduit aussi de (2, 45) :

$$a(t;\ u_n'(t),\ u_n''(t)) + a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t)) + |u_n''(t)|^2 = (h'(t),\ u_n''(t)).$$

D'où, en prenant les parties réelles et en intégrant de o à s_0 :

$$(2,48)\quad a_0(s_0\,; u_n'(s_0), u_n'(s_0)) + \int_0^{s_0} |u_n''(t)|^2 dt \leqslant a_0(0\,; u_n'(0), u_n'(0)) + \int_0^{s_0} |h'(t)|^2\, dt + \int_0^{s_0} \{ |a_0'(t;\ u_n'(t),\ u_n'(t))| + 2|\mathrm{Re}\, a_1(t;\ u_n'(t),\ u_n''(t))| \}\, dt + 2\left|\int_0^{s_0} \mathrm{Re}\, a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t))\, dt\right|.$$

Majoration de $\int_0^{s_0} |\mathrm{Re}\, a_1(t; u_n'(t), u_n''(t))|\, dt$. Nous utilisons (2, 43):

$$\int_0^{s_0} |\mathrm{Re}\, a_1(t;\ u_n'(t),\ u_n''(t))|\, dt \leqslant \nu \left(\int_0^{s_0} ||u_n'(t)||_V^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{s_0} |u_n''(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

D'où, en utilisant (2, 47) :

$$\left|\int_0^{s_0} \mathrm{Re}\, a_1((t;\ u_n'(t),\ u_n''(t))\, dt\right| \leqslant \mathrm{K}_1 \left(\int_0^{s_0} |u_n''(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Majoration de $\left|\int_0^{s_0} a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t))dt.\right|$ Nous partons de :

$$a'(t,\ u_n(t),\ u_n''(t)) = \mathrm{D}\{a'(t;\ u_n(t),\ u_n'(t))\} - a'(t;\ u_n'(t),\ u_n'(t)) - a''\ (t;\ u_n(t),\ u_n'(t)).$$

D'où, en utilisant, à la fois, (2, 29), (2, 35) et (2, 46) et (2,47) :

$$\left|\int_0^{s_0} \mathrm{Re}\, a'(t;\ u_n(t),\ u_n''(t))\, dt\right| \leqslant \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3 ||u_n'(s_0)||_V.$$

De plus, d'après (2, 47), $\int_0^{s_0} |a_0'(t;\ u_n'(t),\ u_n'(t))|\ dt \leqslant \mathrm{K}_4$, les constantes K_1, K_2, K_3, K_4 étant indépendantes de n.

Portant ces majorations dans (2, 48) et utilisant (2, 44) et (2, 46), on voit qu'il existe une constante K_5 indépendante de n, telle que

$$(2,\ 49)\qquad \int_0^{s_0} |u_n''(t)|^2\, dt \leqslant \mathrm{K}_5.$$

De (2, 47) et (2, 49), il résulte que l'on peut extraire une sous suite u_ν telle que u_ν et u_ν' (resp. u_ν'') convergent faiblement dans $\mathrm{L}^2\,((o,\ s_0)\,;\ \mathrm{V})$ (resp. dans $\mathrm{L}^2\,((o,\ s_0)\,;\ \mathrm{H})$. Si u est la limite de u_ν, alors u est continue (resp. une fois continûment différentiable) de $(o,\ s_0)$ dans V (resp. dans H) et pour chaque $t \in (o,\ s_0)$, $u_\nu(t)$ (resp. $u_\nu'\ (t)$) converge vers $u(t)$ (resp. $u'(t)$) dans V faible (resp. dans H faible).

Il est facile de montrer, comme dans le théorème 2. 5, par passage à la limite, en utilisant (2, 46), que $u(t)$ est solution de (2, 30) dans $(o; s_0)$. On en déduit le résultat sur (o, c) exactement comme dans la démonstration du théorème 2. 5.

Problèmes mixtes. — Nous faisons maintenant l'hypothèse (1, 7) ([55]). Au théorème 2. 5 correspondra le problème mixte suivant : Soit $t \to F(t)$ une fonction définie de $t \geqslant 0$ dans V, deux fois (resp. trois fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. dans H), avec $A(t)F(t) \in H$ pour tout $t \geqslant 0$, et $t \to A(t)\,F(t)$ deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H, et $A(0)F(0) + F'(0) \in N(0)$.

Soit $k(t) \in \mathcal{C}_2$ *et* $k(0) \in N(0)$.

Problème 2. 5. — *Trouver* $U(t)$, *une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V, *avec*

$$A(t)U(t) + DU(t) = k(t),\ U(t) - F(t) \in N(t) \qquad \textit{pour} \qquad t \geqslant 0;$$
$$U(0) = F(0).$$

En posant $u(t) = U(t) - F(t)$ on est ramené au problème (2, 30) avec

$$h(t) = k(t) - (A(t)F(t) + DF(t)).$$

D'après les propriétés de $k(t)$ et $F(t)$, $h(t)$ vérifie les propirétés du théorème 2. 5. Par suite, sous les hypothèses (2, 27), (2, 28), le problème 2. 5 admet une solution unique; De plus U, U', et U'' sont dans $L^2((o, s); V)$ pour tout $s > 0$.

Au théorème 2. 6 correspond le problème mixte suivant :

Soit $t \to F(t)$ une fonction à valeurs dans V, une fois (resp. deux fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. dans H) avec $A(t)F(t) \in H$ pour tout $t \geqslant 0$, et $t \to A(t)F(t)$ une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H, et $A(0)F(0) + F'(0) \in V$.

Soit $k(t) \in \mathcal{C}_1$ avec $k(0) \in V$.

PROBLÈME 2. 6. — *Trouver* $U(t)$, *continue* (*resp. une fois continument différentiable*) *de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* H) *avec*

$$A(t)U(t) + DU(t) = k(t);$$
$$U(t) - F(t) \in N(t) \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad U(0) = F(0).$$

([55]) Nous supposons (1, 7) pour simplifier. Sous la seule hypothèse (1, 1) on devra supposer qu'il existe un espace vectoriel topologique E, et un opérateur $\tilde{A}(t) \in \mathcal{L}(V;\ E)$ tel que $A(t)h = \tilde{A}(t)h$ pour tout $h \in N(t)$. Cf. p. 54, problèmes 2-3 et 2-4.

On voit facilement, d'après le théorème 2. 6 que si $a(t;\ u,\ v)$ vérifie les hypothèses (2, 27), (2, 42) et (2, 43) le problème 2. 6 admet une solution unique. De plus U et U′ sont dans $L^2((0, s); V)$ et U″ est dans $L^2((0, s);\ H)$ pour tout $s > 0$.

Cas particulier des opérateurs indépendants du temps.

Les résultats précédents sont encore valables pour une seule forme sesquilinéaire $a(u,\ v)$ définissant un opérateur A et un espace N indépendants du temps. Les hypothèses (2, 28), (2, 42) et (2, 43) se modifient de façon évidente. Quant aux démonstrations elles se simplifient puisque les termes en $a'(t;\ u,\ v)$ $a''(t,\ u,\ v)$ etc... disparaissent. En particulier, on obtient directement le résultat dans $(0,\ c)$ sans passer par l'intermédiaire de s_0.

Notons encore, pour des opérateurs indépendants du temps, le théorème suivant qui nous sera utile dans la suite :

Théorème 2. 7. — *Soit f donnée dans* N *avec* $Af \in N$ (*resp.* $Af \in V$). *Si la forme $a(u,\ v)$ vérifie* (2, 28) (*resp.* (2, 42) *et* (2, 43)) (*ces hypothèses étant modifiées de façon évidente*) *il existe une fonction et une seule $u(t)$, une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans* V (*resp. continue de $t \geqslant 0$ dans* V, *une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans* H) *vérifiant:*

$$(2,\ 50) \qquad Au(t) + Du(t) = 0;\ u(t) \in N(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u(0) = f.$$

En posant $U(t) = u(t) - f$ on se ramène au théorème 2. 5 (resp.. 2. 6).

3. — Perturbation singulière: convergence fine pour des opérateurs de la forme $B_\varepsilon(t) + D$ et $B_\varepsilon(t) + D^2$.

On reprend deux espaces de Hilbert V et W avec

$$(2,\ 51) \qquad V \subset W \subset H \quad \text{et} \quad V \ \text{séparable dense dans} \ H.$$

On se donne sur V (resp. W) une famille de formes sesquilinéaires continues $b(\varepsilon;\ t;\ u,\ v)$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $t \geqslant 0$ (resp. $b(t;\ u,\ v)$, $t \geqslant 0$).On désigne toujours par $\overline{V}_{(W)}$ l'adhérence de V dans W, muni de la topologie induite par W, par $N_\varepsilon(t)$ et $B_\varepsilon(t)$ l'espace et l'opérateur attachés à $b(\varepsilon;\ t;\ u,\ v)$ sur V, et par $N_B(t)$ et

$B(t)$ l'espace et l'opérateur attachés à $b(t;\ u,\ v)$ sur $\overline{V}_{(W)}$. Donnons maintenant une définition.

Désignons par $\mathcal{C}_1(t_0)$ resp. $(\mathcal{C}_2(t_0))$ l'ensemble des fonctions continues (resp. une fois continûment différentiables) de $t \geqslant t_0$ dans H, avec h' (resp. h'') dans $L^2(\ (t_0,\ s);\ H)$ pour tout $s > t_0$).

Soit $h(t) \in \mathcal{C}_1(t_0)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0)$). Soit $h_\varepsilon(t)$ une famille de $\mathcal{C}_1(t_0)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0)$).

