ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOISE DEMENGEL

Fonctions à hessien borné

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 155-190

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_155_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984). 155-190.

FONCTIONS A HESSIEN BORNE

par Françoise DEMENGEL

Cet article a pour objet d'établir quelques propriétés de l'espace des fonctions dont le hessien est une mesure bornée. Cet espace est l'espace naturel pour certains problèmes de mécanique. Il permet de résoudre des problèmes parfaitement plastiques en dimension deux, pour le modèle de Hencky (problème de plaques). Nous renvoyons à [2], [3] pour l'étude des solutions dans l'espace HB du déplacement orthogonal au plan d'une plaque à comportement parfaitement plastique du type de Hencky. Remarquons que cette étude nécessite nombre de résultats énoncés ici. La première partie de l'article présent concerne des propriétés topologiques de l'espace HB. On y montre, entre autres, la compacité relative des bornés de $HB(\Omega)$, pour une topologie dite faible ; on y introduit une topologie intermédiaire entre la topologie faible et la forte, qui sera très utile pour les théorèmes de trace : les traces sont étudiées au paragraphe 2, et nous permettent de donner des théorèmes de prolongement d'une fonction de $HB(\Omega)$ en une fonction de $HB(\mathbf{R}^n)$ à support compact dans $\mathbf{R}^n$. Au paragraphe 3, on donne les théorèmes d'injection de type Sobolev. En particulier $HB(\Omega)$ est pour $n = 2$ inclus avec injection continue dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$. Remarquons que ce résultat permet de justifier la déformation plastique d'une plaque soumise à une charge ponctuelle, puisque celle-ci est représentable par une mesure de Dirac, qui appartient au dual de $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$. Nous renvoyons à [2], [3] pour plus de précisions sur ce point et pour les questions d'existence de solutions des problèmes variationnels des plaques.

Notations.

Dans ce qui suit on désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$ et connexe.

• Dans la plupart des propriétés énoncées, on suppose que Ω a la propriété de cône (cf. Adams [1]); dans d'autres – notamment pour le théorème de continuité – on suppose que Ω est C^2 régulier uniforme, ce qui est évidemment plus fort.

On désigne par $L^p(\Omega)$ (resp. $\mathbf{L}^p(\Omega)$) l'espace des classes de fonctions à valeurs réelles (respectivement à valeurs dans $\mathbf{R}^n$), de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable sur Ω; on désigne par $\mathcal{M}_b(\Omega)$, (resp. $\mathcal{M}_b(\Omega,\mathbf{R}^n)$, resp. $\mathcal{M}_b(\Omega,E)$, l'espace des mesures bornées sur Ω à valeurs réelles, (resp. à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, resp. à valeurs dans l'espace E des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbf{R}^n$). $\mathscr{P}_1(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω à dérivées secondes nulles sur Ω. On note indifféremment $|\ |_p$ la norme sur $L^p(\Omega)$ ou $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $|\ |_T$ la variation totale d'un élément de $\mathcal{M}_b(\Omega)$ ou de $\mathcal{M}_b(\Omega,E)$.

On rappelle maintenant la définition des espaces de Sobolev :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u/D^\alpha u \in L^p(\Omega), [\alpha] \leqslant m\}$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{N}^n \quad \text{èt} \quad [\alpha] = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

les dérivées étant prises au sens des distributions, et on note $\|\ \|_{m,p}$ la norme sur $W^{m,p}$, définie par

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0\leqslant[\alpha]\leqslant m} |D^\alpha u|_p,$$

et qui en fait un espace de Banach.

On rappelle aussi la définition des espaces $BV(\Omega)$ (resp. $BD(\Omega)$) utilisés en calcul des variations et en plasticité, étudiés par Giusti [6], Miranda [7], (resp. Strang-Teman [13], Suquet [14]) :

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega), \nabla u \in \mathcal{M}_b(\Omega,\mathbf{R}^n)\},$$

$$BD(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathbf{L}^1(\Omega), \varepsilon(\vec{u}) \in \mathcal{M}_b(\Omega,E)\},$$

où $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$.

On introduit maintenant l'espace des fonctions à hessien borné, noté :

$$\mathrm{HB}(\Omega) = \{u \in \mathrm{W}^{1,1}(\Omega),\ \nabla\nabla u \in \mathcal{M}_b(\Omega,\mathrm{E})\}$$

et que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{\mathrm{HB}} = |u|_1 + |\nabla u|_1 + |\nabla\nabla u|_{\mathrm{T}}.$$

Remarque. — Lorsque Ω possède la propriété de cône il est aisé de voir que :

$$\mathrm{HB}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \nabla\nabla u \in \mathcal{M}_b(\Omega,\mathrm{E})\}.$$

Ce résultat est conséquence directe du résultat de Deny-Lions [5] :

$$\mathrm{W}^{1,1}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \nabla u \in \mathrm{L}^1(\Omega)\},$$

joint au résultat de Strang-Teman [13] :

$$\mathrm{BD}(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \varepsilon(u) \in \mathcal{M}^b(\Omega,\mathbf{R}^n)\}.$$

Citons un exemple de fonction de $\mathrm{HB}(\Omega)$ en dimension 2, qui présente un intérêt pour l'étude de la déformation d'une plaque élastoplastique à géométrie simple soumise à une charge concentrée au centre :

Exemple. — Un repère orthonormé de $\mathbf{R}^2$ étant choisi, Ω est le carré $]-1,+1[\times]-1,+1[$, et u est la fonction définie par

$$u(x,y) = (1-|y|)\mathbf{1}_{\{|y|<1,\,|x|\leqslant|y|\}} + (1-|x|)\mathbf{1}_{\{|x|<1,\,|y|<|x|\}}$$

($\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ désigne la fonction caractéristique du borélien A).

Les calculs des dérivées secondes de u donnent :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\delta_{\{|y|\leqslant 1,x=|y|\}} - \delta_{\{|y|<1,x=-|y|\}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \delta_{\{|x|\leqslant 1,y=x\}} - \delta_{\{|x|<1,y=-x\}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\delta_{\{|x|<1,y=|x|\}} - \delta_{\{|x|\leqslant 1,y=-|x|\}}$$

(où $\delta_{\mathscr{C}}$ désigne la mesure de Dirac distribuée sur la courbe $\mathscr{C}$).

La figure 1 ci-dessous représente le graphe de $-u$. Il donne une idée de la déformation géométrique d'une plaque plastique carrée encastrée et soumise à une charge centrale.

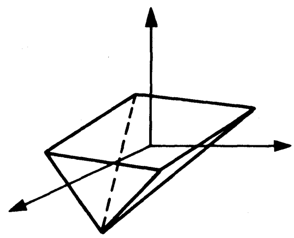


Fig. 1.

1. Premières propriétés de l'espace $HB(\Omega)$.

Nous commençons par énoncer une caractérisation des distributions à valeurs dans E, qui sont elles-mêmes le hessien d'une distribution scalaire. Il s'agit d'un analogue de la caractérisation des distributions qui sont des gradients (cf. De Rham [10], Schwartz [12], Teman [15]) et des distributions qui sont des déformations (cf. Moreau [9]).

La remarque qui suit la Proposition 1.1 suggère une première application non évidente du résultat obtenu.

Proposition 1.1. — *Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$ (non nécessairement borné) et E l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur $\mathbf{R}^n$. Soit $G \in \mathscr{D}'(\Omega,E)$ de composantes $g_{ij} \in \mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R})$ relativement à une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$. Les propriétés i) et ii) sont équivalentes :*

i) Il existe $u \in \mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R})$ telle que

$$g_{ij} = u_{,ij} \text{ (ou encore } G = \nabla\nabla u);$$

ii) $\forall M \in \mathscr{D}(\Omega,E)$, *telle que* $M_{ij,ij} = 0$ (encore noté $\nabla.\nabla.M = 0$)

$$\langle g_{ij},M_{ij}\rangle = 0 \quad (\text{ou encore } \langle G : M\rangle = 0).$$

Remarque 1.1. — Lorsque Ω a la propriété de cône, l'implication ii) $\Rightarrow$ i), jointe à Deny-Lions [4] (pour $p \geqslant 1$) permet d'établir que l'opérateur $\nabla\nabla$:

$$\begin{aligned}\nabla\nabla : \mathrm{W}^{2,p} &\to \mathrm{L}^p(\Omega,\mathrm{E})\\ u &\mapsto \nabla\nabla u,\end{aligned}$$

a une image faible-étoile fermée.

Démonstration de la Proposition 1.1 — Il est immédiat que i) entraîne ii) et on démontre donc la réciproque. Rappelons à cet effet le résultat suivant ([10], [12], [15])

Soit $\vec{\mathrm{V}} \in \mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R}^n)$; les propositions *a*) et *b*) sont équivalentes :

(1.1) *a*) $\exists u \in \mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R}),\, v = \nabla u$

b) $\forall \vec{w} \in \mathscr{D}(\Omega,\mathbf{R}^n)$ tel que $\nabla . \vec{w} = 0$, alors $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$

qui sera utilisé à deux reprises au cours de la démonstration de ii) $\Rightarrow$ i). Remarquons tout d'abord que si ii) est vraie, elle l'est aussi pour tout M tenseur non nécessairement symétrique, vérifiant $\mathrm{M}_{ij,ij} = 0$. En effet soit alors le tenseur symétrique $\mathrm{K}_{ij} = \dfrac{\mathrm{M}_{ij} + \mathrm{M}_{ji}}{2}\cdot$ Il est aisé de voir en utilisant le théorème de Schwarz sur la symétrie de la différentielle seconde que K_{ij} vérifie aussi

$$\mathrm{K}_{ij,ij} = 0\,.$$

L'application de ii) donne donc :

$$\langle g_{ij}, \mathrm{K}_{ij}\rangle = 0\,,$$

ce qui entraîne, compte tenu de la symétrie de G :

$$\langle g_{ij}, \mathrm{M}_{ij}\rangle = 0\,.$$

Cette observation faite, soit $\vec{v}$ de $\mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R}^n)$ de composantes $v_i = g_{1i}$, et soit $\vec{w}$ un élément de $\mathscr{D}(\Omega,\mathbf{R}^n)$, tel que $\nabla . \vec{w} = 0$. L'élément M de $\mathscr{D}(\Omega,\mathrm{E})$ de composantes $\mathrm{M}_{ij} = w_i\,\delta_{1j}$ vérifie $\mathrm{M}_{ij,ij} = 0$, donc

$$\langle g_{ij} : \mathrm{M}_{ij}\rangle = 0\,, \quad \text{ce qui s'écrit aussi } \langle \vec{w} \,.\, \vec{v}\rangle = 0\,.$$

