ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

NOUREDDINE EL JAHOUHARI

Théorème de Fatou pour les fonctions propres des opérateurs différentiels invariants par un groupe de déplacements de Cartan

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 1 (1984), p. 261-271

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_261_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 1 (1984), 261-271

THÉORÈME DE FATOU POUR LES FONCTIONS PROPRES DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS INVARIANTS PAR UN GROUPE DE DÉPLACEMENTS DE CARTAN

par Noureddine El-JAOUHARI

1. Notations.

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple, de type non compact, connexe et de centre fini. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, une décomposition de Cartan de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Le sous-groupe compact maximal K de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, opère sur $\mathfrak{p}$ par la restriction de la représentation adjointe Ad à K.

Le groupe de déplacements de Cartan, associé à l'espace symétrique G/K est, par définition, le produit semi-direct $G_0 = K \underset{s}{\times} \mathfrak{p}$.

L'espace homogène G_0/K, qui s'identifie naturellement à $\mathfrak{p}$, est un espace symétrique de type euclidien. Soit $B(\cdot\,,\cdot)$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$; désignons par $\|\cdot\|$, la norme associée au produit scalaire induit par B sur $\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{a}^+$ la chambre de Weyl positive pour le choix d'un système de racines (restreintes) positives Σ^+. Pour $\alpha \in \Sigma^+$, on note m_α la multiplicité de α. Un élément λ de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ (complexifiée de $\mathfrak{a}$) est dit *régulier,* si $\alpha(\lambda) \neq 0$ pour toute racine restreinte α ; cela équivaut à ce que le stabilisateur K_λ de λ dans K coïncide avec M, centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K.

L'algèbre de Lie de M sera désignée par $\mathfrak{m}$; on note par τ l'action à gauche de K sur l'espace homogène compact K/M définie par $\tau(k)\cdot k_1M = kk_1M$. Soit $\mathfrak{l}$ l'orthogonal, pour la forme de Killing, de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$. L'espace tangent à K/M au point $\dot{e} = e\mathrm{M}$ s'identifie à $\mathfrak{l}$ par l'isomorphisme :

$$\mathfrak{l} \ni \mathrm{L} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{L}}(\dot{e}) f = \frac{d}{dt} f(\tau(\exp t\,\mathrm{L}) \cdot \dot{e})\,|_{t=0} \,.$$

Pour un point quelconque $\dot{k} = k\mathrm{M}$, on choisit $k \in \mathrm{K}$, tel que $\tau(k) \cdot \dot{e} = \dot{k}$; comme $\tau(k)$ est un difféomorphisme de K/M, nous pouvons encore identifier l'espace tangent à K/M en $\dot{k}$ avec $\mathfrak{l}$ par l'intermédiaire de l'application tangente à $\tau(k)$ au point $\dot{e}$.

Comme l'opposé de la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{l}$ est un produit scalaire sur $\mathfrak{l}$, invariant par M, il en résulte qu'il existe une unique métrique riemannienne $d(\cdot\,,\cdot)$ sur K/M, invariante par K et qui coïncide en tout point avec l'image par $\tau(k)$ de ce produit scalaire sur $\mathfrak{l}$.

Nous désignerons par dk_{M}, la mesure riemannienne associée, de masse totale égale à 1.

Pour $r > 0$ et $\dot{k}_0 \in \mathrm{K/M}$, posons :

$$\mathrm{B}_r(\dot{k}_0) = \{\dot{k} \in \mathrm{K/M}\,; d(\dot{k}, \dot{k}_0) < r\}.$$

Il n'est pas difficile de voir qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour tout $r > 0$ assez petit :

$$\mathrm{C}_1\, r^m \leqslant \mathrm{mes}(\mathrm{B}_r(\dot{k}_0)) = \int_{\mathrm{B}_r(\dot{k}_0)} dk_{\mathrm{M}} \leqslant \mathrm{C}_2\, r^m$$

où $m = \dim(\mathrm{K/M}) = \dim\ \mathfrak{l}$.

