ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE DE LA HARPE
GEORGES SKANDALIS

Déterminant associé à une trace sur une algèbre de Banach

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 1 (1984), p. 241-260
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_241_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 1 (1984), 241-260

DÉTERMINANT ASSOCIÉ À UNE TRACE SUR UNE ALGÈBRE DE BANACH

par P. de la HARPE et G. SKANDALIS

Soit A une algèbre de Banach complexe. Notons $GL_1(A)$ le groupe des éléments inversibles de A (ou quasi-inversibles si A n'a pas d'unité) muni de la topologie normique, $GL_1^0(A)$ sa composante connexe et $DGL_1^0(A)$ le groupe dérivé de celle-ci. (Nous désignons en général par $D\Gamma$ le sous-groupe d'un groupe Γ formé des produits finis de commutateurs.) Cet article est la première partie d'un travail qui a pour but d'étudier le quotient $GL_1^0(A)/DGL_1^0(A)$ ainsi que le groupe $DGL_1^0(A)$. Nous définissons ici un déterminant sur $GL_1^0(A)$ (et non sur $GL_1(A)$ tout entier). Nous montrons dans la seconde partie que, pour certains types de C*-algèbres déjà considérés par T. Fack [7], le noyau de ce déterminant coïncide avec $DGL_1^0(A)$. Ce sujet suggère très naturellement un outillage de K-théorie algébrique ; pour les quelques propriétés générales du foncteur K_0 que nous utilisons ici (dont la périodicité de Bott), nous renvoyons le lecteur à [15] ou [11]. (Si A n'a pas d'unité, nous écrivons toutefois $K_0(A)$ ce que Taylor désigne par $\widetilde{K}_0(A)$; la notation de Taylor a le désavantage d'évoquer le K-groupe réduit d'un espace topologique compact Ω lorsque $A = C(\Omega)$.)

Dans un premier paragraphe, nous supposons donnés un espace de Banach E et une application linéaire continue τ de A dans E *traciale* au sens où $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tous $x, y \in A$; une telle application induit un homomorphisme de groupes $\underline{\tau}$ de $K_0(A)$ dans E. Nous définissons un *déterminant* Δ_τ, qui est un homomorphisme de source une forme stabilisée $GL_\infty^0(A)$ de $GL_1^0(A)$ et de but $E/\underline{\tau}(K_0(A))$, tel que $\Delta_\tau(\exp(i2\pi y))$ soit la classe de $\tau(y)$ pour tout $y \in A$. Le déterminant usuel sur

$M_n(\mathbf{C})$ est donc $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ si τ est la trace usuelle (avec $\tau(1) = n$), le déterminant de B. Fuglede et R. Kadison est $\exp(\mathrm{Re}(i2\pi\Delta_\tau))$ si τ est la trace normalisée sur un facteur fini continu, et le déterminant classique associé à l'algèbre (sans unité) des opérateurs à trace sur un espace de Hilbert de dimension infinie entre tout aussi naturellement dans notre cadre. Ce premier paragraphe est ainsi une réponse à la question du problème 5.11 de [2].

L'inclusion $DGL_\infty^0(A) \subset \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$ étant banale, il est naturel d'examiner quand l'égalité est vraie. Soient en particulier E_u le quotient de A par le sous-espace fermé engendré par les commutateurs additifs $xy - yx$ (avec $x, y \in A$) et $T: A \longrightarrow E_u$ la projection canonique; nous appelons *déterminant universel* de A l'homomorphisme Δ_T. Nous montrons au § 2 que $DGL_\infty^0(A)$ est dense dans $\mathrm{Ker}(\Delta_T)$; de plus, si A est séparable, alors $\mathrm{Ker}(\Delta_T)$ coïncide avec $\cap \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$, l'intersection étant prise sur toutes les traces $\tau : A \longrightarrow \mathbf{C}$. Certaines considérations de ce paragraphe sont proches d'un travail indépendant de M. Karoubi.

En général, il n'y a toutefois égalité ni entre $DGL_\infty^0(A)$ et $\mathrm{Ker}(\Delta_T)$, ni entre $\mathrm{Ker}(\Delta_T)$ et $\cap \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$. C'est ce que montrent les deux exemples de C*-algèbres du paragraphe suivant. (Nous réservons nos résultats positifs à la seconde partie.)

Nous terminons pour l'agrément du lecteur par une remarque montrant que, si A est une C*-algèbre approximativement finie avec unité et θ un nombre réel irrationnel, alors $\exp(i2\pi\theta) \subset DGL_\infty(A)$ si et seulement s'il existe deux unitaires $u, v \in A$ avec $\exp(i2\pi\theta) = uvu^{-1}v^{-1}$. L'argument repose sur un résultat de M. Pimsner et D. Voiculescu.

La seconde partie sera consacrée aux résultats suivants. Soit A une C*-algèbre approximativement finie simple avec unité; alors $DGL_1(A)$ coïncide avec le noyau de la restriction à $GL_1(A)$ du déterminant universel Δ_T; de plus le quotient de $DGL_1(A)$ par son centre (un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$) est un groupe simple. Si A est une C*-algèbre stable ou infinie simple avec unité, le déterminant universel est banal (ce qui résulte de [7]) et $DGL_1^0(A)$ est un groupe parfait.

Nous remercions D. Handelman pour ses utiles remarques sur les C*-algèbres approximativement finies non séparables (voir [10], et le début du § 3).

1. Le déterminant associé à une application traciale.

Soient A une algèbre de Banach (complexe), E un espace de Banach et $\tau : A \longrightarrow E$ une application linéaire continue traciale. Pour tout entier $n \geqslant 1$, nous notons $M_n(A)$ l'algèbre des $(n \times n)$-matrices sur A, qui est une algèbre de Banach pour une norme convenable. On écrit $M_\infty(A)$ la limite inductive de $(M_n(A))_{n \geqslant 1}$ relative aux inclusions standard schématisées par $* \longmapsto \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'application τ s'étend en une application

$$\begin{cases} M_\infty(A) \longrightarrow E \\ (a_{j,k})_{j,k \geqslant 1} \longmapsto \sum\limits_{j \geqslant 1} \tau(a_{j,j}) \end{cases}$$

encore notée τ.

Si A possède une unité, $GL_n(A)$ désigne le groupe des éléments inversibles de $M_n(A)$ muni de la topologie définie par la norme. Si A n'a pas d'unité, soit $\widetilde{A}$ l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité, qui est une algèbre de Banach pour une norme convenable ; $GL_n(A)$ désigne alors le sous-groupe topologique de $GL_n(\widetilde{A})$ formé des éléments du type $1 - x$ avec $x \in M_n(A)$. Dans tous les cas, on écrit $GL_\infty(A)$ la limite inductive de $(GL_n(A))_{n \geqslant 1}$ relative aux inclusions schématisées par $* \longmapsto \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c'est un groupe topologique de composante connexe $GL^0_\infty(A)$.