Il existe alors, grâce à (1.1) un élément u_1 de $\mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R})$, tel que $g_{1i} = u_{1,i}$. De même il existe $u_k \in \mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R})$, tel que :

$$g_{ki} = u_{k,i},$$

pour $k = 2 \dots n$. De la symétrie de G on déduit que :

$$(1.2) \qquad u_{i,j} = u_{j,i} \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots n \\ j = 1, 2 \dots n. \end{array}$$

Il reste à montrer que $\vec{u}$ est lui-même gradient d'une distribution scalaire u. On remarque pour cela que :

$$(1.3) \qquad u_i = (u_j x_j)_{,i} - x_j u_{j,i},$$

et il suffit de montrer que l'élément de $\mathscr{D}'(\Omega,\mathbf{R}^n)$, de composantes $x_j u_{j,i}$ est un gradient. On utilise à nouveau (1.1), soit donc $\vec{h}$ dans $\mathscr{D}(\Omega,\mathbf{R}^n)$ tel que

$$(1.4) \qquad h_{i,i} = 0.$$

Par définition de la distribution $x_j u_{j,i}$, on a :

$$\langle x_j u_{j,i}, h_i \rangle = - \langle u_{j,i}, h_i x_j \rangle.$$

Mais alors :

$$(h_i x_j)_{,i} = \delta_{ij} h_i + h_{i,i} x_j = \delta_{ij} h_i \quad \text{compte tenu de (1.4)}$$

et

$$(h_i x_j)_{,ij} = h_{j,ji} = 0.$$

L'utilisation de ii) avec $M_{ij} = h_i x_j$ (non symétrique), jointe au fait que $u_{j,i} = g_{ij}$ donne finalement :

$$\langle (x_j u_{j,i}), h_i \rangle = \langle u_{j,i}, (h_i x_j) \rangle = 0.$$

Ceci entraîne d'après (1.1) que $x_j u_{j,i}$ est un gradient. On en déduit que u_i est un gradient en utilisant (1.3). Ceci termine la démonstration en utilisant $g_{ki} = u_{k,i}$. □

Remarque 1.2. — Lorsque Ω est simplement connexe on peut remarquer que i) et ii) sont équivalents à

$$\text{iii)} \qquad g_{ij,k} = g_{ik,j}, \quad \forall (i,j,k).$$

Proposition 1.2. — *On suppose que* Ω *possède la propriété de cône. Sur le quotient* $HB(\Omega)/\mathscr{P}_1$, *la variation totale du hessien* $|\nabla\nabla u|_T$ *est une norme équivalente à la norme quotient induite par* $HB(\Omega)$.

Démonstration. — 1) $|\nabla\nabla u|_T$ définit bien une norme sur $HB(\Omega)/\mathscr{P}_1(\Omega)$. En effet si $\nabla\nabla u = 0$ alors u est dans $\mathscr{P}_1(\Omega)$, donc $u = 0$ dans $HB(\Omega)/\mathscr{P}_1$. Par le théorème de Banach, l'équivalence des normes proposées résultera de la complétude de $HB/\mathscr{P}_1$ muni de la norme $|\nabla\nabla u|_T$. Supposons donc u_n dans $HB(\Omega)$ telle que son image par la projection canonique de $HB/\mathscr{P}_1$ soit de Cauchy pour cette norme. Alors $\nabla\nabla u_n$ converge dans $\mathscr{M}_b(\Omega,E)$ vers une limite G qui est une mesure bornée sur Ω. La Proposition 1.1 permet d'affirmer que G est le hessien d'une distribution scalaire u. En effet soit M dans $\mathscr{D}(\Omega,E)$ telle que $M_{ij,ij} = 0$, alors

$$\begin{aligned}\langle G : M\rangle &= \lim \langle \nabla\nabla u_n : M\rangle \\ &= \lim \langle u_n\, \nabla.\nabla.M\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Il résulte de la Remarque faite dans l'Introduction que $u \in HB(\Omega)$. Alors $|\nabla\nabla(u_n - u)|_T$ tend vers 0, $\bar{u}_n$ converge vers $\bar{u}$ dans $HB(\Omega)/\mathscr{P}_1$, et $HB(\Omega)/\mathscr{P}_1$ est bien complet.

La Proposition 1.3 qui suit précise et explicite la précédente :

Proposition 1.3. — i) *Il existe* $c > 0$, *ne dépendant que de* Ω *et tel que pour tout* u *dans* $HB(\Omega)$, *il existe* $p = p(u)$ *dans* $\mathscr{P}_1$, *avec*

$$\|u - p\|_{HB} \leqslant |\nabla\nabla u|_T.$$

ii) *si* m *est une semi-norme continue sur* $HB(\Omega)$ *et une norme sur* $\mathscr{P}_1$, *alors*

$$m(u) + |\nabla\nabla u|_T \tag{1.5}$$

est une norme sur $HB(\Omega)$, *équivalente à la norme originelle.*

Démonstration. — i) La définition de la norme quotient, jointe à la Proposition 1.2 donne :

$$\inf_{p\in\mathscr{P}_1} \|u - p\| = \|u\|_{HB(\Omega)/\mathscr{P}_1} \leqslant c|\nabla\nabla u|_T$$

avec c une constante > 0 ne dépendant pas de u. $\mathscr{P}_1$ étant de dimension finie, l'infimum à gauche est atteint en un p au moins de $\mathscr{P}_1$ ce qui termine la démonstration de i).

ii) (1.5) définit clairement une norme sur $HB(\Omega)$ et si u_n converge vers u pour $HB(\Omega)$, u_n converge vers u pour (1.5). Inversement si u_n converge vers u pour (1.5), $|\nabla\nabla(u_n-u)|_T$ et $m(u_n-u)$ tendent vers 0. Par i) il existe donc p_n dans $\mathscr{P}_1$, tel que $\|u_n-p_n-u\|_{HB}$ tend vers 0; puisque $m(u_n-u)$ tend vers 0 et m est continue $m(p_n)$ tend vers 0, donc p_n tend vers 0, et u_n converge vers u dans $HB(\Omega)$. L'équivalence des normes est ainsi établie. □

Remarque 1.3. — Plus précisément, on peut trouver une semi-norme m vérifiant : pour u dans $HB(\Omega)$, il existe $p(u)$ dans $\mathscr{P}_1$, vérifiant $m(u-p(u)) = 0$. La semi-norme suivante convient :

$$m(u) = \sum_{i=1}^{n} \left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \left|\int_\Omega u\right| \tag{1.6}$$

avec

$$p(u) = \frac{1}{\text{mes}\,\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,x_i + \int_\Omega u - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\text{mes}\,\Omega}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\int_\Omega x_i\right]. \tag{1.7}$$

□

En dehors de la topologie associée à la norme sur $HB(\Omega)$, il est naturel de définir la topologie faible — définie par la famille de normes :

$$e(u_1, u_2, v) = |u_1-u_2|_1 + |\langle\nabla\nabla u_1 - \nabla\nabla u_2, v\rangle|, \quad v \in \mathscr{C}_0(\Omega,E), \tag{1.8}$$

ainsi qu'une topologie intermédiaire entre les deux précédentes, qui présente de nombreux avantages que l'on verra par la suite. Pour la définir, on suppose donnée une fonction convexe h de E dans $\mathbf{R}$, qui vérifie :

$$h(0) = 0 \tag{1.9}$$

$$h \geqslant 0; \tag{1.10}$$

$\exists k_1, k_2$ deux réels positifs, tels que

$$(k_1(|x|-1)) \leqslant h(x) \leqslant k_2(|x|+1), \quad \text{pour} \quad k = 1 \dots p. \tag{1.11}$$

Lorsque h est une fonction convexe vérifiant les inégalités du type (1.9) → (1.11), l'étude faite dans [4] montre qu'il est possible de définir une mesure bornée $h(\mu)$ lorsque μ est un élément de $\mathscr{M}_b(\Omega,E)$. Nous renvoyons à la référence précitée pour les propriétés de cette mesure et nous pouvons maintenant définir les distances d_h qui définissent la topologie annoncée. Il s'agit de

$$(1.12)\quad d_h(u_1,u_2) = |u_1-u_2|_1 + \left|\,|h(\nabla\nabla u_1)|_T - |h(\nabla\nabla u_2)|_T\right|.$$

On dira que u_n converge vers u dans HB_h, lorsque $d_h(u_n,u)$ tend vers 0. Lorsque h est la fonction $h(\mu) = |\mu|$, on note HB_T la topologie définie par la distance :

$$d(u_1,u_2) = |u_1-u_2|_1 + \left|\,|\nabla\nabla u_1|_T - |\nabla\nabla u_2|_T\right|.$$

La Proposition 1.4 qui suit est un cas particulier du Théorème 2.2 démontré dans Demengel-Temam [4], avec $S = \nabla\nabla$.

PROPOSITION 1.4. — *On suppose que* Ω *est* C^2 *régulier uniforme. Pour tout* u *dans* $HB(\Omega)$, *il existe une suite* $u_m \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega)$ *qui vérifie*

$$u_m \text{ converge vers } u \text{ dans } HB_h,$$

et pour tout n : $(u_m-u) \in \overline{HB_0}$ (1).

