ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

TAKASHI AOKI

Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. I

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 4 (1983), p. 227-250

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_227_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 4 (1983), 227-250.

CALCUL EXPONENTIEL DES OPÉRATEURS MICRODIFFÉRENTIELS D'ORDRE INFINI. I

par Takashi AOKI

Introduction.

Le but de cet article est de donner la loi exponentielle des symboles des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, plus précisément des opérateurs microlocaux holomorphes.

Soit $f(x, \xi)$ une fonction holomorphe définie sur un ouvert conique du fibré vectoriel cotangent T^*X à X, où X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ muni des coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On dit que $f(x,\xi)$ est un symbole si $|f(x,\xi)| \exp(-h|\xi|)$ est borné pour tout $h > 0$ [5]. Nous dirons que deux symboles $f(x, \xi)$ et $g(x, \xi)$ sont équivalents si $|f(x, \xi) - g(x,\xi)| \times \exp(h|\xi|)$ est borné pour quelque $h > 0$. Un opérateur microlocal holomorphe est une classe d'équivalence des symboles [2], [15]. On note : $:f(x,\xi):$ l'opérateur défini par le symbole $f(x,\xi)$.

Soient $\exp\{p(x,\xi)\}$ et $\exp\{q(x,\xi)\}$ deux symboles définis sur un ouvert de T^*X. Nous calculons $r(x,\xi)$ qui satisfait à la formule suivante.

$$:\exp\{p(x,\xi)\}:\ :\exp\{q(x,\xi)\}: \ = \ :\exp\{r(x,\xi)\}: .$$

En outre nous trouverons les lois d'adjoint et de changement de coordonnées des symboles exponentiels.

Comme application, nous généraliserons le théorème d'inversibilité des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini qui a été donné dans notre article précédent [2].

Les résultats principaux de cet article sont annoncés dans [4].

PLAN

1. Préliminaires.

A. Soit X une variété analytique complexe, munie du faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes. On note T^*X le fibré vectoriel cotangent à X, S^*X (resp. P^*X) le fibré en sphères (resp. le fibré projectif complexe) associé. Identifions X à la diagonale de $X \times X$ et T^*X au fibré conormal à X dans $X \times X$ par la première projection. On note $\pi_{X|X\times X}$ la projection $(X\times X-X) \cup T^*_X(X\times X) \to X\times X$ le premier espace étant muni de la topologie de co-éclate [9], [21].

Le faisceau d'anneau $\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_X$ sur T^*X est défini par

$$\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_X = \mathcal{H}^{\dim X}_{T^*_X(X\times X)}(\pi_{X|X\times X}-1\ \mathcal{O}_{X\times X})^a \underset{\mathcal{O}_{X\times X}}{\otimes} \Omega^{(0,\dim X)}_{X\times X}$$

où a désigne l'application antipodale et $\Omega^{(0,\dim X)}_{X\times X}$ l'espace des formes différentielles holomorphes de type $(0, \dim X)$ sur $X \times X$ [9], [13], [16]. Les sections de $\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_X$ sont appelées opérateurs microlocaux holomorphes [2], [16].

On note $\gamma_{\mathbf{R}}$ (resp. γ) la projection $T^*X - T^*_XX \to S^*X$ (resp. $T^*X-T^*_XX \to P^*X$). Le faisceau $\mathcal{E}^\infty_X$ des opérateurs microdifférentiels (d'ordre fini ou infini) est défini par

$$\mathcal{E}^\infty_X|(T^*X-T^*_XX) = \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{E}^{\mathbf{R}}_X$$
$$\mathcal{E}^\infty_X|T^*_XX = \mathcal{D}^\infty_X = \mathcal{E}^{\mathbf{R}}_X|T^*_XX$$

où $\mathscr{D}_X^\infty$ désigne le faisceau d'anneau sur X (identifié à T_X^*X) des opérateurs différentiels (d'ordre fini ou infini). Rappelons qu'il existe des morphismes injectifs naturels

$$\begin{aligned} \pi_X^{-1}\mathscr{D}_X^\infty &\to \mathscr{E}_X^\infty, \\ \mathscr{E}_X^\infty &\to \mathscr{E}_X^{\mathbf{R}} \end{aligned}$$

où π_X désigne la projection $T^*X \to X$. C'est-à-dire, on peut regarder un opérateur microdifférentiel, donc un opérateur différentiel, d'ordre fini ou infini pour un opérateur microlocal holomorphe. Les opérateurs d'ordre infini sont utilisés dans les études des problèmes variés [12], [19], [20], [21], [22].

B. Supposons désormais que X soit un ouvert de $\mathbf{C}^n$ muni des coordonnées $x = (x_1,\ldots,x_n)$. On dit qu'un ensemble $W \subset T^*X$ est conique si $cW \subset W$ pour tout $c \geqslant 1$, où cW désigne l'ensemble $\{(x,c\xi);(x,\xi)\in W\}$. L'ensemble conique W est appelé compact si $\gamma_{\mathbf{R}}(W-T_X^*X)$ est compact.

Soient $\mathring{x}^* = (\mathring{x},\mathring{\xi})\in T^*X$, Ω un voisinage conique. On note $S(\Omega)$ (resp. $R(\Omega)$) l'espace vectoriel des fonctions holomorphes $f(x,\xi)$ sur Ω satisfaisant à la condition suivante : pour tout compact conique $\Omega' \subset\subset \Omega$ et pour tout $h > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(x,\xi)| \leqslant C\exp(h|\xi|), \quad (x,\xi)\in\Omega'$$

(resp. pour tout compact conique $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes $C > 0$, $h > 0$ telles que

$$|f(x,\xi)| \leqslant C\exp(-h|\xi|),$$

pour tout $(x,\xi)\in\Omega'$). La fonction

$$f(x,\xi)\in S(\Omega) \text{ (resp. } f(x,\xi)\in R(\Omega))$$

sera dite, pour abréger, à croissance lente ou un symbole (resp. à décroissance rapide). On peut construire un isomorphisme linéaire

$$(1.1) \qquad \varinjlim_{\Omega} S(\Omega)/R(\Omega) \to \mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,\mathring{x}^*} = \varinjlim_{\Omega} \mathscr{E}^{\mathbf{R}}_X(\Omega)$$

tel que l'image de $x_j\xi_j$ par cet isomorphisme soit égale à x_jD_j, où $D_j = \partial/\partial x_j\,(j=1,\ldots,n)$. Nous désignons par $:P(x,\xi):$ l'image d'une (classe d'équivalence de) fonction $P(x,\xi)$ par l'isomorphisme ci-dessus; $P(x,\xi)$ est appelée le symbole de l'opérateur $:P(x,\xi):$. Pour les définitions précises nous renvoyons à [2], [15].

Remarque. — Dans [2], $:P(x,\xi):$ est noté $P(x,D_x)$.

Soit m un nombre réel. Un symbole $P(x,\xi)$ défini sur Ω est appelé d'ordre m (resp. $m-0$) dans Ω si pour tout compact conique $\Omega' \subset\subset \Omega$, $P(x,\xi).|\xi|^{-m}$ est borné dans Ω' (resp. pour tout compact conique $\Omega' \subset\subset \Omega$, $P(x,\xi).|\xi|^{-m} \to 0$ pour $|\xi| \to \infty$, $(x,\xi) \in \Omega'$).

Si un symbole $p(x,\xi)$ est d'ordre $1-0$, la fonction $\exp\{p(x,\xi)\}$ est à croissance lente, c'est-à-dire, $\exp\{p(x,\xi)\}$ est aussi un symbole.