2. Intégrale de Poisson.

Si f est une fonction intégrable sur K/M, son *intégrale de Poisson* est la fonction définie sur $\mathfrak{p}$ par :

$$\mathrm{P}_\lambda(f)(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{K/M}} e^{i\mathrm{B}(k\cdot\lambda,\mathrm{X})} f(\dot{k})\, dk_{\mathrm{M}}\,, \text{ pour } \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}\,.$$

Cette fonction vérifie le système différentiel :

$$\partial(p)\,\mathrm{F} = p(i\lambda)\,\mathrm{F} \quad \forall\, p \in \mathrm{I}(\mathfrak{p}) \tag{1}$$

où $\mathrm{I}(\mathfrak{p})$ est la sous-algèbre des éléments K-invariants de l'algèbre symétrique $\mathrm{S}(\mathfrak{p})$ et $\partial(p)$ est l'opérateur différentiel à coefficients constants associé à p, i.e. :

$$\partial(p) = p(\partial/\partial x_1\,, \ldots, \partial/\partial x_n).$$

D'autre part, on démontre que toutes les solutions K-invariantes de (1) sont données par les multiples constants des fonctions :

$$\mathrm{J}_\lambda(\mathrm{X}) \equiv \mathrm{P}_\lambda(1)(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{K/M}} e^{i\,\mathrm{B}(k\cdot\lambda,\mathrm{X})}\, dk_{\mathrm{M}} . \tag{2}$$

Les fonctions définies par (2) sont appelées les *fonctions de Bessel généralisées*; cette appellation tire son origine du fait que lorsque $\mathfrak{g} = so(n, 1)$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, alors $\mathrm{J}_\lambda(\mathrm{X})$ est, essentiellement, égale à $\mathrm{J}_\nu(\mathrm{X})/\|\mathrm{X}\|^\nu$ où $\nu = \frac{n}{2} - 1$ et $\mathrm{J}_\nu(\mathrm{X})$ est la fonction de Bessel classique d'indice ν.

L'objet de cet article est de décrire les procédés nous permettant de recouvrir $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{K/M})$ à partir de son intégrale de Poisson $\mathrm{P}_\lambda(f)$. Cette étude a été entreprise dans le travail de Linden [9], pour le cas particulier où $\mathfrak{g} = so(n, 1)$ et $\mathfrak{k} = so(n)$.

D'autre part, Koranyi [8], dans le but de démontrer l'injectivité de la transformation de Poisson $f \longrightarrow \mathrm{P}_\lambda(f)$, a étudié le comportement à l'infini de $\mathrm{P}_\lambda(f)$ dans les directions complexes (i.e., les directions $t\mathrm{X}$ où $\mathrm{X} \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ et $t \longrightarrow +\infty$).

Un résumé des résultats de cet article est paru dans [3].

Par un calcul sans difficulté, nous avons :

$\forall \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$, $\forall k_0 \in \mathrm{K}$, $\forall s \in \mathrm{W}$, $\forall \mathrm{X} \in \mathfrak{p}$ et $\forall f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{K/M})$:

$$\begin{cases} \mathrm{P}_\lambda(f)(k_0 \cdot \mathrm{X}) = \mathrm{P}_\lambda(\tau(k_0)f)(\mathrm{X}) \\ \mathrm{P}_{s\cdot\lambda}(f)(\mathrm{X}) = \mathrm{P}_\lambda(f_s)(\mathrm{X}) \end{cases}$$

où $\mathrm{W} = \mathrm{M}^*/\mathrm{M}$ (M^* est le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K) est le groupe de Weyl de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ et

$$\tau(k_0)f(k\mathrm{M}) = f(k_0\, k\mathrm{M})$$
$$f_s(k\mathrm{M}) = f(k(m^*)^{-1}\,\mathrm{M}) \text{ si } s = m^*\mathrm{M} \text{ et } m^* \in \mathrm{M}^* .$$