Démonstration. — i) On va exhiber pour tout $\delta > 0$, un élément u_δ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} |u_\delta - u|_1 &\leqslant \delta \\ |\nabla u_\delta - \nabla u|_1 &\leqslant \delta \\ \left|\,|\nabla\nabla u_\delta|_T - |\nabla\nabla u|_T\right| &\leqslant 4\,\delta \\ \left|\,|h(\nabla\nabla u_\delta)|_T - |(h(\nabla\nabla u))|_T\right| &\leqslant c\,\delta. \end{aligned}$$

ii) On choisit $r > 0$ tel que l'ensemble Ω_0 défini par :

$$(1.13)\qquad \Omega_0 = \left\{x \in \Omega,\ d(x,\partial\Omega) > \frac{1}{r}\right\}$$

vérifie

$$(1.14)\qquad \int_{\partial\Omega_0} |\nabla\nabla u| = 0,$$

$$(1.15)\qquad \int_{\Omega\setminus\Omega_0} 1 \leqslant \delta$$

(1) $\overline{HB_0}$ désigne l'adhérence des éléments de HB à support compact, dans HB muni de la topologie forte.

et

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |\nabla\nabla u| \leqslant \delta. \tag{1.16}$$

Nous posons

$$\Omega_{-1} = \varnothing$$

et, pour tout entier $j \geqslant 0$:

$$\Omega_j = \left\{x \in \Omega,\, d(x,\partial\Omega) > \frac{1}{j+r}\right\}$$
$$A_j = \Omega_{j+1} - \overline{\Omega_{j-1}}, \quad j \geqslant 2$$
$$A_1 = \Omega_2 .$$

Soit $\{\varphi_j\}_{j>1}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de Ω par les A_j, et soit u_δ définie par :

$$u_\delta = \sum_1^\infty \rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j u \tag{1.17}$$

où les ε_j sont décroissants, tendent vers 0 lorsque $j \to +\infty$, et les fonctions régularisantes ρ_{ε_j} sont définies par

$$\rho_{\varepsilon_j}(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^n}\,\rho\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right), \qquad \rho \in \mathscr{D}(B(0,1)),$$

$\rho = 1$ au voisinage de 0. On impose aux ε_j, $j \geqslant 1$ d'être assez petits pour que :

$$\left|\int_\Omega |\rho_{\varepsilon_1} * (\varphi_1(\nabla\nabla u))| - |\varphi_1(\nabla\nabla u)|\right| \leqslant \delta; \tag{1.18}$$

$$\int_\Omega |\rho_{\varepsilon_j} * (u\varphi_j) - u\varphi_j| \leqslant \delta 2^{-j}; \tag{1.19}$$

$$\int_\Omega |\rho_{\varepsilon_j} * (\nabla\nabla(\varphi_j u) - \varphi_j(\nabla\nabla u)) - (\nabla\nabla(\varphi_j u) - \varphi_j(\nabla\nabla u))| \leqslant \delta 2^{-j}\ (^1). \tag{1.20}$$

(1) Remarquons que cela est possible car

$$\nabla\nabla(\varphi_j u) - \varphi_j\nabla\nabla u = \nabla\varphi_j \otimes \nabla u + \nabla u \otimes \nabla\varphi_j + u\nabla\nabla\varphi_j \in L^1(\Omega, E).$$

On impose enfin aux ε_j de vérifier

$$\Omega_2\backslash\bar{\Omega}_1 + B(0,\varepsilon_1) \subset \Omega_3\backslash\bar{\Omega}_0 \tag{1.21}$$
$$A_2 + B(0,\varepsilon_2) \subset \Omega_4 - \bar{\Omega}_1 \tag{1.22}$$
$$A_j + B(0,\varepsilon_j) \subset A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1}\,. \tag{1.23}$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} |u-u_\delta|_1 &= \left|\sum_1^\infty \varphi_j u - \rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j u\right|_1 \\ &\leqslant \sum_1^\infty |\varphi_j u - \rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j u|_1 \\ &\leqslant \sum_1^\infty \delta 2^{-j} \\ &\leqslant 2\,\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega (|\nabla\nabla u_\delta| - |\nabla\nabla u|)\right| \leqslant{}& \left|\int_\Omega |\rho_{\varepsilon_1} * \varphi_1 \nabla\nabla u| - |\varphi_1 \nabla\nabla u|\right| \\ &+ \int_\Omega \left|\sum_{j\geqslant 2} \rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j \nabla\nabla u + \sum_1^\infty \rho_{\varepsilon_j} * (\nabla\nabla(\varphi_j u) - (\nabla\nabla u)\varphi_j)\right| \\ &+ \left|\int_\Omega \sum_{j\geqslant 2} \varphi_j \nabla\nabla u\right|. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Puisque $\sum_1^\infty \varphi_n = 1$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\sum_1^\infty \rho_{\varepsilon_j} * (\nabla\nabla(\varphi_j u) - (\nabla\nabla u)\varphi_j)\right| = \int_\Omega \Bigg|\sum_1^\infty \rho_{\varepsilon_j} * (\nabla\nabla(\varphi_j u) \\ - (\nabla\nabla u)\varphi_j) - (\nabla\nabla(\varphi_j u) - (\nabla\nabla u)\varphi_j)\Bigg| \leqslant 2\,\delta \text{ par (1.20)}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\sum_{j\geqslant 2} \rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j(\nabla\nabla u)\right| &\leqslant \sum_{j\geqslant 2} \int_{\mathbf{R}^n} \rho_{\varepsilon_j} * |\varphi_j(\nabla\nabla u)| \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant 2} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_j |\nabla\nabla u| = \int_{\mathbf{R}^n} (1-\varphi_1)\,|\nabla\nabla u| \\ &\leqslant \int_{\Omega\backslash\Omega_0} |\nabla\nabla u| \\ &\leqslant \delta\,. \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\int_\Omega \left|\sum_{j\geqslant 2} \varphi_j(\nabla\nabla u)\right| \leqslant \sum_{j\geqslant 2} \int_\Omega \varphi_j |\nabla\nabla u| = \int (1-\varphi_1)\,|\nabla\nabla u| \leqslant \delta\,. \tag{1.27}$$

La conjonction de (1.25), (1.26) et (1.27) donne :

$$\big||\nabla\nabla u_\delta|_{\mathrm{T}} - |\nabla\nabla u|_{\mathrm{T}}\big| \leqslant 5\,\delta. \tag{1.28}$$

Pour montrer que

$$\left|\int_\Omega h(\nabla\nabla u_\delta) - h(\nabla\nabla u)\right| < 4\,\delta,$$

nous rappelons le lemme 2.2, démontré dans [4] :

Lemme. — *Soit* h *une fonction convexe vérifiant les hypothèses* (1.9), (1.10) *et* (1.11), *et* μ *une mesure bornée sur* $\mathbf{R}^n$ *à valeurs dans* E; ρ *une fonction de* $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $\rho(0) = 1$, $\rho_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\,\rho\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, *alors :*

$$h(\rho_\varepsilon * \mu) \text{ converge vers } h(\mu) \text{ étroitement,}$$

et que nous appliquons à la mesure $\varphi_1\nabla\nabla u$; puisque $\varphi_1\nabla\nabla u$ n'a pas de masse sur $\partial\Omega_0$, nous avons aussi :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_0} h(\rho_\varepsilon * (\varphi_1\nabla\nabla u)) = \int_{\Omega_0} h(\varphi_1\nabla\nabla u).$$

De sorte que l'on peut choisir ε_1 positif assez petit pour que

$$\left|\int_{\Omega_0} h(\rho_{\varepsilon_1} * (\varphi_1\nabla\nabla u)) - \int_{\Omega_0} h(\varphi_1\nabla\nabla u)\right| < \delta.$$

D'autre part la mesure $h(\mu)$ étant absolument continue par rapport à μ (cf. [4], Théorème 1.1), elle n'a pas de masse sur $\partial\Omega_0$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega h(\nabla\nabla u_\delta) - h(\nabla\nabla u)\right| &\leqslant \left|\int_{\Omega_0} h(\nabla\nabla u_\delta) - h(\nabla\nabla u)\right| \\ &\quad + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} h(\nabla\nabla u_\delta) + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} h(\nabla\nabla u) \leqslant \left|\int_{\Omega_0} h(\rho_{\varepsilon_1} * \varphi_1\nabla\nabla u) - h(\varphi_1\nabla\nabla u)\right| \\ &\quad + k_2\int_{\Omega\setminus\Omega_0} (|\nabla\nabla u_\delta| + |\nabla\nabla u| + 1) \quad (\text{car } h \text{ vérifie } (1.11)) \\ &\leqslant \delta(1 + 6k_2) \quad (\text{par } (1.14) \text{ et } (1.28)).\end{aligned}$$

iii) Soit $v = u_\delta - u$ et v^N la somme partielle

$$v^N = \sum_1^N \rho_{\varepsilon_j} * (\varphi_j u) - \varphi_j u\,;$$

v^N est à support compact dans Ω. Il s'agit de montrer que pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir N_1 assez grand pour que $N \geqslant N_1$

$$|v^N - v|_1 \leqslant \varepsilon$$
$$\int_\Omega |\nabla\nabla(v^N - v)| \leqslant \varepsilon\,.$$

La première inégalité est aisée à montrer :

$$|v^N - v| = \left|\sum_{N+2}^{\infty} \rho_{\varepsilon_j} * (\varphi_j u) - \varphi_j u\right| \leqslant \delta 2^{-N},$$

qui est arbitrairement petit lorsque N est grand (δ est fixé). On choisit d'autre part N assez grand pour que

$$\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega_{N-3}}} |\nabla\nabla u| < \varepsilon \tag{1.30}$$
$$\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega_{N-1}}} |\nabla\nabla v| < \varepsilon\,.$$

Remarquant que $v_N = v$ sur $\overline{\Omega_{N-1}}$, nous avons :

$$\int_\Omega |\nabla\nabla v^N - \nabla\nabla v| = \int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} |\nabla\nabla(v^N - v)|$$
$$\leqslant \int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} \left|\sum_{N-2}^{N} \nabla\nabla(\rho_{\varepsilon_j} * (\varphi_j u) - \varphi_j u)\right| + \int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} |\nabla\nabla v|$$

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} \left|\sum_{N-2}^{N} \nabla\nabla(\rho_{\varepsilon_j} * (\varphi_j u) - \varphi_j u)\right| \tag{1.31}$$
$$\leqslant \int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} \left|\sum_{N-2}^{N} \rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j(\nabla\nabla u) - \varphi_j(\nabla\nabla u)\right|$$
$$+ \int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} \sum_{N-2}^{N} |\rho_{\varepsilon_j} * (\nabla\nabla(\varphi_j u) - (\nabla\nabla u)\varphi_j) - (\nabla\nabla(\varphi_j u) - (\nabla\nabla u)\varphi_j)|$$
$$\leqslant \sum_{N-2}^{N} \int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} |\rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j \nabla\nabla u| + |\varphi_j \nabla\nabla u| + \sum_{N-2}^{N} \delta 2^{-j}.$$

Or :

$$(1.32)\quad \int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}} \sum_{N-2}^{N} |\rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j \nabla\nabla u| \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{N-2}^{N} |\rho_{\varepsilon_j} * \varphi_j (\nabla\nabla u)|$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \sum_{N-2}^{N} |\varphi_j \nabla\nabla u|$$

$$\leqslant \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega_{N-3}}} |\nabla\nabla u|$$

$$\leqslant \varepsilon .$$

On obtient en rassemblant les inégalités (1.29) à (1.32)

$$\int_\Omega |\nabla\nabla v^N - \nabla\nabla v| \leqslant 2\varepsilon + \delta 2^{-N+3} + \varepsilon ,$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.4. □

Remarque 1.4. – On peut envisager une généralisation de la définition (1.12) pour un nombre fini de fonctions h_k, $1 \leqslant k \leqslant p$. La Proposition 1.4 et la plupart des résultats qui suivent s'étendent à ce cas.