2. Symboles formels.

A. Nous allons généraliser une définition introduite dans un cas particulier par L. Boutet de Monvel [5] (cf. aussi [2]).

Soit $\{P_j(x,\xi)\}_{j\in\mathbf{N}}$ ($\mathbf{N}=\{0,1,2,\ldots\}$) une suite de symboles définis sur un voisinage conique Ω de $\mathring{x}^* \in T^*X$. Considérons une série formelle

$$P(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi). \tag{2.1}$$

DÉFINITION 2.1. — *On dit que la série formelle* $P(t;x,\xi)$ *est un symbole formel si pour tout compact conique* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *il existe des constantes* R, A *qui satisfont aux conditions suivantes :*

a) $0 < R$, $0 < A < 1$.

b) *pour tout* $h > 0$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* j *et pour tout* $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant (j+1)R$

$$|P_j(x,\xi)| \leqslant CA^j \exp(h|\xi|). \tag{2.2}$$

Remarque. — Un symbole (analytique) formel au sens de [2] ou [5] est un symbole formel au sens ci-dessus.

Nous noterons $\hat{S}(\Omega)$ l'espace des symboles formels définis sur Ω. Soient

$$P(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi) \quad \text{et} \quad Q(t;x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k Q_k(x,\xi)$$

deux symboles formels définis sur Ω. On pose

$$P(t;x,\xi) + Q(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j(P_j(x,\xi) + Q_j(x,\xi)),$$

$$P(t;x,\xi).Q(t;x,\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell \sum_{j+k=\ell} P_j(x,\xi).Q_k(x,\xi).$$

L'espace $\hat{S}(\Omega)$ est alors un anneau commutatif. On peut identifier $S(\Omega)$ et un sous-anneau de $\hat{S}(\Omega)$ défini par

$$\{P(t;x,\xi) \in \hat{S}(\Omega);\ P_j(x,\xi) \equiv 0 \text{ pour } j \geqslant 1\}.$$

DÉFINITION 2.2. — *Nous dirons qu'un symbole formel*

$$P(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$$

défini sur Ω *est équivalent à* 0 *et nous noterons* $P(t;x,\xi) \sim 0$ *si pour tout compact conique* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *il existe des constantes* R, A *qui satisfont aux conditions suivantes :*

a) $0 < R$, $0 < A < 1$.

b) *pour tout* $h > 0$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $m = 1, 2, \dots$ *et pour tout* $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant mR$

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} P_j(x,\xi)\right| \leqslant CA^m \exp(h|\xi|). \tag{2.3}$$

Nous désignerons par $\hat{R}(\Omega)$ l'espace des symboles définis sur Ω qui sont équivalents à 0.

La proposition suivante est fondamentale pour nos études.

PROPOSITION 2.3 (Cf. L. Boutet de Monvel [5]). — *Soit* $P(x,\xi)$ *un symbole défini sur* Ω. *Alors* $P(x,\xi) \sim 0$ *si et seulement si* $P(x,\xi) \in R(\Omega)$.

C'est-à-dire, $S(\Omega) \cap \hat{R}(\Omega)$ est égal à $R(\Omega)$. On a donc un morphisme injectif $S(\Omega)/R(\Omega) \to \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega)$. D'autre part, on a le théorème suivant [2], [5].

THÉOREME 2.4. — *Soit* $P(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$ *un symbole formel défini sur* Ω. *Il existe alors un symbole* $P(x,\xi)$ *tel que* $P(x,\xi) \sim P(t;x,\xi)$.

On a donc un isomorphisme

$$\varinjlim \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega) \to \varinjlim S(\Omega)/R(\Omega).$$

D'après (1.1), on obtient un isomorphisme linéaire

$$\varinjlim \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega) \to \mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,\dot{x}^*}$$

tel que l'image de $x_j\xi_j$ par cet isomorphisme soit égale à $x_j D_j$ $(j=1,\ldots,n)$. Nous noterons

$$:P(t;x,\xi): \, = \, : \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi):$$

ou, pour abréger, $: \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x,\xi):$ l'image d'un symbole formel

$$P(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$$

par l'isomorphisme ci-dessus. Les propositions suivantes sont bien connues [2], [5], [18].

PROPOSITION 2.5 (*Composition*). — *Soient* $P(t;x,\xi)$ *et* $Q(t;x,\xi)$ *deux symboles formels définis sur* Ω. *Posons*

$$W(t;x,\xi) = \exp(t\,\partial_\xi\,.\,\partial_y)P(t;x,\xi)Q(t;y,\eta)|_{y=x,\,\eta=\xi}.$$

Alors $W(t;x,\xi)$ *est un symbole formel défini sur* Ω *tel que*

$$:P(t;x,\xi): \, :Q(t;x,\xi): \, = \, :W(t;x,\xi):.$$

PROPOSITION 2.6 (*Adjoint*). — *Soit* $P(t;x,\xi)$ *un symbole formel défini sur* Ω. *Définissons une série formelle par*

$$Q(t;x,\xi) = \exp(-t\,\partial_\eta\,.\,\partial_x)P(t;x,\eta)|_{\eta=-\xi}.$$

La série $Q(t;x,\xi)$ *est alors un symbole formel défini sur* Ω^a *satisfaisant à*

$$(:P(t;x,\xi):)^* = \, :Q(t;x,\xi):,$$

où le premier membre désigne l'adjoint de $:P(t;x,\xi):$.

PROPOSITION 2.7 (*Changement de coordonnées*). — *Soient*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad et \qquad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

deux systèmes des coordonnées, $\mathrm{P}(t;x,\xi)$ *un symbole formel défini sur* $\Omega \subset \mathrm{T}^*\mathrm{X}$ *par le premier système des coordonnées. On pose*

$$\tilde{\mathrm{P}}(t;x,\eta) = \exp(t\,\partial_{x'}.\partial_{\xi'})\mathrm{P}(t;x,\xi'+{}^t\mathrm{M}(x,x')\eta)|_{\substack{x'=x\\ \xi'=0}}$$

avec $y = y(x)$ *et* $\mathrm{M}(x',x)$ *est la matrice définie par*

$$y(x) - y(x') = \mathrm{M}(x,x').(x-x').$$

La série $\tilde{\mathrm{P}}(t;y,\eta)$ *est alors un symbole formel défini sur* Ω *par le dernier système des coordonnées satisfaisant à*

$$:\mathrm{P}(t;x,\xi): \; = \; :\tilde{\mathrm{P}}(t;y,\eta):,$$

où le second membre désigne l'opérateur correspondant au symbole formel $\tilde{\mathrm{P}}(t;x,\eta)$ *par le dernier système des coordonnées.*

B. Soit $p(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j p_j(x,\xi)$ un symbole formel défini sur Ω. On dit que le symbole $p(t;x,\xi)$ est d'ordre $1-0$ si pour tout compact conique $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes R, A satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $0 < \mathrm{R}$, $0 < \mathrm{A} < 1$.

b) pour tout $h > 0$, il existe une constante $\mathrm{H} > 0$ telle que

$$|p_j(x,\xi)| \leqslant \mathrm{A}^j(h|\xi| + \mathrm{H}) \tag{2.4}$$

pour $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant (j+1)\mathrm{R}$; $j = 0, 1, 2, \ldots$.