Définition 2. 2. — Nous dirons que $h_\varepsilon(t)$ vérifie la propriété $\mathcal{C}_1(t_0;\ h)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0;\ h)$) si nous avons, pour ε convergent vers 0 :

(2, 52) $\qquad h_\varepsilon(t_0)$ est borné dans V.

(2, 53) $\quad h_\varepsilon \to h$ dans $L^2((t_0,\ s);\ H)$ et h'_ε est borné dans cet espace pour tout $s > t_0$.

(resp.

(2, 54) $\qquad h_\varepsilon(t_0) \in N_\varepsilon(t_0)$.

$\qquad h'_\varepsilon(t_0)$ est borné dans V.

$\qquad B_\varepsilon(t_0)h_\varepsilon(t_0)$ est borné dans H.

$\qquad h'_\varepsilon(t_0)$ est borné dans H.

(2, 55) $\quad h_\varepsilon \to h$ dans $L^2((t_0,\ s);\ H)$ et h''_ε est borné dans cet espace pour tout $s > t_0$.

LEMME 2. 3. — *Si $h_\varepsilon(t)$ vérifie $\mathcal{C}_1(t_0;\ h)$ (resp. $\mathcal{C}_2(t_0;$ H)) alors, on a :*

(2, 56) *pour tout* $t \geqslant t_0,\ h_\varepsilon(t) \to h(t)$ *dans* H.

(*resp.*

(2, 57) *pour tout* $t \geqslant t_0$, $h'_\varepsilon(t)$ *est borné dans* H, *et* $h_\varepsilon(t) \to h(t)$ *dans* H.

Démonstration. — Si $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2(t_0)$, on a

$$(2,\ 58)\qquad |h'_\varepsilon(t)|^2 \leqslant 2|h'_\varepsilon(t_0)|^2 + 2(t - t_0)\int_{t_0}^{t} |h''_\varepsilon(x)|^2\, dx.$$

Si $h_\varepsilon(t)$ vérifie $\mathcal{C}_2(t_0;\ h)$, alors $h'_\varepsilon(t_0)$ (resp. h''_ε) est borné dans H (resp. dans $L^2((t_0,\ s);\ H)$ pour $s > t_0$) et par suite $h'_\varepsilon(t)$ est borné pour $t > t_0$. Le lemme 2. 3 résulte donc du lemme :

LEMME 2. 4. — *Soit* K *un espace de Hilbert, et t_0 un nombre réel > 0. Si $h_\varepsilon \to h$ dans $L^2((t_0,\ t);\ K)$ et si h'_ε est borné dans cet espace pour tout $t > t_0$, alors $h_\varepsilon(t) \to h(t)$ dans* K *pour tout $t \geqslant t_0$.*

Démonstration. — On a

$$D\|h_\varepsilon(t) - h(t)\|_K^2 = 2\mathrm{R}e(h'_\varepsilon(t) - h'(t), \qquad h_\varepsilon(t) - h(t))_K$$

donc

$$\|h_\varepsilon(t) - h(t)\|_K^2 - \|h_\varepsilon(t_0) - h(t_0)\|_K^2 = 2\int_0^t \mathrm{R}e(h'_\varepsilon(x) - h'(x), h_\varepsilon(x) - h(x))_K dx.$$

Par suite des hypothèses le second membre tend vers 0, donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|h_\varepsilon(t) - h(t)\|_K^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \|h_\varepsilon(t_0) - h(t_0)\|_K^2$$

cette limite ne peut être que 0, car autrement $h_\varepsilon(t)$ ne pourrait pas converger vers $h(t)$ dans $L^2((t_0, t); K)$ pour $t > t_0$.

Exemple. — Si $h(t) \in \mathcal{C}_2$ (resp. $\mathcal{C}_1$) alors la famille réduite à $h(t)$ elle-même appartient à $\mathcal{C}_2(0; h)$ (resp. $\mathcal{C}_1(0; h)$ à condition que $h(0) \in \bigcap_\varepsilon N_\varepsilon(0) \cap N_B(0)$ ([56]) (resp. $h(0) \in V$).

Faisons sur $b(\varepsilon; t; u, v)$ et $b(t; u, v)$ les hypothèses suivantes :

Hypothèses d'ellipticité.

(2, 59) Pour tout $c > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon; c) = \alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ avec ε, et $\beta > 0$, tels que, pour tout $t \in (0, c)$ tout $u \in V$, et tout $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, on ait :

$$\mathrm{R}eb(\varepsilon; t; u, u) \geqslant \alpha(\varepsilon)\|u\|_V^2 + \beta\|u\|_W^2$$

et

(2, 60) $b(t; u, v)$ vérifie (2, 31) sur W.

Hypothèses de différentiabilité en t.

(2, 61) Pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, et $u, v \in V$, $t \to b(\varepsilon; t; u, v)$ est deux fois continûment différentiable en t, et pour tout $c > 0$, il existe des constantes $\mu_1(c) = \mu_1$, $\mu_2(c) = \mu_2$, $\nu_1(c) = \nu_1$, $\nu_2(c) = \nu_2$, telles que pour tout $t \in (0, c)$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, et $u, v \in V$ on ait :

$$|b'(\varepsilon; t; u, v)| \leqslant \mu_1\alpha(\varepsilon)\|u\|_V\|v\|_V + \mu_2\|u\|_W\|v\|_W,$$
$$|b''(\varepsilon; t; u, v)| \leqslant \nu_1\alpha(\varepsilon)\|u\|_V\|v\|_V + \nu_2\|u\|_W\|v\|_W.$$

$\alpha(\varepsilon)$ étant définie dans (2, 59).

([56]) Cette intersection n'est jamais vide; elle contient toujours 0. Sous l'hypothèse (1, 33) elle contient même $\mathcal{D}(\Omega)$.

(2, 62) $b(t;\, u,\, v)$ est deux fois continûment différentiable en t pour $u, v \in W$.

et enfin, les deux hypothèses suivantes :

(2, 63) pour chaque $t \geqslant 0$, $b(\varepsilon;\, t;\, u,\, v)$ vérifie (1, 22), *i.e.*, si $u_\varepsilon \in V$ vérifie $|b(\varepsilon;\, t;\, u_\varepsilon,\, u_\varepsilon)|$ borné, alors $b(\varepsilon;\, t;\, u_\varepsilon,\, v) - b(t;\, u_\varepsilon,\, v) \to 0$ pour tout $v \in V$

et

(2, 64) Pour tout $c > 0$, il existe $\delta(\varepsilon;\, c) = \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ avec ε, telle que pour tout $t \in (0, c)$ et tout $u \in V$, on ait :

$$\mathrm{Re}\{b(\varepsilon;t;u,u) - b(t;u,u)\} + \delta(\varepsilon)\,\mathrm{Re}\,b(t;u,u) \geqslant 0 \text{ (57)}.$$

THÉORÈME 2. 8. — *Soit* $h(t) \in \mathcal{C}_2$ *avec* $h(0) \in N_B(0)$ *et une famille* $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2$ *vérifiant* $\mathcal{C}_2(0;\, h)$. *Sous les hypothèses* (2, 51), (2, 59) *et* (2, 60), (2, 61) *et* (2, 62), (2, 63), (2, 64), *soit* $u_\varepsilon(t)$ (*resp.* $u\,(t)$) *la solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$) *de*

$$\text{(2, 65)} \quad B_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) + Du_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)\,;\, u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t) \quad \text{pour} \quad t > 0\,; \quad u_\varepsilon(0) = 0.$$

(*resp.*

$$\text{(2, 66)} \quad B(t)u(t) + Du(t) = h(t);\ u(t) \in N_B(t) \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad u(0) = 0.$$

Alors pour tout $s > 0$, u_ε *converge dans* $L^2(\,(0,\, s);\, W)$ *vers* u; u'_ε *converge faiblement dans cet espace vers* u', *et* u''_ε y *converge faiblement vers* u''. *Il en résulte que pour tout* $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ *dans* W *fort, et* $u'_\varepsilon(t) \to u'(t)$ *dans* W *faible.*

REMARQUE. — On pourra toujours se ramener aux hypothèses (2, 59) et (2, 60) si on a

(2, 59′) Pour tout $c > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon;\, c) = \alpha(\varepsilon) > 0$, $\alpha(\varepsilon) \to 0$ avec ε, $\lambda(\varepsilon;\, c) = \lambda(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon) \to \lambda$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\beta(c) = \beta > 0$, tels que pour tout $t \in (0, c)$ tout $u, v \in V$, et $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, on ait :

$$\mathrm{Re}\ b(\varepsilon;\, t;\, u,\, u) + \lambda(\varepsilon)\,|u|^2 \geqslant \alpha(\varepsilon)\,\|u\|_V^2 + \beta\,\|u\|_W^2$$

(57) Cf. (I, 23.)

et

(2, 60′) Pour tout $c > 0$, il existe $\gamma(c) = \gamma > 0$, et $\mu(c) = \mu$ tels que, pour tout $t \in (0, c)$ et tout u, $v \in W$, on ait :

$$\mathrm{Re}\, b(t;\, u,\, u) + \mu\,|u|^2 \geqslant \gamma\,\|u\|^2_W.$$

Démonstration du théorème 2. 8.