Remarque 1.5. – Nous avons fait l'hypothèse que Ω était connexe. En fait tous les résultats s'étendent immédiatement à Ω ayant un nombre fini de composantes connexes (pour certains cette restriction n'est même pas utile).

2. Trace des éléments de HB(Ω).

On suppose ici que Ω est C^2 régulier uniforme. Rappelons que le théorème de trace de Gagliardo [6] permet de définir $\gamma_0 u \in L^1(\Gamma)$ lorsque u est dans $W^{1,1}(\Omega)$, celui de Miranda [8] donne l'existence d'une trace interne $\gamma_0 u$ dans $L^1(\Gamma)$, lorsque u est dans $BV(\Omega)$. Il est intéressant de signaler aussi l'existence de traces dans $L^1(\Gamma)^n$ des éléments de $BD(\Omega)$ démontrée par Strang-Teman [13], Suquet [14] : nous utiliserons des propriétés concernant BV ou BD, en notant que $\varepsilon(\nabla u) = \nabla\nabla u$. Nous rappelons aussi le résultat démontré par Giusti [7] pour BV. (Notons que l'analogue pour BD est établi par Teman [6]) :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \text{Si } v_m \to v \text{ dans } L^1(\Omega,\mathbf{R}^n) \\ \text{et si } |\nabla v_m|_T \to |\nabla v|_T , \\ \text{alors } \gamma_0 v_m \to \gamma_0 v \text{ dans } L^1(\Gamma)^n . \end{cases}$$

Lorsque u est dans HB, nous pouvons donc définir $\gamma_0 u$ et $\gamma_0(\nabla u)$. Lorsque u_m est la suite de $(W^{2,1} \cap \mathscr{C}^\infty)(\Omega)$ donnée dans la Proposition 1.4, soit v_m^p la suite de fonctions de HB à support compact qui convergent vers $u_m - u$ dans HB. L'application trace étant continue de $W^{1,1}$ et BV, dans $L^1(\Gamma)$ munis de la topologie de la norme, nous avons :

$$\begin{aligned} u_m - u|_\Gamma &= \lim v^p_{m|\Gamma} = 0 \\ \nabla(u_m - u)|_\Gamma &= \lim \nabla u^p_{m|\Gamma} = 0 . \end{aligned}$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} u_m &= u \qquad \text{dans} \qquad W^{1,1}(\Gamma) \\ \nabla u_m &= \nabla u \qquad \text{dans} \qquad L^1(\Gamma) . \end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} &\gamma_0(\mathrm{HB}) = \gamma_0(W^{2,1}) \hookrightarrow W^{1,1}(\Gamma), \\ &\gamma_1(\mathrm{HB}) = \gamma_1(W^{2,1}) = L^1(\Gamma) \quad \text{(cf. Proposition 1 de l'appendice)}, \end{aligned}$$

et aussi que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\gamma_0 u) = \gamma_0(\nabla u)_\tau \qquad \text{dans} \quad L^1(\Gamma) .$$

En effet :

$$\begin{aligned} \gamma_0((\nabla u)_\tau) &= \gamma_0((\nabla u_m)_\tau) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau}(\gamma_0 u_m) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau}(\gamma_0 u) . \end{aligned}$$

Indiquons ici une première application de la notion de trace : il s'agit du prolongement d'une fonction de $\mathrm{HB}(\Omega)$ en une fonction à hessien borné sur un ouvert contenant strictement Ω. Plus précisément soit $\Gamma_\cup$ une partie C^2 régulière ouverte de Γ et Ω' un ouvert de $\mathbf{R}^n$, tel que :

$$\bar{\Omega} \cap \bar{\Omega}' = \Gamma_\cup , \qquad \Omega \cap \Omega' = \varnothing ,$$

et soit $\Omega_0 = \Omega \cup \Omega' \cup \Gamma_\cup$.

Pour V dans $\mathrm{HB}(\Omega')$ fixé, et pour tout u de $\mathrm{HB}(\Omega)$, on définit $\tilde{u}$ par :

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \\ V & \text{dans } \Omega' . \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{u}$ appartienne à $HB(\Omega_0)$.

THÉORÈME 2.1. — *$\tilde{u} \in HB(\Omega_0) \Leftrightarrow \gamma_0 u = \gamma_0 V$ sur $\Gamma_\cup$ et alors :*

$$\nabla\nabla\tilde{u} = \nabla\nabla u|_\Omega + \nabla\nabla V|_{\Omega'} + \mathscr{I}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}(V-u)\right)\delta_{\Gamma_\cup} \tag{2.5}$$

avec $\mathscr{I}(p)$ le tenseur

$$\mathscr{I}(p) = p\vec{\nu} \otimes \vec{\nu}$$

et $\delta_{\Gamma_\cup}$ est la distribution de Dirac répartie sur $\Gamma_\cup$.

Démonstration. — Si $\tilde{u} \in HB(\Omega_0)$, $\tilde{u}$ est dans $W^{1,1}(\Omega_0)$. Soit φ dans $\mathscr{D}(\Omega_0)$

$$\begin{aligned}\langle\nabla\tilde{u},\varphi\rangle &= -\int_{\Omega_0}\tilde{u}.\nabla\varphi = -\int_\Omega u.\nabla\varphi - \int_{\Omega'} V.\nabla\varphi \\ &= \int_\Omega \nabla u.\varphi - \int_{\Gamma_\cup}\gamma_0 u\varphi + \int_{\Omega'}\nabla V.\varphi + \int_{\Gamma_\cup}\gamma_0 V\varphi,\end{aligned}$$

d'où l'égalité classique

$$\nabla\tilde{u} = \nabla u|_\Omega + \nabla V|_{\Omega'} + (\gamma_0 V - \gamma_0 u)\,\delta_{\Gamma_\cup}$$

et le résultat suivant :

$$\tilde{u} \in W^{1,1}(\Omega) \Leftrightarrow \gamma_0 V = \gamma_0 u \quad \text{sur} \quad \Gamma_\cup .$$

Réciproquement cette condition est suffisante pour que $\tilde{u}$ soit dans $HB(\Omega_0)$. En effet :

$$\begin{aligned}\langle\nabla\nabla\tilde{u} : M\rangle &= \int \tilde{u}M_{ij,ij} \\ &= \int_\Omega uM_{ij,ij} + \int_{\Omega'} VM_{ij,ij} \\ &= -\int_\Omega u_{,j}M_{ij,i} - \int_{\Omega'} V_{,j}M_{ij,i} + \int_{\Gamma_\cup}(u-V)M_{ij,i}\nu_j \\ &\qquad\qquad \text{(d'après la formule de Green de Gagliardo)} \\ &= \langle u_{,ji}M_{ij}\rangle + \langle V_{,ji}M_{ij}\rangle - \int_{\Gamma_\cup}(u_{,j}-V_{,j})\nu_i M_{ij} \\ &\qquad\qquad \text{(d'après la formule de Green de Miranda [8]) ;}\end{aligned}$$

or :

$$u_{,j} - V_{,j} = [\nabla(u-V).\vec{\nu}]\nu_j + [\nabla(u-V).\vec{\tau}]\tau_j = [(\nabla u - \nabla V).\vec{\nu}]\nu_j,$$

en utilisant $\gamma_0 u = \gamma_0 V$ et (2.4). Finalement :

$$\langle \nabla\nabla\tilde{u} : M\rangle = \langle \nabla\nabla u : M\rangle_\Omega + \langle \nabla\nabla V : M\rangle_{\Omega'} + \int_{\Gamma_\cup} \mathscr{I}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}(V-u)\right) : M.$$

Ceci démontre d'une part (2.4) et d'autre part que $\tilde{u} \in HB(\Omega_0)$. En effet, $\gamma_0 u = \gamma_0 V$ sur $\Gamma_\cup$ entraîne $\tilde{u} \in W^{1,1}(\Omega_0)$ et la formule (2.5) montre alors que $\nabla\nabla\tilde{u}$ est une mesure bornée sur Ω_0.

COROLLAIRE. — *On suppose que* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$ *et* $u \in HB(\Omega)$. *Soit* P *un sous-espace de dimension* $n-2$. *Alors* $P \cap \Omega$ *est de mesure nulle pour* $|D^2u|$. (*En particulier pour* $n = 2$, D^2u *ne charge pas les points.*)

Preuve. — On choisit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ de sorte que le sous-espace P de dimension $n-2$ soit d'équation

$$X_{n-1} = X_n = 0,$$

et on notera x' le $(n-2)$-uplet $x_1 \dots x_{n-2}$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ assez petit pour que

$$\int_{(\mathbf{R}^{n-1}\times]0,\delta[)\cap\Omega} |D^2u| < \varepsilon$$

$$\int_{(\mathbf{R}^{n-1}\times]-\delta,0[)\cap\Omega} |D^2u| < \varepsilon$$

et

$$\int_{(\mathbf{R}^{n-2}\times]-\delta,+\delta[\times\{0\})\cap\Omega} \int \left|\left[\frac{\partial u}{\partial X_n}\right]\right| (x', x_{n-1}, 0)\, dx'\, dx_{n-1} < \varepsilon$$

où $\left[\dfrac{\partial u}{\partial X_n}\right]$ représente la discontinuité de $\dfrac{\partial u}{\partial X_n}$ à la traversée de la ligne $X_n = 0$. L'ensemble

$$P_\delta = ((\mathbf{R}^{n-1}\times]-\delta,0[\cap\Omega) \cup ((\mathbf{R}^{n-1}\times]0,\delta[\cap\Omega) \cup ((\mathbf{R}^{n-2}\times]-\delta,+\delta[\times\{0\})\cap\Omega)$$

est un voisinage ouvert de $P \cap \Omega$. En utilisant la définition de $|D^2u|(P \cap \Omega)$

$$|D^2u|(P\cap\Omega) = \inf_{\substack{\partial \text{ ouvert} \\ \supset P \cap \Omega}} |D^2u|(\partial),$$

nous avons $\forall \delta > 0$:

$$|D^2u|(P\cap\Omega) \leqslant |D^2u|(P_\delta) = |D^2u|((\mathbf{R}^{n-1} \times]0,\delta[\cap \Omega)$$
$$+ |D^2u|((\mathbf{R}^{n-1} \times]-\delta,0[) \cap \Omega) + \int_{(\mathbf{R}^{n-2} \times]-\delta,+\delta[\times \{0\}) \cap \Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial X_n}\right|$$

ce qui prouve que

$$|D^2u|(P\cap\Omega) = 0 .$$

Les Théorèmes 2.2 et 2.3 qui suivent permettent de prolonger un élément de $HB(\Omega)$ en un élément de $HB(\mathbf{R}^n)$, à support compact. Leurs démonstrations utilisent la caractérisation donnée dans le Théorème 2.1.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$, C^2 *régulier uniforme. Il existe un opérateur* P, *linéaire et continu, de* $HB(\Omega)$ *dans* $HB(\mathbf{R}^n)$, *vérifiant*

$$Pu = u \quad \text{p.p.} \quad \textit{sur}\ \Omega .$$

De plus $P(W^{2,1}(\Omega)) \hookrightarrow W^{2,1}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. — i) Rappelons que la propriété de C^2 régularité uniforme entraîne l'existence d'ouverts $U_j, j = 0, \ldots, k$, les U_j recouvrant $\partial\Omega$ pour $j \geqslant 1$, et de C^2 difféomorphismes $\{\varphi_j\}_{1 \leqslant j \leqslant k}$ tels que :

$$\varphi_j : U_j \to B(0,1), \quad \varphi_j(U_j \cap \Omega) = B(0,1) \cap \{(y', y_n), y_n \geqslant 0\}$$
$$= B_1^+ \text{ (définition)}.$$

Soit β_j une partition de l'unité subordonnée au recouvrement U_j, $j \geqslant 0$; $\beta_j \in \mathscr{D}(U_j)$, $\sum_{j=0}^{k} \beta_j = 1$. Puisque $u = \beta_0 u + \sum_{j=1}^{k} \beta_j u$, et $\beta_0 u$ est à support compact dans Ω, il suffit de définir $P(\beta_j u)$ pour $j \geqslant 1$ et u dans $HB(\Omega)$. L'expression :

$$Pu = \beta_0 u + \sum_{j=1}^{k} P(\beta_j u)$$

conviendra alors pour le prolongement de u.

ii) *Prolongement de* $\beta_j u$, $j \geqslant 1$. On définit sur B_1^+ :

$$\varphi_j^*(\beta_j u) = \beta_j u \circ \varphi_j^{-1}.$$

Il est aisé de voir que puisque φ_j^{-1} est C^2, cette fonction appartient à $HB(B_1^+)$, et qu'elle est nulle au voisinage de

$$\partial B_1 \cap \{(y',y_n), y_n>0\} = \partial B_1^+.$$

Il suffit donc de définir lorsque u est dans $HB(B_1^+)$, nulle au voisinage de ∂B_1^+, un prolongement P^*u dans $HB(B_1)$ à support compact.

On convient de noter $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ ($n-1$ premières coordonnées) et on définit P^* par :

$$P^*(u)(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{si} \quad t > 0 \\ 3u(x,-t) - 2u(x,-2t) & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que

$$[P^*u(x,0)]_{t=0} = 0 \tag{2.6}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} P^*u(x,0)\right]_{t=0} = 0. \tag{2.7}$$

Ceci prouve, compte tenu du Théorème 2.1, que P^*u est dans $HB(B_1)$ lorsque u est dans $HB(B_1^+)$, et que $P^*(\beta_j u)$ est à support compact dans B_1 donc appartient à $HB(\mathbf{R}^n)$. Enfin il est facile de voir que les égalités (2.6), (2.7) entraînent que

$$P^*(W^{2,1}(B_1^+)) \hookrightarrow W^{2,1}(B_1).$$

Définissons alors :

$$P(\beta_j u) = [P^*(\varphi_j^*(\beta_j u))] \circ \varphi_j.$$

Il est aisé de voir que sur $\Omega \cap U_j$, $P(\beta_j u)$ coïncide avec $\beta_j u$: la définition donnée à la fin de ii) convient donc.

THÉORÈME 2.3. — *Soit* $v \in L^1(\Gamma)$. *Il existe un opérateur* P_v *continu, de* $HB(\Omega)$ *dans* $HB(\mathbf{R}^n)$, *vérifiant*

$$P_v(u) = u \qquad \textit{dans} \quad \Omega$$

$$\gamma_1(P_v(u)) = v|_\Gamma \quad \textit{(trace externe)}.$$

Remarque. — Contrairement au prolongement du Théorème 1, celui-ci n'envoie certainement pas $W^{2,1}(\Omega)$ dans $W^{2,1}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. — On se ramène comme dans la démonstration du Théorème 2.2 à prolonger $\varphi_j^*(\beta_j u)$ en une fonction de $HB(B_1)$.

On définit $v_j = \varphi_j^*(\beta_j v) . v_j \in L^1(]-1, +1[^{n-1} \times \{0\})$; soit alors V_j dans $W^{2,1}(]-1, +1[^{n-1} \times]-1,0[)$, nul au voisinage de

$$\partial B_1^- - \{]-1, +1[^{n-1} \times \{0\}\}$$

tel que

$$\begin{aligned} V_j(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial V_j}{\partial t}(x,0) &= v_j . \end{aligned}$$

(Un tel V_j existe d'après la Proposition 1 de l'Appendice.)

On définit alors $P^*_{v_j} u$ pour u dans $HB(B_1^+)$ par :

$$P^*_{v_j}(u)(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \geqslant 0 \\ 2u(x,t) - u(x,-2t) + V_j(x,t), & t < 0 . \end{cases}$$

Remarquons qu'on a alors :

$$\begin{aligned} [P^*_{v_j}(u)(x,0)] &= 0 \\ \left[\frac{\partial P^*_{v_j}}{\partial t}(u)(x,0)\right] &= v_j - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) . \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du théorème précédent on définit

$$P(\beta_j u) = P^*_{v_j}(\varphi_j^*(\beta_j u)) \circ \varphi_j$$

en utilisant la définition de γ_1 :

$$\gamma_1(\beta_j u) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_j^*(\beta_j u))|_{t=0} \circ \varphi_j ,$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma_1(P(\beta_j u))} &= \widetilde{\frac{\partial}{\partial t}[P^*_{v_j}(\varphi_j^*(\beta_j u))] \circ \varphi_j} \\ &= v_j \circ \varphi_j \\ &= \beta_j v , \end{aligned}$$

on peut conclure que si

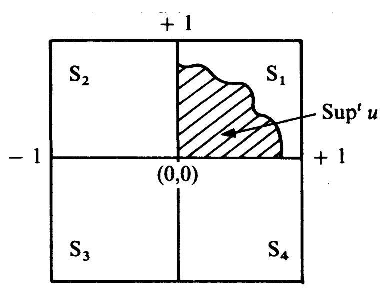
$$\mathrm{P}u = \beta_0 u + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}^*_{v_j}(\varphi_j^*(\beta_j u)) \circ \varphi_j , \qquad \widetilde{\gamma_1(\mathrm{P}u)} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v = v .$$

□

Remarque 2.1. — Le résultat établi dans le Théorème 2.2 dans le cas d'un bord C^2, se prolonge à la situation suivante : on suppose $n = 2$ pour simplifier. Le bord est C^2 régulier sauf au voisinage d'un nombre fini de points x_j qui vérifient la condition suivante : il existe des voisinages U_j de x_j deux à deux disjoints, et des C^2-difféomorphismes φ_j tels que

$$\begin{gathered} \varphi_j(x_j) = (0,0) \\ \varphi_j : U_j \to B_1 \\ \varphi_j(U_j \cap \Omega) = B_j^{++} =]0,1[^2. \end{gathered}$$

On se ramène alors par le procédé employé dans le Théorème 2.2 à prolonger une fonction de $\mathrm{HB}(]0,1[^2)$ en une fonction de $\mathrm{HB}(]-1,+1[^2)$.



La démarche est simple : on commence par prolonger u à la section S_2 par la même méthode que la précédente. Il est aisé de voir, en utilisant par exemple le Théorème 2.1, que la fonction obtenue est alors dans $\mathrm{HB}(]-1,+1[\times]0,1[)$ et le bord est à présent C^∞. On sait alors prolonger aux sections S_3 et S_4 globalement. Plus précisément, on définit $\hat{u}$ par

(2.8) $\hat{u} = u$ dans la section S_1 ;

(2.9) $\hat{u}(x,t) = 3u(-x,t) - 2u(-2x,t)$ dans la section S_2 ;

(2.10) $\hat{u}(x,t) = 9u(-x,-t) - 6u(-2x,-t) - 6u(-x,-2t) + 4u(-2x,-2t)$ dans la section S_3 ;

(2.11) $\hat{u}(x,t) = 3u(x,-t) - 2u(x,-2t)$ dans la section S_4.

3. Théorème d'injection.

Les propositions suivantes sont des théorèmes d'injection et de compacité. Le premier théorème valable pour n quelconque, est une conséquence immédiate des théorèmes d'injection de Sobolev, et des théorèmes d'injection et de compacité concernant BV ou BD, démontrés dans Strang-Teman [13], Suquet [14].

THÉORÈME 3.1. — *Si* $n > 1$

$$\text{(3.1)} \qquad \mathrm{HB}(\Omega) \underset{(^1)}{\hookrightarrow} \mathrm{W}^{1,q}(\Omega) \qquad \textit{avec} \qquad q \leqslant \frac{n}{n-1}$$

et l'injection est compacte si $q < \dfrac{n}{n-1}\cdot$ *En particulier*

$$\text{(3.2)} \quad \mathrm{HB}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega) \quad \textit{pour} \quad q \leqslant \frac{1}{n-2} \quad \textit{pour} \quad n > 2$$

$$\text{(3.3)} \qquad \mathrm{HB}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^q(\Omega), \quad \forall q \in [1,\infty[, \qquad \textit{si} \quad n = 2.$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer des théorèmes d'injection plus fins que les premiers.