PROPOSITION 2.9. — *Supposons que* $p(t;x,\xi)$ *soit un symbole formel d'ordre* $1-0$. *La série formelle* $\exp\{p(t;x,\xi)\}$ *est alors un symbole formel. De plus, si* $p(t;x,\xi) \sim 0$, *on obtient* $\exp\{p(t;x,\xi)\} \sim 1$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que

$$\exp\{p(t;x.\xi)\} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j e_j(x,\xi)$$

avec

$$(2.5) \qquad e_j(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j_1+\ldots+j_k=j} p_{j_1}(x,\xi).\ \ldots\ .p_{j_k}(x,\xi).$$

Comme $p_j(x,\xi)$ satisfait à (2.4), on a

$$|e_j(x,\xi)| \leqslant A^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \binom{j+k-1}{k-1} (h|\xi|+H)^k.$$

Il est facile de voir que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \binom{j+k-1}{k-1} s^k = 1 + \sum_{\ell=1}^{j} \frac{(j-1)!}{\ell!(\ell-1)!(j-\ell)!} s^\ell \exp s$$

et pour $h' > 0$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

$$(h|\xi|+H)^\ell \exp(-h'|\xi|) \leqslant \exp(h' H/h).(h/h')^\ell .\ell!.$$

On peut en déduire que

$$|e_j(x,\xi)|.\exp(-h'|\xi|) \leqslant A^j(1+h/h')^j \exp\{h|\xi|+H(1+h'/h)\}.$$

Comme $0 < A < 1$, pour tout $h' > 0$ il existe $h > 0$ tel que

$$0 < A(1+h/h') < 1$$

ce qui prouve la première partie de la proposition.

Démontrons ensuite la dernière partie. Si le symbole formel $p(t;x,\xi)$ d'ordre $1-0$ est équivalent à 0, on peut supposer que pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes R, B satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $0 < R$, $0 < B < 1$.

b) pour tout $h > 0$, il existe $H > 0$ telle que

$$(2.6) \qquad \left|\sum_{j=0}^{m-1} p_j(x,\xi)\right| \leqslant B^m(h|\xi|+H)$$

pour $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant mR$, $m = 1, 2, \ldots$.

D'après (2.5) on a

$$\sum_{j=0}^{m-1} e_j(x,\xi) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{j_1+\ldots+j_k=j} p_{j_1}.\ \ldots\ .p_{j_k}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{m-1} p_j\right)^k - \sum_{j=m}^{(m-1)k} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_k=j \\ j_1,\ldots,j_k \leqslant m-1}} p_{j_1}.\ \ldots\ .p_{j_k} \right\}.$$

On a donc

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} e_j(x,\xi)-1\right| \leqslant \mathrm{B}^m(h|\xi|+\mathrm{H})\exp\{(1-\mathrm{A})^{-1}(h|\xi|+\mathrm{H})\}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=m}^{(m-1)k}\sum_{j_1+\cdots+j_k=j}\mathrm{A}^{j_1+\cdots+j_k}(h|\xi|+\mathrm{H})^k.$$

Comme on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=m}^{(m-1)k}\sum_{j_1+\cdots+j_k=j}\mathrm{A}^{j_1+\cdots+j_k}(h|\xi|+\mathrm{H})^k$$
$$\leqslant \mathrm{A}^m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{A}^j\right)^k(h|k|+\mathrm{H})^k$$

il vient

$$\left|\sum_{j=0}^{m-1} e_j(x,\xi)-1\right| \leqslant (\mathrm{A}^m+\mathrm{B}^m)\exp\{2(1-\mathrm{A})^{-1}(h|\xi|+\mathrm{H})\}$$

pour $m = 1, 2, \ldots$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

D'après la proposition 2.9, $:\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} t^j p_j(x,\xi)\right\}:$ est un opérateur dans $\mathscr{E}_{\mathrm{X}}^{\mathbf{R}}$ si $\sum_{j=0}^{\infty} t^j p_j(x,\xi)$ est un symbole formel d'ordre $1-0$. Nous le noterons parfois, pour abréger, $:\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)\right\}:$.

3. Énoncé des théorèmes.

A. *Composition.* Soient $p(x,\xi)$ et $q(x,\xi)$ deux symboles définis sur un ouvert conique $\Omega \subset \mathrm{T}^*\mathrm{X}$. On définit la suite $\{w_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ de symboles définis sur $\Omega \times \Omega$ par

$$(3.1)\quad \begin{cases} w_0(x,y,\xi,\eta) = p(x,\xi) + q(y,\eta) \\ w_{j+1} = \dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\xi . \partial_y w_y + \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \partial_\xi w_k . \partial_y w_{j-k}\right), \quad j \in \mathbf{N} \end{cases}$$

et la suite $\{r_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ par

$$(3.2)\qquad r_j(x,\xi) = r_j(x,\xi;p,q) = w_j(x,x,\xi,\xi), \quad j \in \mathbf{N}.$$

On obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Supposons que* $p(x,\xi)$ et $q(x,\xi)$ *soient d'ordre* $1-0$. *La série formelle* $\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)$ *défini par* (3.2) *est alors un symbole formel d'ordre* $1-0$ *satisfaisant à la loi exponentielle de la façon suivante :*

$$(3.3)\qquad :\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{q(x,\xi)\}: = :\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x,\xi)\right\}:.$$

Si $p(x,\xi)$ et $q(x,\xi)$ sont d'ordre <1, on a :

THÉORÈME 3.2. — *Soit* ρ *un nombre réel tel que* $0 \leqslant \rho < 1$. *Supposons que* $p(x,\xi)$ *et* $q(x,\xi)$ *soient d'ordre* ρ. *Le symbole* $r_j(x,\xi)$ *défini par* (3.2) *est alors d'ordre* $(j+1)\rho - j$; *par suite il existe un symbole formel* $\sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathrm{L}_k(x,\xi)$ *d'ordre négatif satisfaisant à*

$$(3.4)\qquad :\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{q(x,\xi)\}: = :\exp\left\{\sum_{j=0}^{N} r_j(x,\xi)\right\}.\left\{1+\sum_{k=0}^{\infty} L_k(x,\xi)\right\}:$$

et la condition suivante : pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$ *il existe des constantes* $\mathrm{R}>0$, $\mathrm{C}>0$, $\mathrm{A}>0$ *telles que, pour* $(x,\xi)\in\Omega'$, $|\xi| \geqslant (k+1)\mathrm{R}$, $k=0,1,2,\ldots,$

$$(3.5)\qquad |\mathrm{L}_k(x,\xi)| \leqslant \mathrm{C}\mathrm{A}^k k!^{1-\rho}|\xi|^{-\lambda-k(1-\rho)}$$

où N *soit le plus grand entier tel que* $(\mathrm{N}+1)\rho - \mathrm{N} \geqslant 0$ *et*

$$\lambda = (\mathrm{N}+1)-(\mathrm{N}+2)\rho > 0.$$

Le théorème 3.2 dit que le symbole de l'opérateur $:e^p::e^q:$, qui est un opérateur d'ordre infini, est factorisé par $\exp\left\{\sum_{j=0}^{N} r_j(x,\xi)\right\}$ et que le quotient est un symbole formel d'ordre 0, de partie principale 1.