Soient Ω un espace compact et φ une application continue de Ω dans $GL_\infty(A)$ [respectivement $M_\infty(A)$] ; alors φ se factorise par $GL_n(A)$ [resp. $M_n(A)$] pour n convenable. Si Ω est de plus une variété différentiable [resp. un espace mesuré], il n'y a donc aucune difficulté à définir la classe de différentiabilité [resp. l'intégrale sur Ω] de φ. Soient $[\alpha_1, \alpha_2]$ un intervalle compact de la droite réelle et $\xi : [\alpha_1, \alpha_2] \longrightarrow GL^0_\infty(A)$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; nous définissons

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_\tau(\xi) &= \frac{1}{i2\pi}\, \tau\left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dot{\xi}(\alpha)\, \xi(\alpha)^{-1}\, d\alpha \right\} \\ &= \frac{1}{i2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tau\, \{\dot{\xi}(\alpha)\, \xi(\alpha)^{-1}\}\, d\alpha . \end{aligned}$$

La constante $i2\pi$ donne la "normalisation" suivante : si $A = \mathbf{C}$, si τ est l'identité et si ξ est le lacet de degré un donné par $\xi(\alpha) = \exp(i2\pi\alpha) \in \mathbf{C}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbf{C}) \subset \mathrm{GL}_\infty(\mathbf{C})$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$, alors $\widetilde{\Delta}_\tau(\xi) = 1$.

LEMME 1. – a) *Soient* $\xi_1, \xi_2 : [\alpha_1, \alpha_2] \longrightarrow \mathrm{GL}^0_\infty(A)$ *deux chemins comme ci-dessus et* ξ *leur produit défini par*

$$\xi(\alpha) = \xi_1(\alpha)\,\xi_2(\alpha)$$

pour tout $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$; *alors* $\widetilde{\Delta}_\tau(\xi) = \widetilde{\Delta}_\tau(\xi_1) + \widetilde{\Delta}_\tau(\xi_2)$.

b) *Soit* $\xi : [\alpha_1, \alpha_2] \longrightarrow \mathrm{GL}^0_\infty(A)$ *un chemin avec* $\|\xi(\alpha) - 1\| < 1$ *pour tout* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$; *alors*

$$i2\pi\widetilde{\Delta}_\tau(\xi) = \tau(\mathrm{Log}(\xi(\alpha_2))) - \tau(\mathrm{Log}(\xi(\alpha_1))).$$

c) *L'intégrale* $\widetilde{\Delta}_\tau(\xi)$ *ne dépend que de la classe d'homotopie de* ξ *(à extrémités fixes).*

d) *L'application* $\widetilde{\Delta}_\tau$, *définie sur les lacets basés en l'élément neutre de* $\mathrm{GL}^0_\infty(A)$, *induit l'homomorphisme de groupes abéliens* $\underline{\tau} : K_0(A) \approx \pi_1(\mathrm{GL}^0_\infty(A)) \longrightarrow E$ *décrit comme suit :*

Cas où A *possède une unité. Soient* e *un idempotent dans* $M_\infty(A)$ *et* $[e]$ *sa classe dans* $K_0(A)$; *alors* $\underline{\tau}([e]) = \tau(e)$.

Cas où A *est sans unité ; on désigne par* $\widetilde{A}$ *l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité, par* $\epsilon : \widetilde{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ *l'augmentation canonique, et on prolonge* τ *en posant* $\tau(1) = 0$. *Soient* $e \in M_\infty(\widetilde{A})$ *un idempotent,* n *le rang de son image par* ϵ *dans* $M_\infty(\mathbf{C})$ *et* $[e] - [1_n]$ *la classe de* $K_0(A)$ *définie par* e (voir [15], nos 7.5 et 7.7) ; *alors* $\underline{\tau}([e] - [1_n]) = \tau(e)$.

Preuve. (Voir [1]. – lemme 5 de l'appendice). – Pour a), on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}_\tau(\xi) = \frac{1}{i2\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tau\{\dot{\xi}_1(\alpha)\,\xi_1(\alpha)^{-1} \\ + \xi_1(\alpha)\,\dot{\xi}_2(\alpha)\,\xi_2(\alpha)^{-1}\,\xi_1(\alpha)^{-1}\}\,d\alpha \\ = \widetilde{\Delta}_\tau(\xi_1) + \widetilde{\Delta}_\tau(\xi_2)\end{aligned}$$

car τ est traciale. L'affirmation b) résulte de l'existence d'une primitive $\tau(\mathrm{Log}(\xi(\alpha)))$ de $\tau(\dot{\xi}(\alpha)\,\xi(\alpha)^{-1})\,d\alpha$. L'affirmation c) résulte de a), b) et de ce qu'on peut écrire $\xi_2 = \xi_1\,\xi'_1\,\xi'_2 \ldots \xi'_k$ avec $\|\xi'_j(\alpha) - 1\| < 1$ pour tout α et pour $j = 1, 2, \ldots, k$.

Il n'y a plus rien à montrer pour d) ; la formulation de l'isomorphisme de Bott à laquelle nous nous référons est celle de [11], § III.1. □

DEFINITION. – *On appelle déterminant associé à l'application linéaire continue traciale* $\tau : A \longrightarrow E$ *et on note* Δ_τ *l'application de* $GL_\infty^0(A)$ *dans le groupe additif* $E/\underline{\tau}(K_0(A))$ *qui fait correspondre à* $x \in GL_\infty^0(A)$ *la classe* $p(\widetilde{\Delta}_\tau(\xi))$, *où* ξ *est un chemin dans* $GL_\infty^0(A)$ *continûment différentiable par morceaux d'origine* 1 *et d'extrémité* x, *et où* $p : E \longrightarrow E/\underline{\tau}(K_0(A))$ *est la projection canonique.*

PROPOSITION 2. – *On conserve les notations ci-dessus.*

a) *L'application* Δ_τ *est un homomorphisme.*

b) $i2\pi\Delta_\tau(\exp(y)) = p(\tau(y))$ *pour tout* $y \in M_\infty(A)$.

c) *Si* $A = M_n(\mathbf{C})$ *et si* τ *est la trace usuelle (avec* $\tau(1) = n$), *alors la restriction à* $GL_1^0(A) = GL(n, \mathbf{C})$ *de* $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ *est le déterminant usuel.*

d) *Si* A *est une* C**-algèbre et si* τ *est une trace positive normalisée, alors la restriction à* $GL_1^0(A)$ *de* $\exp(\mathrm{Re}(i2\pi\Delta_\tau))$ *est le déterminant de Fuglede-Kadison* [8].

e) *Si* H *est un espace de Hilbert de dimension infinie,* A *l'algèbre de Banach des opérateurs à trace sur* H *et* τ *la trace usuelle sur* A, *alors la restriction à* $GL_1(A)$ *de* $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ *est encore le déterminant usuel* (voir [4] § XI.9).