THÉORÈME 3.2. — *Si* Ω *est* C^2 *régulier uniforme*

$$\mathrm{HB}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Omega) \qquad \textit{si} \qquad n \leqslant 2.$$

Démonstration. — Il s'agit de démontrer l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\text{(3.4)} \qquad \|u\|_\infty \leqslant c(\|u\|_{\mathrm{W}^{1,1}} + |\nabla\nabla u|_{\mathrm{T}}).$$

Puisque $\mathrm{W}^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ (cf. Adams [1]). Soit $c > 0$, telle que pour u dans $\mathrm{W}^{2,1}(\Omega)$, et pour presque tout x

$$\text{(3.5)} \qquad |u(x)| \leqslant c\|u\|_{\mathrm{W}^{1,1}} + |\nabla\nabla u|_1.$$

(1) X $\hookrightarrow$ Y signifie qu'il existe une injection linéaire continue de X dans Y.

Soit u dans $HB(\Omega)$ et u_m comme dans la Proposition 1.4. Alors le second membre de (3.5) appliqué à u_m converge vers le second membre de (3.4) appliqué à u. Puisque u_m converge vers u dans L^1, on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer que u_n converge presque partout vers u. On a alors, pour presque tout x :

$$\begin{aligned}|u(x)| &= \lim |u_m(x)| \leqslant \lim c(\|u_m\|_{W^{1,1}} + |\nabla\nabla u_m|_1) \\ &= c(\|u\|_{W^{1,1}} + |\nabla\nabla u|_T).\end{aligned}$$

Le théorème qui suit nous a été communiqué par J. Rauch et B. A. Taylor [11], nous en proposons ici une démonstration indépendante de [11]. L'hypothèse de C^2 régularité uniforme n'est pas indispensable : la démonstration étant correcte pour une fonction de $HB(\mathbf{R}^2)$, à support compact, la Remarque 2.1 permet d'étendre le résultat à des ouverts à bord C^2 régulier uniforme sauf en un nombre fini de points vérifiant les hypothèses de la Remarque précitée.

THÉORÈME 3.3. — *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$, C^2 régulier uniforme. Alors*

$$HB(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}).$$

Avant de passer à la démonstration proprement dite, faisons quelques remarques.

Remarque 3.1. — Il est connu (cf. [1]), que $W^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. La démonstration est aisée, à partir de l'inégalité $|u|_\infty \leqslant c\|u\|_{W^{2,1}}$, et de la densité des fonctions de $C^2(\bar{\Omega}) \cap W^{2,1}$ dans $W^{2,1}$. Cet argument tombe en défaut dans ce cas de HB, puisque les fonctions de $C^2(\bar{\Omega})$ ne sont pas denses dans HB pour la topologie de la norme. Il faut donc raisonner différemment.

Remarque 3.2. — Dans la démonstration qui suit, on démontre le résultat pour une fonction de $HB(\mathbf{R}^2)$, à support compact. La Remarque 2.1 montre qu'il n'est donc pas nécessaire de supposer ΩC^2 régulier uniforme. Le Théorème 3.3 est encore valable pour un ouvert C^2 régulier sauf en un nombre fini de points.

Le principe de la démonstration est le suivant : on commence par prolonger u en une fonction $\tilde{u}$ de $HB(\mathbf{R}^2)$ (c'est possible, compte tenu du Théorème 2.2). On choisit des axes de coordonnées et on introduit une fonction v dont on montre qu'elle est continue, et presque partout égale à

$\tilde{u}$. Ceci montre que v ne dépend pas du choix des axes de coordonnées, et que v/Ω ne dépend pas non plus du prolongement choisi $\tilde{u}$. La fonction v est donnée par la

PROPOSITION 3.1. — *Soit u dans* $\mathrm{HB}(\mathbf{R}^2)$, *à support compact et v définie par*

$$v(x,t) = \iint_{]-\infty,x[\times]-\infty,t[} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\,dx\,dt.$$

Alors

i) *v est une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$, à support compact;*

ii) *v est presque partout égale à u.*

Démonstration. — Pour démontrer i) observons tout d'abord que

$$\iint_{]-\infty,x[\times]-\infty,t[} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = \iint_{]-\infty,x)\times]-\infty,t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} \tag{3.6}$$

où $]-\infty,x)$ désigne indifféremment $]-\infty,x]$ ou $]-\infty,x[$. (3.6) est une conséquence immédiate de la formule (2.5) qui montre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$ ne présente pas de masse à la traversée d'une parallèle à l'un des axes des coordonnées. Remarquons que puisque u est nulle hors d'un compact, on a aussi :

$$v(x,t) = \iint_{(x,+\infty[\times(t,+\infty[} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = -\iint_{(x,+\infty[\times]-\infty,t)} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}$$

$$= -\iint_{]-\infty,x)\times(t,+\infty[} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}.$$

Montrons à partir de 3.1 la continuité de v en un point (x_0,t_0). Soit $\mathrm{B}(x,x_0)$ (resp. $\mathrm{B}(t,t_0)$) la bande

$$]\inf(x_0,x), \sup(x_0,x)[\, \times \mathbf{R}, \quad (\text{resp. } \mathbf{R} \times\,]\inf(t_0,t), \sup(t_0,t)[).$$

Puisque D^2u est une mesure bornée sur $\mathbf{R}^2$, on peut choisir α tel que $|x-x_0| < \alpha$, $|t-t_0| < \alpha$ entraînent :

$$\iint_{\mathrm{B}(x,x_0)\cup \mathrm{B}(t,t_0)} |\mathrm{D}^2u| < \varepsilon.$$

Pour fixer les idées, supposons que $x > x_0$, $t < t_0$ et $|x-x_0| < \alpha$, $|t-t_0| < \alpha$

$$\begin{aligned} v(x_0,t_0)-v(x,t) &= \iint_{]-\infty,x_0]\times]-\infty,t_0[} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} - \iint_{]-\infty,x[\times]-\infty,t]} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} \\ &= \iint_{]-\infty,x_0]\times]t,t_0[} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \iint_{]x_0,x[\times]-\infty,t]} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} \end{aligned}$$

et donc

$$|v(x_0,t_0)-v(x,t)| \leqslant \iint_{B(t_0,t)\cup B(x_0,x)} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right| < \varepsilon .$$

Ceci termine la démonstration de i). Pour établir ii) on peut soit vérifier

$$\text{(3.7)} \qquad D^2 v = D^2 u ,$$

au sens de $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, ce qui entraîne classiquement que $v - u$ est dans $\mathscr{P}_1$, soit démontrer l'égalité presque partout par approximation. Il est en effet facile de vérifier la Proposition 3.1 lorsque $u \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$. Pour étendre ce résultat à une fonction u de $HB(\mathbf{R}^2)$ on utilise la suite u_m de $\mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$ donnée par la Proposition 1.4, avec Ω un ouvert borné contenant le support de u. On a alors

$$\text{(3.8)} \qquad u_m \to u$$

$$\text{(3.9)} \qquad |D^2 u_m|_T \to |D^2 u| .$$

Soit $\mathcal{O}_{x,t}$ l'ouvert $]-\infty,x[\, \times \,]-\infty,t[$. Puisque :

$$\text{(3.10)} \qquad \int_{\partial\mathcal{O}_{x,t}} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}\right| = 0 ,$$

$$\text{(3.11)} \qquad \int_{\mathcal{O}_{x,t}} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x\,\partial t} \to \int_{\mathcal{O}_{x,t}} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} .$$

Puisque d'autre part, (3.8) entraîne à l'extraction d'une sous-suite près la convergence presque partout de u_m vers u, on a pour presque tous (x,t) dans $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_m(x,t) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\partial x,t} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x\,\partial t} \\ &= \int_{\partial x,t} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} \text{ d'après (3.11).} \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à voir que l'application qui à u associe v est linéaire continue. C'est évident en utilisant la continuité du prolongement de u et l'expression explicite de v en fonction de u :

$$|v|_\infty \leqslant \iint_{\mathbf{R}^2} \left|\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\, \partial t}\right| \leqslant C\|u\|_{HB(\Omega)}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE du THÉORÈME 3.2. — *Pour tout u dans $HB(\Omega)$ il existe une suite $u_m \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega)$ telle que*

$$u_m \to u \qquad \textit{dans} \quad W^{1,1}(\Omega)$$
$$|\nabla\nabla u_m|_T \to |\nabla\nabla u|_T$$
$$\gamma_0 u_m = \gamma_0 u$$
$$\gamma_1 u_m = \gamma_1 u$$

et u_m converge vers u dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega})$.

Démonstration. — On choisit u_m comme dans la démonstration de la Proposition 1.4. Il est connu que lorsque v est continue à support compact, $\rho_\varepsilon * v$ converge vers v uniformément. On peut donc choisir les ε_j de sorte qu'ils vérifient aussi :

$$|\rho_{\varepsilon_j} * (\varphi_j u) - (\varphi_j u)|_\infty \leqslant \delta 2^{-j}.$$

On obtient alors

$$|u_\delta - u|_\infty \leqslant \delta.$$

Remarque. — En ce qui concerne les dimensions autres que 2, les Théorèmes 3.2 et 3.3 sont valables pour l'espace :

$$\nabla^n B(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega), \nabla^n u \in \mathscr{M}_b(\Omega, E)\}.$$

Remarquons que si $n = 1$, l'espace précédent n'est autre que $BV(\Omega)$. Le Théorème 3.2 est valable pour $\nabla^n B(\Omega)$ pour tout n, et lorsque Ω a la propriété forte de Lipschitz locale. En effet sous cette hypothèse, les théorèmes d'injection de Sobolev établissent que

$$W^{n,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Il existe donc une constante $c > 0$, telle que pour tout $u \in W^{n,1}$, et pour presque tout x dans Ω

$$(3.12) \qquad |u(x)| \leqslant c(|u|_1 + \cdots + |\nabla^n u|_1).$$

Le Théorème 2.2 de F. Demengel-R. Teman [4] appliqué à $S = \nabla^n$ permet d'approcher u dans $\nabla^n B(\Omega)$ par u_m dans $W^{n,1}$ de sorte que

$$u_m \to u \quad \text{dans} \quad W^{n-1,1}(\Omega)$$
$$|\nabla^n u_m|_T \to |\nabla^n u|_T$$

alors le second membre de (3.12) appliqué à u_m converge vers

$$|u|_1 + \cdots + |\nabla^n u|_1,$$

et puisque u_m converge vers u dans $L^1(\Omega)$ on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer que u_m converge vers u presque partout. Alors pour presque tout x

$$\begin{aligned} |u(x)| \leqslant \underline{\lim}\, u_m(x)| &\leqslant c \lim |u_m|_1 + \cdots + |\nabla^n u_m| \\ &= c(|u|_1 + \cdots + |\nabla^n u|_1). \end{aligned}$$

Le Théorème 3.3 est faux en dimension 1 pour BV, comme le montre l'exemple de la fonction d'Heavyside. Il est en revanche vrai pour les dimensions strictement supérieures à 2; la démonstration du cas $n = 2$ s'adapte aisément.