Puisque tout élément de $\mathfrak{p}$ est conjugé par K d'un élément de $\mathfrak{a}$ et que, d'autre part, la fermeture de la chambre de Weyl $\bar{\mathfrak{a}}^+$ est un domaine fondamental pour l'action du groupe de Weyl sur $\mathfrak{a}$, on peut donc supposer, dans l'étude de $\mathrm{P}_\lambda(f)(\mathrm{X})$, que $\mathrm{X} \in \bar{\mathfrak{a}}^+$ et $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\bar{\mathfrak{a}}^+$. Dans toute la suite, nous nous intéresserons seulement aux éléments λ de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ qui sont réguliers de la forme :

$$\lambda = \xi + i\eta \quad \text{avec} \quad -\eta \in \mathfrak{a}^+ .$$

Pour $H \in \bar{\mathfrak{a}}^+$, $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$ et $(\dot{k}, \dot{k}_0) \in K/M \times K/M$, considérons la famille de noyaux $\{N_H^\lambda\}$ définis sur $K/M \times K/M$ par :

$$N_H^\lambda(\dot{k}_0, \dot{k}) = \frac{e^{iB(k \cdot \lambda, k_0 \cdot H)}}{J_\lambda(k_0 \cdot H)}.$$

Nous allons démontrer que $\{N_H^\lambda\}$ est une L^1-approximation de l'identité sur K/M, lorsque $\|H\| \longrightarrow +\infty$ dans tout cône à base compacte $\mathcal{B}$ contenu (strictement) dans $\mathfrak{a}^+$ (désigné, plus brièvement, par $\mathcal{B}$ est un c.b.c.). Plus précisément, nous avons le :

LEMME 1. – *Soient* $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$ et $\mathcal{B}$ *un c.b.c. contenu dans* $\mathfrak{a}^+$.

(i) $\forall\ (\dot{k}_0, \dot{k}) \in K/M \times K/M, \forall\ H \in \mathcal{B}, \forall\ k_1 \in K$:

$$N_H^\lambda(\tau(k_1)\cdot \dot{k}_0, \tau(k_1)\cdot \dot{k}) = N_H^\lambda(\dot{k}_0, \dot{k})$$

(ii) $\forall\ \dot{k}_0 \in K/M, \forall\ H \in \mathcal{B}$:

$$\int_{K/M} N_H^\lambda(\dot{k}_0, \dot{k})\, dk_M = 1$$

(iii) *Il existe une constante positive* A_λ, *telle que si* $H \in \mathcal{B}$ *et* $\|H\|$ *est assez grand, alors :*

$$\int_{K/M} |N_H^\lambda(\dot{k}_0, \dot{k})|\, dk_M \leqslant A_\lambda$$

(iv) *Pour tout voisinage* U *de* $\dot{e} = eM$ *dans* K/M :

$$\lim_{\substack{\|H\| \to +\infty \\ H \in \mathcal{B}}} \int_{U^c} |N_H^\lambda(\dot{e}, \dot{k})|\, dk_M = 0$$

où U^c *est le complémentaire de* U *par rapport à* K/M.

Ce lemme résulte (pour (iii) et (iv)) du développement asymptotique de J_λ obtenu par D. Barlet et J.L. Clerc [1] :

THEOREME 1. – *Soient* $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$ *et* $\mathcal{B}$ *un c.b.c. contenu dans* $\mathfrak{a}^+$ *; alors la fonction* $H \longrightarrow J_\lambda(H)$ *possède un développement asymptotique lorsque* $H \in \mathcal{B}$ et $\|H\| \longrightarrow +\infty$, *dont le premier terme est donné par :*

$$J_\lambda(H) \sim C_\lambda \Big(\prod_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha(H)^{-m_\alpha/2}\Big)\, e^{iB(\lambda, H)} \qquad (3)$$

où C_λ est une certaine constante complexe non nulle.

En effet, à cause de (i) et de la K-invariante de dk_M :

$$\begin{aligned}\int_{K/M} |N_H^\lambda(\dot{k}_0, \dot{k})|\, dk_M &= \int_{K/M} |N_H^\lambda(\dot{e}, \dot{k})|\, dk_M \\ &= |J_\lambda(H)|^{-1} \int_{K/M} e^{iB(k\cdot i\eta, H)}\, dk_M \\ &= |J_\lambda(H)|^{-1} \cdot J_{i\eta}(H)\end{aligned}$$

où $\lambda = \xi + i\eta \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$.