On a

$$b(\varepsilon;\, t;\, u_\varepsilon(t),\, v) + (u'_\varepsilon(t),\, v) = (h_\varepsilon(t),\, v) \quad \text{pour tout } v \in V$$

d'où, en dérivant chaque membre, deux fois par rapport à t :

$$\begin{aligned} b(\varepsilon;\, t;\, u''_\varepsilon(t),\, v) + 2b'(\varepsilon;\, t;\, u'_\varepsilon(t),\, v) + b''(\varepsilon;\, t;\, u_\varepsilon(t),\, v) \\ + (u'''_\varepsilon(t),\, v) = (h''_\varepsilon(t),\, v) \end{aligned}$$

pour tout $v \in V$, donc pour $v = u''_\varepsilon(t)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} b(\varepsilon;\, t;\, u''_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t)) + 2b'(\varepsilon;\, t;\, u'_\varepsilon(t);\, u''_\varepsilon(t)) \\ + b''_\varepsilon(\varepsilon;\, t;\, u_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t)) + (u'''_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t)) = (h''_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t)) \end{aligned}$$

d'où, en prenant les parties réelles et en intégrant de 0 à s, $s \in (0,\, c)$

$$\begin{aligned} (2,\ 67) \quad 2\int_0^s \mathrm{Re}\, b(\varepsilon;\, t;\, u''_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t))dt + |u''_\varepsilon\ (s)|^2 \leqslant |u''_\varepsilon\ (0)|^2 \\ + 2\left|\int_0^s \mathrm{Re}\{(h''_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t)) - 2b'(\varepsilon;\, t;\, u'_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t)) \right. \\ \left. - b''(\varepsilon;\, t;\, u_\varepsilon(t),\, u''_\varepsilon(t))\}dt\right|. \end{aligned}$$

On en déduit, comme à la page 65, en tenant compte de (2, 61) et de $u_\varepsilon(0) = 0$; que le second membre est majoré par

$$\begin{aligned} |u''_\varepsilon(0)|^2 + K\Big(\int_0^s |h''_\varepsilon(t)|^2 dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^s \|u''_\varepsilon(t)\|^2_W dt\Big)^{1/2} + (k_1 s + k_2)\alpha(\varepsilon)\|u'_\varepsilon(0)\|^2_V \\ + k_3 s\int_0^s \alpha(\varepsilon)\|u''_\varepsilon(t)\|^2_V dt + (l_1 s + l_2)\|u'_\varepsilon(0)\|^2_W + l_3 s\int_0^s \|u''_\varepsilon\|^2_W\, dt \end{aligned}$$

où les constantes k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 l_3, et K sont indépendantes de ε et ne dépendent que de c.

Mais, d'après (2, 54), $u'_\varepsilon(0) = h_\varepsilon(0)$ est borné dans V, et $u''_\varepsilon(0) = h'_\varepsilon(0) - B_\varepsilon(0)h_\varepsilon(0)$ est borné dans H, et d'après (2, 55) $\int_0^s |h''_\varepsilon(t)|^2 dt$ est également borné. On en déduit donc, en utilisant (2, 59′) pour minorer le premier membre de (2, 67)

$$\begin{aligned} 2\int_0^s \{\alpha(\varepsilon)\|u''_\varepsilon(t)\|^2_V + \|u''_\varepsilon(t)\|^2_W\}dt \leqslant K_1 + K_2\Big(\int_0^s \|u''_\varepsilon(t)\|^2_W dt\Big)^{1/2} \\ + K_3\, s\int_0^s \alpha(\varepsilon)\|u''_\varepsilon(t)\|^2_V dt + K_4 s\int_0^s \|u''_\varepsilon(t)\|^2_W dt \end{aligned}$$

où les constantes K_1, K_2, K_3, K_4, ne dépendent que de c, et sont indépendantes de ε.

Il est donc possible de trouver s_0, *dépendant uniquement de c*, indépendant de ε, tel que

$$(2,\ 68)\qquad \int_0^{s_0} (\alpha(\varepsilon)\, \|u_\varepsilon''(t)\|_V^2 + \|u_\varepsilon''(t)\|_W^2)\, dt \leqslant C(s_0)$$

$C(s_0)$ étant indépendante de ε.

On en déduit, en utilisant $u_\varepsilon(0) = 0$

$$(2,\ 69)\qquad \int_0^{s_0} (\|u_\varepsilon'(t)\|_W^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_W^2)\, dt \leqslant C_1(s_0)$$

où $C_1(s_0)$ ne dépend pas de ε.

Remarque. — Pour établir (2, 68) et (2, 69), nous n'avons pas utilisé les hypothèses (2, 63) et (2, 64), ni d'ailleurs, (2, 60) et (2, 62).

D'après (2, 68) et (2, 69), de toute suite u_{ε_i} on peut extraire une sous-suite $u_{\varepsilon j}$, telle que $u_{\varepsilon j}$, $u'_{\varepsilon j}$, $u''_{\varepsilon j}$, convergent dans $L^2((0, s_0); W)$ faible vers w, w' w''. Alors w est une fois continûment différentiable de $(0, s_0)$ dans W, et pour tout $t \in (0, s_0)$, $u_{\varepsilon_j}(t) \to w(t)$ dans W faible, et $u'_{\varepsilon_j}(t)$ converge vers $w'(t)$ dans W faible.

Mais on a

$$b(\varepsilon_j;\ t;\ u_{\varepsilon_j}(t),\ v) + (u'_{\varepsilon j}(t),\ v) = (h_{\varepsilon_j}(t),\ v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

Donc, par passage à la limite, en tenant compte de (2, 63), pour le premier membre ([58]) et de (2, 57) pour le second :

$$b(t;\ w(t),\ v) + (w'(t),\ v) = (h(t),\ v)$$

pour tout $v \in V$ donc pour tout $v \in \overline{V}_{(W)}$.

Par suite $w(t) = u(t)$.

Nous avons donc montré, sans utiliser l'hypothèse (2, 64) que u_ε, u'_ε et u''_ε convergent, dans $L^2((0, s_0); W)$ faible, respectivement vers u, u' et u''. Montrons maintenant que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2((0, s_0); W)$. D'après les hypothèses (2, 64) et (2, 60), il nous suffit pour cela, de montrer que

$$\int_0^{s_0} \mathrm{Re}\big(b(\varepsilon;\ t,\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)\big) - b(t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) \\ + b(t;\ u_\varepsilon(t) - u(t),\ u_\varepsilon(t) - u(t)\big)\, dt$$

converge vers 0, avec ε.

([58]) Il est facile de voir que pour chaque t, $|b(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t))|$ est borné.

Or,

$$\int_0^{s_0} \mathrm{Re}\big(b(\varepsilon;\ t,\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)\big) - b(t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t))$$
$$+ b(t;\ u_\varepsilon(t) - u(t),\ u_\varepsilon(t) - u(t))\,dt = \int_0^{s_0} \mathrm{Re}\{h_\varepsilon(t) - h(t),\ u_\varepsilon(t))$$
$$+ b(t;\ u(t) - u_\varepsilon(t),\ u(t)) + (u'(t) - u'_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t))\}\ dt$$
$$\leqslant \int_0^{s_0} \mathrm{Re}\{(h_\varepsilon(t) - h(t),\ u_\varepsilon(t)) + b(t;\ u(t) - u_\varepsilon(t),\ u(t))$$
$$+ (u'(t) - u'_\varepsilon(t),\ u(t))\}\ dt$$
$$\left(\text{car} \int_0^{s_0} \mathrm{Re}(u'(t) - u'_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t))\,dt = -\frac{1}{2}|u_\varepsilon(s_0) - u(s_0)|^2 \leqslant 0\right)$$

et le second membre tend vers 0, quand $\varepsilon \to 0$, d'après (2, 55) et les convergences faibles dans $L^2((0, s_0);\ W)$ de u_ε, u'_ε vers u et u'.

Le théorème est donc démontré pour $t \in (0, s_0)$.

Désignons par $u_1^\varepsilon(t)$ (resp. $u_1(t)$) la solution une fois continûment différentiable de $(0, s_0)$ dans V (resp. $\overline{V}_{(W)}$) de (2, 65) (resp. (2, 66)) pour $t \in (0, s_0)$. Reprenons la fonction $p(t)$ de la p. 66, et soit $u_2^\varepsilon(t)$ la solution une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$, dans V, de

$$\text{(2, 70)} \qquad \begin{aligned} &B_\varepsilon(t)u_2^\varepsilon(t) + Du_2^\varepsilon(t) = h_2^\varepsilon(t);\\ &u_2^\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t) \quad \text{pour} \quad t > s_0/2\\ &u_2^\varepsilon(s_0/2) = 0 \quad \text{avec} \quad h_2^\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)\,(1 - p(t)) - p'(t)u_1^\varepsilon(t). \end{aligned}$$

et $u_2(t)$ la solution une fois continûment différentiable de $t \geqslant s_0/2$ dans $\overline{V}_{(W)}$ de

$$\text{(2, 71)} \qquad \begin{aligned} &B(t)u_2(t) + Du_2(t) = h_2(t);\\ &u_2(t) \in N_B(t) \quad \text{pour} \quad t > s_0/2\\ &u_2(s_0/2) = 0 \quad \text{avec} \quad h_2(t) = h(t)\,(1 - p(t)) - p'(t)u_1(t). \end{aligned}$$

Or, $h_2(t) \in \mathcal{C}_2(s_0/2)$ avec $h_2(s_0/2) \in N_B(s_0/2)$ et il est très facile de vérifier que $h_2^\varepsilon(t)$ vérifie $\mathcal{C}_2(s_0/2, h_2)$. Par suite u_2^ε (resp. $u_2^{\varepsilon'}$ et $u_2^{\varepsilon''}$) convergent dans $L^2((s_0/2,\ 3s_0/2);\ W)$ fort (resp. faible) vers u_2 (resp. u'_2 et u''_2). En recommençant le processus, si $3s_0/2 < c$, on montre finalement le théorème dans $(0, c)$ C.Q.F.D.