B. *Adjoint*. Soit $p(x,\xi)$ un symbole défini sur Ω. Définissons alors la suite $\{v_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ de symboles définis sur Ω par

$$(3.6)\qquad \begin{cases} v_0(x,\eta) = p(x,\eta) \\ v_{j+1} = -\dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\eta.\partial_x v_j + \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \partial_\eta v_k.\partial_x v_{j-k}\right), \quad j\in\mathbf{N} \end{cases}$$

et de la suite $\{p_j^*\}_{j\in\mathbf{N}}$ par

$$p_j^*(x,\xi) = v_j(x,-\xi). \tag{3.7}$$

On obtient les théorèmes suivants :

THÉORÈME 3.3. — *Supposons que* $p(x,\xi)$ *soit d'ordre* $1-0$. *La série formelle* $\sum_{j=0}^{\infty} t^j p_j^*(x,\xi)$ *est un symbole formel d'ordre* $1-0$ *défini sur* Ω^a *satisfaisant à*

$$(:\exp\{p(x,\xi)\}:)^* = :\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} p_j^*(x,\xi)\right\}: \tag{3.8}$$

où le premier membre désigne l'adjoint de $:\exp\{p(x,\xi)\}:$.

THÉORÈME 3.4. — *Si* $p(x,\xi)$ *est un symbole d'ordre* $\rho<1$, *le symbole* $p_j^*(x,\xi)$ *défini par* (3.7) *est d'ordre* $(j+1)\rho-j$. *Il existe par conséquent un symbole formel* $\sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathrm{P}_k^*(x,\xi)$ *d'ordre négatif défini sur* Ω^a *satisfaisant à*

$$(:\exp\{p(x,\xi)\}:)^* = :\exp\left\{\sum_{j=0}^{\mathrm{N}} p_j^*(x,\xi)\right\}.\left\{1+\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}_k^*(x,\xi)\right\}: \tag{3.9}$$

et la condition suivante : pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega^a$, *il existe des constantes positives* R, C, A *telles que, pour* $(x,\xi)\in\Omega'$, $|\xi| \geqslant (k+1)\mathrm{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\mathrm{P}_k^*(x,\xi)| \leqslant \mathrm{CA}^k k!^{1-\rho}|\xi|^{-\lambda-k(1-\rho)} \tag{3.10}$$

où N *soit le plus grand entier tel que* $(\mathrm{N}+1)\rho-\mathrm{N} \geqslant 0$ *et*

$$\lambda = (\mathrm{N}+1)-(\mathrm{N}+2)\rho > 0.$$

C. *Changement de coordonnées.* Soient

$$x = (x_1,\ldots,x_n) \qquad \text{et} \qquad y = (y_1,\ldots,y_n)$$

deux systèmes des coordonnées de X, $p(x,\xi)$ un symbole défini sur $\Omega \subset \mathrm{T}^*\mathrm{X}$ par le premier système des coordonnées. On définit la suite $\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ de symboles par

$$\left\{\begin{aligned} &u_0(x,x'.\xi',\eta) = p(x,\xi'+{}^t\mathrm{M}(x,x')\eta) \\ &u_{j+1} = \frac{1}{j+1}\left(\partial_{\xi'}.\partial_{x'}u_j + \sum_{k=0}^{j} \partial_{\xi'}u_k.\partial_{x'}u_{j-k}\right), \quad j\in\mathbf{N} \end{aligned}\right. \tag{3.11}$$

et la suite $\{\tilde{p}_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ par

$$\tilde{p}_j(y,\eta) = u_j(x,x,0,\eta)\,, \qquad j\in\mathbf{N} \tag{3.12}$$

avec $y = y(x)$ et $M(x,x')$ est la matrice définie par

$$y(x) - y(x') = M(x,x')(x-x')\,.$$

Avec ces notations, on a :

THÉORÈME 3.5. — *Si $p(x,\xi)$ est d'ordre $1-0$, la série formelle $\sum_{j=0}^{\infty} t^j\tilde{p}_j(y,\eta)$ est un symbole formel d'ordre $1-0$ défini sur Ω par le dernier système des coordonnées satisfaisant à*

$$:\exp\{p(x,\xi)\}: \;=\; :\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{p}_j(y,\eta)\right\}: \tag{3.13}$$

où le second membre désigne l'opérateur correspondant au symbole formel $\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} t^j\tilde{p}_j(y,\eta)\right\}$ *par le dernier système des coordonnées.*

THÉORÈME 3.6. — *Supposons que $p(x,\xi)$ soit d'ordre $\rho<1$. Le symbole $\tilde{p}_j(y,\eta)$ est alors d'ordre $(j+1)\rho-j$. Il existe donc un symbole formel $\sum_{k=0}^{\infty} t^k\tilde{P}_k(y,\eta)$ d'ordre négatif satisfaisant à*

$$:\exp\{p(x,\xi)\}: \;=\; :\exp\left\{\sum_{j=0}^{N}\tilde{p}_j(y,\eta)\right\}.\left\{1+\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{P}_k(y,\eta)\right\}: \tag{3.14}$$

et la condition suivante : pour tout $\Omega'\subset\subset\Omega$, il existe des constantes positives R, C, A *telles que, pour $(y,\eta)\in\Omega'$, $|\eta|\geqslant(k+1)R$, $k\in\mathbf{N}$*

$$|\tilde{P}_k(y,\eta)| \leqslant CA^k k!^{1-\rho}|\eta|^{-\lambda-k(1-\rho)} \tag{3.15}$$

où N *soit le plus grand entier tel que $(N+1)\rho - N \geqslant 0$ et*

$$\lambda = (N+1) - (N+2)\rho > 0\,.$$

Le théorème 3.6 dit que la partie principale du logarithme d'un symbole ne dépend pas du choix des coordonnées locales si le symbole est de croissance <1.

4. Application : Inversibilité.

Soient ρ un nombre réel tel que $0 \leqslant \rho < 1$, $P(x,\xi)$ un symbole défini sur un ouvert conique $\Omega \subset T^*X$. On dit que $P(x,\xi)$ est un symbole de croissance ρ si pour tout compact conique $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes positives h, C telles que, pour $(x,\xi) \in \Omega'$

$$|P(x,\xi)| \leqslant C \exp(h|\xi|^\rho).$$

Un opérateur microlocal holomorphe P est appelé de croissance ρ si son symbole $P(x,\xi)$ est de croissance ρ.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $P(x,\xi)$ *un symbole de croissance* ρ *défini sur un voisinage* Ω *de* $\mathring{x}^*$ *dans* T^*X. *Supposons que* $1/P(x,\xi)$ *soit aussi un symbole de croissance* ρ *sur* Ω. *L'opérateur* $:P(x,\xi):$ *est alors inversible dans* $\mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,\mathring{x}^*}$ *et son inverse est de croissance* ρ.

Démonstration. — Posons $p(x,\xi) = \log P(x,\xi)$. Alors $p(x,\xi)$ est un symbole d'ordre ρ défini sur Ω. Nous allons appliquer le Théorème 3.2. Définissons la suite $\left\{\sum_{j=1}^{\infty} t^j u_j^{(k)}\right\}_{k=1,2,\dots}$ de symboles formels et la suite $\{u^{(k)}\}_{k=1,2,\dots}$ de symboles par récurrence sur l'entier k : on pose pour $j = 0,1,2,\dots$

$$u_j^{(1)}(x,\xi) = r_j(x,\xi;p,-p)$$

où r_j est défini par (3.2). Le symbole $u_j^{(1)}(x,\xi)$ est alors d'ordre $(j+1)\rho - j$. De plus, on a $u_0^{(1)}(x,\xi) \equiv 0$. On en déduit que $\sum_{j=1}^{\infty} t^j u_j^{(1)}(x,\xi)$ est un symbole formel d'ordre $2\rho - 1$. D'après le théorème 2.4 il existe un symbole $u^{(1)}(x,\xi)$ d'ordre $2\rho - 1$ tel que

$$u^{(1)}(x,\xi) \sim \sum_{j=1}^{\infty} t^j u_j^{(1)}(x,\xi)$$

et donc

$$:\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{-p(x,\xi)\}: = :\exp\{u^{(1)}(x,\xi)\}:.$$

