ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE BARAS
MICHEL PIERRE

Singularités éliminables pour des équations semi-linéaires

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 1 (1984), p. 185-206
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_1_185_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 1 (1984), 185-206

SINGULARITÉS ÉLIMINABLES POUR DES ÉQUATIONS SEMI-LINÉAIRES

par P. BARAS et M. PIERRE

1. Introduction.

Les résultats contenus dans ce papier répondent en particulier aux deux questions suivantes:

A) Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^N$, F un fermé relatif de Ω et $\gamma > 1$, à quelle condition peut-on prolonger toute solution de

$$u \in L^\gamma_{loc}(\Omega \backslash F), \quad -\Delta u + u\,|u|^{\gamma-1} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega\backslash F) \tag{1.1}$$

en une solution de

$$u \in L^\gamma_{loc}(\Omega), \quad -\Delta u + u\,|u|^{\gamma-1} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\ ? \tag{1.2}$$

B) Etant donné μ mesure de Radon bornée sur un ouvert Ω régulier de $\mathbf{R}^N$, à quelle condition sur μ peut-on résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u + u\,|u|^{\gamma-1} = \mu & \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\ ? \end{cases} \tag{1.3}$$

Des réponses partielles à ces questions ont déjà paru dans la littérature. Ainsi, dans le cas où F est réduit à un point, « (1.1) $\Longrightarrow$ (1.2) » – c'est-à-dire F est « éliminable » – si et seulement si $\gamma \geqslant N/(N-2)$, $N \geqslant 3$ (cf. [7], [16]). Plus généralement, il est montré dans [17] qu'une variété F de dimension d est éliminable si et seulement si $d \leqslant N - 2\gamma/(\gamma-1)$. Parallèlement, si μ est une masse de Dirac en un point de Ω, alors (1.3) a une solution si et seulement si $\gamma < N/(N-2)$ (voir [4] où d'autres résultats de ce type sont développés).

Ici nous répondons en toute généralité aux deux questions A) et B) en introduisant la capacité $c_{\gamma'}$ associée à l'espace de Sobolev $W^{2,\gamma'}(\mathbf{R}^N)$ où γ' est le conjugué de $\gamma\,(1/\gamma + 1/\gamma' = 1)$. Ainsi nous montrons que

F est éliminable si et seulement si $c_{\gamma'}(F) = 0$; (1.4)

(1.3) a une solution si et seulement si μ ne charge pas les ensembles de $c_{\gamma'}$-capacité nulle. (1.5)

Ces résultats sont prouvés pour le cas où $-\Delta$ est remplacé par un opérateur elliptique d'ordre 2 très général.

Comme il est établi par Meyers dans [14], un point est de $c_{\gamma'}$-capacité nulle si et seulement si $N \geqslant 2\gamma'$, soit $N \geqslant 3$ et $\gamma \geqslant N/(N-2)$; et plus généralement, si F est une variété de dimension d sa capacité est nulle si et seulement si $d \leqslant N - 2\gamma'$. Nous retrouvons ainsi les cas particuliers évoqués ci-dessus. De plus, utilisant le théorème 21 de [14], on obtient des interprétations immédiates de (1.4), (1.5) en termes de mesure de Hausdorff.

La méthode utilisée ici pour démontrer « $c_{\gamma'}(F) = 0 \Longrightarrow F$ est éliminable » diffère des précédentes, en général basées sur des estimations ponctuelles a priori. Elle repose sur un argument simple de dualité et a l'avantage de s'appliquer (au moins dans le cas de solutions positives)

- aux équations

$$Lu + u^{\gamma} = 0\,, \quad u \geqslant 0$$

où L est un opérateur différentiel d'ordre 2 sur lequel *aucune hypothèse d'ellipticité* n'est faite. Ceci contient en particulier le cas $L = \Delta$: on retrouve ainsi des résultats de [5], [13] établis pour le cas d'un point.

- *à des opérateurs d'ordre* m : c'est alors la capacité associée à $W^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N)$ qui intervient. C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'est énoncé le théorème d'éliminabilité qui fait l'objet du paragraphe suivant. Le troisième paragraphe est consacré au cas des opérateurs elliptiques d'ordre 2. Le dernier traite des équations de type (1.2).

Signalons qu'une partie de ces résultats ont été annoncés dans [3].

2. Condition suffisante d'éliminabilité.

On désigne par γ un réel fixé strictement supérieur à 1 et γ' son conjugué, soit

$$1/\gamma + 1/\gamma' = 1 . \tag{2.1}$$

Pour tout entier $m \geqslant 1$, on rappelle que

$$W^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N) = \{u \in L^{\gamma'}(\mathbf{R}^N) ; D^\alpha u \in L^{\gamma'}(\mathbf{R}^N), \forall \alpha \in \mathbf{R}^N, |\alpha| \leqslant m\} .$$

Ici $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ désigne un multi-index de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ et $L^{\gamma'}(\mathbf{R}^N)$ est l'espace des classes de fonctions de puissances γ'-ièmes intégrables. L'espace $W^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N)$ sera muni de la norme

$$\|u\|_{m,\gamma'} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u|_{\gamma'}$$

où $|\,.\,|_{\gamma'}$ désigne la norme usuelle dans $L^{\gamma'}(\mathbf{R}^N)$.

Etant donné $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^N$, on note $C_0^\infty(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}^N$ à support compact dans $\mathcal{O}$ et $W_0^{m,\gamma'}(\mathcal{O})$ la fermeture de $C_0^\infty(\mathcal{O})$ pour la norme $\|\,.\,\|_{m,\gamma'}$.

Nous serons conduits à utiliser la capacité $c_{m,\gamma'}$ associée à $W^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N)$ et définie de la manière suivante :

- pour tout compact K de $\mathbf{R}^N$

$$c_{m,\gamma'}(K) = \inf \{\|v\|_{m,\gamma'}^{\gamma'} ; v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), v = 1 \text{ sur un voisinage de } K\} ;$$

- pour tout ouvert ω de $\mathbf{R}^N$

$$c_{m,\gamma'}(\omega) = \sup \{c_{m,\gamma'}(K) ; K \subset \omega, K \text{ compact}\} \leqslant +\infty ;$$

- pour un ensemble quelconque E de $\mathbf{R}^N$

$$c_{m,\gamma'}(E) = \inf \{c_{m,\gamma'}(\omega) ; E \subset \omega, \omega \text{ ouvert}\} .$$

Il est classique que cette capacité est équivalente à celle définie par Meyers [14] à l'aide de potentiels de Bessel de $L^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N)$. Ceci est démontré dans [1] d'où nous tirons le lemme suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises.

LEMME 2.1. – *Soit* $K \subset \mathbf{R}^N$ *compact avec* $c_{m,\gamma'}(K) = 0$ *et* $\mathcal{O}$ *un voisinage ouvert de* K. *Alors, il existe une suite* $v_n \in C_0^\infty(\mathcal{O})$ *avec* $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, $v_n = 1$ *sur un voisinage de* K, v_n *converge vers* 0 *dans* $W^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N)$.