Preuve. – L'affirmation a) résulte du lemme 1 a) et b) est immédiat. Soient $A = M_n(\mathbf{C})$ et τ la trace usuelle. Soient $y \in M_n(\mathbf{C})$ et $x = \exp(y)$. Alors $\Delta_\tau(x)$ est la classe dans $\mathbf{C}$ modulo $\underline{\tau}(K_0(A)) = \mathbf{Z}$ de $\frac{1}{i2\pi}\tau(y)$, donc

$$\exp(i2\pi\Delta_\tau(x)) = \exp(\tau(y)) = \det(x).$$

Les homomorphismes $\exp(i2\pi\Delta_\tau)$ et det de $GL(n, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^*$ coïncident ainsi sur l'image de l'exponentielle, i.e. partout.

Si A et τ sont comme dans d), alors $\underline{\tau}(K_0(A)) \subset \mathbf{R}$ et l'écriture $\exp(\mathrm{Re}(i2\pi\Delta_\tau)) : GL_\infty^0(A) \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ a bien un sens. Soit $x \in GL_1(A) \cap GL_\infty^0(A)$; comme x est inversible, sa décomposition polaire $u|x|$ a lieu dans A, et $\Delta_\tau(x) = \Delta_\tau(u) + \Delta_\tau(|x|)$. On peut choisir un chemin connectant 1 à u dans les unitaires de $GL^0_\infty(A)$, de sorte que $\Delta_\tau(u) \in \mathbf{R}$. Par suite

$$\mathrm{Re}(i2\pi\Delta_\tau(x)) = i2\pi\Delta_\tau(|x|) = \tau(\mathrm{Log}\,|x|)$$

et
$$\exp(\mathrm{Re}(i2\pi\Delta_\tau))(x) = \exp(\tau(\mathrm{Log}\,|x|)).$$

On retrouve la définition du déterminant de Fuglede-Kadison, d'où d). On laisse la vérification de l'affirmation e) au lecteur. □

Soit A une C*-algèbre séparable. On sait que $K_0(A)$ est dénombrable (car deux idempotents normiquement proches dans $M_n(A)$ sont équivalents). Si $\tau : A \longrightarrow \mathbf{C}$ est une trace positive normalisée, $\underline{\tau}(K_0(A))$ est donc un sous-groupe dénombrable de $\mathbf{C}$ (même de $\mathbf{R}$). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & GL^0_\infty(A) \arrow[dll, "\Delta_\tau"'] \arrow[drr, "\det_{FK}"] & & \\
\mathbf{C}/\underline{\tau}(K_0(A)) \arrow[rr, "\alpha"] & & \mathbf{C}/\mathbf{R} \arrow[rr, "\beta"] & & \mathbf{R}^*_+
\end{tikzcd}$$

où Δ_τ est surjectif vu l'affirmation b), où α est la projection canonique, où $\beta(\lambda + \mathbf{R}) = \exp(\mathrm{Re}(i2\pi\lambda))$, et où $\det_{FK}$ est le déterminant de Fuglede-Kadison. Or β est un isomorphisme et le noyau de α est non nul (même non dénombrable). On a donc $\mathrm{Ker}(\Delta_\tau) \subsetneqq \mathrm{Ker}(\det_{FK})$; en ce sens Δ_τ fournit strictement plus d'information que $\det_{FK}$. (Voir aussi la remarque suivant la proposition 13).

2. Le déterminant universel et son noyau.

Soit A une algèbre de Banach. Notons E_u le quotient de A par le sous-espace fermé $\overline{[A, A]}$ de A engendré par les commutateurs additifs. (Si A est une C*-algèbre, E_u est le complexifié de l'espace noté A^q dans [3].) Nous appelons *application traciale universelle* de A et nous notons T (parfois T_A) la projection canonique de A sur E_u ; l'homomorphisme

$$\Delta_T : GL^0_\infty(A) \longrightarrow E_u/\underline{T}(K_0(A))$$

est alors le *déterminant universel* de A. Toute application traciale $\tau : A \longrightarrow E$ est de la forme σT avec σ une application linéaire continue de E_u dans E, et on a $DGL^0_\infty(A) \subset \mathrm{Ker}(\Delta_T) \subset \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$. Il est naturel de demander quand ces inclusions donnent lieu à des égalités. La proposition suivante indique une réponse partielle; nous isolons une partie de la preuve dans le lemme 3(a), et le lemme 3(b) sera utile dans la seconde partie de ce travail.

LEMME 3. – *Soit τ une application traciale sur A.*

a) *Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$; il existe $y_1, \dots, y_k \in M_\infty(A)$ avec*

$$x = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \exp(y_j) \quad et \quad \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \tau(y_j) = 0$$

b) *Soient $x_1, \dots, x_k \in M_\infty(A)$ avec $\|x_j - 1\| < 1 \ (1 \leqslant j \leqslant k)$ et $\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} (1 - \|x_j - 1\|) > 1/2$. Alors*

$$\tau(\mathrm{Log}(x_1 \dots x_k)) = \tau(\mathrm{Log}(x_1)) + \dots + \tau(\mathrm{Log}(x_k)).$$

Preuve. – a) Soit $\xi : [0,1] \longrightarrow GL^0_\infty(A)$ un chemin d'origine 1 et d'extrémité x tel que $\widetilde{\Delta}_\tau(\xi) = 0$. Soit k un entier tel que $\left\|\xi\left(\frac{j-1}{k}\right)^{-1} \xi\left(\frac{j}{k}\right) - 1\right\| < 1 \ (j = 1, \dots, k)$. On pose

$$y_j = \mathrm{Log}\left\{ \xi\left(\frac{j-1}{k}\right)^{-1} \xi\left(\frac{j}{k}\right) \right\}$$

et on définit

$$\eta(\alpha) = \xi\left(\frac{j}{k}\right) \exp\{(k\alpha - j)\, y_j\} \qquad \frac{j-1}{k} \leqslant \alpha \leqslant \frac{j}{k}$$

pour $j = 1, \dots, k$. On suppose de plus k assez grand pour que $\|\eta(\alpha)\,\xi(\alpha)^{-1} - 1\| < 1$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.

Le lemme 1 montre que η est un chemin d'origine 1 et d'extrémité x tel que $\widetilde{\Delta}_\tau(\eta) = \widetilde{\Delta}_\tau(\xi)$. On a bien $x = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \exp(y_j)$ et $i2\pi\widetilde{\Delta}_\tau(\eta) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \tau(y_j) = 0$.

b) Rappelons d'abord qu'on a pour tout $x \in M_\infty(A)$ avec $\|x - 1\| < 1$

$$\|\operatorname{Log} x\| = \|\operatorname{Log}(1-(1-x))\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \|1-x\|^n$$
$$= \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-\|1-x\|}\right)$$

et pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\|\exp(\alpha \operatorname{Log} x)\| \leqslant \exp(\alpha \|\operatorname{Log} x\|) \leqslant \frac{1}{1-\|1-x\|}$$

$$\|\exp(\alpha \operatorname{Log} x) - 1\| \leqslant \exp(\alpha \|\operatorname{Log} x\|) - 1 \leqslant \frac{\|1-x\|}{1-\|1-x\|}.$$

Soit $\xi : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}^0_\infty(\mathrm{A})$ le chemin défini par

$$\xi(\alpha) = \exp(\alpha \operatorname{Log} x_1) \ldots \exp(\alpha \operatorname{Log} x_k).$$