De toute évidence, le théorème 2. 8 correspond au théorème 2. 5. Étudions maintenant le théorème correspondant au théorème 2. 6.

Posons :

$$b(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) = b_0(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) + b_1(\varepsilon;\ t;\ u,\ v)$$

avec $\quad b_0(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) = \overline{b_0(\varepsilon;\ t;\ v,\ u)}$ pour tout $u, v \in V$

et

$$b(t;\, u,\, v) = b_0(t;\, u,\, v) + b_1(t;\, u,\, v) \quad \text{avec} \quad b_0(t;\, u,\, v) = \overline{b_0(t;\, v,\, u)}$$

pour tout u, $v \in W$.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2. 9. — *Soit $h(t) \in \mathcal{C}_1$ avec $h(0) \in V$, et une famille $h(t) \in \mathcal{C}_1$, vérifiant $\mathcal{C}_1(0;\, h)$. Sous les hypothèses* (2, 51), (2, 59) et (2, 60), (2, 61) *et* (2, 62), *et*

(2, 72) *pour tout $c > 0$, il existe des constantes $\tau_1(c) = \tau_1$, $\tau_2(c) = \tau_2$ telles que pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $t \in (0,\, c)$, et u, $v \in V$ on ait :*

$$|\mathrm{Re}\, b_1(\varepsilon;\, t;\, u,\, v)| \leqslant \tau_1 \alpha(\varepsilon)\, \|u\|_V\, |v| + \tau_2 \|u\|_W\, |v|$$

et

(2, 73) *pour tout $c > 0$, il existe une constante $\tau(c) = \tau$ telle que pour tout $t \in (0,\, c)$, et tout u, $v \in W$, on ait*

$$|\mathrm{Re}\, b_1(t;\, u,\, v)| \leqslant \tau \|u\|_W\, |v|$$

ainsi que (2, 63) *et* (2, 64), *soit $u_\varepsilon(t)$ (resp. $u(t)$) la solution continue de $t \geqslant 0$ dans* V *(resp. $\overline{V}_{(W)}$), une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans* H, *de* (2, 65) *(resp.* (2, 66)). *Alors, quand $\varepsilon \to 0$, pour tout $s > 0$, $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2((0,\, s);\, W)$ $u'_\varepsilon \to u'$ dans $L^2((0,\, s);\, W)$ faible, et $u''_\varepsilon \to u''$ dans $L^2((0,\, s);\, H)$ faible. Il en résulte que pour chaque $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ dans* W, *et $u'_\varepsilon(t) \to u'(t)$ dans* H *faible.*

Il est inutile de refaire toute la démonstration. On opère comme dans la démonstration du théorème 2. 8, en utilisant cette fois, les inégalités à priori (2, 47) et (2, 49).

Opérateurs du deuxième ordre en: $B_\varepsilon(t) + D^2$.

Reprenons l'hypothèse (2, 51) et les notations du début du n° 3. Posons-la

Définition 2. 3. — Soit $h \in \mathcal{C}_2(t_0)$. Nous dirons qu'une famille $h_\varepsilon \in \mathcal{C}_2(t_0)$ vérifie la propriété $\mathcal{C}'_2(t_0;\, h)$, si lorsque $\varepsilon \to 0$, nous avons (2, 55) et

(2, 54′) $h_\varepsilon(t_0)$ (resp. $h'_\varepsilon(t_0)$) est borné dans V(resp. H).

Nous avons essentiellement deux théorèmes :

THÉORÈME 2. 10. — *(Théorème de convergence faible) : Sous l'hypothèse* (2, 51), *soit* $h \in \mathcal{C}_2$ *avec* $h(0) \in V$, *et une famille* $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2$ *vérifiant la propriété* $\mathcal{C}_2'(0; h)$. *Sous les hypothèses* (2, 59) *et* (2, 60), (2, 72) *et* (2, 73) *et*

(2, 74) *pour* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $u, v \in V$, $t \to b(\varepsilon; t; u, v)$ *est trois fois continûment différentiable avec* (2, 61) *et pour tout* $c > 0$, *il existe des constantes* $\omega_1(c) = \omega_1$ *et* $\omega_2(c) = \omega_2$ *telles que, pour tout* $t \in (0, c)$, *tout* $u, v \in V$ *et* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *on ait :*

$$|b'''(\varepsilon; t; u, v)| \leqslant \omega_1 \alpha(\varepsilon) \, ||u||_V \, ||v||_V + \omega_2 \, ||u||_W \, ||v||_W$$

et

(2, 75) *pour* $u, v \in W$, $t \to b(t; u, v)$ *est trois fois continûment différentiable*

ainsi que (2, 63), *soit* $u_\varepsilon(t)$ (*resp.* $u(t)$) *la* ([59]) *solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$) *deux fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* H, *de*

(2, 76) $B_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) + D^2 u_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t)$; $u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon(t)$ *pour* $t > 0$
$u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon'(0) = 0$.

(*resp.*

(2, 77) $B(t)u(t) + D^2 u(t) = h(t)$; $u(t) \in N_B(t)$ *pour* $t > 0$
$u(0) = u'(0) = 0$).

Alors quand $\varepsilon \to 0$, *pour tout* $s > 0$, u_ε, u_ε', u_ε'' *convergent dans* $L^2((0, s); W)$ *faible respectivement vers* u, u', *et* u'', *et* u_ε''' *converge vers* u''' *dans* $L^2((0, s); H)$ *faible. Il en résulte que pour tout* $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon'(t)$ *convergent dans* W *faible, respectivement vers* $u(t)$, $u'(t)$ *et* $u_\varepsilon''(t)$ *converge vers* $u''(t)$ *dans* H *faible.*

THÉORÈME 2. 11. — (*Théorème de convergence forte*) *Sous les hypothèses du théorème* 2. 10, *avec, en outre*

(2, 72') *Pour tout* $c > 0$, *il existe une constante* $\tau(c) = \tau$ *telle que, pour tout* $t \in (0, c)$, *tout* $u, v \in V$, *et tout* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *on ait :*

$$|\mathrm{Re}\{b_1(\varepsilon; t; u, v) - b_1(t; u, v)\}| \leqslant \tau\alpha(\varepsilon)||u||_V \, |v|$$

([59]) Pour l'existence et l'unicité voir Lions [6] p. 7 et aussi Trèves [1].

et

(2, 61′) *Pour tout* $c > 0$, *il existe une constante* $\lambda(c) = \lambda$, *telle que pour tout* $t \in (0, c)$, *tout* $u, v \in V$ *et tout* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *on ait:*

$$|b_0'(\varepsilon; t; u, v) - b_0'(t; u, v)| \leqslant \lambda\alpha(\varepsilon) \|u\|_V \|v\|_V$$

et

(2, 64′) *Pour tout* $c > 0$, *il existe des constantes* $\delta_1(\varepsilon, c) = \delta_1(\varepsilon)$ *et* $\delta_2(c) = \delta_2$ $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε, $\delta_2 > 0$ *telles que*

$$b_0(\varepsilon; t; u, u) - b_0(t; u, u) + \delta_1(\varepsilon) b_0(t; u, u) \geqslant \delta_2 \alpha(\varepsilon) \|u\|_V^2$$

pour tout $u \in V$, *tout* $t \in (0, c)$ *et* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Alors $u_\varepsilon \to u$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* $u_\varepsilon' \to u'$ *dans* $L^2((0, s); H)$, *pour tout* $s > 0$. *Il en résulte que, pour tout* $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(t) \to u(t)$ *dans* W *et* $u_\varepsilon'(t) \to u'(t)$ *dans* H. *De plus* $(\alpha(\varepsilon)^{1/2} u_\varepsilon)$ $\left(\textit{resp.}\ (\alpha(\varepsilon))^{1/2} u_\varepsilon'\right)$ *et* $(\alpha(\varepsilon)^{1/2} u_\varepsilon'')$ *converge fortement (resp. faiblement) vers* 0, *dans* $L^2((0, s); V)$ *pour tout* $s > 0$.

Démonstration du théorème 2. 10. — Nous ne donnons pas la démonstration complète. La méthode est toujours la même. (Cf. Théorème 2. 8). Il nous suffit de montrer le théorème dans $(0, c)$, c fixé à l'avance. Il nous suffit même de montrer qu'il existe alors s_0, ne dépendant que de c, tel que le théorème soit vrai dans $(0, s_0)$. Or, il est facile de montrer, en utilisant les inégalités à priori établies dans Lions [6], p. 10 à 20, et en particulier (5, 14) et (5, 15), p. 14, qu'il existe s_0, ne dépendant que de c, tel que l'on ait :

$$(2, 78) \quad \int_0^{s_0} \{ |u_\varepsilon'''(t)|^2 + \alpha(\varepsilon) \|u_\varepsilon''(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_W^2 \} \, dt \leqslant C_1$$

et

$$(2, 79) \quad \int_0^{s_0} \{ \alpha(\varepsilon)(\|u_\varepsilon'(t)\|_V^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_V^2) + \|u_\varepsilon'(t)\|_W^2 + \|u_\varepsilon(t)\|_W^2 \} \, dt \leqslant C_2$$

C_1 et C_2 étant indépendante de.