Dans [1], il est prouvé l'existence d'une suite $\hat{v}_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ vérifiant les trois conditions ci-dessus. Il suffit alors de choisir $v_n = \hat{v}_n \varphi$ où $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O})$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ et $\varphi = 1$ sur un voisinage de K.

DEFINITIONS. – *Une propriété sera dite vraie $c_{m,\gamma'}$-quasi-partout si elle est vraie partout sauf sur un ensemble de $c_{m,\gamma'}$-capacité nulle.*

Etant donné une mesure de Radon μ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^N$, on dira que μ ne charge pas les ensembles de $c_{m,\gamma'}$-capacité nulle si

$$\forall E \subset \mathcal{O}, \quad c_{m,\gamma'}(E) = 0 \Longrightarrow |\mu|(E) = 0 . \tag{2.2}$$

Dans cette définition, ainsi que dans toute la suite, on ne distingue pas la mesure de Radon μ de la mesure de Borel régulière et complète qu'elle définit.

On se donne maintenant Ω un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^N$ et L_m un opérateur différentiel d'ordre m défini par

$$L_m u = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} D^\alpha (a_\alpha u) \tag{2.3}$$

avec

$$a_\alpha \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \forall \alpha, \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m . \tag{2.4}$$

Dans ce paragraphe, aucune hypothèse supplémentaire ne sera faite sur les coefficients. De plus, L sera interprété au sens des distributions : plus précisément, si $\mathcal{O}$ est un ouvert inclus dans Ω, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ et T une distribution sur $\mathcal{O}$ (on note $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$) on dira que

$$L_m u = T \text{ (resp. } L_m u \leqslant T) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathcal{O}) \tag{2.5}$$

si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O}) \text{ (resp. } \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O}), \ \varphi \geqslant 0) \\ \displaystyle\int_{\mathcal{O}} u L_m^* \varphi = \langle T, \varphi \rangle \left(\text{resp. } \int_{\mathcal{O}} u L_m^* \varphi \leqslant \langle T, \varphi \rangle\right) \end{array} \right. \tag{2.6}$$

où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne la dualité $\mathcal{D}'(\mathcal{O}) \times C_0^\infty(\mathcal{O})$ et

$$L_m^* \varphi = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha \varphi . \tag{2.7}$$

On a alors le résultat d'éliminabilité suivant :

THEOREME 2.1. – *Soit* F *un ensemble relativement fermé dans* Ω , μ *une mesure de Radon sur* Ω *ne chargeant pas les ensembles de* $c_{m,\gamma'}$*-capacité nulle et* $g : [0, \infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ *continue et vérifiant*

$$\liminf_{r\uparrow\infty} g(r)/r^{\gamma} > 0 . \tag{2.8}$$

On suppose que $c_{m,\gamma'}(\mathrm{F}) = 0$. *Alors toute solution de*

$$\begin{cases} u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \backslash \mathrm{F}),\ u \geqslant 0,\ g(u) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \backslash \mathrm{F}) \\ \mathrm{L}_m u + g(u) \leqslant \mu \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega \backslash \mathrm{F}) \end{cases} \tag{2.9}$$

est aussi solution de

$$\begin{cases} u \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),\ g(u) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \\ \mathrm{L}_m u + g(u) \leqslant \mu \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) . \end{cases} \tag{2.10}$$

La démonstration utilise le lemme technique suivant :

LEMME 2.2. – *Soit* F *relativement fermé dans* Ω *avec* $c_{m,\gamma'}(\mathrm{F}) = 0$. *Alors, pour tout* $\zeta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$, $\zeta \geqslant 0$, *il existe* $\zeta_n \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega \backslash \mathrm{F})$ *avec*

i) $0 \leqslant \zeta_n \leqslant \zeta$,

ii) ζ_n *converge vers* ζ *dans* $\mathrm{W}^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^\mathrm{N})$,

iii) ζ_n *converge* $c_{m,\gamma'}$*-quasi-partout vers* ζ.

Démonstration du lemme 2.2. – Soit S le support de ζ. Puisque $\mathrm{S} \cap \mathrm{F}$ est un compact inclus dans Ω de $c_{m,\gamma'}$-capacité nulle, d'après le lemme 2.1, il existe $v_n \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ avec

- $0 \leqslant v_n \leqslant 1$
- $v_n = 1$ sur un voisinage de $\mathrm{S} \cap \mathrm{F}$
- $v_n \longrightarrow 0$ dans $\mathrm{W}^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^\mathrm{N})$.

D'après le théorème 4 de [14], on peut aussi supposer que $v_n \longrightarrow 0$ $c_{m,\gamma'}$-quasi-partout (en extrayant au besoin une suite). On vérifie alors que $\zeta_n = \zeta(1 - v_n)$ satisfait aux conclusions du lemme.

Démonstration du théorème 2.1. – Remarquons d'abord que, puisque $c_{m,\gamma'}(\mathrm{F}) = 0$, la mesure de Lebesgue de F est nulle et donc u est défini p.p. sur Ω.

Montrons d'abord $g(u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ et ζ_n une suite associée à ζ par le lemme 2.2. Soit aussi

$$p \text{ entier, } p \geqslant m\gamma' . \tag{2.11}$$

Puisque $\zeta_n^p \in C_0^\infty(\Omega \backslash F)$, d'après (2.9)

$$\int_\Omega u\, L_m^* \zeta_n^p + g(u)\zeta_n^p \leqslant \int_\Omega \zeta_n^p \, d\mu . \tag{2.12}$$

Nous allons estimer $\int_\Omega g(u)\zeta_n^p$ et désigner par C toute constante indépendante de n. Puisque $0 \leqslant \zeta_n^p \leqslant \zeta^p$,

$$\int_\Omega g(u)\zeta_n^p \leqslant C + \int_\Omega u\, |L_m^* \zeta_n^p| . \tag{2.13}$$

D'après (2.4)

$$|L_m^* \zeta_n^p| \leqslant C \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha \zeta_n^p| . \tag{2.14}$$

Le terme correspondant à $|\alpha| = 0$ est estimé comme suit:

$$\int_\Omega u\,\zeta_n^p \leqslant \left[\int_\Omega u^\gamma \zeta_n^p\right]^{1/\gamma} \left[\int_\Omega \zeta_n^p\right]^{1/\gamma'} \leqslant \left[\int_\Omega u^\gamma \zeta_n^p\right]^{1/\gamma} \|\zeta_n\|_{m,\gamma'} . \tag{2.15}$$

Pour $|\alpha| \geqslant 1$,

$$D^\alpha \zeta_n^p = \sum_{j=1}^{|\alpha|} c_j \zeta_n^{p-j} \Sigma c_{\beta_1,\ldots,\beta_j} D^{\beta_1}\zeta_n \ldots D^{\beta_j}\zeta_n ,$$

cette dernière somme portant sur tous les multi-indices $\beta_1, \ldots, \beta_j$ avec $|\beta_i| \geqslant 1$ et $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_j = \alpha$; de plus, c_j, $c_{\beta_1,\ldots,\beta_j}$ sont des constantes dépendant des quantités en indice. Il nous faut donc estimer un nombre fini de termes de la forme

$$A = \int_\Omega u\,\zeta_n^{p-j}\, |D^{\beta_1}\zeta_n \ldots D^{\beta_j}\zeta_n| .$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$A \leqslant \left[\int_\Omega u^\gamma \zeta_n^p\right]^{1/\gamma} \left[\int_\Omega \zeta_n^{p-j\gamma'} |D^{\beta_1}\zeta_n \ldots D^{\beta_j}\zeta_n|^{\gamma'}\right]^{1/\gamma'} .$$