En utilisant l'estimation (3), il en résulte que

$$\int_{K/M} |N_H^\lambda(\dot{k}_0, \dot{k})|\, dk_M \sim B_\lambda = |C_{i\eta}|/|C_\lambda| .$$

Il suffit donc de choisir $A_\lambda > B_\lambda$ pour avoir (iii).

Pour (iv), nous avons :

$$\int_{U^c} |N_H^\lambda(\dot{e}, \dot{k})|\, dk_M = |J_\lambda(H)|^{-1} \int_{U^c} e^{B(k\cdot(-\eta), H)}\, dk_M .$$

D'autre part, nous avons le résultat suivant (cf. [1], lemme 4.1) : Pour tout $\mu \in \mathfrak{a}^+$ et pour tout H dans $\mathfrak{a}^+$:

$$B(k\cdot\mu, H) \leqslant B(\mu, H) \quad \forall k \in K \tag{4}$$

et l'égalité n'est atteinte que si $k \in K_\mu$ (stabilisateur de μ dans K). Appliquons ce résultat pour $\mu = -\eta \in \mathfrak{a}^+$, on trouve que si $\dot{k} \in U^c$, alors $B(k\cdot(-\eta), H) < B(-\eta, H)$.

Si $\omega = H/\|H\|$, par compacité, il existe $\epsilon > 0$, tel que : $\forall \dot{k} \in U^c$, $\forall\, \omega \in \{H \in \mathcal{B}, \|H\| = 1\}$:

$$B(k\cdot(-\eta), \omega) - B(-\eta, \omega) < -\epsilon .$$

D'où $\forall \dot{k} \in U^c$, $\forall H \in \mathcal{B}$: $B(k\cdot(-\eta), H) - B(-\eta, H) < -\epsilon\,\|H\|$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{U^c} |N_H^\lambda(\dot{e}, \dot{k})|\, dk_M &\leqslant e^{-B(\eta, H)}\, e^{-\epsilon\|H\|}\, |J_\lambda(H)|^{-1} \int_{U^c} dk_M \\ &\leqslant e^{-B(\eta, H)}\, e^{-\epsilon\|H\|}\, |J_\lambda(H)|^{-1} .\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (3) :

$$\int_{U^c} |N_H^\lambda(\dot{e}, \dot{k})|\, dk_M \leqslant C\, e^{-\epsilon\|H\|} \Big(\prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha(H)^{m_\alpha/2} \Big)$$

et cette dernière quantité tend vers zéro lorsque $\|H\| \longrightarrow +\infty$ dans $\mathcal{B}$.

Grâce au lemme 1 et aux techniques des approximations de l'identité (voir, pour cela, le livre de E.M. Stein et G. Weiss [11], p. 47-49), on peut démontrer le théorème suivant, qui est la forme faible du théorème de Fatou :

THEOREME 2. – *Soient* $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$ *et* $\mathcal{B}$ *un c.b.c. contenu dans* $\mathfrak{a}^+$, *alors :*

$$\lim_{\substack{\|H\| \to +\infty \\ H \in \mathcal{B}}} (J_\lambda(k_0 \cdot H))^{-1} P_\lambda(f)(k_0 \cdot H) = f(\dot{k}_0).$$

(i) *Uniformément, si* f *est continue sur* K/M ;

(ii) *dans* $L^p(K/M)$ *avec* $1 \leqslant p < +\infty$, *si* $f \in L^p(K/M)$;

(iii) *pour la topologie duale faible sur* $L^\infty(K/M)$, *si* $f \in L^\infty(K/M)$;

(iv) *vaguement, si* f *est une mesure signée finie et régulière* ;

(v) *au sens des distributions, si* f *est une distribution.*

3. Convergence admissible.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux résultats de convergence ponctuelle, plus précisément, le théorème 2 est étendu dans deux sens : pour $f \in L^1(K/M)$, nous démontrons la convergence de $P_\lambda(f)/J_\lambda$ vers f en presque tout point de K/M, ensuite cela a lieu dans des domaines admettant les cônes $\mathcal{B}$ comme des cas particuliers.