Alors

$$\|\xi(\alpha) - 1\| \leqslant \|\exp(\alpha\operatorname{Log} x_1) - 1\| \, \|\exp(\alpha \operatorname{Log} x_2)\| \ldots \|\exp(\alpha \operatorname{Log} x_k)\|$$
$$+ \ldots + \|\exp(\alpha \operatorname{Log} x_k) - 1\|$$
$$\leqslant \frac{\|x_1 - 1\|}{1-\|x_1-1\|} \frac{1}{1-\|x_2-1\|} \cdots \frac{1}{1-\|x_k-1\|}$$
$$+ \ldots + \frac{\|x_k-1\|}{1-\|x_k-1\|}$$
$$= \left\{ \prod_{1\leqslant j \leqslant k} (1-\|x_j-1\|) \right\}^{-1} - 1 < 1$$

par hypothèse pour tout $\alpha \in [0,1]$. Il résulte donc du lemme 1b) que $i2\pi\widetilde{\Delta}_\tau(\xi) = \tau\{\operatorname{Log}(\exp \operatorname{Log} x_1 \ldots \exp \operatorname{Log} x_k)\} = \tau\{\operatorname{Log}(x_1 \ldots x_k)\}$.
D'autre part ξ est produit des chemins $\alpha \longmapsto \exp(\alpha \operatorname{Log} x_j)$ et il résulte du lemme 1 a) que $i2\pi\widetilde{\Delta}_\tau(\xi) = \tau(\operatorname{Log} x_1) + \ldots + \tau(\operatorname{Log} x_k)$ d'où le résultat. □

PROPOSITION 4. – *Les adhérences dans* $\mathrm{GL}_\infty(\mathrm{A})$ *de* $\operatorname{Ker}(\Delta_\mathrm{T})$ *et de* $\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})$ *coïncident.*

Preuve. – L'inclusion non banale à vérifier est celle de $\operatorname{Ker}(\Delta_\mathrm{T})$ dans $\overline{\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})}$.

Rappelons le fait évident suivant : soient Γ un groupe, n un entier positif et $\alpha, \beta \in \Gamma$; alors $\alpha^n \beta^n (\alpha^{-1}\beta^{-1})^n \in \mathrm{D}\Gamma$. En particulier, pour tous $a, b \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$:

$$(*)\quad \begin{aligned}&\exp(a)\exp(b)\exp(-a-b)\\ &= \lim_{n\to\infty} \exp(a)\exp(b)\left\{\exp\left(-\frac{a}{n}\right)\exp\left(-\frac{b}{n}\right)\right\}^n \in \overline{\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})}.\end{aligned}$$

Soient alors $x \in \mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$ et $y_1, \ldots, y_k$ comme dans le lemme 3(a). Pour montrer que

$$\begin{aligned} x = &\{\exp(y_1)\exp(y_2)\exp(-y_1-y_2)\}\\ &\{\exp(y_1+y_2)\exp(y_3)\exp(-y_1-y_2-y_3)\}\\ &\ldots\{\exp(y_1+\ldots y_{k-1})\exp(y_k)\exp(-y_1-\ldots-y_k)\}\\ &\exp(y_1+\ldots+y_k)\end{aligned}$$

est dans $\overline{\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})}$, il suffit donc de vérifier que

$$\exp(y_1+\ldots+y_k) \in \overline{\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})},$$

ou encore que $\exp(z) \in \overline{\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})}$ pour tout $z \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{T}(z) = 0$.

Soit z un tel élément. Par définition de T, il existe arbitrairement près de z un élément de la forme $\Sigma\,[a_j, b_j]$ avec $a_j, b_j \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$ et $j = 1, \ldots, \ell$. En vertu de (*), il suffit de vérifier que $\exp([a,b]) \in \overline{\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})}$ pour tous $a, b \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$. Or ce dernier fait résulte de l'identité

$$\exp(ab-ba) = \lim_{n\to\infty}\left\{\exp\left(-\frac{a}{n}\right)\exp\left(-\frac{b}{n}\right)\exp\left(\frac{a}{n}\right)\exp\left(\frac{b}{n}\right)\right\}^{n^2}$$

et la preuve est achevée. □

Nous montrons au paragraphe suivant qu'il existe une C*-algèbre A (déjà considérée dans [13]) pour laquelle $\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A}) \subsetneq \mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$.

Appelons *trace* sur une algèbre de Banach A une forme linéaire continue $\tau : \mathrm{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tous $a, b \in \mathrm{A}$. Lorsque A est une C*-algèbre et sauf mention expresse, une telle trace n'est donc pas nécessairement positive. Notre second objectif pour ce paragraphe est de comparer $\mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$ et l'intersection des $\mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$ prise sur toutes les traces τ sur A.

LEMME 5. — *Soient* E *un espace de Banach,* D *un sous-ensemble dénombrable de* E *et* C *un convexe fermé du dual fort* E′ *de* E.

Soit $\eta \in \mathrm{E}$ *un point tel que* $\tau(\eta) \in \tau(\mathrm{D})$ *pour tout* $\tau \in \mathrm{C}$. *Alors il existe* $\kappa \in \mathrm{D}$ *tel que* $\tau(\eta) = \tau(\kappa)$ *pour tout* $\tau \in \mathrm{C}$.

Preuve. – Pour tout $\delta \in \mathrm{D}$, considérons l'hyperplan fermé $\mathrm{H}_\delta = \{\tau \in \mathrm{E}' \mid \tau(\eta - \delta) = 0\}$ et le convexe fermé $\mathrm{C}_\delta = \mathrm{C} \cap \mathrm{H}_\delta$ de E'. Par hypothèse $\mathrm{C} = \bigcup_{\delta \in \mathrm{D}} \mathrm{C}_\delta$. Mais C est un espace métrique complet et le théorème de Baire implique qu'il existe $\kappa \in \mathrm{D}$ et un ouvert U de E' tels que $\phi \neq \mathrm{U} \cap \mathrm{C} \subset \mathrm{C}_\kappa$, donc tel que $\tau(\eta) = \tau(\kappa)$ pour tout $\tau \in \mathrm{U} \cap \mathrm{C}$. Par convexité de C, on a aussi $\tau(\eta) = \tau(\kappa)$ pour tout $\tau \in \mathrm{C}$. □

PROPOSITION 6. – *Soient* A *une algèbre de Banach et* $x \in \mathrm{GL}^0_\infty(\mathrm{A})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $x \in \mathrm{Ker}(\Delta_\mathrm{T})$.

(ii) *Il existe* $y_1, \ldots, y_k \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$ *avec* $x = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \exp(y_j)$ *et* $\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \mathrm{T}(y_j) = 0$.

(iii) *Il existe* $y_1, \ldots, y_k \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$ *avec* $x = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \exp(y_j)$ *et* $\sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \tau(y_j) = 0$ *pour toute trace* τ *sur* A.

Si A *est séparable, ces conditions sont encore équivalentes à*

(iv) $x \in \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$ *pour toute trace* τ *sur* A.