Puisque $p \geqslant m\gamma' \geqslant j\gamma'$, on a $0 \leqslant \zeta_n^{p-j\gamma'} \leqslant 1$. Appliquant à nouveau l'inégalité de Hölder à la deuxième intégrale en remarquant que $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j} |\beta_i|/|\alpha| = 1$, nous avons

$$A \leqslant \left[\int_\Omega u^\gamma \zeta_n^p \right]^{1/\gamma} \prod_{i=1}^{j} \left[\int_\Omega |D^{\beta_i} \zeta_n|^{\gamma'|\alpha|/|\beta_i|} \right]^{|\beta_i|/\gamma'|\alpha|}. \quad (2.16)$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, soit (voir [15])

$$\|w\|_{|\beta_i|,\, \gamma'|\alpha|/|\beta_i|} \leqslant C \|w\|_{|\alpha|,\gamma'}^{|\beta_i|/|\alpha|} \|w\|_{L^\infty}^{1-|\beta_i|/|\alpha|}.$$

Appliquée ici à ζ_n, elle donne

$$|D^{\beta_i} \zeta_n|_{\gamma'|\alpha|/|\beta_i|} \leqslant C \|\zeta_n\|_{|\alpha|,\gamma'}^{|\beta_i|/|\alpha|} \leqslant C \|\zeta_n\|_{m,\gamma'}^{|\beta_i|/|\alpha|}. \quad (2.17)$$

Ainsi (2.16) devient

$$A \leqslant C \left[\int_\Omega u^\gamma \zeta_n^p \right]^{1/\gamma} \|\zeta_n\|_{m,\gamma'}. \quad (2.18)$$

Utilisant alors (2.13), (2.15), (2.18) et tenant compte du fait que ζ_n est borné dans $W^{m,\gamma'}$, nous obtenons

$$\int_\Omega g(u) \zeta_n^p \leqslant C + C \left[\int_\Omega u^\gamma \zeta_n^p \right]^{1/\gamma}. \quad (2.19)$$

D'après (2.8) et la continuité de g, il existe a, $b > 0$ tels que

$$\forall r \geqslant 0, \quad g(r) \geqslant ar^\gamma - b. \quad (2.20)$$

Ainsi (2.19) devient

$$\int_\Omega (g(u) + b) \zeta_n^p \leqslant C + C \left[\int_\Omega (g(u) + b) \zeta_n^p \right]^{1/\gamma}.$$

Ceci prouve que l'intégrale de gauche reste bornée quand n tend vers l'infini. D'après le lemme de Fatou, il en résulte que $(g(u) + b)\zeta^p \in L^1(\Omega)$ et donc $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ puisque ζ est arbitraire dans $C_0^\infty(\Omega)^+$. Notons que d'après (2.20), $u \in L^\gamma_{loc}(\Omega)$.

Pour montrer que u vérifie (2.10), considérons à nouveau $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\zeta \geqslant 0$ et ζ_n associé à ζ par le lemme 2.2. D'après (2.10)

$$\int_\Omega u L_m^* \zeta_n + g(u) \zeta_n \leqslant \int_\Omega \zeta_n \, d\mu. \quad (2.20)$$

D'après iii) du lemme 2.2, et puisque μ ne charge pas les ensembles de $c_{m,\gamma'}$-capacité nulle, ζ_n converge $|\mu|$-presque partout vers ζ. D'après le théorème de Lebesgue, on a donc

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \zeta_n \, d\mu = \int_\Omega \zeta \, d\mu.$$

D'après le même théorème, puisque $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega g(u)\,\zeta_n = \int_\Omega g(u)\,\zeta .$$

Enfin, on vérifie aisément que la convergence de ζ_n vers ζ dans $W^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N)$ entraîne la convergence de $L^*\zeta_n$ vers $L^*\zeta$ dans $L^{\gamma'}(\Omega)$. Puisque $u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, on peut donc passer à la limite dans (2.20) pour obtenir (2.10).

Remarque. – L'hypothèse (2.4) peut être affaiblie pour les indices α tels que $|\alpha| < m$ en utilisant les injections de Sobolev. La même démonstration prouve par exemple que le théorème 2.1 reste vrai sous l'hypothèse

$$\exists\, \epsilon > 0\,, \quad a_\alpha \in L^{\gamma'+\epsilon}_{loc}(\Omega) \cap L^{N/(m-|\alpha|)}_{loc}(\Omega)\,. \tag{2.4$'$}$$

3. Cas des opérateurs elliptiques d'ordre 2.

Dorénavant, nous écrirons $c_{\gamma'}$ pour $c_{2,\gamma'}$. On se donne Ω un ouvert borné de frontière régulière et L défini sur Ω par

$$Lu = -\sum_{1 \le i,j \le N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{1 \le i \le N} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + au \tag{3.1}$$

avec

$$a_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega})\,, \ \forall\, i\,, j = 1\,, \ldots, N\,, \ a \in L^\infty(\Omega) \tag{3.2}$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \alpha\,|\xi|^2\,, \ \forall\, \xi = (\xi_1\,, \ldots, \xi_N) \in \mathbf{R}^N \quad \text{où} \quad \alpha > 0\,. \tag{3.3}$$

$$a \geqslant 0\,, \quad a + \sum_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geqslant 0 \text{ p.p.}. \tag{3.4}$$

Notons que grâce à (3.2), L est un opérateur du type défini en (2.3), (2.4). Comme précédemment, on considèrera qu'il opère de L^1_{loc} dans $\mathcal{D}'$ suivant la définition (2.5), (2.6), (2.7) avec

$$L^*\varphi = -\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \sum_i b_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a\varphi\,.$$

Soit F un compact inclus dans Ω.

THEOREME 3.1. — *Toute solution de*

$$\begin{cases} u \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash F) \\ Lu + u\,|u|^{\gamma-1} = 0 \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega\backslash F) \end{cases} \tag{3.5}$$

est aussi solution de

$$\begin{cases} u \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \\ Lu + u\,|u|^{\gamma-1} = 0 \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{3.6}$$

si et seulement si $c_{\gamma'}(F) = 0$. *De plus, les solutions de* (3.6) *vérifient*

$$\begin{cases} u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,, \ \ \forall\ 1 \leqslant p < \infty \\ Lu + u\,|u|^{\gamma-1} = 0 \ \text{p.p.}\ sur\ \Omega\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Remarques. — Ce théorème présente en fait 3 aspects :

1) d'une part, la nécessité de $c_{\gamma'}(F) = 0$ pour "l'éliminabilité" de F. La démonstration va d'ailleurs au-delà de l'énoncé puisqu'elle consiste à montrer que, si $c_{\gamma'}(F) > 0$, alors il existe u solution de

$$\begin{cases} u \in L^{\gamma}(\Omega) \cap W^{1,1}_0(\Omega)\,, \ u \geqslant 0 \\ Lu + u^{\gamma} = \mu \ \ dans\ \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

où μ est une mesure convenable portée par F. Ainsi u est solution de (3.5) et non de (3.6). Il est clair qu'on peut se dispenser de la régularité de Ω dès que L est défini sur un ouvert régulier contenant Ω.