Fixons $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$ et $\mathcal{B}$ (un c.b.c. contenu dans $\mathfrak{a}^+$). Soient $T \in \mathcal{B}$ et $C \subset \mathfrak{p}$ un compact M-invariant (cette dernière hypothèse n'est pas essentielle ; voir Koranyi [5]) ; un *domaine* $\mathcal{B}$*-admissible tronqué, au point* $\dot{k}_0$, est un sous-ensemble de $\mathfrak{p}$ de la forme :

$$\mathfrak{A}_C^T(\dot{k}_0) = \{k_0 \cdot H + X \,;\, H \in \mathcal{B}, H \geqslant T \quad \text{et} \quad X \in C\}$$

où $H \geqslant T$ signifie que $H - T \in \mathcal{B}$.

Soit F une fonction définie sur $\mathfrak{p}$; on dit que F *converge de manière* $\mathcal{B}$*-admissible* vers $L \in \mathbf{C}$, *au point* $\dot{k}_0$, si pour tout compact M-invariant $C \subset \mathfrak{p}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T \in \mathcal{B}$ tel que :

$$\forall Y \in \mathfrak{A}_C^T(k_0) \Longrightarrow |F(Y) - L| < \epsilon .$$

Le lemme suivant nous permettra, dans la suite, de passer de la convergence dans $\mathcal{B}$ à la convergence admissible.

LEMME 2. – *Si,* $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$, $C \subset \mathfrak{p}$ *un compact* M-*invariant et* $\mathcal{B}$ *un c.b.c. contenu dans* $\mathfrak{a}^+$, *sont fixés, alors il existe* $T \in \mathcal{B}$ *et* $A > 0$ *tels que,* $\forall X \in C$, $\forall H \geqslant T$, $\forall (\dot{k}_0, \dot{k}) \in K/M \times K/M$:

$$|N^\lambda_{H+X}(\dot{k}_0, \dot{k})| \leqslant A\,|N^\lambda_H(\dot{k}_0, \dot{k})|.$$

Démonstration. –

$$\frac{|N^\lambda_{H+X}(\dot{k}_0, \dot{k})|}{|N^\lambda_H(\dot{k}_0, \dot{k})|} = |e^{iB(k\cdot\lambda, k_0\cdot X)}| \cdot \left|\frac{J_\lambda(k_0 \cdot H)}{J_\lambda(k_0 \cdot (H+X))}\right|$$

$$= |e^{iB(k\cdot\lambda, k_0\cdot X)}| \cdot \left|\frac{J_\lambda(H)}{J_\lambda(H+X)}\right| .$$

Le premier terme de ce produit est une fonction continue donc bornée sur le compact $K/M \times K \cdot C$.

Pour le second terme, remarquons que :

$$\frac{J_\lambda(H+X)}{J_\lambda(H)} = J_\lambda(H)^{-1}\, P_\lambda(e^{iB(\cdot\,\lambda, X)})\,(H)$$

et le théorème 2, (i) nous permet d'affirmer que nous avons, uniformément par rapport à X dans C:

$$\lim_{\substack{\|H\| \to +\infty \\ H \in \mathcal{B}}} \frac{J_\lambda(H+X)}{J_\lambda(H)} = e^{iB(\lambda, X)} .$$

Donc il existe $T \in \mathcal{B}$ et $A > 0$ tels que $\forall X \in C$ et $\forall H \geqslant T$:

$$\left|\frac{J_\lambda(H)}{J_\lambda(H+X)}\right| \leqslant A$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Pour $r > 0$, $\dot{k}_0 \in K/M$ et $f \in L^1(K/M)$, considérons la fonction maximale :

$$\mathfrak{M}(f)(\dot{k}_0) = \sup_{r>0}\, (\mathrm{mes}(B_r(\dot{k}_0)))^{-1} \int_{B_r(\dot{k}_0)} |f(\dot{k})|\, dk_M .$$

Comme pour le cas de la fonction maximale de Hardy-Littlewood, nous avons les résultats suivants (cf. Coifman et Weiss [2], p. 71) :

LEMME 3. – *Il existe* $C > 0$, *tel que* $\forall \epsilon > 0$, $\forall f \in L^1(K/M)$:

$$\mathrm{mes}\,\{\dot{k} \in K/M\,;\ \mathfrak{M}(f)(\dot{k}) > \epsilon\} \leqslant \frac{C}{\epsilon}\|f\|_1 .$$

COROLLAIRE. – *Soit* $f \in L^p(K/M)$, $1 < p \leqslant +\infty$; *alors* :

$$\| \mathcal{M}(f) \|_p \leqslant c_p \, \|f\|_p$$

où c_p *est une constante indépendante de* f.