On en déduit alors facilement, en utilisant (2, 63), que u_ε, u_ε' et u_ε'' convergent dans $L^2((0, s_0); W)$ faible vers u, u', u'' et que u_ε''' converge dans $L^2((0, s_0); H)$ faible vers u'''.

Démonstration du théorème 2. 11. — Soit $c > 0$ fixé. On va montrer qu'il existe s_0 ne dépendant que de c, tel que le théorème soit vrai dans $(0, s_0)$.

D'après (2, 60), (2, 64') et les convergences faibles établies au théorème (2, 10) on a pour $s \in (0, c)$

(2, 80)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s \{\delta_2 \alpha(\varepsilon) \|u_\varepsilon(t)\|_V^2 + \gamma \|u_\varepsilon(t) - u(t)\|_W^2 + |u'_\varepsilon(t) - u'(t)|\} \, dt$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{s_0} \{b_0(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) - b_0(t;\ u(t),\ u(t)) + |u'_\varepsilon(t)|^2 - |u'(t)|^2\} \, dt$$

Or, on a

$$b(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) + (u''_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) = (h_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t))$$

et

$$b(t;\ u(t),\ u'(t)) + (u''(t),\ u'(t)) = (h(t),\ u'(t))$$

d'où, en soustrayant membre à membre, en prenant les parties réelles, en multipliant par $(s - t)$, en intégrant de 0 à s, (en tenant compte de $u_\varepsilon(0) = u'_\varepsilon(0) = u(0) = u'(0) = 0$)

(2, 81)

$$\int_0^s \{b_0(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) - b_0(t;\ u(t),\ u(t)) + |u'_\varepsilon(t)|^2 - |u'(t)|^2\} \, dt$$
$$= \int_0^s (s-t)\{2\mathrm{Re}[(h_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) - (h(t), u'(t)) - b_1(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t))$$
$$+ b_1(t;\ u(t),\ u'(t))] + b'_0(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) - b'_0(t;\ u(t),\ u(t))\} \, dt$$

Mais, d'après (2, 55) et les convergences faibles établies au théorème 2. 10,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^s (s - t)\ \mathrm{Re}\{(h_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - (h(t),\ u'(t))\} \, dt = 0.$$

De plus

$$\int_0^s (s-t) 2\,\mathrm{Re}[b_1(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u(t),\ u'(t)) \, dt$$
$$= \int_0^s (s-t) 2\,\mathrm{Re}[b_1(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u_\varepsilon(t),$$
$$u'_\varepsilon(t)) + b_1(t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u(t),\ u'(t))] \, dt.$$

Mais d'après l'hypothèse (2, 72')

$$|\mathrm{Re}\{b_1(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t))\}|$$
$$\leqslant \tau_1 \alpha(\varepsilon) \|u_\varepsilon(t)\|_V |u'_\varepsilon(t)|.$$

Comme u'_ε (resp. $\sqrt{\alpha(\varepsilon)}u_\varepsilon$) est borné dans $L^2((0, s); H)$ (resp. $(L^2((0, s); V))$

$$2\int_0^s (s-t)\,\mathrm{Re}[b_1(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t))]\,dt \to 0.$$

De plus d'après les convergences faibles établies au théorème 2. 10 :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s (s-t)2\,\mathrm{Re}\{b_1(t;\ u_\varepsilon(t),\ u'_\varepsilon(t)) - b_1(t;\ u(t),\ u'(t))\}\,dt \\ = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s (s-t)2\,\mathrm{Re}\{b_1(t;\ u_\varepsilon(t)-u(t),\ u'_\varepsilon(t)-u'(t))\}\,dt \\ \leqslant \mathrm{K}s\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s \|u_\varepsilon(t)-u(t)\|_{\mathrm{W}}^2 + |u'_\varepsilon(t)-u'(t)|^2\,dt\end{aligned}$$

où K ne dépend que de c.

De la même façon, d'après (2, 61′) et les convergences faibles :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^s (s-t)\{b'_0(\varepsilon;\ t;\ u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)) - b'_0(t;\ u(t),\ u(t))\}\,dt \\ \leqslant \mathrm{K}_1 s\int_0^s \{\alpha(\varepsilon)\|u_\varepsilon(t)\|_{\mathrm{V}}^2 + \|u_\varepsilon(t)-u(t)\|_{\mathrm{W}}^2\}\,dt\end{aligned}$$

où K_1 ne dépend que de c.

Portant tous ces résultats dans (2, 80) on voit qu'il existe s_0 ne dépendant que de c, tel que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{s_0} \{\alpha(\varepsilon)\|u_\varepsilon(t)\|_{\mathrm{V}}^2 + \|u_\varepsilon(t)-u(t)\|_{\mathrm{W}}^2 + |u'_\varepsilon(t)-u'(t)|^2\}\,dt = 0.$$

ce qui démontre le théorème.

Cas particulier où $b(\varepsilon;\ u,\ v)$ est linéaire en ε.

Les notations sont celles du début du n° 3. Reprenons l'hypothèse (2, 51), puis, sur V (resp. W) une famille de formes sesqui-linéaires continues $a(t;\ u,\ v)$ (resp. $b(t;\ u,\ v)$), $t \geqslant 0$. Posons

(2, 82) $\quad b(\varepsilon;\ t;\ u,\ v) = \varepsilon a(t;\ u,\ v) + b(t;\ u,\ v).$

Supposons

(2, 60) $\quad b(t;\ u,\ v)$ vérifie (2, 31) sur W.

(2, 83) $\varepsilon a(t;\ u,\ v) + b(t;\ u,\ v)$ vérifie (2, 31) sur V pour ε assez petit.

LEMME 2. 5. — *Si* $a(t;\, u,\, v)$ *et* $b(t;\, u,\, v)$ *vérifient* (2, 60) *et* (2, 83), *alors* $b(\varepsilon;\, t;\, u,\, v)$, *donné par* (2, 82) *vérifie les hypothèses* (2, 59), (2, 63) *et* (2, 64'), *avec* $\alpha(\varepsilon) = k\varepsilon$.

Nous ne donnons pas la démonstration, qui est implicitement contenue dans les formules des pages 20 et 21.

Supposons maintenant qu'on ait (2, 62) (resp. (2, 75)) et

(2, 84) (resp. (2, 85)) pour $u,\, v \in V$, $t \to a(t;\, u,\, v)$ est deux (resp. trois) fois continûment différentiable.

On a alors le résultat évident suivant :

LEMME 2. 6. — *Sous les hypothèses* (2, 62) *et* (2, 84) (*resp.* (2, 75) *et* (2, 85)) $b(\varepsilon;\, t;\, u,\, v)$ *donné par* (2, 82) *vérifie les hypothèses* (2, 61) *et* (2, 61') (*resp.* (2,74) *et* (2, 61')), *avec* $\alpha(\varepsilon) = k\varepsilon$.

Enfin supposons que l'on ait (2, 73) et

(2,86) pour tout $c > 0$, il existe une constante λ telle que pour tout $u,\, v \in V$ et tout $t \in (0,\, c)$ on ait

$$|\mathrm{Re}\, a_1(t;\, u,\, v)| \geqslant \lambda \|u\|_V |v|.$$

On a alors le

LEMME 2. 7. — *Sous les hypothèses* (2, 73) *et* (2, 86), $b(\varepsilon;\, t;\, u,\, v)$ donné par (2, 82) *vérifie* (2, 72) *et* (2, 72'), *avec* $\alpha(\varepsilon) = k\varepsilon$.

Ces lemmes permettent de simplifier beaucoup, dans ce cas, les énoncés des théorèmes 2, 8; 2, 9 et 2, 11. Donnons, par exemple, l'énoncé explicite, correspondant au théorème 2, 11.

THÉORÈME 2. 12. — *Sous l'hypothèse* (2, 51), *soit* $h \in \mathcal{C}_2$ *avec* $h(0) \in V$, *et une famille* $h_\varepsilon(t) \in \mathcal{C}_2$, *vérifiant la propriété* $\mathcal{C}_2'(0;\, h)$. *Sous les hypothèses* (2, 60), (2, 83) (2, 75) *et* (2, 85), (2, 73) *et* (2, 86), *et si* $b(\varepsilon;\, t;\, u,\, v)$ *est donné par* (2, 82) *la solution* u_ε *de* (2, 76) *converge dans* $L^2((0,\, s);\, W)$ *vers la solution* u *de* (2, 77), *pour tout* $s > 0$. *De plus, pour tout* $s > 0$, $u'_\varepsilon \to u'$ *dans* $L^2((0,\, s);\, H)$ *fort, et dans* $L^2((0,\, s);\, W)$ *faible*, $u''_\varepsilon \to u''$ *dans* $L^2((0,\, s);\, W)$ *faible et* $u'''_\varepsilon \to u'''$ *dans* $L^2((0,\, s);\, H)$ *faible. De plus* $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2} u'_\varepsilon$ *et* $\varepsilon^{1/2} u''_\varepsilon$) *converge fortement* (*resp. faiblement*) *dans* $L^2((0,\, s);\, V)$ *vers* 0 ([60]).

([60]) **En faisant des hypothèses de différentiabilité en t de plus en plus fortes sur $a(t;\, u,\, v)$ et $b(t;\, u,\, v)$, $h_\varepsilon(t)$ et $h(t)$, on obtiendrait une convergence de plus en plus fine en t, de $u_\varepsilon(t)$. Il n'en est pas de même pour la variable d'espace comme le montrent les contre-exemples du chapitre I, n°5.**

4. — Applications et exemples.