2) "l'éliminabilité" de F lorsque $c_{\gamma'}(F) = 0$: la nouveauté par rapport au théorème 2.1 est qu'ici u n'est plus supposée positive. On s'y ramène grâce à l'ellipticité de L en montrant que, si u est solution de (3.5), alors $|u|$ en est une sous-solution. Ce dernier point est clair lorsque u est régulière ; il est beaucoup plus délicat sous la seule hypothèse "$u \in L^{\gamma}_{\mathrm{loc}}$". Cette difficulté a été levée par Kato dans un cadre très similaire [11]. Ceci nécessite en particulier de montrer

$$u\,,\ Lu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \implies u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,.$$

Nous donnons en Appendice une démonstration de ces résultats ainsi que de certains lemmes techniques utilisés pour établir le théorème 3.1.

3) enfin, le fait que "(3.5) $\implies$ (3.7)" si $c_{\gamma'}(F) = 0$, prouve non seulement que F est "éliminable", mais aussi que u ne peut

avoir de singularité concentrée sur F. Ceci ne s'appliquerait pas bien sûr à l'équation :

$$\Delta u + u^{\gamma} = 0\,,\ u \geqslant 0\,. \tag{3.8}$$

Pour celle-ci, si $c_{\gamma'}(F) = 0$, "(3.5) $\Longrightarrow$ (3.6)" est vrai comme il est prouvé par le théorème (2.1). Cependant, si $\gamma > N/(N-2)$ et $F = \{0\}$, il existe des solutions de (3.8) sur $\mathbf{R}^N$ ayant une singularité en $r^{-2/(\gamma-1)}$ portée par F de $c_{\gamma'}$-capacité nulle (voir [5], [13], pour d'autres détails).

Notons pour terminer que, dans le théorème 3.1, les hypothèses sur L ne sont vraisemblablement pas optimales ; elles sont faites dans un but de simplicité afin d'appliquer directement certains résultats existant dans la littérature, notamment ceux de [6]. Signalons cependant que l'hypothèse naturelle "$a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$" ne serait pas suffisante pour pouvoir appliquer le théorème 2.1 : le problème d'éliminabilité est ouvert dans ce cas.

LEMME 3.1 (cf. Brézis-Strauss [6]). – *Soit* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue, croissante avec* $g(0) = 0$. *Il existe une unique solution de*

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,1}(\Omega)\,,\ g(u) \in L^1(\Omega) \\ Lu + g(u) = f \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\Omega)\,. \end{cases}$$

De plus, $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *pour tout* $q \in [1\,, N/(N-1)[$ *et*

$$|g(u)|_1 + \|u\|_{1,q} \leqslant C(q)\,|f|_1\,. \tag{3.10}$$

Enfin, l'application $f \longmapsto u$ *est croissante.*

Démonstration du théorème 3.1.

Condition suffisante : on suppose $c_{\gamma'}(F) = 0$. Si u est solution de (3.5), d'après le lemme A.3 appliqué à $\Omega\backslash F$ et u^+, u^- :

$$L\,|u| \leqslant -\,|u|^{\gamma} \ \text{sur}\ \Omega\backslash F\,.$$

D'après le théorème 2.1, $|u| \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$. Maintenant, si $\zeta \in C_0^{\infty}(\Omega)$ et si $v_n \in C_0^{\infty}(\Omega)$ est une suite associée à F suivant le lemme 2.1, (3.5) donne

$$\int_{\Omega} u L^*(\zeta(1-v_n)) + u\,|u|^{\gamma-1}(\zeta(1-v_n)) = 0\,.$$

Utilisant

$u \in L^{\gamma}_{loc}(\Omega)$, $v_n \longrightarrow 0$ p.p., $L^*(\zeta(1 - v_n)) \longrightarrow L^*\zeta$ dans $L^{\gamma'}(\Omega)$ on peut passer à la limite dans cette égalité pour obtenir (3.6). On termine en remarquant que (3.7) est une conséquence du lemme A.4.

Condition nécessaire : on utilise le lemme suivant :

LEMME 3.2. – *Soit μ une mesure de Radon à support compact dans Ω. On suppose que μ^+, $\mu^- \in W^{-2,\gamma}(\Omega)$. Alors, il existe une unique solution de*

$$\begin{cases} u \in L^{\gamma}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lu + u\,|u|^{\gamma-1} = \mu \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \tag{3.11}$$

De plus, l'application $\mu \longmapsto u$ est croissante.

On rappelle que $W^{-2,\gamma}(\Omega)$ est le dual de $W_0^{2,\gamma'}(\Omega)$.

Achevons la démonstration du théorème 3.1 avant de prouver ce lemme.

Supposons $c_{\gamma'}(F) > 0$. D'après [14], il existe une mesure de Radon μ sur Ω telle que

$$\mu \geqslant 0,\ \mu \neq 0,\ \text{Support } \mu \subset F,\ \mu \in W^{-2,\gamma}(\Omega).$$

D'après le lemme 3.2, il existe u solution de (3.11). Mais cet u est alors solution de (3.5) sans être solution de (3.6).

Démonstration du lemme 3.2. – On ne distinguera pas μ de son prolongement à $\mathbf{R}^N$ par 0.

Commençons par le cas où $\mu \geqslant 0$ (et donc $\mu \in W^{-2,\gamma}(\Omega)$). Posons $\mu_n = \mu * \rho_n$ où ρ_n est une suite régularisante de $\mathbf{R}^N$. D'après le lemme 3.1, il existe u_n solution de

$$\begin{cases} u_n \in L^{\gamma}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lu_n + u_n^{\gamma} = \mu_n \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{3.12}$$

avec $\|u_n\|_{1,q} + \int_\Omega u_n^\gamma \leqslant C(q) . \int_\Omega d\mu_n \leqslant C(q) \int_\Omega d\mu$,

ceci pour tout $q \in [1, N/(N-1)[$. On peut donc extraire de u_n une suite (encore notée u_n) convergeant vers $u \in L^{\gamma}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ et p.p. $x \in \Omega$. Comme Lu_n converge vers Lu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, il suffit pour conclure de montrer que u_n^γ converge vers u^γ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Puisque u_n^γ converge vers u^γ p.p. sur Ω, il suffit de pouvoir majorer u_n par une suite v_n convergeant dans $L^\gamma(\Omega)$. Ceci est satisfait par la solution de

$$\begin{cases} v_n \in L^\gamma(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lv_n = \mu_n \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

En effet, puisque $Lu \leqslant Lv_n$, et $u_n, v_n \in W_0^{1,1}(\Omega)$, on a : $u_n \leqslant v_n$. Pour montrer la convergence de v_n dans $L^\gamma(\Omega)$, remarquons d'abord que μ_n converge vers μ dans $W^{-2,\gamma}(\Omega)$. Ceci peut se voir en considérant la solution σ de

$$\begin{cases} \sigma \in L^\gamma(\mathbf{R}^N) \\ \sigma - \Delta\sigma = \mu \text{ dans } \mathbf{R}^N \end{cases}$$

qui existe puisque $\mu \in W^{-2,\gamma}(\mathbf{R}^N)$. On a alors

$$\mu_n = \mu * \rho_n = (I - \Delta)(\sigma * \rho_n).$$

Or $\sigma * \rho_n$ converge vers σ dans $L^\gamma(\Omega)$.