Le point essentiel de la démonstration de la convergence admissible est contenu dans le lemme suivant :

LEMME 4. – *Avec les mêmes hypothèses que le lemme 2, si* $f \in L^1(K/M)$ *alors il existe* $T \in \mathcal{B}$ *et* $A > 0$ (*indépendants de* f *et* k_0) *tels que* :

$$\forall Y \in \mathcal{A}_C^T(\dot{k}_0) \ |(J_\lambda(Y))^{-1} \, P_\lambda(f)(Y)| \leqslant A \, \mathcal{M}(f)(\dot{k}_0). \qquad (5)$$

Démonstration. – Comme $\mathcal{M}(f)$ d'une part, et $P_\lambda(f)$, de l'autre, commutent à l'action de K, il suffit de démontrer (5) pour $k_0 = e$.

Soit $Y = H + X$ où $X \in C$ et $H \in \mathfrak{a}^+$:

$$|(J_\lambda(Y))^{-1} \, P_\lambda(f)(Y)| \leqslant \int_{K/M} |N_{H+X}^\lambda (\dot{e}, \dot{k})| \, |f(\dot{k})| \, dk_M .$$

D'après le lemme 2, il existe $A_1 > 0$ et $T_1 \in \mathcal{B}$ tels que $\forall Y \in \mathcal{A}_C^{T_1}(\dot{e})$:

$$|(J_\lambda(Y))^{-1} \, P_\lambda(f)(Y)| \leqslant A_1 \int_{K/M} |N_H^\lambda(\dot{e}, \dot{k})| \, |f(\dot{k})| \, dk_M .$$

Donc,

$$|(J_\lambda(Y))^{-1} \, P_\lambda(f)(Y)| \leqslant A_1 \, |J_\lambda(H)|^{-1} \int_{K/M} e^{-B(k \cdot \eta, H)} \, |f(\dot{k})| \, dk_M .$$

En utilisant l'estimation (3), il en résulte qu'il existe $T \in \mathcal{B}$ et $A > 0$ tels que pour tout $Y \in \mathcal{A}_C^T(\dot{e})$:

$$|(J_\lambda(Y))^{-1} \, P_\lambda(f)(Y)| \leqslant$$
$$A \Big(\prod_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha(H)^{m_\alpha/2} \Big) e^{B(\eta, H)} \int_{K/M} e^{-B(k \cdot \eta, H)} \, |f(\dot{k})| \, dk_M . \qquad (6)$$

Posons $\varphi_\eta^\omega(\dot{k}) = B(k \cdot \eta, \omega)$ où $\omega = H/\|H\|$.

Il n'est pas difficile de voir que $\dot{k} = \dot{e}$ est un point critique non dégénéré pour φ_η^ω, donc on peut appliquer le lemme de Morse à paramètres, ce qui va nous fournir une Carte C^∞ :

$$\chi_\omega : D_\rho = \{ L \in \mathbf{R}^m \ ; \|L\| < \rho \} \longrightarrow U$$

où $m = \dim(K/M)$, $\rho > 0$ et U est un voisinage ouvert de $\dot{e}$ dans K/M, tels que :

$$\chi_\omega(0) = \dot{e} \text{ et } (\varphi_\eta^\omega \circ \chi_\omega)(\mathrm{L}) = \mathrm{B}(\eta, \omega) + \mathrm{Q}(\mathrm{L}) \ \forall \mathrm{L} \in \mathrm{D}_\rho$$

avec $\mathrm{Q}(\mathrm{L}) = \mathrm{Q}(\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_m) = \mathrm{L}_1^2 + \ldots + \mathrm{L}_s^2 - \mathrm{L}_{s+1}^2 - \ldots - \mathrm{L}_m^2$ une forme quadratique de Signature $\mathrm{sgn}(\mathrm{Q}) = (s, m-s)$.