Problèmes mixtes dans les équations aux dérivées partielles.

Nous faisons l'hypothèse (1, 33).

A chacun des théorèmes 2. 8, 2. 9, 2. 10 et 2. 11 correspondra un théorème pour les problèmes non homogènes. Nous nous bornerons, par souci de simplification à considérer le cas où l'on a (2, 82), *i.e.* $b(\varepsilon; t; u, v) = \varepsilon a(t; u, v) + b(t; u, v)$. Nous désignons par $A(t)$ l'opérateur défini par $a(t; u, v)$. Alors $B_\varepsilon(t) = \varepsilon A(t) + B(t)$.

1° Soit $k(t) \in \mathcal{C}_2$, avec $k(0) \in \left\{\bigcap_\varepsilon N_\varepsilon(0) \cap N_B(0)\right\}$. Soit $F(t)$ une fonction deux fois (resp. trois fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. H) telle que pour tout $t \geqslant 0$, $A(t)F(t) \in H$ et $B(t)\,F(t) \in H$, et telle que les applications $t \to A(t)F(t)$ et $t \to B(t)F(t)$ soient deux fois continûment différentiables de $t \geqslant 0$ dans H. Nous supposons, en outre que $B(0)F(0) + F'(0)$ et $A(0)F(0)$ sont dans $\left\{\bigcap_\varepsilon N_\varepsilon(0) \cap N_B(0)\right\}$. Dans ces conditions, du théorème 2. 8 se déduit le :

Théorème 2. 13. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (2, 51), (2, 60) *et* (2, 83), (2, 62) *et* (2, 84), soit $U_\varepsilon(t)$ (*resp.* $U(t)$) *la solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$) *de*

$$(2, 87) \qquad (\varepsilon A(t) + B(t))U_\varepsilon(t) + DU_\varepsilon(t) = k(t); \quad U_\varepsilon(t) - F(t) \in N_\varepsilon(t) \quad \textit{pour} \quad t > 0;\ U_\varepsilon(0) = F(0)$$

(*resp.*

$$(2, 88) \qquad B(t)U(t) + DU(t) = k(t); \quad U(t) - F(t) \in N_B(t) \quad \text{pour} \quad t > 0;\ U(0) = F(0)).$$

Alors pour tout $s > 0$, $U_\varepsilon \to U$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* U'_ε, U''_ε *convergent faiblement dans* $L^2((0, s); W)$ *vers* U' *et* U''. *De plus* $\varepsilon^{1/2}U_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2}U'_\varepsilon$) *converge dans* $L^2((0, s); V)$ *fort,* (*resp. faible*) *vers* 0.

2° Supposons maintenant $k(t) \in \mathcal{C}_1$ avec $k(0) \in V$. Soit $F(t)$ une fonction une fois (resp. deux fois) continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. H) telle que pour tout $t \geqslant 0$,

$A(t)\,F(t)$ et $B(t)\,F(t)$ soient dans H, et telle que les applications $t \to A(t)\,F(t)$ et $t \to B(t)\,F(t)$ soient une fois continûment différentiables de $t \geqslant 0$ dans H. Supposons, en outre $A(0)\,F(0) \in V$ et $B(0)\,F(0) + F'(0) \in V$.

Dans ces conditions, on déduit du théorème 2. 9 le

Théorème 2. 14. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (2, 51), (2, 60) *et* (2, 83), (2, 62) *et* (2, 84), (2, 73) *et* (2, 86), *la solution* U_ε *de* (2, 87) *converge*, dans $L^2((0, s); W)$, *pour tout* $s > 0$, *vers la solution* U *de* (2, 88). *De plus* U'_ε (*resp.* U''_ε) *converge faiblement dans* $L^2((0, s); W)$ (*resp.* $L^2((0, s); H)$) *vers* U' (*resp.* U''). *En outre* $\varepsilon^{1/2}U_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2}\,U'_\varepsilon$) *converge dans* $L^2\,((0, s);\, V)$ *fort* (*resp. faible*) *vers* 0.

Démonstration des théorèmes 2. 13 *et* 2. 14. — Posons

$$u_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t) - F(t), \qquad \text{et} \qquad u(t) = U(t) - F(t).$$

Alors (2, 87) (resp. (2, 88)) se ramène à (2, 65) (resp. (2, 66)) où

$$h(t) = k(t) - (B(t)F(t) + F'(t))$$
$$h_\varepsilon(t) = k(t) - \big((\varepsilon A(t) + B(t))F(t) + F'(t)\big).$$

Moyennant les conditions sur $F(t)$ et $k(t)$, on vérifie facilement que $h(t)$ et $h_\varepsilon(t)$ vérifient les hypothèses du théorème 2. 8 dans le premier cas et celles du théorème 2. 9 dans le second.

3° Soit $k(t) \in \mathcal{C}_2$, avec $k(0) \in V$. Soit $F(t)$ une fonction quatre fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V, $A(t)F(t)$ et $B(t)\,F(t)$ étant dans H pour tout $t \geqslant 0$, et les applications $t \to A(t)F(t)$ et $B(t)F(t)$ étant deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H, et $B(0)F(0) + F''(0) \in V$ et $A(0)F(0) \in V$. Dans ces conditions, on déduit du théorème 2, 12 le

Théorème 2. 15. — *Sous les hypothèses* (1, 33), (2, 51), (2, 60) *et* (2, 83), (2, 75) *et* (2, 85), (2, 73) *et* (2, 86), *soit* $U_\varepsilon(t)$ (*resp.* $U(t)$) *la solution une fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* V (*resp.* $\overline{V}_{(W)}$), *deux fois continûment différentiable de* $t \geqslant 0$ *dans* H *de*

$$\text{(2, 89)} \quad (\varepsilon A(t) + B(t))U_\varepsilon(t) + D^2U_\varepsilon(t) = k(t);\ U_\varepsilon(t) - F(t) \in N_\varepsilon(t)$$
$$\textit{pour tout } t \geqslant 0;\ U_\varepsilon(0) = F(0);\ U'_\varepsilon(0) = F'(0)$$

(*resp.* $B(t)U(t) + D^2U(t) = k(t)$; $U(t) - F(t) \in N_B(t)$ *pour* $t > 0$;

$$\text{(2, 90)} \qquad U(0) = F(0);\ U'(0) = F'(0)).$$

Alors, pour tout $s > 0$, $U_\varepsilon \to U$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* $U'_\varepsilon \to U'$ *dans* $L^2((0, s); H)$. *On a de plus les convergences faibles*, $U'_\varepsilon \to U'$, $U''_\varepsilon \to U''$ *dans* $L^2((0, s); W)$ *et* $U'''_\varepsilon \to U'''$ *dans* $L^2((0, s); H)$. *En outre* $\varepsilon^{1/2}U_\varepsilon$ (*resp.* $\varepsilon^{1/2}U'_\varepsilon$ *et* $\varepsilon^{1/2}U''_\varepsilon$) *convergent fortement* (*resp. faiblement*) *dans* $L^2((0, s); V)$, *vers* 0.

Démonstration. — En posant

$$u_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t) - F(t) \qquad \text{et} \qquad u(t) = U(t) - F(t),$$

(2,89) et (2, 90) se ramènent à (2, 76) et (2, 77) avec

$$h_\varepsilon(t) = k(t) - \big((\varepsilon A(t) + B(t))F(t) + F''(t)\big)$$
$$h(t) = k(t) - B(t)F(t) - F''(t)$$

et il suffit de vérifier que $h(t)$ et $h_\varepsilon(t)$ vérifient les propriétés du théorème 2. 12.

Perturbation singulière de semi-groupes.

Nous reprenons, V, W et H avec (2, 51). Puis nous prenons sur V (resp. W) une forme sesqui-linéaire continue $a(u, v)$ (resp. $b(u, v)$) qui définit l'opérateur A (resp. B). Nous prenons $b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v)$.

Nous supposons :

(2, 91) il existe des constantes $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$ telles que pour tout $u \in W$, on ait :

$$b_0(u, u) + \lambda|u|^2 \geqslant \gamma\|u\|_W^2.$$

(2, 92) Il existe des constantes $\mu > 0$ et $\alpha > 0$ telles que, pour tout $u \in V$ et tout $\varepsilon \leqslant 1$, on ait

$$\varepsilon a_0(u, u) + b_0(u, u) + \mu|u|^2 \geqslant \alpha\varepsilon\|u\|_V^2$$

(2, 93) $\Phi = \left\{\bigcap_\varepsilon N_\varepsilon \cap N_B\right\}$ est dense dans H.

Remarque. — L'hypothèse (2, 93) est en particulier vérifiée, si on prend $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W \subset H$, $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans H, ou $(\mathcal{D}(\Omega))^N \subset V \subset W \subset H(\mathcal{D}'(\Omega))^N$ avec $(\mathcal{D}(\Omega))^N$ dense dans H.

Si on considère $(-B)$ (resp. $(-B_\varepsilon)$ $\varepsilon \leqslant 1$) comme opérateur non continu de domaine de définition N_B (resp. N_ε) muni de la topologie induite par H, à valeurs dans H, sous les hypothèses (2, 91) et (2, 93) (resp. (2, 92) et (2, 93)) $(-B)$

(resp. $(-B_\varepsilon)$) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $t \to X(t)$ (resp. $t \to X_\varepsilon(t)$) représentation continue de $t \geqslant 0$ dans $\mathcal{L}_s(H; H)$ [61].