Soit alors $\theta' \in L^{\gamma'}(\Omega)$ et w la solution de

$$\begin{cases} w \in W^{2,\gamma'}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ L^* w = \theta \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

On a (cf. [2], [12]) $\|w\|_{2,\gamma'} \leqslant C|\theta|_{\gamma'}$.

D'autre part $\int_\Omega v_n\,\theta = \int_\Omega w\mu_n = \int_\Omega w\,\varphi\,\mu_n$ où $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ sur un voisinage du support de μ (n assez grand). Ainsi

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v_p - v_q)\theta &= \langle w\,\varphi, \mu_p - \mu_q\rangle \\ &\leqslant \|w\,\varphi\|_{W^{2,\gamma'}(\Omega)} \|\mu_p - \mu_q\|_{W^{-2,\gamma}(\Omega)} \\ &\leqslant C\|\mu_p - \mu_q\|_{W^{-2,\gamma}(\Omega)} |\theta|_{\gamma'}. \end{aligned}$$

D'où $|v_p - v_q|_\gamma \leqslant C\|\mu_p - \mu_q\|_{W^{-2,\gamma}(\Omega)}$. Ceci prouve le lemme pour $\mu \geqslant 0$.

Dans le cas général, on remarque que la solution du problème approché

$$\begin{cases} u_n \in L^\gamma(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lu_n + |u_n|^{\gamma-1}\, u_n = \mu * \rho_n \end{cases}$$

vérifie : $-w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ où

$$\begin{cases} v_n\,, w_n \in \mathrm{L}^\gamma(\Omega) \cap \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega) \\ \mathrm{L}v_n + v_n^\gamma = \mu^+ * \rho_n\,, \mathrm{L}w_n + w_n^\gamma = \mu^- * \rho_n\,. \end{cases}$$

D'après l'étude ci-dessus, v_n et w_n convergent dans $\mathrm{L}^\gamma(\Omega)$. Ceci, joint aux estimations dans $\mathrm{W}_0^{1,q}$ de u_n (cf. lemme 3.1), montre la convergence d'une suite extraite de u_n vers une solution u de (3.11).

Pour la monotonie en μ (et donc l'unicité), si u, $\hat{u}$ sont les solutions de (3.11) correspondant respectivement à μ, $\hat{\mu}$, on considère la solution de

$$\begin{cases} \theta_n \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega) \\ \mathrm{L}\theta_n + \hat{u}\,|\hat{u}|^{\gamma-1} - u\,|u|^{\gamma-1} = (\hat{\mu} - \mu) * \rho_n\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

D'après les estimations $\mathrm{W}^{1,q}$, θ_n converge dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$; la limite est nécessairement $\hat{u} - u$ d'après l'unicité de la solution de

$$w \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega)\,,\ \mathrm{L}w = 0 \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

prouvée dans [6]. Toujours d'après [6]

$$\int_\Omega \operatorname{sgn}^+ \theta_n\, \mathrm{L}\theta_n \geqslant 0\,. \tag{3.14}$$

Ainsi, si $\hat{\mu} \leqslant \mu$, d'après (3.13), (3.14)

$$\int_\Omega \operatorname{sgn}^+ \theta_n (\hat{u}\,|\hat{u}|^{\gamma-1} - u\,|u|^{\gamma-1}) \leqslant 0\,.$$

On passe à la limite dans cette inégalité pour conclure $u = \hat{u}$.

4. Sur l'équation $\mathrm{L}u + u\,|u|^{\gamma-1} = \mu$.

Dans ce paragraphe, L est l'opérateur défini sur Ω par (3.1), (3.2), (3.3), (3.4).

THEOREME 4.1. – *Soit μ une mesure de Radon bornée sur Ω. Alors le problème*

$$\begin{cases} u \in \mathrm{L}^\gamma(\Omega) \cap \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega) \\ \mathrm{L}u + u\,|u|^{\gamma-1} = \mu \ \textit{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases} \tag{4.1}$$

a une solution si et seulement si μ ne charge pas les ensembles de $c_{\gamma'}$-capacité nulle. Quand elle existe, la solution est unique. De plus, $\mu \longmapsto u$ est une application croissante.

Démonstration du théorème 4.1. – Pour la partie nécessaire, on utilise le lemme suivant :

LEMME 4.1. – *Soit* ν *une mesure de Radon sur* Ω *avec* $\nu \in W^{-m,\gamma}(\Omega)$. *Alors* ν *ne charge pas les ensembles de* $c_{m,\gamma'}$-*capacité nulle.*

Pour la partie suffisante, on utilise

LEMME 4.2. – *Soit* ν *une mesure de Radon positive sur* Ω. *On suppose que* ν *ne charge pas les ensembles de* $c_{m,\gamma'}$-*capacité nulle. Alors, il existe une suite de mesures de Radon* ν_n *positives et à support compact dans* Ω *avec* $\nu_n \in W^{-m,\gamma}(\Omega)$ ν_n *converge en croissant vers* ν.

La démonstration du lemme 4.1 est identique à celle donnée dans [10] pour $W^{-1,p}$. Nous admettons momentanément le lemme 4.2 pour démontrer le théorème 4.1.

Notons d'abord que la monotonie et l'unicité se démontrent comme dans le lemme 3.2.

Partie nécessaire. Soit u solution de (4.1). Puisque $|u|^{\gamma-1}u \in L^1(\Omega)$, il ne charge pas les ensembles de $c_{\gamma'}$-capacité nulle (qui sont de mesure de Lebesgue nulle). Par différence, Lu est une mesure de Radon. D'après le lemme 4.1, il suffit donc de montrer $Lu \in W^{-2,\gamma}(\Omega)$. Or, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \int_\Omega uL^*\varphi \leqslant |u|_\gamma \,.\, |L^*\varphi|_{\gamma'} \leqslant C\,|u|_\gamma\, |\varphi|_{2,\gamma'}\,.$$

Partie suffisante. Si μ ne charge pas les ensembles de $c_{\gamma'}$-capacité nulle, d'après le lemme 4.2, il existe des suites μ_n, $\nu_p \in W^{-2,\gamma}(\Omega)$, positives, à support compact, croissant respectivement vers μ^+ et μ^-. D'après le lemme 3.2, il existe $u_{n,p}$ solution de

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n,p} \in L^\gamma(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lu_{n,p} + u_{n,p}\,|u_{n,p}|^{\gamma-1} = \mu_n - \nu_p \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\,. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Pour p fixé, la suite $n \longmapsto u_{n,p}$ est croissante et bornée dans $L^\gamma(\Omega)$ et $W_0^{1,q}$, $q \in [1, N/(N-1)[$ (cf. lemme 3.1). On peut donc passer à la limite en n et obtenir u_p solution de

$$\begin{cases} u_p \in L^\gamma(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lu_p + |u_p|^{\gamma-1} u_p = \mu - \nu_p . \end{cases}$$

On raisonne encore par monotonie en p pour terminer.