Comme $\dot{k} = \dot{e}$ est un minimum absolu pour φ_η^ω, alors

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{Q}) = (m, 0)$$

i.e. $\mathrm{Q}(\mathrm{L}) = \|\mathrm{L}\|^2$.

A l'aide de tous ces résultats, nous allons estimer l'intégrale qui figure au second membre de (6) :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{K/M}} e^{\mathrm{B}(\eta,\mathrm{H}) - \mathrm{B}(k\cdot\eta,\mathrm{H})} |f(\dot{k})|\, dk_{\mathrm{M}} &= \int_{\mathrm{K/M}} e^{\|\mathrm{H}\|(\varphi_\eta^\omega(\dot{e}) - \varphi_\eta^\omega(\dot{k}))} |f(\dot{k})|\, dk_{\mathrm{M}} \\ &= \int_{\mathrm{U}} + \int_{\mathrm{U}^c} = \mathrm{I} + \mathrm{II}.\end{aligned}$$

i) *Estimation de I* : A l'aide de la carte χ_ω :

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{D}_\rho} e^{-\|\mathrm{H}\|\cdot\|\mathrm{L}\|^2} |\widetilde{f}(\mathrm{L})|\, g(\mathrm{L})\, d\mathrm{L}$$

où $\widetilde{f} = f \circ \chi_\omega$ et g est la valeur absolue du Jacobien de χ_ω. Si dans cette dernière intégrale, on passe aux coordonnées polaires, on peut voir sans difficultés que :

$$\mathrm{I} \leqslant \mathrm{C}\left(\int e^{-\|\mathrm{H}\| t^2}\, t^{m-1}\, dt\right) \widetilde{\mathfrak{M}}(\widetilde{f}\cdot g)(0),$$

donc $\mathrm{I} \leqslant \mathrm{C}\, \|\mathrm{H}\|^{-m/2}\, \widetilde{\mathfrak{M}}(\widetilde{f}\cdot g)(0)$, où $\widetilde{\mathfrak{M}}(\cdot)$ est la fonction maximale de Hardy-Littlewood de $\mathbf{R}^m$.

A cause du caractère lipschitzien de χ_ω, il existe $c > 0$ telle que :

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(\widetilde{f}\cdot g)(0) \leqslant c\ \mathfrak{M}(f)(\dot{e}).$$

Donc $\mathrm{I} \leqslant \mathrm{C}\, \|\mathrm{H}\|^{-m/2}\, \mathfrak{M}(f)(\dot{e})$.

ii) *Estimation de II* : D'après l'inégalité (4) :

il existe $\epsilon > 0$, tel que $\forall \dot{k} \in \mathrm{U}^c$:

$$\varphi_\eta^\omega(\dot{e}) - \varphi_\eta^\omega(\dot{k}) < -\epsilon.$$

Donc :

$$\mathrm{II} \leqslant \int_{\mathrm{U}^c} e^{-\epsilon\|\mathrm{H}\|}\,|f(\dot{k})|\,dk_{\mathrm{M}} \leqslant e^{-\epsilon\|\mathrm{H}\|} \int_{\mathrm{K/M}} |f(\dot{k})|\,dk_{\mathrm{M}} \leqslant e^{-\epsilon\|\mathrm{H}\|}\, \mathfrak{M}(f)(\dot{e}).$$

En rassemblant les deux estimations de I et II, on obtient :

$$|(\mathrm{J}_\lambda(\mathrm{Y}))^{-1}\,\mathrm{P}_\lambda(f)(\mathrm{Y})| \leqslant \mathrm{C}\left(\prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha(\mathrm{H})^{m_\alpha/2}\right)\left(e^{-\epsilon\|\mathrm{H}\|} + \mathrm{C}\,\|\mathrm{H}\|^{-m/2}\right) \mathfrak{M}(f)(\dot{e}).$$