Les considérations précédentes, en particulier le fait que $BV(\Omega) \hookrightarrow L^\infty$ en dimension 1 permet de donner quelques précisions sur les fonctions de HB, en dimension 1 : elles sont continues (puisque $HB(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$) à dérivée dans L^∞, et lipschitziennes.

Appendice : Trace des éléments de $W^{2,1}(\Omega)$.

On suppose l'ouvert ΩC^2-régulier uniforme. Le théorème de trace de Gagliardo [6] sur $W^{1,1}(\Omega)$ s'applique alors à u et à ∇u. (En fait, pour définir $\gamma_0 u$ et $\gamma_0\,(\nabla u)$ Ω-C^1 régulier suffit.) L'hypothèse Ω-C^2 régulier uniforme permet de se ramener par cartes locales et partitions de l'unité au cas de $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et $\Gamma =]0,1[$, de définir le gradient tangentiel de $\gamma_0 u$, noté $\gamma_\tau(\gamma_0 u)$ qui appartient à $L^1(\Gamma)$ et de montrer qu'il coïncide avec $\gamma_0(\nabla u)_\tau$; $\gamma_0 u$ est donc dans $W^{1,1}(\Gamma)$. On peut aussi définir $\gamma_1 u$ égal à $\gamma_0(\nabla u).\vec{\nu}$, encore noté $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ et qui est dans $L^1(\Gamma)$.

De plus, il est immédiat en utilisant la continuité de l'application γ_0 de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $L^1(\Gamma)$, pour u et pour ∇u, que l'application γ_0 (resp. γ_1) précitée est linéaire continue de $W^{2,1}(\Omega)$ dans $W^{1,1}(\Gamma)$ (resp. $L^1(\Gamma)$).

Il est naturel de se poser la question de la surjectivité éventuelle de ces applications. Cela est prouvé pour γ_1 et fait l'objet de la Proposition 1.

Proposition 1. — *L'application* $\gamma_1 : W^{2,1}(\Omega) \to L^1(\Gamma)$,

$$u \mapsto \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma$$

est linéaire continue, surjective. Plus précisément pour g *dans* $L^1(\Gamma)$, *il existe* u *dans* $W^{2,1}(\Omega)$, *telle que* $\gamma_0 u = 0$, $\gamma_1 u = g$.

Démonstration. — Seule la surjectivité n'est pas triviale. Pour l'établir, on suit en partie la démonstration de Gagliardo [6]. Comme d'habitude, on se ramène par cartes locales et partition de l'unité à $\Omega =]0,1[^2$ et $\Gamma =]0,1[\times\{0\}$. Soit alors $g \in L^1(]0,1[)$ et soit φ_n une suite de fonctions régulières (au moins C^2) à support compact dans $]0,1[$, qui convergent vers g dans $L^1(]0,1[)$. On peut faire en sorte que $\Sigma|\varphi_{p+1}-\varphi_p|_1$ soit finie. En effet puisque φ_n est de Cauchy :

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad \exists N(p), \quad \forall n \geqslant N(p), \quad \forall k \geqslant 0, \qquad |\varphi_{n+k}-\varphi_n|_1 \leqslant 2^{-p}|g|_1 .$$

En définissant alors

$$n(p) = \operatorname{Sup}(N(p-1)+1, N(p))$$

la suite $\psi_p = \varphi_{n(p)}$ vérifie :

$$\text{(A.1)} \qquad \begin{aligned} &\psi_p \to q \quad \text{dans} \quad L^1(]0,1[), \quad \text{et} \\ &\sum_1^\infty |\psi_{p+1}-\psi_p|_1 \leqslant 2|g|_1 . \end{aligned}$$

La suite $(\psi_p)_{p\geqslant 1} \cup \{\psi_0=0\}$ vérifie aussi (3.1). Soit maintenant t_p une suite de réels entre 0 et 1, $t_0 > 0$, strictement décroissante et tendant vers 0, telle que :

$$|t_{p+1}-t_p| \leqslant \frac{2^{-p}|g|_1}{\displaystyle\sup_{\substack{i\in\{1,2\}\\ k\in\{p,p+1\}}} |\psi_k^{(i)}| + 1} \qquad \text{pour tout} \qquad p \in \mathbf{N}.$$

Remarquons que $t_0 = \sum_0^\infty (t_p-t_{p+1})$ et définissons v sur $]0,1[^2$ par

$$v(x_1,x_2) = 0, \qquad t_0 \leqslant x_2 \leqslant 1$$
$$v(x_1,\lambda t_{p+1}+(1-\lambda)t_p) = \lambda(\psi_{p+1}-\psi_p) + \psi_p \quad \text{pour} \quad \lambda \in]0,1[.$$

Il est aisé de voir que

$$\lim_{x_2\to 0} v(\,.\,,x_2) = g(.) \qquad \text{dans} \qquad L^1(]0,1[).$$

Montrons maintenant que v, $\dfrac{\partial v}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}$ sont intégrables. C'est évident pour v. Ensuite on a, pour $i = 1,2$:

$$\begin{aligned}\iint \left|\frac{\partial^i v}{\partial x_1^i}\right| dx_1\,dx_2 &= \int_0^1 dx_1 \sum_p \int_{t_{p+1}}^{t_p} \lambda(\psi_{p+1}^{(i)} - \psi_p^{(i)}) + \psi_p^{(i)} \\ &\leqslant \sum_p |t_p-t_{p+1}|(|\psi_p^{(i)}|_1+|\psi_{p+1}^i|_1) \\ &\leqslant 2|g|_1 \quad \text{d'après le choix de} \quad |t_{p+1}-t_p|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint \left|\frac{\partial v}{\partial x_2}\right| dx_1\,dx_2 &= \int_0^1 \Sigma \int_{t_{p+1}}^{t_p} \frac{|\psi_{p+1}-\psi_p|}{t_p-t_{p+1}}\,dx_1\,dx_2 \\ &\leqslant \Sigma\,|\psi_{p+1}-\psi_p|_1 \\ &\leqslant 2|g|_1.\end{aligned}$$

On définit alors sur $]0,1[\times]0,1[$, la fonction u définie par

$$u(x_1,x_2) = \int_0^{x_2} v(x_1,t)\,dt.$$

Il est aisé de vérifier que u est dans $W^{2,1}(\Omega)$, que $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0) = v(x_1,0) = g(x_1)$, que $u(x_1,0) = 0$, et que $\|u\|_{W^{2,1}} \leqslant c|g|_1$. $\square$

Le Théorème 1 qui suit précise l'indépendance des traces $\gamma_0 v$, $\gamma_1 v$ l'une par rapport à l'autre.

THÉORÈME 1. — i) *L'application trace :*

$$\begin{aligned} W^{2,1}(\Omega) &\to \gamma_0(W^{2,1}(\Omega)) \times L^1(\Gamma) \\ v &\mapsto (\gamma_0 v, \gamma_1 v) \end{aligned}$$

est linéaire continue surjective, l'espace $\gamma_0(W^{2,1}(\Omega))$ *étant muni de la norme induite par* γ_0.

ii) *Il existe une constante* c *telle que pour tous*

$$w_0, \quad w_1 \in \gamma_0(W^{2,1}(\Omega)) \times L^1(\Gamma),$$

il existe $w \in W^{2,1}(\Omega)$ *vérifiant*

$$\gamma_0 w = w_0, \quad \gamma_1 w = w_1 \quad \textit{et} \quad \|w\|_{W^{2,1}} \leqslant c(|w_0|_{\gamma_0(W^{2,1})} + |w_1|_1).$$

Démonstration. — i) Seule la surjectivité n'est pas évidente. Soient donc (w_0, w_1) dans $\gamma_0(W^{2,1}) \times L^1(\Gamma)$ et v dans $W^{2,1}(\Omega)$ tels que $w_0 = \gamma_0 v$. La proposition précédente assure l'existence de u dans $W^{2,1}(\Omega)$ telle que $\gamma_0 u = 0$, $\gamma_1 u = -w_1 + \gamma_1 v$. Alors $w = v - u$ vérifie :

$$\begin{gathered} w \in W^{2,1}(\Omega) \\ \gamma_0 w = w_0 - 0 \\ \gamma_1 w = \gamma_1(v - u) = w_1 . \end{gathered}$$

ii) Il suffit d'appliquer la Proposition 2 qui suit avec

$$E = W^{2,1}(\Omega), \qquad S = (\gamma_0, \gamma_1), \qquad G = \gamma_0(W^{2,1}) \times L^1(\Gamma).$$

PROPOSITION 2. — *Soit* S *une application linéaire continue surjective d'un Banach* E *dans un Banach* G. *Il existe une constante* $C(>0)$ *telle que*

$$\forall f \in G, \quad \exists F \in E, \quad S(F) = f$$

et

$$\text{(A.2)} \qquad \|F\|_E < C\|f\|_G .$$

Démonstration. — C'est une simple conséquence du Théorème de Banach.

En effet, S étant d'image ouverte $S(B(0,1))$ est ouvert et il existe un réel $r > 0$, tel que $B(0,r) \subset S(B(0,1))$. Alors pour

$$y \neq 0, \qquad \frac{yr}{2\|y\|} \in B(0,r)$$

et il existe $x_1 \in B(0,1)$ tel que $\dfrac{yr}{2\|y\|} = S(x_1)$. Alors $x = \dfrac{2x_1\|y\|}{r}$ vérifie $Sx = y$ et $\|x\| \leqslant \dfrac{2}{r}\|y\|$, et (A.2) est vérifiée avec $c = \dfrac{2}{r}\cdot$ □

THÉORÈME 2. — $\gamma_0(W^{2,1}(\Omega)) \neq W^{1,1}(\Gamma)$.

Démonstration. — On se ramène par cartes locales et partition de l'unité à

$$\Omega =]0,1[\times]0,1[$$
$$\Gamma =]0,1[,$$

et lorsque f est la trace sur $]0,1[\times \{0\}$ d'une fonction F de $W^{2,1}(\Omega)$, on peut supposer que F est nulle au voisinage de $\partial\Omega\backslash]0,1[\times \{0\}$, et donc que f est à support compact sur $]0,1[$.