Preuve. – L'équivalence de (i) avec (ii) résulte du lemme 3(a), celle de (ii) avec (iii) de la définition de T et du théorème de Hahn-Banach, et l'implication de (iv) par (i) est banale.

Supposons donc que A est séparable et que la condition (iv) est vérifiée. Ecrivons $x = \exp(y_1) \ldots \exp(y_k)$ et

$$\eta = \frac{1}{i2\pi} \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} y_j \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})\,;$$

par hypothèse $\tau(\eta) \in \underline{\tau}(\mathrm{K}_0(\mathrm{A}))$ pour toute trace τ sur A.

Considérons l'espace de Banach E_u introduit au début du paragraphe et prenons pour C le dual fort E'_u de E_u. Soit η_u l'image canonique de η dans E_u : si η est une matrice $(\eta_{j,k})_{1 \leqslant j,k < \infty}$. alors η_u est la classe modulo $\overline{[\mathrm{A},\mathrm{A}]}$ de la somme finie $\sum_{1 \leqslant j < \infty} \eta_{j,j} \in \mathrm{A}$. Soient $\mathrm{D} \subset \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$ un système de représentants de $\mathrm{K}_0(\mathrm{A})$ et D_u son image canonique dans E_u.

L'hypothèse s'écrit $\tau(\eta_u) \in \tau(\mathrm{D}_u)$ pour tout $\tau \in \mathrm{C}$. Comme A est séparable, D_u est dénombrable et il existe par le lemme 5 un élément $\kappa_u \in \mathrm{D}_u$ avec $\tau(\eta_u) = \tau(\kappa_u)$ pour tout $\tau \in \mathrm{C}$. Par suite il existe $\kappa \in \mathrm{K}_0(\mathrm{A})$ avec $\tau(\eta) = \underline{\tau}(\kappa)$ pour tout $\tau \in \mathrm{E}'_u$, donc aussi avec $\mathrm{T}(\eta) = \underline{\mathrm{T}}(\kappa)$. En d'autres termes ($p$ étant comme dans la définition du § 1) $\Delta_{\mathrm{T}}(x) = p(\mathrm{T}(\eta)) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$. □

PROPOSITION 6 bis. – *Soient* A *une* C*-*algèbre et* $x \in \mathrm{GL}^0_\infty(\mathrm{A})$. *Les conditions (i) à (iii) de la proposition 6 sont équivalentes à* (iii′) *Il existe* $y_1, \ldots, y_k \in \mathrm{M}_\infty(\mathrm{A})$ *avec* $x = \prod_{1 \leq j \leq k} \exp(y_j)$ *et* $\sum_{1 \leq j \leq k} \tau(y_j) = 0$ *pour toute trace positive* τ *sur* A.
Si A *est séparable, ces conditions sont encore équivalentes à* (iv′) $x \in \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$ *pour toute trace positive* τ *sur* A.

Preuve. – C'est un résultat dû essentiellement à Grothendieck que toute trace sur A est combinaison linéaire de quatre traces positives. (Voir [9] et la proposition 2.8 de [3].) Par suite (iii) et (iii′) sont équivalents et impliquent (iv′). On achève comme pour la proposition 6, mais en considérant cette fois le convexe de E'_u formé des traces (hermitiennes) positives. □

Considérons un élément de $\mathrm{GL}^0_\infty(\mathrm{A})$ et sa décomposition polaire $x = u\,|x|$. Il résulte de la proposition 6 bis et en particulier de la condition (iii′) que, si $x \in \mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$, alors u et $|x|$ sont dans $\mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$.

Nous montrons au paragraphe suivant qu'il existe une C*-algèbre approximativement finie (non séparable) pour laquelle l'implication de (i) par (iv) (et a fortiori par (iv′)) n'est pas vérifiée.

On peut reformuler comme suit la question de ce paragraphe. Rappelons d'abord que $\mathrm{DGL}_\infty(\mathrm{A}) = \mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})$, comme le montrent des calculs matriciels tout à fait élémentaires. (Voir par exemple les indications pour l'exercice II.6.13 de [11]. Il faut toutefois savoir qu'il peut arriver que l'inclusion de $\mathrm{DGL}^0_1(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{DGL}_1(\mathrm{A})$ soit stricte [16].) Rappelons ensuite qu'on définit les groupes abéliens

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{GL}_\infty(\mathrm{A})/\mathrm{DGL}_\infty(\mathrm{A}) = \mathrm{GL}_\infty(\mathrm{A})/\mathrm{DGL}^0_\infty(\mathrm{A})$$

$$\mathrm{K}_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}) = \mathrm{GL}_\infty(\mathrm{A})/\mathrm{GL}^0_\infty(\mathrm{A})$$

et l'épimorphisme canonique $\pi_A : K_1(A) \longrightarrow K_1^{top}(A)$ dont le noyau est l'abélianisé de $GL_\infty^0(A)$ [12]. Si $\tau : A \longrightarrow E$ est une application traciale, Δ_τ induit un homorphisme

$$\delta_\tau : \mathrm{Ker}(\pi_A) \longrightarrow E/\underline{\tau}(K_0(A)).$$

Soient en particulier $T : A \longrightarrow E_u$ l'application traciale universelle et $\delta_T : \mathrm{Ker}(\pi_A) \longrightarrow E_u/\underline{T}(K_0(A))$ l'épimorphisme associé. La question de ce paragraphe consiste à demander quand δ_T est un isomorphisme.

3. Deux exemples.

Le premier exemple est une C*-algèbre approximativement finie non séparable dont nous définissons d'abord le groupe des dimensions. Pour cet exemple, nous admettons l'hypothèse du continu (afin d'invoquer [10], voir plus bas).

LEMME 7. – *On considère* $\mathbf{R}^3$ *comme espace vectoriel sur* $\mathbf{Q}$. *Il existe une forme linéaire* $\Phi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{Q}$ *possédant les deux propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(\Phi) - \{0\}$, *il existe* $\lambda \in \mathbf{R}$ *avec* $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \notin \mathrm{Ker}(\Phi)$.

(ii) *La restriction à* $\mathrm{Ker}(\Phi)$ *de toute application* $\mathbf{R}$*-linéaire surjective* Ψ *de* $\mathbf{R}^3$ *sur* $\mathbf{R}$ *ou sur* $\mathbf{R}^2$ *est encore surjective.*

Preuve. – Soient V la droite réelle considérée comme espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ et W son dual. Il existe un ensemble I dont le cardinal est la puissance du continu $\mathbf{c}$ et une famille $(\mathbf{Q}_\iota)_{\iota\in I}$ de copies de $\mathbf{Q}$ avec $V = \oplus \mathbf{Q}_\iota$. Comme $W \approx \pi \mathbf{Q}_\iota$, la $\mathbf{Q}$-dimension de W est strictement supérieure à $\mathbf{c}$. Munissons W d'une structure d'espace vectoriel *réel* en posant

$$\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \varphi \in W \quad x \in V(= \mathbf{R}).$$

Alors $\dim_{\mathbf{R}} W > \mathbf{c}$, sinon

$$\dim_{\mathbf{Q}} W \leqslant (\dim_{\mathbf{R}} W)(\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) = (\mathbf{c})^2 = \mathbf{c}$$

contrairement à ce qui précède. En particulier $\dim_{\mathbf{R}} W \geqslant 3$ et il existe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dans W qui sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendants.