Théorème 2. 16. — *Sous les hypothèses* (2, 91), (2, 92) (2, 93) (*resp.* (2, 91), (2, 92) (2, 93)) *et*

(2, 94) *il existe des constantes* τ *et* ν *telles que*

$$|Re a_1(u, v)| \leqslant \tau \|u\|_V |v| \quad \textit{pour tout} \quad u, v \in V$$
$$|Re b_1(u, v)| \leqslant \nu \|u\|_W |v| \quad \textit{pour tout} \quad u, v \in W)$$

et si pour $f \in \Phi$, Af [62] *et* Bf *sont dans* Φ (*resp.* V), *alors, quand* $\varepsilon \to 0$, *pour tout* $t \geqslant 0$, $X_\varepsilon(t) \to X(t)$ *dans* $\mathcal{L}_s(H, H)$, *et pour* $f \in \Phi$, $X_\varepsilon(t)f \to X(t)f$ *dans* W.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que pour $t \geqslant 0$, on a

$$(2, 95) \qquad \|X_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}_b(H;\,H)} \leqslant e^{\xi_0 t}$$

ξ_0 étant positive et indépendante de ε.

Soit $R_\varepsilon(p)$, $p = \xi + i\eta$ le résolvant de $X_\varepsilon(t)$. Soit f donnée dans H. Alors $u_\varepsilon = R_\varepsilon(p)\, f$ est la solution dans N_ε de

$$B_\varepsilon u_\varepsilon + p u_\varepsilon = f$$

d'où l'on tire

$$\varepsilon a_0(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + b_0(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \xi |u_\varepsilon|^2 = Re(f, u_\varepsilon).$$

En tenant compte de (2, 92), on en déduit qu'il existe ξ_0, indépendant de ε tel que

$$\frac{|u_\varepsilon|}{|f|} \leqslant \frac{1}{\xi - \xi_0} \qquad \xi > \xi_0$$

d'où (2, 95) par application du théorème de Hille Yosida [63].

Il résulte de (2, 95) que, pour t donné, les $X_\varepsilon(t)$ forment un ensemble équicontinu de $\mathcal{L}(H; H)$. Pour démontrer le théorème 2. 16, il nous suffit donc de montrer que pour $f \in \Phi$, $X_\varepsilon(t)\, f \to X(t)\, f$ dans W.

Désormais, t est fixé et f est donnée dans Φ. Posons $u_\varepsilon(t) = X_\varepsilon(t)\, f$ et $u(t) = X(t)\, f$.

(61) Voir la démonstration dans Lions [1] p. 122.
(62) Il est facile de voir que $f \in \Phi$ entraîne $f \in N_A$ et $B_\varepsilon f = \varepsilon Af + Bf$, $\varepsilon \leqslant 1$.
(63) Voir Hille [1], Yosida [1] et Phillips [1].

Alors, sous les hypothèses (2, 91), (2, 92) et (2, 93) et si Af et Bf sont dans Φ (resp. (2, 91), (2, 92), (2, 93) et (2, 94) et si Af et Bf sont dans V) $u_\varepsilon(t)$ est la [64] fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans V (resp. continue de $t \geqslant 0$ dans V, une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H) solution de

$$(2,96)\quad B_\varepsilon u_\varepsilon(t) + Du_\varepsilon(t) = 0; \qquad u_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u_\varepsilon(0) = f$$

et $u(t)$ est la fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $\overline{V}_{(W)}$ (resp. continue de $t \geqslant 0$ dans $\overline{V}_{(W)}$, une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans H) solution de

$$(2,97)\quad Bu(t) + Du(t) = 0; \qquad u(t) \in N_B \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$
$$u(0) = f.$$

Posons $U_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t) - f$, et $U(t) = u(t) - f$.

Alors $U_\varepsilon(t)$ (resp. $U(t)$) est solution de

$$(\varepsilon A + B)\, U_\varepsilon(t) + DU_\varepsilon(t) = -(\varepsilon A + B)\, f = h_\varepsilon; \quad U_\varepsilon(t) \in N_\varepsilon$$

pour $t \geqslant 0$.

$$U_\varepsilon(0) = 0.$$

(resp.

$BU(t) + DU(t) = -Bf = h$; $U(t) \in N_B$ pour $t \geqslant 0$ $U(0)=0$).

Le théorème 2. 16 résulte donc des théorèmes 2. 8 et 2. 9 (les démonstrations de ceux-ci se simplifiant dans ce cas particulier où les formes sont indépendantes du temps, cf. p. 70) et des lemmes 2, 5 et 2, 7.

Exemples. — On prend un ouvert Ω de R^n, de frontière Γ régulière. On désigne par x, la variable dans R^n.

1° On prend $H = L^2(\Omega)$, $W = H^1(\Omega)$ et

$$b(u, v) = ((u, v))_1 + (u, v)_0 \text{ qui définit } -\Delta + 1.$$

On désigne par $\mathcal{V}$, l'espace défini au chapitre I, n° 3, des $u \in L^2(\Omega)$ tels que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, muni de la norme $(|u|_0^2 + |\Delta u|_0^2)^{1/2}$. On prend sur $\mathcal{V}$

$$b(\varepsilon; u, v) = \varepsilon(\Delta u, \Delta v)_0 - \varepsilon^2\,((u, v))_1 + ((u, v))_1 + (u, v)_0$$

qui définit $\varepsilon\Delta^2 + (\varepsilon^2 - 1)\Delta + 1$.

[64] Cf. théorème 2. 7.

Exemple 2. 3. — Prenons $V = H_0^2(\Omega)$. Alors $\overline{V}_{(W)} = H_0^1(\Omega)$.

Soit $t \to h(x, t)$ une fonction une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$, avec $h(x, 0) \in H_0^2(\Omega)$, (*i.e.* $h(x, 0)|_\Gamma = 0$ et $\left(\frac{\partial}{\partial\nu} h(x, 0)\right)_\Gamma = 0$.

Soit $u_\varepsilon(x, t)$ (resp. $u(x, t)$) la solution de

$$\varepsilon\Delta^2 u_\varepsilon(x, t) + (\varepsilon^2 - 1)\Delta u(x, t) + u_\varepsilon(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, t) = h(x, t)$$

avec les conditions aux limites :

$$u_\varepsilon(x, t)|_\Gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} u_\varepsilon(x, t)\right)_\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 0$$

et les conditions initiales :

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0$$

$$\text{(resp.} \qquad -\Delta u(x, t) + u(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = h(x, t)$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, t)|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = 0).$$

Alors, d'après le théorème 2. 5, $u_\varepsilon(x, t)$ (resp. $u(x, t)$) est une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $H_0^2(\Omega)$ (resp. $H_0^1(\Omega)$) et, d'après le théorème 2. 8, pour chaque $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(x, t) \to u(x, t)$ dans $H^1(\Omega)$, et $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, t) \to \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$ dans $L^2(\Omega)$ faible.

Exemple 2. 4. — On prend $V = \mathfrak{V}$ donc $\overline{V}_{(W)} = H^1(\Omega)$.

Soit $t \to h(x, t)$ une fonction deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$ avec, $h(x, 0) \in \mathfrak{V}$.

Soit $u_\varepsilon(x, t)$ la solution de

$$\varepsilon\Delta^2 u(x, t) + (\varepsilon^2 - 1)\Delta u(x, t) + u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varepsilon(x, t) = h(x, t)$$

avec les conditions aux limites pour tout $t \geqslant 0$

$$u_\varepsilon(x, t) \in N_\varepsilon \ \textit{i.e.} \ \left\{\frac{\partial}{\partial\nu}(\varepsilon\Delta u_\varepsilon(x, t) + (\varepsilon^2 - 1)u_\varepsilon(x, t))\right\}_\Gamma = 0$$

et $$u_\varepsilon(x, t)|_\Gamma = 0$$

et les conditions initiales :

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, 0) = 0.$$

Soit $u(x, t)$ la solution de

$$-\Delta u(x, t) + u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = h\ (x, t)$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, t) \in N_B \ i.e. \left(\frac{\partial}{\partial \nu} u(x, t)\right)_\Gamma = 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0.$$

Alors $u_\varepsilon(x, t)$ (resp. $u(x, t)$) est une fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $\mathfrak{V}$ (resp. $H^1\ (\Omega)$) deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$, et d'après le théorème 2. 11, pour chaque $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon(x, t) \to u(x, t)$ dans $H^1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x, t) \to \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)\ (^{65}).$$

2° Nous supposons toujours la frontière de Γ régulière. Nous prenons $H = L^2(\Omega)$ puis $W = H^{m'}(\Omega)$. Soit, sur $H^{m'}(\Omega)$

$$b(t;\ u,\ \nu) = \sum_{|p|,\,|q| \leqslant m'} \int_\Omega b_{pq}(x,\ t) D_x^q u(x) \overline{D_x^p\ \ \nu(x)}\, dx$$

où $t \to b_{pq}(x, t)$ est pour $|p|$, $|q| \leqslant m'$, une application de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$, trois fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ muni de la topologie faible de dual de $L^1(\Omega)$.

Nous supposons

$$b(t;\ u,\ \nu) = \overline{b(t;\ \nu,\ u)} \quad \text{pour } u,\ \nu \in H^{m'}(\Omega)$$

et :

pour tout $c > 0$, il existe des constantes $\lambda(c) = \lambda$ et $\gamma(c) = \gamma > 0$, telles que, pour tout $u, \nu \in H^{m'}$ et tout $t \in (0, c)$ on ait :

$$b(t;\ u,\ u) + \lambda |u|_0^2 \geqslant \gamma \|u\|_{m'}^2.$$

(65) Cf. exemple 2. 2.