Démonstration du lemme 4.2. – Elle s'inspire de celle du théorème 8 dans [8]. Supposons d'abord ν à support compact dans Ω. D'après Meyers [14], tout $\varphi \in W_0^{m,\gamma'}(\Omega)$ $(\subset W^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^N))$ admet un représentant $\widetilde{\varphi}$ $c_{m,\gamma'}$-quasi-continu unique. Ceci nous permet de définir sur $W_0^{m,\gamma}(\Omega)$ la fonctionnelle

$$p(\varphi) = \int_\Omega (\widetilde{\varphi})^+ \, d\nu \leqslant +\infty.$$

Puisque ν ne charge pas les ensembles de $c_{m,\gamma'}$-capacité nulle, cette fonctionnelle est bien définie à valeurs dans $[0,\infty]$. Toujours d'après [14], de toute suite convergeant dans $W_0^{m,\gamma}(\Omega)$, on peut extraire une suite dont les représentants quasi-continus convergent quasi-partout. Ceci et le lemme de Fatou prouvent que p est s.c.i. sur $W_0^{m,\gamma'}(\Omega)$. D'autre part, elle est sous-linéaire, convexe et positivement homogène. Le théorème de Hahn-Banach géométrique permet alors de montrer que p est l'enveloppe supérieure des formes linéaires continues qu'elle majore. En fait, nous utiliserons uniquement la conséquence suivante que nous allons démontrer : soit $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe une mesure de Radon positive ρ sur Ω telle que

$$\begin{cases} 0 \leqslant \rho \leqslant \nu, \ \rho \in W^{-m,\gamma}(\Omega) \\ \int_\Omega \varphi_0 \, d(\nu - \rho) \leqslant \epsilon . \end{cases} \tag{4.3}$$

En effet, $(\varphi_0, p(\varphi_0) - \epsilon)$ n'appartient pas à l'épigraphe de φ, soit $E = \{(\varphi, t) \in W_0^{m,\gamma'}(\Omega) \times \mathbf{R} \,;\, t \geqslant p(\varphi)\}$ qui est un convexe fermé de $W_0^{m,\gamma'}(\Omega) \times \mathbf{R}$. D'après le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue σ sur $W_0^{m,\gamma'}(\Omega)$ et des constantes a, b telle que

$$a + bt + \sigma(\varphi) \leqslant 0, \ \forall (\varphi, t) \in E \tag{4.4}$$

$$a + b(p(\varphi_0) - \epsilon) + \sigma(\varphi_0) > 0 . \tag{4.5}$$

Puisque $(0,0) \in E$, $a \leqslant 0$; on peut donc supposer $a = 0$ dans (4.5). On peut faire de même dans (4.4) puisque p est positivement homogène (on applique (4.4) à $(\lambda\varphi, \lambda t)$, $\lambda \longrightarrow +\infty$). Soit

$$bt + \sigma(\varphi) \leqslant 0\,,\ \forall (\varphi\,, t) \in \mathrm{E} \tag{4.6}$$

$$b(p(\varphi_0) - \epsilon) + \sigma(\varphi_0) > 0\,. \tag{4.7}$$

Puisque $(0\,, t) \in \mathrm{E}$, $\forall t > 0$, (4.6) implique $b \leqslant 0$. De plus, $b \neq 0$ sinon on aurait $\forall (\varphi\,, t) \in \mathrm{E}$, $\sigma(\varphi) \leqslant 0$. Ceci impliquerait $\sigma(\varphi_0) \leqslant 0$, fait incompatible avec (4.7).

Posons alors $\rho(\varphi) = -\,\sigma(\varphi)/b$. D'après (4.6)

$$\rho(\varphi) \leqslant p(\varphi)\,,\ \forall \varphi \in \mathrm{W}_0^{m,\gamma'}(\Omega)\,. \tag{4.8}$$

En particulier, si $\varphi \leqslant 0$, on obtient $\rho(\varphi) \leqslant 0$. Donc ρ est une forme linéaire positive et continue sur $\mathrm{W}_0^{m,\gamma'}$, majorée par p. Elle définit aussi une unique mesure de Radon sur Ω (encore notée ρ). Utilisant alors (4.7), on voit que ρ satisfait (4.3).

Supposons maintenant que ν satisfasse aux seules hypothèses du lemme. Soit K_p une suite exhaustive de compacts de Ω $(\ldots \subset \mathrm{K}_p \subset \mathrm{K}_{p+1}^{\circ} \subset \ldots, \bigcup_p \mathrm{K}_p = \Omega)$. Appliquant le résultat (4.3) à $\nu|_{\mathrm{K}_p}$, $\epsilon = 1/p$ et φ_0 une fonction $\geqslant 0$ égale à 1 sur K_p, on obtient une mesure $\rho_p \in \mathrm{W}^{-m,\gamma}(\Omega)$, à support compact, avec $0 \leqslant \rho_p \leqslant \nu$, $\int_{\mathrm{K}_p} d(\nu - \rho_p) \leqslant 1/p$. La suite $\nu_n = \rho_1 \vee \rho_2 \vee \ldots \vee \rho_n$ (où "V" = borne supérieure) satisfait alors aux conclusions du lemme. Il est clair qu'elle est croissante et converge au sens des mesures vers ν. Son appartenance à $\mathrm{W}^{-m,\gamma}(\Omega)$ résulte du fait que la borne supérieure de deux mesures positives de $\mathrm{W}^{-m,\gamma}(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})$ est encore dans $\mathrm{W}^{-m,\gamma}(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})$. En effet, soit μ_1, μ_2 deux telles mesures et soit $\mu = \mu_1 \vee \mu_2$. Si $\varphi \in \mathrm{W}^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})$, il existe $w \in \mathrm{W}^{m,\gamma'}(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})$ tel que $|\varphi| \leqslant w$ p.p., $\|w\|_{m,\gamma'} \leqslant \mathrm{C}\,\|\varphi\|_{m,\gamma'}$ où C ne dépend pas de φ (on prend par exemple $w = g_m * |f|$, si $\varphi = g_m * f$ avec g_m le noyau de Bessel d'ordre m). Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})$

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \int |\varphi|\, d\mu \leqslant \int w\, d\mu \leqslant \int w\, d(\mu_1 + \mu_2)$$
$$\leqslant \|w\|_{m,\gamma'}\, \|\mu_1 + \mu_2\|_{\mathrm{W}^{-m,\gamma}} \leqslant \mathrm{C}\,\|\varphi\|_{m,\gamma'}\, \|\mu_1 + \mu_2\|_{\mathrm{W}^{-m,\gamma}}\,.$$

Remarque. – Notons pour terminer que le théorème 4.1 fournit une description des mesures bornées sur Ω ne chargeant pas les ensembles de $c_{\gamma'}$-capacité nulle : l'espace de ces mesures s'identifie ainsi à l'espace des mesures bornées de $\mathrm{L}^1(\Omega) + \mathrm{W}^{-2,\gamma}(\Omega)$.