Considérons la forme $\mathbf{Q}$-linéaire

$$\Phi : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{Q} \\ (x, y, z) \longmapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z). \end{cases}$$

Par hypothèse sur les φ_j, la forme $\mathbf{Q}$-linéaire

$$\begin{cases} V \longrightarrow \mathbf{Q} \\ \lambda \longmapsto \varphi_1(\lambda x) + \varphi_2(\lambda y) + \varphi_3(\lambda z) = \Phi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \end{cases}$$

est non nulle pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 - \{0\}$. En particulier l'assertion (i) est vraie.

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$, soit H un hyperplan de E et soit $\Psi : E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective. Si $\mathrm{Ker}(\Psi) \not\subset H$, alors $\Psi(H) = F$ (c'est un exercice élémentaire d'algèbre linéaire). Soit en particulier Ψ comme dans l'assertion (ii). Alors $\mathrm{Ker}(\Psi)$ est un $\mathbf{R}$-sous-espace non trivial de $\mathbf{R}^3$, qui n'est pas contenu dans $\mathrm{Ker}(\Phi)$ vu l'assertion (i). La restriction de Ψ à $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est donc encore surjective. □

Considérons $\mathbf{R}^3$ comme un *groupe abélien ordonné* pour l'ordre strict défini par

$$(x, y, z) \geqslant 0 \begin{cases} \text{si } x > 0, y > 0, z > 0 \\ \text{ou si } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Soit G le groupe $\mathrm{Ker}(\Phi)$ muni de l'ordre relatif, qui est un groupe de dimensions (théorème 2.2 de [5]). Soit A une C*-algèbre approximativement finie dont G soit le groupe des dimensions; une telle algèbre existe. (Si G était séparable, cela résulterait du théorème 5.5 de [6]; en fait G ne l'est pas, mais on peut appliquer un théorème de Goodearl et Handelman [10] si l'on veut bien admettre l'hypothèse du continu.) Choisissons

$$g_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G - \{0\} \quad \text{avec} \quad g_0 > 0$$

et un projecteur $p \in A$ dont la classe dans $K_0(A) = G$ soit $[p] = g_0$. En vertu du lemme 7, il existe un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $\lambda g_0 \notin G$. Posons $u = \exp(i2\pi\lambda p)$.

Proposition 8. — *Avec les notations ci-dessus, on a*

(i) $u \notin \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$ *pour toute trace* $\tau : A \longrightarrow \mathbf{C}$.

(ii) $u \notin \mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$ *avec* T *l'application traciale universelle de* A.

Preuve. – Soit $\tau : A \longrightarrow \mathbf{C}$ une trace non nulle. Alors $\Delta_\tau(u)$ est la classe modulo $\underline{\tau}(G)$ de $\tau(\lambda p)$. Si la trace τ était hermitienne positive, alors $\underline{\tau} : G \longrightarrow \mathbf{R}$ serait $\mathbf{Z}$-linéaire positive, et s'étendrait donc en une application $\mathbf{R}$-linéaire surjective (car non nulle) de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. En fait, τ est combinaison linéaire de traces positives, donc $\underline{\tau} : G \longrightarrow \mathbf{C}$ s'étend en une application $\mathbf{R}$-linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{C}$ dont l'image coïncide avec celle de $\underline{\tau}$ par le lemme 7(ii). Par suite $\tau(\lambda p) = \lambda\tau(p) \in \underline{\tau}(G)$ et $u \in \mathrm{Ker}(\Delta_\tau)$.

Introduisons la trace hermitienne positive $\tau_1 : A \longrightarrow \mathbf{C}$ dont l'homomorphisme associé est $\underline{\tau}_1 : \begin{cases} G \longrightarrow \mathbf{C} \\ (x, y, z) \longrightarrow x \end{cases}$.

Introduisons de même τ_2, τ_3 et l'application traciale $\tau_{123} : A \longrightarrow \mathbf{C}^3$ de coordonnées (τ_1, τ_2, τ_3). Ainsi τ_{123} est l'inclusion de G dans $\mathbf{C}^3$. Alors $\Delta_{\tau_{123}}(u)$ est la classe modulo $\underline{\tau}_{123}(G)$ de

$$\tau_{123}(\lambda p) = \lambda\tau_{123}(p) = \lambda\underline{\tau}_{123}(g_0) \notin \underline{\tau}_{123}(G).$$

Par choix de λ, on a donc $u \notin \mathrm{Ker}(\Delta_{\tau_{123}})$ et a fortiori $u \notin \mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{T}})$. □

Le second exemple de ce paragraphe nécessite un résultat de topologie différentielle bien connu (preuve du théorème II.5.9 dans [11]), mais dont nous rappelons la preuve pour la commodité du lecteur. Soit X un espace topologique compact. Si E est un fibré vectoriel complexe sur X, nous notons [E] sa classe dans K(X). Pour la preuve du lemme ci-dessous, nous adoptons l'écriture $\mathbf{Z}/2$-graduée : Si $H = H^{(0)} \oplus H^{(1)}$ est un fibré $\mathbf{Z}/2$-gradué sur X, sa classe dans K(X) est $[H^{(0)}] - [H^{(1)}]$. Si H_1 et H_2 sont deux fibrés $\mathbf{Z}/2$-gradués sur X, leur produit tensoriel gradué $H = H_1 \hat{\otimes} H_2$ est défini par $H^{(i)} = \oplus(H_1^{(j)} \otimes H_2^{(k)})$, la somme portant sur les paires (j, k) dans $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ avec $i = j + k$. L'énoncé qui suit nous a été proposé par A. Connes.

LEMME 9. – *Soient* $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_k$ *des fibrés vectoriels sur* X *et* $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_k\}$ *un recouvrement ouvert de* X *tel que* E_j *et* F_j *soient isomorphes au-dessus de* Ω_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$. *Alors* $\prod_{1 \leqslant j \leqslant k} ([E_j] - [F_j]) = 0$.

Preuve. – Soit H_j le fibré $\mathbf{Z}/2$-gradué défini par $H_j^{(0)} = E_j$ et $H_j^{(1)} = F_j\ (1 \leqslant j \leqslant k)$, et soit H le produit tensoriel gradué des H_j ; il suffit de montrer que $H^{(0)}$ et $H^{(1)}$ sont isomorphes. Le fibré en algèbres $\mathrm{End}(H)$ est $\mathbf{Z}/2$-gradué par

$$\mathrm{End}(H)^{(0)} = \mathrm{End}(H^{(0)}, H^{(0)}) \oplus \mathrm{End}(H^{(1)}, H^{(1)})$$

$$\mathrm{End}(H)^{(1)} = \mathrm{Hom}(H^{(0)}, H^{(1)}) \oplus \mathrm{Hom}(H^{(1)}, H^{(0)}).$$

Il suffit donc d'exhiber une section continue Γ de $\mathrm{End}(H)^{(1)}$ avec $\Gamma^2 = \mathrm{id} \in \mathrm{End}(H)^{(0)}$.