Supposons que $u^{(k)}$ soit défini. On pose, pour $j = 0, 1, 2, \dots$

$$u_j^{(k+1)}(x,\xi) = r_j(x,\xi;u^{(k)}, -u^{(k)}).$$

On a alors $u_0^{(k+1)}(x,\xi) \equiv 0$. D'après le théorème 2.4, il existe un symbole $u^{(k+1)}(x,\xi)$ tel que

$$u^{(k+1)}(x,\xi) \sim \sum_{j=1}^{\infty} t^j u_j^{(k+1)}(x,\xi)$$

et donc

$$:\exp\{u^{(k)}(x,\xi)\}: \, :\exp\{-u^{(k)}(x,\xi)\}: \, = \, :\exp\{u^{(k+1)}(x,\xi)\}:.$$

On voit facilement que $u^{(k)}(x,\xi)$ est un symbole d'ordre $2^k\rho - (2^k-1)$. Comme $\rho > 1$, il existe le plus grand entier m tel que $2^m\rho - (2^m-1) \geqslant 0$. On obtient alors

$$:\exp u^{(m+1)}: \, = \, :\exp p: :\exp(-p): :\exp(-u^{(1)}): \ldots :\exp(-u^{(m)}):.$$

Comme $u^{(m+1)}(x,\xi)$ est d'ordre négatif, on peut construire l'inverse $(:\exp\{u^{(m+1)}(x,\xi)\}:)^{-1}$ de l'opérateur $:\exp\{u^{(m+1)}(x,\xi)\}:$ (cf. [2], Th. 3.1.1). On est alors en mesure de construire un inverse à droite de l'opérateur $\mathrm{P} = :\mathrm{P}(x,\xi): = :\exp\{p(x,\xi)\}:$. Nous définissons l'opérateur Q de croissance ρ par

$$\mathrm{Q} = :\exp(-p): :\exp(-u^{(1)}): \ldots :\exp(-u^{(m)}): (:\exp u^{(m+1)}:)^{-1}.$$

Il est facile de voir que $\mathrm{PQ} = 1$, c'est-à-dire Q est l'inverse à droite de P. Par la même méthode on peut construire un inverse à gauche. L'existence d'un inverse à droite et d'un inverse à gauche implique l'existence d'un inverse. Ceci achève la démonstration du théorème 4.1 qui généralise un résultat de [2] (cf. aussi [5], [6], [17]).

Remarque. — D'après le théorème 3.6, l'hypothèse du théorème 4.1 ne dépend pas du choix des coordonnées locales.

5. Démonstration des théorèmes.

Démontrons d'abord les théorèmes 3.1 et 3.2. D'après la proposition 2.5, l'opérateur $:\exp p: :\exp q:$ s'écrit sous la forme

$$(5.1) \quad :\exp\{p(x,\xi)\}: \, :\exp\{q(x,\xi)\}: \\ = \, :\exp(t\,\partial_\xi . \partial_y)\exp\{p(x,\xi) + q(y,\eta)\}|_{\substack{y=x\\ \xi=\eta}}:.$$

Posons

$$(5.2) \qquad \Pi = \exp(t\,\partial_\xi . \partial_y)\exp\{p(x,\xi) + q(y,\eta)\}.$$

On voit facilement que Π est une unique solution formelle de l'équation différentielle

$$\text{(5.3)} \qquad \begin{cases} \partial_t \Pi = \partial_\xi . \partial_y \Pi \\ \Pi|_{t=0} = \exp\{p(x,\xi) + q(y,\eta)\} . \end{cases}$$

Nous supposerons que Π s'écrive sous la forme

$$\text{(5.4)} \qquad \Pi = \exp\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} t^j w_j(x,y,\xi,\eta) \right\} .$$

L'équation différentielle (5.3) est alors équivalente à la formule récurrente (3.1) : pour $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{cases} w_0(x,y,\xi,\eta) = p(x,\xi) + q(y,\eta) \\ w_{j+1} = \dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\xi . \partial_y w_j + \sum_{k=0}^{j} \partial_\xi w_k . \partial_y w_{j-k} \right) . \end{cases}$$

Comme on a (5.1) et $r_j(x,\xi) = w_j(x,x,\xi,\xi)$, on obtient que

$$:\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{q(x,\xi)\}: = :\exp\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} r_j(x,\xi) \right\}: .$$

On sait que $\exp\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi) \right\}$ est un symbole formel. Mais il n'est pas clair que $\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)$ est aussi un symbole formel. Afin de montrer que $\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)$ est un symbole formel, nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 5.1. — *Il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\text{(5.5)} \qquad \frac{1}{j+1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \sum_{k=\mu}^{j-\nu+\mu+1} (k+1)^{k-\mu-2}(j-k+1)^{j-k-\nu+\mu-1} \leqslant c(j+2)^{j-\nu-2}$$

pour $j = 1,2,3,\ldots$; $\nu = 1,2,\ldots,j$.

Démonstration. — 1) Lorsque $\nu \leqslant j-2$, on décompose le premier membre de (5.5) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{j+1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \sum_{k=\mu}^{j-\nu+\mu+1} (k+1)^{k-\mu-2}(j-k+1)^{j-k-\nu+\mu-1} \\ &\qquad = \frac{1}{j+1} \sum_{\ell=0}^{j-\nu+1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (\mu+\ell+1)^{\ell-2}(j-\mu-\ell+1)^{j-\nu-1-\ell} \\ &\qquad = \mathrm{L}^1 + \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^3 \end{aligned}$$

avec

$$L^1 = \frac{1}{j+1} \sum_{\ell=0}^{1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a(\ell,\mu;j,\nu)$$

$$L^2 = \frac{1}{j+1} \sum_{\ell=2}^{j-\nu-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a(\ell,\mu;j,\nu)$$

$$L^3 = \frac{1}{j+1} \sum_{\ell=j-\nu}^{j-\nu+1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a(\ell,\mu;j,\nu)$$

où $a(\ell,\mu;j,\nu) = (\mu+\ell+l)^{\ell-2}(j-\mu-\ell+1)^{j-\nu-1-\ell}$. On a alors

$$L^1 \leqslant \frac{1}{j+1}\left\{(j+1)^{j-\nu-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\mu+1)^{-2}+j^{j-\nu-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\mu+2)^{-1}\right\}.$$

Comme $\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\mu+1)^{-2}$ et $j^{-1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(\mu+2)^{-1}$ sont bornés, il existe une constante $c_0 > 0$ telle que

$$L^1 \leqslant c_0(j+2)^{j-\nu-2}.$$

Ainsi, on voit que

$$L^3 \leqslant c_0(j+2)^{j-\nu-2}.$$

De plus, comme $(\mu+\ell+1)^{\ell-2} \leqslant (j-1)^{\ell-2}$ et comme

$$(j-\mu-\ell+1)^{j-\nu-1-\ell} \leqslant (j-1)^{j-\nu-1-\ell},$$

on obtient

$$L^2 \leqslant \frac{1}{j+1}(j-1)^{j-\nu-3}.(j-\nu+2).\nu.$$

D'où il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$L^2 \leqslant c_1(j+2)^{j-\nu-2}$$

ce qui permet de conclure le lemme dans ce cas.