Le résultat annoncé va alors résulter de l'incompatibilité de la Proposition 2 avec la Proposition 3 ci-dessous si l'on suppose que

$$\gamma_0(W^{2,1}]0,1[^2) = W^{1,1}(]0,1[\times\{0\}).$$

PROPOSITION 3. — *Soit* $F \in W^{2,1}(]0,1[^2)$, $f = F(.,0)$. *Pour tout* $x \in]0,1[$, *soit* $\beta(x)$ *le réel* $\inf(x,1-x)$. *Alors la fonction*

$$t \to \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}$$

est intégrable sur $]-\beta(x),\beta(x)[$ *et vérifie*

$$\text{(A.3)} \quad \alpha_f(x) = \int_{-\beta(x)}^{+\beta(x)} \left|\frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\right| dt < 6\|F\|_{W^{2,1}(]0,1[^2)}.$$

Admettons un instant cette Proposition et supposons que

$$\gamma_0(W^{2,1}(]0,1[^2)) = W^{1,1}(]0,1[\times\{0\}).$$

Soit alors $C > 0$ donnée par la Proposition 2 avec

$$S = \gamma_0, \quad E = W^{2,1}(]0,1[^2), \quad G = W^{1,1}(]0,1[\times\{0\}).$$

Pour f quelconque dans $W^{1,1}(]0,1[\times\{0\})$, $F|_\Gamma = f$ et $\|F\|_{W^{2,1}} \leqslant C|f|_{W^{1,1}}$.

En utilisant alors la Proposition 3 pour cet F nous avons pour tout $x \in]0,1[$:

$$\alpha_f(x) < 6\|f\|_{W^{2,1}} \leqslant 6C|f|_{W^{1,1}}.$$

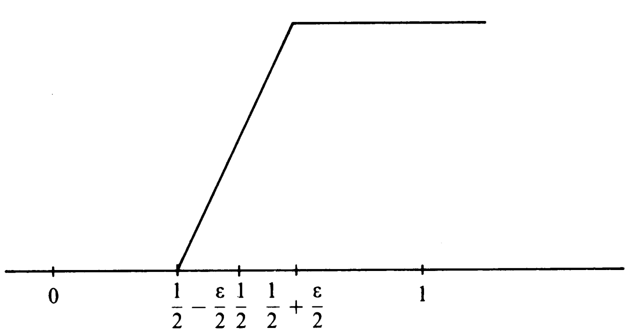
Nous avons donc obtenu l'inégalité :

Il existe une constante $C' > 0$ telle que $\forall f \in W^{1,1}(]0,1[\times\{0\})$

$$\alpha_f(x) \leqslant C'|f|_{W^{1,1}(]0,1[)}. \tag{A.4}$$

Soit alors $0 < \varepsilon < 1$ et f_ε la fonction définie par

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right], \quad f_\varepsilon(x) = 0$$
$$x \in \left[\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right], \quad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$x \in \left[\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, 1\right], \quad f_\varepsilon(x) = 1.$$



f_ε est bien dans $W^{1,1}(]0,1[\times\{0\})$.

Calculons $\alpha_{f_\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\alpha_{f_\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{1/2} \frac{f\left(\frac{1}{2}+t\right) - f\left(\frac{1}{2}-t\right)}{t}\, dt \\ &= 2\left[\int_0^{\varepsilon/2} \frac{2t}{\varepsilon}\frac{1}{t}\, dt + \int_{\varepsilon/2}^{1/2} \frac{1}{t}\, dt\right] \\ &= 2(1-\operatorname{Log}\varepsilon) \\ &= 2(1+|\operatorname{Log}\varepsilon|).\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\|f_\varepsilon\|_{W^{1,1}}$.

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|_{W^{1,1}} &= \int |f_\varepsilon| + \int |f_\varepsilon'| \\ &= \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Si (A.4) était vraie, il existerait donc une constante c' positive, indépendante de ε telle que

$$(1+|\operatorname{Log}\varepsilon|) < c' \times \frac{3}{2},$$

ce qui est évidemment faux.

Il nous reste à montrer la Proposition 2. Nous la démontrons dans i) lorsque f est C^2. Le résultat s'ensuivra dans ii) par densité des fonctions $C^2(\bar{\Omega})$ dans $W^{2,1}(\Omega)$.

i) Nous décomposons la différence $f(x+t) - f(x-t)$ comme suit :

$$\begin{aligned}f(x+t) - f(x-t) &= F(x+t,0) - F(x-t,0) \\ &= F(x+t,0) - F(x+t,|t|) + F(x+t,|t|) \\ &\quad - F(x-t,|t|) + F(x-t,|t|) - F(x-t,0),\end{aligned}$$

et nous utilisons le Lemme ci-dessous pour les fonctions :

$$\begin{aligned} F_{x+t} : \ ]0,1[\ &\to \mathbf{R} \\ y \ &\mapsto F(x+t,y). \\ \tau_x F(.,t) = \ ]-x, 1-x[\ &\to \mathbf{R} \\ y \ &\mapsto F(x+y,|t|). \\ F_{x-t} :]0,1[\ &\to \mathbf{R} \\ y \ &\mapsto F(x-t,y). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\text{(A.5)} \quad \left| \frac{F_{x+t}(0) - F_{x+t}(|t|)}{t} \right| \leqslant \int_0^1 [|\partial_2 F(x+t,y)| + |\partial_{22} F(x+t,y)|] \, dy$$

$$\begin{aligned} \text{(A.6)} \quad & \left| \frac{\tau_x F(t,|t|) - \tau_x F(-t,|t|)}{t} \right| \\ & \leqslant 2 \int_{-x}^{1-x} [|\partial_1 F(x+y,|t|)| + |\partial_{11} F(x+y,|t|)|] \, dy \\ & \leqslant 2 \int_0^1 [|\partial_1 F(y,|t|)| + |\partial_{11} F(y,|t|)|] \, dy \end{aligned}$$

$$\text{(A.7)} \quad \left| \frac{F_{x-t}(|t|) - F_{x-t}(0)}{t} \right| \leqslant \int_0^1 [|\partial_2 F(x-t,y)| + |\partial_{22} F(x-t,y)|] \, dy.$$

En intégrant par rapport à t, et en effectuant le changement de variable $x + t = u$ dans (A.5), $x - t = u$ dans (A.7), on obtient bien le résultat voulu, moyennant le lemme :

LEMME. — *Soit* I *un intervalle ouvert borné de* $\mathbf{R}$, f *une fonction de* $L^1(I)$. *On suppose que* f *admet une dérivée seconde intégrale, alors* f *est lipschitzienne et vérifie plus précisément :*

$$\text{(A.8)} \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad x \neq y, \qquad \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leqslant \frac{1}{\ell(I)} \int_I |f'| + \int_I |f''|.$$

Démonstration. — C'est une simple conséquence d'un résultat d'injection monté dans Adams [1] : les hypothèses faites sur f entraînent que f' est continue et que

$$|f'|_\infty \leqslant \frac{1}{\ell(I)} |f'|_1 + |f''|_1 .$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe θ dans $]x,y[$,

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = |f'(\theta)| \leqslant |f'|_\infty \leqslant \frac{1}{\ell(\mathrm{I})}|f'|_1 + |f''|_1$$

et ceci est exactement (A.8).

ii) Lorsque F n'est pas C^2 nous rappelons que $W^{2,1}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ (cf. Adams [1]) et donc qu'il existe $F_m \in C^2(\bar{\Omega})$,

$$F_m \to F \quad W^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}).$$

Pour x fixé, la suite de fonctions $t \to \dfrac{F_m(x+t) - F_m(x-t)}{t}$ converge presque partout (pour $t \neq 0$) vers $\dfrac{f(x+t) - f(x-t)}{t}$. Par le lemme de Fatou on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-\beta(x)}^{+\beta(x)} \left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right| dt &\leqslant \underline{\lim} \int_{-\beta(x)}^{+\beta(x)} \left|\frac{f_m(x+t)-f_m(x-t)}{t}\right| dt \\ &\leqslant 6 \lim \|F_m\|_{W^{2,1}} \\ &= 6\|F\|_{W^{2,1}},\end{aligned}$$

ce qui prouve que $t \to \dfrac{f(x+t) - f(x-t)}{t}$ est intégrable et que $\alpha_f(x) \leqslant 6\|F\|_{W^{2,1}}$.

En fait on remarquera qu'il y a aussi convergence dans $C(]0,1[)$ de $\alpha_{m,f}$ vers α_f, où $\alpha_{m,f}$ est définie à partir de f_m comme α_f à partir de f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New-York, 1975.
[2] F. DEMENGEL, Thèse de 3e cycle, Université Paris XI (1982).
[3] F. DEMENGEL, Problèmes variationnels en plasticité parfaite des plaques, in *Numerical Analysis and Optimization*. Vol. 4. Août 1983.
[4] F. DEMENGEL et R. TEMAM. Fonctions convexes d'une mesure (à paraître dans *Indiana Journal of Mathematics*).
[5] J. DENY et J. L. LIONS, Les espaces du type de Beppo Levi, *Annales de l'Institut Fourier*, 5 (1954), 305-370.
[6] E. GAGLIARDO, Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative aleune classi di funzioni in n variabile, *Rend. Sem. Mat. Padova*, 27 (1957), 284-305.

[7] E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Notes de cours rédigées par G. H. Williams, Dep. of Math., Australian National University, Canberra, 10, 1977.
[8] C. Miranda, Comportamento delle succesioni convergenti di frontiere minimale. *Rend. Semin. Univ. Padova*, (1967), 238-257.
[9] J. J. Moreau, *Champs et distributions de tenseurs déformation sur un ouvert de connexité quelconque*, Séminaire d'Analyse Convexe, Université de Montpellier, 6 (1976).
[10] De Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
[11] J. Rauch et B. A. Taylor, Communication privée.
[12] Schwartz, *Théorème des distributions*, Hermann, Paris, 1950-51 (2e édition 1957).
[13] G. Strang et R. Temam, Functions of bounded deformation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 75 (1980), 7-21.
[14] P. Suquet, Existence et régularité des solutions de la plasticité. *C.R.A.S.*, Paris, 286, Série A (1978), 1201-1204.
[15] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, 2e édition, North-Holland, Amsterdam, New-York, 1979.
[16] R. Temam, On the continuity of the trace of vector functions with bounded deformations, *Applicable Analysis*, 11 (1981), 291-302.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1982
révisé le 6 juillet 1983.

Françoise Demengel,
Université de Paris-Sud
Laboratoire d'Analyse Numérique
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.