Soit $(\varphi_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ une partition continue de l'unité subordonnée à $(\Omega_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, soit

$$\beta_j \in \mathrm{Iso}(E_j|_{\Omega_j}, F_j|_{\Omega_j}).$$

On a donc $\qquad B_j = \beta_j \oplus \beta_j^{-1} \in \mathrm{End}(H_j|_{\Omega_j})^{(1)}$

et $\qquad B_j^2 = \mathrm{id} \in \mathrm{End}(H_j|_{\Omega_j})^{(0)}$.

Considérons aussi

$$\Gamma_j = \varphi_j^{1/2} \, (\widehat{\bigotimes_{1 \leqslant i < j}} \mathrm{id}_{H_i}) \mathbin{\widehat{\otimes}} B_j \mathbin{\widehat{\otimes}} (\widehat{\bigotimes_{j < i \leqslant k}} \mathrm{id}_{H_i}) \in \mathrm{End}(H)^{(1)}$$

et posons $\Gamma = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \Gamma_j \in \mathrm{End}(H)^{(1)}$. On a bien $\Gamma^2 = \mathrm{id}$. □

LEMME 10. – *Soient n un entier positif et γ_n le fibré en droites complexes canonique sur l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Si $(\Omega_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ trivialisant pour γ_n, alors $k \geqslant n+1$.*

Preuve. – On sait que $K(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}))$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[t]/(1-t)^{n+1}$ où t correspond à la classe $[\gamma_n^*]$ du dual de γ_n. (Voir par exemple le corollaire IV.2.8 de [11].) Si γ_n est trivial au-dessus d'un ouvert de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, il en est de même de γ_n^*. On applique le lemme 9 avec $E_1 = \ldots = E_k = \underline{\mathbf{C}}$ (fibré trivial) et $F_1 = \ldots = F_k = \gamma_n^*$. Il vient $(1 - [\gamma_n^*])^k = 0$, donc $k \geqslant n+1$. □

Soit n un entier positif. On munit le fibré $\gamma_n^* \oplus \underline{\mathbf{C}}$ d'une structure hermitienne et on désigne par B_n la C^*-algèbre des sections continues du fibré $\mathrm{End}(\gamma_n^* \oplus \underline{\mathbf{C}})$. Tout élément de B_n est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec

a une section de $\operatorname{End}(\gamma_n^*, \gamma_n^*) \approx \gamma_n \otimes \gamma_n^* \approx \underline{\mathbf{C}}$

b une section de $\operatorname{End}(\underline{\mathbf{C}}, \gamma_n^*) \approx \gamma_n^*$

c une section de $\operatorname{End}(\gamma_n^*, \underline{\mathbf{C}}) \approx \gamma_n$

d une section de $\operatorname{End}(\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{C}}) \approx \underline{\mathbf{C}}$.

Définissons

$$\mathrm{Y}_n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & -2^{-n} \end{pmatrix} \in \mathrm{B}_n$$

et $\mathrm{X}_n = \exp(\mathrm{Y}_n) \in \mathrm{GL}_1^0(\mathrm{B}_n)$.

LEMME 11. – *On reprend les notations ci-dessus, et on désigne par* T_n *l'application traciale universelle de* B_n.

(i) $\mathrm{T}_n(\mathrm{Y}_n) = 0$

(ii) *Supposons qu'il existe* $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_{2k} \in \mathrm{GL}_p^0(\mathrm{B}_n)$ *avec* $\mathrm{X}_n = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \mathrm{Z}_{2j-1}\mathrm{Z}_{2j}(\mathrm{Z}_{2j-1})^{-1}(\mathrm{Z}_{2j})^{-1}$; *alors* $2kp^2 \geqslant n+1$.

Preuve. – Soit $t \in \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Choisissons une section b de γ_n^* et une section c de γ_n non nulles en t. Alors

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} b \otimes c & 0 \\ 0 & -b \otimes c \end{pmatrix}$$

est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ avec $a(t) \neq 0$. Considérons $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{B}_n$ avec $\lambda \in \mathbf{C}, \lambda \neq 0$. En utilisant une partition de l'unité, on peut écrire $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ comme une somme de commutateurs additifs comme ci-dessus. L'application traciale universelle de B_n s'annule donc en $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$; en particulier $\mathrm{T}_n(\mathrm{Y}_n) = 0$.

Soient $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_{2k}$ comme dans l'assertion (ii). On peut écrire $\mathrm{Z}_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ avec $a_j, \ldots, d_j$ des $(p \times p)$-matrices de sections de fibrés convenables $(j = 1, \ldots, 2k)$. Supposons qu'il existe $t \in \mathrm{P}^n(\mathbf{C})$ avec $b_j(t) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, 2k\}$.

Alors le commutateur multiplicatif de $Z_{2j-1}(t) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ et de

$Z_{2j}(t) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ serait de la forme $\begin{pmatrix} \text{commutateur} & 0 \\ * & \text{commutateur} \end{pmatrix}$,

et on aurait $X_n(t) = \begin{pmatrix} e_n(t) & * \\ * & f_n(t) \end{pmatrix}$ avec $e_n(t), f_n(t) \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{C})$

et $\det(e_n(t)) = \det(f_n(t)) = 1$ contrairement à la définition de X_n. Par suite les ouverts

$$\Omega_{j,k,\ell} = \{t \in \mathrm{P}^n(\mathbf{C}) \mid (b_j)_{k,\ell}(t) \neq 0\} \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, 2k \\ 1 \leqslant k, \ell \leqslant p \end{matrix}$$

forment un recouvrement de $\mathrm{P}^n(\mathbf{C})$. Comme ils sont trivialisants pour γ_n^* (donc pour γ_n), l'assertion (ii) résulte du lemme 10. □

Soit alors A la C*-algèbre obtenue en adjoignant une unité au produit restreint (= somme directe) des B_n $(n \geqslant 1)$. Notons

$$Y = \bigoplus_{n \geqslant 1} Y_n \in A \qquad X = \exp(Y) = 1 + \bigoplus_{n \geqslant 1} (X_n - 1) \in \mathrm{GL}_1^0(A).$$

La seconde assertion du lemme 11 montre que $X \notin \mathrm{DGL}_\infty^0(A)$. Néanmoins $\Delta_T(X)$ est la classe modulo $\underline{T}(K_0(A))$ de $\dfrac{1}{i2\pi} T(Y)$, et $T(Y) = 0$ par le lemme 11(i) et par continuité de T. Donc $X \in \mathrm{Ker}(\Delta_T)$. Nous avons montré :

PROPOSITION 12. – *Il existe une* C*-*algèbre séparable avec unité* A *telle que* $\mathrm{DGL}_\infty^0(A) \subsetneq \mathrm{Ker}(\Delta_T)$.