2) Lorsque $\nu = j-1$, la série du premier membre de (5.5) s'écrit

$$\frac{1}{j+1}\sum_{\ell=0}^{2}\sum_{\mu=0}^{j-2}(\mu+\ell+1)^{\ell-2}(j-\mu-\ell+1)^{-\ell}$$
$$= \frac{1}{j+1}\left\{\sum_{\mu=0}^{j-2}(\mu+1)^{-2} + \sum_{\mu=0}^{j-2}(\mu+2)^{-1}(j-\mu)^{-1} + \sum_{\mu=0}^{j-2}(j-\mu-1)^{-2}\right\}.$$

Comme $\sum_{\mu=0}^{j-2}(\mu+1)^{-2}$, $\sum_{\mu=0}^{j-2}(\mu+2)^{-1}(j-\mu)^{-1}$ et $\sum_{\mu=0}^{j-2}(j-\mu-1)^{-2}$ sont bornés, on peut en déduire qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$\frac{1}{j+1}\sum_{l=0}^{2}\sum_{\mu=0}^{j-2}(\mu+\ell+1)^{\ell-2}(j-\mu-\ell+1)^{-\ell} \leqslant c_2(j+2)^{-1}$$

ce qui permet de conclure également dans ce cas. Par la même méthode, on peut démontrer le lemme lorsque $\nu = j$.

Maintenant nous définissons la suite $\{w_j^{(\nu)}\}$ $(\nu \leqslant j \in \mathbf{N})$ par

$$(5.6)\qquad \begin{cases} w_0^{(0)} = w_0(x,y,\xi,\eta) = p(x,\xi) + q(x,\eta) \\ w_{j+1}^{(\nu)} = \dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\xi . \partial_y w_j^{(\nu)} + \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\sum_{k=\mu}^{j-\nu+\mu+1} \partial_\xi w_k^{(\mu)} . \partial_y w_{j-k}^{(\nu-\mu-1)}\right) \end{cases}$$

où $w_0^{(\nu)} \equiv 0$ pour $\nu > j$ et $w_j^{(0)} \equiv 0$ pour $j > 0$.

Il est facile de voir que $w_j = \sum_{\nu=0}^{j} w_j^{(\nu)}$ et donc $r_j = \sum_{\nu=0}^{j} r_j^{(\nu)}$ où $r_j^{(\nu)}(x,\xi) = w_j^{(\nu)}(x,x,\xi,\xi)$. On pose

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} &= \tilde{\Lambda}(\xi,\eta) = \sup\{|p(x,\xi)| + |q(y,\eta)|\,;\, x,y \in \pi(\Omega)\} \\ \Lambda &= \Lambda(\xi) = \tilde{\Lambda}(\xi,\xi), \end{aligned}$$

où $\pi : \mathrm{T^*X} \to \mathrm{X}$. On peut supposer que

$$\lim_{|\xi|,|\eta|\to\infty} \tilde{\Lambda}(\xi,\eta)/(|\xi|+|\eta|) = 0$$

si (x,ξ), $(y,\eta) \in \Omega$ pour tout $x,y \in \pi(\Omega)$. Avec ces notations, on a la proposition suivante :

Proposition 5.2. — *Il existe une constante positive* B *telle que pour tout compact conique* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *pour* $(x,y,\xi,\eta) \in \Omega' \times \Omega'$, $j = 0, 1, 2, \ldots;$ $\nu = 0, 1, \ldots, j$

$$(5.7)\qquad |w_j^{(\nu)}(x,y,\xi,\eta)| \leqslant \mathrm{B}^j (j+1)^{j-\nu-3} \varepsilon^{-2j} \tilde{\Lambda}^{\nu+1} |\xi|^{-j}$$

et pour $(x,\xi) \in \Omega'$, $j = 0, 1, 2, \ldots;$ $\nu = 0, 1, \ldots, j$

$$(5.8)\qquad |r_j^{(\nu)}(x,\xi)| \leqslant \mathrm{B}^j (j+1)^{j-\nu-3} \varepsilon^{-2j} \Lambda^{\nu+1} |\xi|^{-j}$$

où $\varepsilon = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ *désigne la distance de* $\gamma_{\mathbf{R}}(\Omega')$ *à* $\partial\gamma_{\mathbf{R}}(\Omega)$, $\gamma_{\mathbf{R}}$ *étant la projection* $\mathrm{T^*X} - \mathrm{T^*_XX} \to \mathrm{S^*X}$.

Démonstration. — Par récurrence sur l'entier j. La proposition est claire dans le cas $j = 0$. Supposons que cette proposition soit vraie pour tous $k \leqslant j$, $\nu \leqslant k$ et montrons qu'elle est encore vraie pour $k = j+1$, $\nu \leqslant j+1$. Nous estimons d'abord les dérivées de $w_k^{(\mu)}$ pour $k \leqslant j$, $\mu \leqslant k$. Choisissons un compact conique Ω'' tel que $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega'') = \varepsilon/(k+2)$. On utilise les hypothèses pour Ω''. Comme $\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega) \geqslant (1-1/(k+2))\varepsilon$, la formule de Cauchy implique pour $i = 1, \ldots, n$, $(x,\xi) \in \Omega'$

$$
\begin{aligned}
(5.9)\quad & |\partial_{\xi_i} w_k^{(\mu)}| \\
&\leqslant (k+2)(\varepsilon|\xi|)^{-1}\mathrm{B}^k(k+1)^{k-\mu-3}((1-1/(k+2))\varepsilon)^{-2k}\tilde{\Lambda}^{\mu+1}|\xi|^{-k} \\
&\leqslant 2e^2\mathrm{B}^k(k+1)^{k-\mu-2}\varepsilon^{-2k-1}\tilde{\Lambda}^{\mu+1}|\xi|^{-k-1}
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
(5.10)\qquad |\partial_{y_i} w_k^{(\mu)}| \leqslant 2e^2\mathrm{B}^k(k+1)^{k-\mu-2}\,\varepsilon^{-2k-1}\,\tilde{\Lambda}^{\mu+1}|\xi|^{-k}
$$

et

$$
(5.11)\qquad |\partial_{\xi_i}\,\partial_{y_i} w_k^{(\mu)}| \leqslant 4e^2\mathrm{B}^k(k+1)^{k-\mu-1}\,\varepsilon^{-2k-2}\,\tilde{\Lambda}^{\mu+1}|\xi|^{-k-1},
$$

où $e = 2.718\ldots$.

Comme $r_{j+1}^{(\nu)}(x,\xi) = w_{j+1}^{(\nu)}(x,x,\xi,\xi)$, il suffit de montrer (5.7) pour $j+1$. D'après (5.6) on a

$$
|w_{j+1}^{(\nu)}| \leqslant \frac{1}{j+1}\left\{\sum_{i=1}^{n}|\partial_{\xi_i}\partial_{y_i}w_j^{(\nu)}| + \sum_{\mu=0}^{\nu-1}\sum_{k=\mu}^{j-\nu+\mu-1}\sum_{i=1}^{n}|\partial_{\xi_i}w_k^{(\mu)}|\,|\partial_{y_i}w_{j-k}^{(\nu-\mu-1)}|\right\},
$$

d'où, en utilisant (5.9)-(5.11),

$$
\begin{aligned}
|w_{j+1}^{(\nu)}| \leqslant 4n\mathrm{B}^j\varepsilon^{-2j-2}\tilde{\Lambda}^{\nu+1}|\xi|^{-j-1}\Big\{&e^2(j+1)^{j-\nu-2} \\
&+\frac{e^4}{j+1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\sum_{k=\mu}^{j-\nu+\mu-1}(k+1)^{k-\mu-2}(j-k+1)^{j-k-\nu+\mu-1}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Comme on a le lemme 5.1, il vient

$$
|w_{j+1}^{(\nu)}(x,y,\xi,\eta)| \leqslant 4n(e^2+ce^4)\mathrm{B}^j(j+2)^{j-\nu-2}\,\varepsilon^{-2j-2}\,\tilde{\Lambda}^{\nu+1}|\xi|^{-j-1}.
$$

On peut choisir $\mathrm{B} \geqslant 4n(e^2+ce^4)$ indépendamment de ε, j et ν, ce qui achève la démonstration de la proposition 5.2.