Appendice.

LEMME A.1. – *Soit* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *avec* Lu *mesure de Radon sur* Ω. *Alors,* $u \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$ *pour tout* $q \in [1, N/(N-1)[$. *De plus, si* Ω_1, Ω_2 *sont des ouverts avec* $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2 \subset \bar{\Omega}_2 \subset \Omega$,

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega_1)} \leqslant C(q, \Omega_1, \Omega_2, N, L) \int_{\Omega_2} |Lu| + |u| .$$

Remarque. – On renvoie à Kato [11] pour des résultats de ce type.

Démonstration. – Sans perte de généralité, on peut supposer Ω_2 régulier et $a = 0$. On fixe $\zeta \in C_0^\infty(\Omega_2)$ avec $\zeta = 1$ sur Ω_1. Pour tout $\psi \in C^\infty(\Omega_2)$

$$\int_\Omega \zeta\, \psi\, Lu = \int_\Omega u\, L^*(\zeta\, \psi),$$

soit

$$\int_\Omega \zeta\, \psi\, Lu = \int_\Omega u(\zeta\, L^* \psi + \psi\, L^* \zeta - (a_{ij} + a_{ji})\, \zeta_{xj}\, \psi_{x_i}) . \quad \text{(A.1)}$$

(On utilise les conventions usuelles de sommation). La première étape consiste à montrer que (A.1) reste vrai lorsque ψ est solution de

$$\begin{cases} L^* \psi = \theta\, ,\ \theta \text{ donné dans } C_0^\infty(\Omega_2) \\ \psi \in W_0^{1,p}(\Omega_2) \cap W^{2,p}(\Omega_2)\, ,\ \forall 1 \leqslant p < \infty . \end{cases} \quad \text{(A.2)}$$

D'après [2] et les injections de Sobolev, (A.2) a une solution unique vérifiant (A.3)

$$\sum_i \|\psi_{x_i}\|_{L^\infty(\Omega_2)} + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \leqslant C(p)\, \|\theta\|_{L^p(\Omega_2)}\, , \forall p > N .$$

Les coefficients de L^* n'étant pas suffisamment réguliers, nous approchons ψ par la solution du problème perturbé

$$\begin{cases} L_n\, \psi_n = \theta \\ \psi_n \in W_0^{1,p}(\Omega_2) \cap C^2(\Omega_2)\, ,\ 1 \leqslant p < \infty , \end{cases} \quad \text{(A.4)}$$

où $L_n = -a_{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} - b^n_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_j} - b_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

avec b^n_{ij} une suite de fonctions régulières convergeant uniformément sur Ω_2 vers $\dfrac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}$. La théorie de Schauder montre que

$\psi_n \in C^2(\Omega_2)$ (voir par exemple [9]). Il en résulte que ψ_n, ainsi que ses dérivées d'ordre 1 et 2 peuvent être approchées uniformément sur le support de ζ par des fonctions de $C^\infty(\Omega_2)$. On en déduit que (A.1) est vrai avec ψ_n au lieu de ψ. Mais :

$$L^* \psi_n = \theta - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} - b_{ij}^n\right) \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j} . \tag{A.5}$$

Or, la théorie L^p (cf. [2], [12]) prouve que ψ_n reste uniformément borné dans $W^{2,p}(\Omega_2)$ pour $1 \leqslant p < \infty$. Ainsi, d'après (A.5), $L^* \psi_n$ converge uniformément vers $L^* \psi = \theta$ et donc ψ_n, ψ_{nx_i} convergent uniformément vers ψ, ψ_{x_i}. En conséquence, (A.1) est vrai pour ψ solution de (A.2). On en déduit

$$\int_\Omega u \zeta \theta \leqslant C \|\psi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \left[\int_{\Omega_2} |Lu| + |u|\right] + C \sum_i \|\psi_{x_i}\|_{L^\infty(\Omega_2)} \int_{\Omega_2} |u| ,$$

où C ne dépend que de ζ. Soit d'après (A.3)

$$\int_\Omega u \zeta \theta \leqslant C(p) \|\theta\|_{L^p(\Omega_2)} \left[\int_{\Omega_2} |Lu| + |u|\right] ,$$

ce qui prouve par dualité, $u \in L^q(\Omega_1)$ et

$$\|u\|_{L^q(\Omega_1)} \leqslant C(q) \left[\int_{\Omega_2} |Lu| + |u|\right], \ \forall q \in [1, N/(N-1)[. \tag{A.6}$$

On suppose maintenant que $\theta = \sum_i f_{ix_i}$ où $f_i \in C_0^\infty(\Omega_2)$. Toujours d'après [2], on a

$$\|\psi\|_{L^\infty(\Omega_2)} + \sum_i \|\psi_{x_i}\|_{L^p(\mathrm{Supp}\, \zeta)} \leqslant C(p) \sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega_2)}, \ \forall p > N . \tag{A.7}$$

Ainsi d'après (A.1)

$$\sum_i \int_\Omega u \zeta f_{x_i} \leqslant C \|\psi\|_{L^\infty(\Omega_2)} \left[\int_{\Omega_2} |Lu| + |u|\right] + C \left[\int_{\mathrm{supp}\, \zeta} |u|^q\right]^{1/q} \sum_i \|\psi_{x_i}\|_{L^p(\mathrm{supp}\, \zeta)} ,$$

où $q = p/(p-1)$. Par dualité, et en utilisant (A.7), on obtient que $u \in W^{1,q}(\Omega_1)$ avec

$$\|u\|_{W^{1,q}(\Omega_1)} \leqslant C \left[\int_{\Omega_2} |Lu| + |u| + \left[\int_{\mathrm{supp}\, \zeta} |u|^q\right]^{1/q}\right] .$$

On termine alors à l'aide de (A.6) appliqué avec $\mathrm{supp}\, \zeta$ au lieu de Ω_1.

LEMME A.2 – *Soit* μ *une mesure de Radon sur* Ω *et* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *avec*

$$Lu = \mu \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{A.8}$$

Soit ω *ouvert borné avec* $\bar{\omega} \subset \Omega$. *Alors, il existe* $u_n \in W^{2,p}(\omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *vérifiant*

• u_n *converge vers* u *dans* $L^1(\omega)$ *et faiblement dans* $W^{1,q}(\omega)$ *pour* $q \in [1, N/(N-1)[$;

• $Lu_n = \mu * \rho_n$ *dans* $\mathcal{D}'(\omega)$, *où* ρ_n *est une suite régularisante de* $\mathbf{R}^N$.