Ainsi, si $\|\mathrm{H}\|$ est assez grand :

$$|(\mathrm{J}_\lambda(\mathrm{Y}))^{-1}\,\mathrm{P}_\lambda(f)(\mathrm{Y})| \leqslant \mathrm{C}\left(\prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha(\mathrm{H})^{m_\alpha/2}\right) \|\mathrm{H}\|^{-m/2}\, \mathfrak{M}(f)(\dot{e}).$$

Or $\alpha(\mathrm{H}) \leqslant \|\mathrm{H}\|$ et $\sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha = m$, donc

$$\left[\prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha(\mathrm{H})^{m_\alpha/2}\right] \|\mathrm{H}\|^{-m/2} \leqslant 1 .$$

En conclusion, si $\|\mathrm{H}\|$ est assez grand :

$$|(\mathrm{J}_\lambda(\mathrm{Y}))^{-1}\,\mathrm{P}_\lambda(f)(\mathrm{Y})| \leqslant \mathrm{C}\,\mathfrak{M}(f)(\dot{e})$$

ce qui termine la démonstration du lemme 4.

Comme dans le cas de l'espace euclidien $\mathbf{R}^m$, en utilisant le lemme 3, son corollaire et le lemme 4 (voir, E.M. Stein [10], p. 8), on peut en déduire le théorème de Fatou :

THEOREME 5. – *Si* $\lambda \in \mathfrak{a} - i\,\mathfrak{a}^+$ *et* $\mathcal{B}$ *un c.b.c. contenu dans* $\mathfrak{a}^+$ *sont fixés, et si* $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{K/M})$, *alors* : $(\mathrm{J}_\lambda(\cdot))^{-1}\,\mathrm{P}_\lambda(f)(\cdot)$ *converge de manière* $\mathcal{B}$*-admissible, en presque tout point de* K/M, *vers* f.

Remarque. – Le théorème 5 peut être étendu au cas où f est une mesure signée finie et régulière μ sur K/M, et dans ce cas $(\mathrm{J}_\lambda(\cdot))^{-1}\,\mathrm{P}_\lambda(\mu)$ converge vers la dérivée de Radon-Nikodym de μ, de manière $\mathcal{B}$-admissible, en presque tout point de K/M.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BARLET et J.L. CLERC, Le comportement à l'infini des fonctions de Bessel généralisées, *Prépublications Institut Elie Cartan,* Janvier 1981, Nancy.

[2] R. COIFMAN et G. WEISS, Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes, *Lecture Notes in Mathematics,* n° 242, Springer Verlag, 1971.

[3] N. El-JAOUHARI, Théorème de Fatou pour les fonctions propres des opérateurs différentiels invariants par un groupe de déplacements de Cartan, *C.R.A.S.,* Paris, t. 295, Série I, (20/9/1982), 99-102.

[4] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric spaces,* Acad. Press., New-York, 1962.

[5] A. KORANYI, Boundary behaviour of Poisson integrals on symmetric spaces, *Trans. Amer, Math. Soc.,* 140 (1969), 393-409.

[6] A. KORANYI, Harmonic functions on Symmetric spaces, *Short courses presented at Washington University,* Marcel Dekker, 1972, pp. 379-412.

[7] A. KORANYI, A survey of Harmonic functions on Symmetric spaces, in *Proceedings Symp. Pure. Math.,* vol. 35, part. 1 (1979), 323-344.

[8] A. KORANYI, On the injectivity of the Poisson transform, *J. Funct. Anal.,* 45 (1982), 293-296.

[9] O. LINDEN, *Fatou theorems for Eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator,* Thesis, Yeshiva University, New-York, 1976.

[10] E.M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability properties of functions,* Princeton University Press, 1970.

[11] E.M. STEIN et G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces,* Princeton University Press, 1972.

Noureddine El-JAOUHARI,
ERA au C.N.R.S. n° 839
U.E.R. Sciences Mathématiques
Université de Nancy
B.P. 239
54506 Vandœuvre-les-Nancy.

Manuscrit reçu le 28 février 1983.