On est alors en mesure de montrer le théorème 3.1. Comme

$$r_j(x,\xi) = \sum_{\nu=0}^{j} r_j^{(\nu)}(x,\xi),$$

on obtient, grâce à la proposition 5.2, pour $(x,\xi) \in \Omega'$

$$(5.12) \qquad |r_j(x,\xi)| \leqslant (B\varepsilon^{-2})^j \sum_{\nu=0}^{j} (j+1)^{j-\nu-3}(\Lambda.|\xi|^{-1})^\nu \Lambda.|\xi|^{-j+\nu},$$

d'où, pour $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant (j+1)R$ (R est une constante)

$$(5.13) \qquad |r_j(x,\xi)| \leqslant (B\varepsilon^{-2}R^{-1})^j \sum_{\nu=0}^{j} (\Lambda.|\xi|^{-1}R)^\nu.\Lambda.$$

On peut choisir R assez grande telle que $0 < B\varepsilon^{-2}R^{-1} < 1$. De plus, comme $\lim_{|\xi|\to\infty} \Lambda(\xi).|\xi|^{-1} = 0$ (dans Ω), la série $\sum_{\nu=0}^{j} (\Lambda(\xi).|\xi|^{-1}R)^\nu$ est bornée pour $|\xi| \geqslant (j+1)R$. On a donc l'inégalité suivante : pour tout compact conique $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes R, A, C_1 telles que

a) $0 < R$, $0 < A < 1$, $0 < C_1$.

b) pour $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant (j+1)R$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$(5.14) \qquad |r_j(x,\xi)| \leqslant C_1 A^j \Lambda(\xi).$$

Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

Démontrons alors le théorème 3.2. Dans ce cas, pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes positives A_1, R telles que

$$\Lambda(\xi).|\xi|^{-1} \leqslant A_1|\xi|^{-(1-\rho)} \qquad \text{pour} \qquad (x,\xi) \in \Omega', \quad |\xi| \geqslant R.$$

D'après (5.12), il existe donc des constantes positives C_2, A_2 telles que pour $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant (j+1)R$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$(5.15) \qquad |r_j(x,\xi)| \leqslant C_2 A_2^j (j+1)^{(1-\rho)j-3}|\xi|^{-(1-\rho)j}\Lambda(\xi).$$

Ce qui permet de conclure la première partie du théorème 3.2.

Définissons un symbole formel $\Sigma t^k L_k(x,\xi)$ par

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k L_k(x,\xi) = \exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_{N+j+1}(x,\xi)\right\} - 1.$$

On a alors comme (2.5)

$$\begin{aligned} L_0(x,\xi) &= \exp\{r_{N+1}(x,\xi)\} - 1 \\ L_k(x,\xi) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell\,!} \sum_{j_1+\cdots+j_\ell=k} r_{N+j_1+1}(x,\xi)\,.\,\ldots\,.\,r_{N+j_\ell+1}(x,\xi), \quad k > 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après (5.15), pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes positives C, A telles que

$$|L_k(x,\xi)| \leqslant CA^k k\,!^{1-\rho}|\xi|^{-\lambda-(1-\rho)k}$$

pour $(x,\xi) \in \Omega'$, $|\xi| \geqslant (k+1)R$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Il est facile de voir que le symbole formel

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)$$

est équivalent au symbole formel

$$\sum_{j=0}^{N} r_j(x,\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} t^j r_{N+j+1}(x,\xi).$$

D'après la proposition 2.9, on peut en déduire que

$$\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)\right\} \sim \exp\left\{\sum_{j=0}^{N} r_j(x,\xi)\right\}\left\{1 + \sum_{k=0}^{\infty} t^k L_k(x,\xi)\right\}.$$

Ceci prouve le théorème 3.2.

Par la même méthode, on obtient les théorèmes 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6.

6. Exemples et remarques.

A. Dans le cas $n = 1$, les premiers cinq termes de $\{r_j\}$ (cf. Théorèmes 3.1 et 3.2; Proposition 5.2) sont

$$\begin{aligned} r_0 &= p + q, \\ r_1 &= \partial_\xi p\,.\,\partial_x q, \\ r_2 &= r_2^{(1)} + r_2^{(2)}, \\ &\quad r_2^{(1)} = \frac{1}{2}\,\partial_\xi^2 p\,.\,\partial_x^2 q, \\ &\quad r_2^{(2)} = \frac{1}{2}\,\{\partial_\xi^2 p\,.(\partial_x q)^2 + (\partial_\xi p)^2\,.\,\partial_x^2 q\}, \end{aligned}$$

$$r_3 = r_3^{(1)} + r_3^{(2)} + r_3^{(3)},$$

$$r_3^{(1)} = \frac{1}{6}\,\partial_\xi^3 p\,.\,\partial_x^3 q,$$

$$r_3^{(2)} = \frac{1}{2}\,(\partial_\xi^3 p\,.\,\partial_x q\,.\,\partial_x^2 q + \partial_\xi p\,.\,\partial_\xi^2 p\,.\,\partial_x^3 q),$$

$$r_3^{(3)} = \frac{1}{6}\,\{\partial_\xi^3 p\,.\,(\partial_x q)^3 + (\partial_\xi p)^3\,.\,\partial_x^3 q\} + \partial_\xi p\,.\,\partial_\xi^2 p\,.\,\partial_x q\,.\,\partial_x^2 q,$$

$$r_4 = r_4^{(1)} + r_4^{(2)} + r_4^{(3)} + r_4^{(4)},$$

$$r_4^{(1)} = \frac{1}{24}\,\partial_\xi^4 p\,.\,\partial_x^4 q,$$

$$r_4^{(2)} = \frac{1}{8}\,\{\partial_\xi^4 p\,.\,(\partial_x^2 q)^2 + (\partial_\xi^2 p)^2\,.\,\partial_x^4 q\} + \frac{1}{6}\,(\partial_\xi^4 p\,.\,\partial_x q\,.\,\partial_x^3 q + \partial_\xi p\,.\,\partial_\xi^3 p\,.\,\partial_x^4 q)$$

$$r_4^{(3)} = \frac{1}{4}\,\{\partial_\xi^4 p\,.\,(\partial_x q)^2\,.\,\partial_x^2 q + (\partial_\xi^2 p)^2 (\partial_x^2 q)^2 + (\partial_\xi p)^2\,.\,\partial_\xi^2 p\,.\,\partial_x^4 q\}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\{\partial_\xi p\,.\,\partial_\xi^3 p\,.\,(\partial_x^2 q)^2 + \partial_\xi p\,.\,\partial_\xi^3 p\,.\,\partial_x q\,.\,\partial_x^3 q + (\partial_\xi^2 p)^2\,.\,\partial_x q\,.\,\partial_x^3 q\},$$

$$r_4^{(4)} = \frac{1}{24}\,\{\partial_\xi^4 p\,.\,(\partial_x q)^4 + (\partial_\xi p)^4\,.\,\partial_x^4 q\}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\{\partial_\xi p\,.\,\partial_\xi^3 p\,.\,(\partial_x q)^2\,.\,\partial_x^2 q + (\partial_\xi^2 p)^2\,.\,(\partial_x q)^2\,.\,\partial_x^2 q$$

$$+ (\partial_\xi p)^2\,.\,\partial_\xi^2 p\,.\,(\partial_x^2 q)^2 + (\partial_\xi p)^2\,.\,\partial_\xi^2 p\,.\,\partial_x q\,.\,\partial_x^3 q\}.$$