Nous considérons d'autre part, sur $H^m(\Omega)$, $m > m'$,

$$a(t;\ u,\ v) = \sum_{|p|,|q|\leqslant m} \int_\Omega a_{pq}(x,\ t)\ D_x^q u(x)\overline{D^p v(x)}\ dx$$

où $t \to a_{pq}(x,\ t)$ est une application de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$, trois fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ muni de la topologie faible de dual de $L^1(\Omega)$.

Nous supposons : $a(t; u, v) = \overline{a(t; v, u)}$ pour tout $u, v \in H^m(\Omega)$ et, Pour tout $c > 0$, il existe des constantes $\mu(c) =$ et $\alpha(c) = \alpha > 0$ telles que

$$a(t;\ u,\ u) + b(t;\ u,\ u) + \mu|u|_0^2 \geqslant \alpha\|u\|_m^2$$

pour tout u, $v \in H^m(\Omega)$, et tout $t \in (o,\ c)$.

Il en résulte que $\varepsilon a(t,\ u,\ v) + b(t;\ u,\ v)$ vérifie (2, 28), sur $H^m(\Omega)$, pour $\varepsilon \leqslant 1$.

Soit $t \to h(x,\ t)$ une fonction deux fois continûment différentiable de $t \geqslant 0$ dans $L^2(\Omega)$, avec $h(x,\ 0) \in H^m(\Omega)$.

Nous prenons pour V des sous-espaces V_i de $H^m(\Omega)$. En supposant $h(x,\ 0) \in V_i$, soit $u_\varepsilon^i(x,\ t)$ la solution dans V_i de

$$\varepsilon \sum_{|p||q|\leqslant m} (-1)^{|p|} D_x^p(a_{pq}(x,\ t) D_x^q u_\varepsilon^i(x,\ t))$$
$$+ \sum_{|p||q|\leqslant m'} (-1)^{|p|} D_x^p(b_{pq}(x,\ t) D_x^q u_\varepsilon^i(x,\ t)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varepsilon^i(x,\ t) = h(x,\ t).$$

avec les conditions aux limites :

$$u_\varepsilon^i(x,\ t) \in N_\varepsilon^i(t) \quad \text{pour tout } t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u_\varepsilon^i(x,\ 0) = \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^i(x,\ 0) = 0.$$

et soit $u^i(x,\ t)$ la solution dans $\overline{V}_{i(W)}$ de

$$\sum_{|p|,|q|\leqslant m'} (-1)^{|p|} D_x^p(b_{pq}(x,\ t) D_x^q u^i(x,\ t)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^i(x,\ t) = h(x,\ t)$$

avec les conditions aux limites :

$$u^i(x,\ t) \in N_B^i(t) \text{ pour tout } t \geqslant 0$$

et les conditions initiales

$$u^i(x,\ 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,\ 0) = 0.$$

Nous sommes dans les conditions d'applications du théorème 2. 12, donc, pour chaque $t \geqslant 0$, $u_\varepsilon^i(x, t) \to u^i(x, t)$ dans $H^{m'}(\Omega)$, et $\frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^i(x, t) \to \frac{\partial}{\partial t} u^i(x, t)$ dans $L^2(\Omega)$. De plus $\varepsilon^{1/2} u_\varepsilon^i(x, t) \to 0$ dans $H^m(\Omega)$.

Il nous reste à expliciter, dans quelques exemples, les conditions aux limites.

Exemple 2. 5. — On prend $V_1 = H_0^m(\Omega)$ donc, $\overline{V}_{1(W)} = H_0^{m'}(\Omega)$. Les conditions aux limites sont pour $u_\varepsilon^1(x, t)$ et pour $u^1(x, t)$ les conditions de Diritchlet, *i.e.*, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p} u_\varepsilon^1(x, t)\Big|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1$$

et

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p} u^1(x, t)\Big|_\Gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 0, 1, \ldots, m'-1.$$

Exemple 2. 6. — On prend $V_2 = H^m(\Omega)$, donc $\overline{V}_{2(W)} = H^{m'}(\Omega)$. Les conditions aux limites sont pour $u_\varepsilon^2(x, t)$ et $u^2(x, t)$ les conditions de Neumann, qui se traduisent, pour $t \geqslant 0$, par des conditions de la forme [66]

$$(\varepsilon S_k(t) + T_k(t)) u_\varepsilon^2(x, t)\,|_\Gamma = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, m'-1$$
$$S_k(t) u_\varepsilon^2(x, t)\,|_\Gamma = 0 \quad \text{pour } k = m', m'+1, \ldots m-1$$

et

$$T_k(t) u^2(x, t)\,|_\Gamma = 0 \quad \text{pour } k = 0, \ldots, m'-1.$$

On pourrait aussi considérer des problèmes de Dirichlet-Neumann mêlés, ou des problèmes de dérivées obliques. Voir exemples 1. 8 et 1. 9.

Remarquons enfin que les résultats du n° 3 sont valables pour des problèmes mixtes, relatifs à des systèmes différentiels.

(66) Cf. exemple 1-7.

BIBLIOGRAPHIE

Bourbaki.

[1] Espaces vectoriels topologiques, livre V, Hermann, Paris.

Browder.

[1] On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 9, 1956, pp. 351-361.

Courant Hilbert.

[1] *Methods of mathematical physics.*

Faedo.

[1] Un nouvo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione, *Annali della scuola Norm. Sup. Pisa*, I, 1949, pp. 1-40.

Friedrichs.

[1] On the differentiability of the solutions of linear elliptic equations, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 6, 1953, pp. 299-326.

[2] Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Amer. Math Soc.*, 61, 6, 1955, pp. 485-504.

Garding.

[1] Dirichlet problem for linear elliptic differential equations *Math. Scand.*, 1, 1953, pp. 55-72.

Glasko.

[1] Dokladi, 1956, 108, nº 5.

Hille.

[1] Functional analysis and semi-groups, *Amer. Math. Soc. Coll. Publi.* XXXI, New-York, 1948.

Huet D..

[1] Phénomènes de perturbation singulière, *Comptes rendus Acad. Sc.* Paris, t. 244, 1957, pp. 1438-1440; t. 246, 1958, pp. 2096-2098; t. 247, 1958, pp. 2273-2276,; *t.* 248, 1959, pp. 58-60.

[2] Perturbations singulières d'opérateurs elliptiques, *Séminaire Lelong*, 1958-1959, Paris, pp. 13-01, 13-07.

Kato.

[1] Perturbation theory of semi-bounded operators. *Math. Annalen*, 125, 1953, pp. 435-447.

Kostomarov.

[1] Dokladi, 1957, 115, nº 2.

Lions.

[1] Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta Math.*, t. 94, 1955, pp. 13-153.

[2] Sur les problèmes aux limites de dérivées obliques, *Annals of Math.*, t. 64, 1956, pp. 207-239.

[3] On elliptis partial differential equations, cours professé à Bombay 1957.
[4] Sur quelques problèmes aux limites, *Bull. Sic. Math. de France*, t. 83, 1955.
[5] Problèmes aux limites de type mixte, *Coll. sur les équations aux dérivées partielles*, Bruxelles 1954, pp. 25-36.
[6] Boundary value problems, *Technical reports*, Lawrence, Kansas, 1957.
[7] Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 84, 1956, pp. 10-95.

LIONS-SCHWARTZ
[1] Pb aux limites sur des espaces fibrés. *Acta Math.*, t. 94, pp. 143-147.

MORGENSTERN.
[1] Singuläre Störungtheorie partieller Differentialgleichungen, *Jour. Rat. mech. and Anal.* 5, 1956, pp. 204-216.

MOSER.
[1] Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equations of even order, *Comm. Pure and appl. Math.*, 8, 1955, pp. 251-278.

NIRENBERG.
[1] Remarks on strongly elliptic partial diff. Equations, *Comm. Pure and applied Math.*, t. 8, 1955, pp. 641-675.

PHILLIPS.
[1] Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. of the amer. Math. Soc.*, 74, nº 2, 1953, pp. 199-221.

SCHWARTZ.
[1] *Théorie des distributions*, tome I, et II, Hermann, Paris.
[2] *Séminaire*, Paris, 1954-1955.
[3] *Séminaire*, Paris, 1955-1956.
[4] Théorie des Noyaux, à paraître.
[5] Ecuaciones diferenciales parciales elipticas, Bogota, 1956.
[6] *Séminaire*, Paris, 1958-1959.
[7] Transformation de Laplace des distributions, Lund, tome Supp. 1952.
[8] Lectures on mixed problems in partial differential equations and representations of semi-groups, Bombay, 1958.
[9] Distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier*, 1957.

TRÈVES.
[1] Relations de domination entre opérateurs différentiels, *Acta Math.*, 101, 1-2, 1959, p. 1.

VISIK.
[1] Le problème de Cauchy avec des opérateurs comme coefficients, ..., *Math. Sbornik*, 39, 1956, pp. 51-148.

VISIK LADYSENSKAYA.
[1] Problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles.. *Ouspeki. Math. Naouk*, XI, 1956, pp. 41-97.

VISIK-LIOUSTERNIK.
[1] Dégénérescence régulière pour les équations différentielles linéaires, avec un petit paramètre, *Ouspeki Mat. Naouk*, XII, 1957, pp. 1-121.

YOSIDA.
[1] On the differentiability and the représentation of one parameter semi-group of linear operators, *Journ. of the Math. Soc. of Japan*, 1948, 1, pp. 15-21.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1959).