4. Scalaires dans les C*-algèbres approximativement finies.

Soit A une C*-algèbre approximativement finie avec unité. (On rappelle que $\mathrm{GL}_1(A)$ est un groupe connexe). On identifie $\mathbf{C}^*$ à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_1(A)$ et on examine dans ce dernier paragraphe l'intersection $\mathbf{C}^* \cap \mathrm{DGL}_1(A)$.

Soit d'abord $\lambda \in \mathbf{C}^*$ avec $|\lambda| \neq 1$; alors $\lambda \notin \mathrm{DGL}_1(\mathrm{A})$. Ecrivons en effet $\lambda = \exp(i2\pi(\mu + i\nu))$ avec $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ et $\nu \neq 0$. Soit τ une trace positive normalisée sur A ; alors $\Delta_\tau(\lambda)$ est la classe modulo $\underline{\tau}(\mathrm{K}_0(\mathrm{A})) \subset \mathbf{R}$ de $\mu + i\nu \notin \mathbf{R}$, donc $\Delta_\tau(\lambda) \neq 0$ et $\lambda \notin \mathrm{DGL}_1(\mathrm{A})$.

Soit ensuite λ une racine de 1, primitive d'ordre n. S'il existe une C*-algèbre B avec $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(\mathrm{B})$, il est évident qu'il existe des unitaires $u, v \in \mathrm{A}$ avec $\lambda = uvu^{-1}v^{-1}$; nous ignorons si la réciproque est vraie. (Nous montrons dans la seconde partie de ce travail que, si A est simple, alors $\lambda \in \mathrm{DGL}_1(\mathrm{A})$ si et seulement si $\underline{\mathrm{T}}(1)$ est divisible par n dans $\underline{\mathrm{T}}(\mathrm{K}_0(\mathrm{A}))$.)

Avant d'examiner les cas restants, rappelons le résultat suivant (cas particulier du théorème 1.4 de [5]) : Soient A une C*-algèbre approximativement finie avec unité et $y \in \mathrm{K}_0(\mathrm{A})$ tel que $\underline{\tau}(y) > 0$ pour toute trace positive normalisée sur A ; alors $y \geqslant 0$ dans $\mathrm{K}_0(\mathrm{A})$.

PROPOSITION 13. — *Soient* A *une* C*-*algèbre approximativement finie avec unité et* $\lambda \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ *un multiple scalaire de l'identité de la forme* $\lambda = \exp(i2\pi\theta)$ *avec* θ *réel irrationnel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe des unitaires* $u, v \in \mathrm{GL}_1(\mathrm{A})$ *avec* $\lambda = uvu^{-1}v^{-1}$.

(ii) $\lambda \in \mathrm{DGL}_1(\mathrm{A})$.

(iii) $\Delta_{\mathrm{T}}(\lambda) = 0$.

Preuve. — Supposons que $\Delta_{\mathrm{T}}(\lambda) = 0$ et montrons que la condition (i) est aussi vérifiée. La condition (iii) équivaut à l'existence de $x \in \mathrm{K}_0(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{T}(\theta) = \underline{\mathrm{T}}(x)$. Considérons le groupe ordonné pointé $\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}$ avec l'ordre donné par l'injection naturelle dans $\mathbf{R}$ et l'élément distingué 1. Soit $\underline{\varphi} : \mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathrm{A})$ l'homomorphisme de groupes pointés défini par $\underline{\varphi}(1) = [1]$ et $\underline{\varphi}(\theta) = x$. Vérifions que $\underline{\varphi}$ est positif. Soit $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ avec $m + n\theta \geqslant 0$. Pour toute trace positive normalisée τ sur A, on a $\theta\tau(1) = \tau(\theta) = \underline{\tau}(x)$, et donc $\underline{\tau}(\underline{\varphi}(m + n\theta)) = \underline{\tau}(m + nx) = (m + n\theta)\underline{\tau}(1) > 0$. Le résultat rappelé avant l'énoncé montre que $\underline{\varphi}$ est positif.

Soit B_θ une C*-algèbre approximativement finie séparable ayant pour K_0 ordonné pointé le groupe $\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}$ considéré ci-dessus. Une telle algèbre existe, elle est unique à isomorphisme près, et le morphisme $\underline{\varphi}$ est induit par un morphisme unital de C*-algèbres $\varphi : B_\theta \longrightarrow A$ [6]. Il résulte alors de [14] qu'il existe une injection unitale de l'algèbre A_θ de la rotation irrationnelle d'angle $2\pi\theta$ dans A. Par suite, il existe des unitaires $u, v \in A$ avec $\exp(i2\pi\theta) = uvu^*v^*$. □

La proposition 13 montre en particulier que le noyau de Δ_T n'est en général pas fermé dans $GL_\infty^0(A)$, pas plus que le noyau de la restriction de Δ_T à $GL_1^0(A)$ dans $GL_1^0(A)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CONNES, An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C*-algebra by an action of **R**, *Adv. in Math.*, 39 (1981), 31-55.

[2] J. CUNTZ, The internal structure of simple C*-algebras, In *Proc. Symp. Pure Math.*, 38, Amer. Math. Soc., 1981.

[3] J. CUNTZ et G.K. PEDERSEN, Equivalence and traces on C*-algebras, *J. Functional Analysis,* 33 (1979), 135-164.

[4] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, *Linear operators. Part II : Spectral theory,* Interscience, 1963.

[5] E.G. EFFROS, D.E. HANDELMAN et C.L. SHEN, Dimension groups and their affine representations, *Amer. J. Math.,* 102 (1980), 385-407.

[6] G. ELLIOTT, On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite-dimensional algebras, *J. Algebra,* 38 (1976), 29-44.

[7] T. FACK, Finite sums of commutators in C*-algebras, *Ann. Inst. Fourier,* 32-1 (1982), 129-137.

[8] B. FUGLEDE et R.V. KADISON, Determinant theory in finite factors, *Ann. Math.,* 55 (1952), 520-530.

[9] A. GROTHENDIECK, Un résultat sur le dual d'une C*-algèbre, *Journal de Math.,* 36 (1957), 97-108.

[10] D. HANDELMAN, communication non publiée.

[11] M. KAROUBI, *K-theory, an introduction,* Springer, 1978.

[12] M. KAROUBI, K-théorie algébrique de certaines algèbres d'opérateurs, *Lecture Notes in Math.*, 725 (1979), 254-290.

[13] G.K. PEDERSEN et N.H. PETERSEN, Ideals in a C*-algebra, *Math. Scand.*, 27 (1970), 193-204.

[14] M. PIMSNER et D. VOICULESCU, Imbedding the irrational rotation C*-algebra into an AF-algebra, *J. Operator theory,* 4 (1980), 201-210.

[15] J.L. TAYLOR, Banach algebras and topology in *"Algebras in Analysis"*, J.H. Williamson, ed., Academic Press, (1975) 118-186.

[16] Y. YUEN, Groups of invertible elements of Banach algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79 (1973), 82-84.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1982.

P. de la HARPE,
Section de mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
1211 Genève 24.

G. SKANDALIS,
Laboratoire de mathématiques
fondamentales
Université P. & M. Curie
Tour 45.46, 3è étage
4 place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.