B. Supposons encore que $n = 1$. Considérons des opérateurs microlocaux holomorphes

$$\mathrm{P} = :\exp(x\sqrt{\xi}): \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} = :\exp(-x\sqrt{\xi}):.$$

C'est-à-dire,

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k (\sqrt{\mathrm{D}_x})^k$$

et

$$\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, (-x)^k (\sqrt{\mathrm{D}_x})^k.$$

Nous calculons les opérateurs $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}.\mathrm{P}$ et $\mathrm{P}.\mathrm{Q}$. D'après le théorème 3.1, on obtient

$$\mathrm{P}^2 = :\exp\left\{2x\sqrt{\xi} + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\,(-1/\sqrt{\xi})^{k-1}\right\}:$$

$$= :\exp\{2x\sqrt{\xi} + x(1 + \sqrt{1 + 1/\sqrt{\xi}})^{-1}\}:,$$

ainsi

$$P.Q = :\exp\{x(1+\sqrt{1-1/\sqrt{\xi}})^{-1}\}:.$$

Remarquons que $:\exp(x\sqrt{\xi}):$ ne désigne pas l'opérateur

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x\sqrt{D_x})^k = \exp(:x\sqrt{\xi}:).$$

On voit facilement que

$$\exp(:x\sqrt{\xi}:) = :\exp(x\sqrt{\xi}+x/4):.$$

C. Pour toutes les classes des opérateurs pseudodifférentiels nos théorèmes 3.1, 3.2, etc. sont vrais si les seconds membres de (3.3), (3.4), etc. ont des sens. Considérons, par exemple, l'espace des symboles $S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbf{R}^n_\xi)$ de Hörmander, où X soit un ouvert de $\mathbf{R}^n_x$. Nous supposons $\delta < \rho$. Soient $p(x,\xi)$ et $q(x,\xi)$ deux symboles $\in S^0_{\rho,\delta}(X \times \mathbf{R}^n_\xi)$. Alors le symbole $r_j(x,\xi)$ défini par (3.2) appartient à $S^{(\delta-\rho)j}_{\rho,\delta}(X \times \mathbf{R}^n_\xi)$ pour tout j. C'est-à-dire, on peut considérer $\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x,\xi)$ et $\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x,\xi)\right\}$. Donc on a la formule (3.3) dans l'espace des opérateurs $L^0_{\rho,\delta}(X)$ (cf. [8]).

De plus, on peut appliquer les théorèmes aux opérateurs non-locaux de certaines classes. Par exemple, nous considérons un opérateur de la façon suivante :

$$T_A = :\exp(Ax.\xi): \tag{6.1}$$

où $A = (a_{ij})$ soit une matrice $(a_{ij} \in \mathbf{C},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n)$, $Ax.\xi = \sum_{i,j} a_{ij}x_j\xi_i$.

Pourtant la fonction $\exp(Ax.\xi)$ n'est pas un symbole généralement, on peut considérer $:\exp(Ax.\xi):$ comme l'opérateur non-local défini par

$$\begin{aligned} :\exp(Ax.\xi):\ f(x) &= \Sigma \frac{(Ax)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(x) \\ &= f((A+1)x), \end{aligned} \tag{6.2}$$

où f soit une fonction holomorphe. Soit $B = (b_{ij})$ une matrice $(b_{ij} \in \mathbf{C},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n)$. Nous allons calculer l'opérateur $T_AT_B = :\exp(Ax.\xi)::\exp(Bx.\xi):$. En utilisant le théorème 3.1 dans ce cas exceptionnellement, on a

$$:\exp(Ax.\xi)::\exp(Bx.\xi): = :\exp(A+B+BA)x.\xi):.$$

Cette formule-ci est vraie car on a d'après (6.2)

$$\begin{aligned} :\exp(Ax.\xi)::\exp(Bx.\xi):f(x) &= f((B+1)(A+1)x) \\ &= f(((A+B+BA)+1)x). \end{aligned}$$

Donc on a

$$T_A T_B = T_{A+B+BA}. \tag{6.3}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Aoki, Growth order of microdifferential operators of infinite order, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, Sec. IA, 29 (1982), 143-159.

[2] T. Aoki, Invertibility for microdifferential operators of infinite order, *Publ. RIMS*, Kyoto Univ., 18 (1982), 421-449.

[3] T. Aoki, The exponential calculus of microdifferential operators of infinite order I, *Proc. Japan Acad.*, 58A (1982), 58-61.

[4] T. Aoki, The exponential calculus of microdifferential operators of infinite order II, *Proc. Japan, Acad.*, 58A (1982), 154-157.

[5] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 22, 3 (1972), 229-268.

[6] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre infini, *Astérisque*, 2-3 (1973), 128-134.

[7] L. Ehrenpreis and T. Kawai, Poisson's summation formula and Hamburger's theorem, *Publ. RIMS*, Kyoto Univ., 18 (1982), 833-846.

[8] L. Hörmander, Fourier integral operators I, *Acta Math.*, 127 (1971), 79-183.

[9] M. Kashiwara, Systèmes d'équations micro-différentielles, Cours rédigé par Teresa Monteiro-Fernandes, *Prépublications mathématiques de l'Université de Paris-Nord*, 1977.

[10] M. Kashiwara and T. Kawai, Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, *J. Math. Soc. Japan*, 27 (1975), 359-404.

[11] M. Kashiwara and T. Kawai, Second-microlocalization and asymptotic expansions, *Lect. Notes in Phys.*, Springer, No. 126 (1980), 21-76.

[12] M. Kashiwara and T. Kawai. On holonomic systems of micro-differential equations III, *Publ. RIMS*, Kyoto Univ., 17 (1981), 813-979.

[13] M. Kashiwara and P. Schapira, Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe, *Inventiones Math.*, 46 (1978), 17-38.

[14] M. Kashiwara and P. Schapira, Micro-hyperbolic systems, *Acta Math.*, 142 (1979), 1-55.

[15] K. Kataoka, *On the theory of Radon transformations of hyperfunctions*, Master's thesis in Univ. Tokyo, 1976 (en japonais).

[16] K. Kataoka, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, Sec. IA, 28 (1981), 331-413.

[17] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 17 (1970), 467-517.

[18] Y. Laurent. Deuxième microlocalisation, *Lect. Notes in Phys.*, Springer, No. 126 (1980), 77-89.

[19] M. Sato, Pseudo-differential equations and theta functions, *Astérisque*, 2-3 (1973), 286-291.

[20] M. Sato, M. Kashiwara and T. Kawai, Linear differential equations of infinite order and theta functions, *Advances in Math.*, 47 (1983), 300-325.

[21] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, *Lect. Notes in Math.*, Springer, No. 287 (1973), 265-529.

[22] K. Uchikoshi, Microlocal analysis of partial differential operators with irregular singularities, à paraître.

Manuscrit reçu le 1er juin 1982.

Takashi Aoki,
Département de Mathématiques
Université de Tokyo
Hongo, Tokyo 113 (Japon).