Démonstration. – D'après le lemme (A.1), on sait déjà que $u \in W^{1,q}_{loc}(\Omega)$. Soit $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\zeta = 1$ sur un voisinage de $\bar{\omega}$. On a au sens des distributions

$$L(u\zeta) = -\zeta Lu - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}u\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}\right) + b_i u\frac{\partial \zeta}{\partial x_i},$$

soit $L(u\zeta) = \zeta\mu + f$ où $f \in L^1(\Omega)$ et $f = 0$ sur un voisinage de ω. On considère alors la solution de

$$\begin{cases} u_n \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lu_n = (\zeta\mu + f) * \rho_n \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

où ρ_n est une suite régularisante de $\mathbf{R}^N$. D'après (3.10)

$$\|u_n\|_{1,q} \leqslant C\,|(\zeta\mu + f) * \rho_n|_1 \leqslant C[\,|f|_1 + \int_\Omega d|\mu|\,].$$

En particulier, u_n est relativement compact dans $L^1(\Omega)$ et dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ faible. Donc une suite extraite (encore notée u_n) converge pour ces topologies vers v qui vérifie

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,1}(\Omega) \\ Lv = \zeta\mu + f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Par unicité, v coïncide avec $u\zeta$.

Par ailleurs, on sait que $u_n \in W^{2,p}(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \infty$ (cf. [2], [12]) et on vérifie que $(\zeta\mu + f) * \rho_n = \mu * \rho_n$ sur ω pour n assez grand. Ceci prouve que u_n satisfait aux conditions du lemme.

LEMME A.3. – *Soit* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *avec* $Lu \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Alors* $u^+ \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ *et* $Lu^+ \leqslant (\operatorname{sgn}^+ u)\, Lu$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque. – Voir Kato [11] pour des résultats de ce type.

Démonstration. – La fonction sgn^+ est définie par $\forall r > 0$, $\mathrm{sgn}^+ r = 1$, $\forall r \leqslant 0$, $\mathrm{sgn}^+ r = 0$.

Soit ω ouvert avec $\bar{\omega} \subset \Omega$ et u_n approchant u dans ω suivant le lemme A.2. Soit aussi $p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ régulière, croissante, convexe avec $p(0) = 0$. Grâce à la régularité de u_n et l'ellipticité de L, on démontre de manière élémentaire que

$$\mathrm{L}(p(u_n)) \leqslant p'(u_n)(\mathrm{L}u * \rho_n) \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega).$$

On passe aisément à la limite en n pour obtenir $\mathrm{L}p(u) \leqslant p'(u)\,\mathrm{L}u$ dans $\mathcal{D}'(\omega)$. Sachant que $u \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $u^+ \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on fait alors tendre $p(r)$ vers r^+ pour conclure.

LEMME A.4. – *Soit* u *une solution de* (3.6). *Alors* $u \in \mathrm{W}^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *pour* $1 \leqslant p < \infty$ *et* $\mathrm{L}u + u\,|u|^{\gamma-1} = 0$ p.p..

Démonstration. – D'après le lemme A.3, appliqué à u^+ et u^- $\mathrm{L}\,|u| \leqslant -\,|u|^\gamma \leqslant 0$.

En particulier, $\mathrm{L}\,|u|$ est une mesure de Radon négative sur Ω. D'après le lemme A.2, pour ω ouvert avec $\bar{\omega} \subset \Omega$, $|u|$ est limite de $v_n \in \mathrm{W}^{2,p}(\omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ avec

$$\mathrm{L}v_n \leqslant 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega)$$

$$|v_n|_{\mathrm{L}^q(\omega)} \leqslant \mathrm{C}(q),\ q \in [1, \mathrm{N}/(\mathrm{N}-1)[\,.$$

Mais d'après des résultats de régularité classique (voir par ex. [9], th. 8. 17), pour toute boule $\mathrm{B_R} \subset \omega$

$$\max_{\mathrm{B_{R/2}}} v_n \leqslant \mathrm{C(R)}\,|v_n|_{\mathrm{L}^q(\mathrm{B_R})}\,.$$

Cette inégalité se conserve à la limite et prouve que $u \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Utilisant alors les estimations L^p de [2], [12] on en déduit que $u \in \mathrm{W}^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.R. ADAMS and J.C. POLKING, The equivalence of two definitions of capacity, *Proc. of A.M.S.*, 37 (1973), 529-534.

[2] S. AGMON, A. DOUGLIS and L. NIRENBERG, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, *Comm. Pure Appl. Math*, 12 (1959), 623-727.

[3] P. BARAS et M. PIERRE, Singularités éliminables d'équations elliptiques semi-linéaires, *C.R.A.S.*, Paris, Série A, (1982).

[4] Ph. BENILAN et H. BREZIS, Papier à paraître sur l'équation de Thomas-Fermi. Voir aussi H. BREZIS, Some Variational problems of the Thomas-Fermi type, in *Variational Inequalities*, Cottle, Gianessi, Lions éd., Reidel (1980).

[5] H. BREZIS et P.L. LIONS, A note on isolated singularities for linear elliptic equations, *Mathematical Analysis and Applications*, Part. A. Volume dedicated to L. Schwartz, L. Nachbin éd., Acad. Press (1981), 263-266.

[6] H. BREZIS and W.A. STRAUSS, Semi-linear second-order elliptic equations in L^1, *J. of Math. Soc. Japan*, 25 (1973), 565-590.

[7] H. BREZIS and L. VERON, Removable singularities for some Nonlinear elliptic equations, *Arch. for Rat. Mech. and Ana.*, 75 (1980), 1-6.

[8] D. FEYEL et A. DE LA PRADELLE, Topologies fines et compactifications associées à certains espaces de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 27-4 (1977), 121-146.

[9] D. GILBARG and N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, 224 (1977).

[10] M. GRUN-REHOMME, Caractérisation du sous-différentiel d'intégrandes convexes dans les espaces de Sobolev, *J. Math. Pures et Appl.*, 56 (1977), 149-156.

[11] T. KATO, Schrödinger operators with singular potentials, *Israel J. Math.*, 13 (1972), 135-148.

[12] A.E. KOSELEV, A priori estimates in L_p and generalized solutions of elliptic equations and systems, *A.M.S. Transl. series*, 2, 2D (1962), 105-171.

[13] P.L. LIONS, Isolated singularities in semilinear problems, *J. of Diff. Equa.*, 38 (1980), 441-450.

[14] N.G. MEYERS, A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue Classes, *Math. Scand.*, 26 (1970), 255-292.

[15] L. NIRENBERG, On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 13 (1959), 115-162.

[16] L. VERON, Singular solutions of some nonlinear elliptic equations, *Nonlinear Anal. Th., Meth. Appl.*, Vol. 5, n° 3 (1981), 225-242.

[17] L. VERON, Singularités éliminables d'équations elliptiques non linéaires, *J. of Diff. Equa.*, 41 (1981), 87-95.

Manuscrit reçu le 6 janvier 1983.

P. BARAS,
Laboratoire IMAG
B.P. 53 X
38041 Grenoble Cedex.

M. PIERRE,
Institut Fourier
B.P. 74
38402 St. Martin d'Hères.