ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT
R. PARVATHAM

# Sur une inégalité fondamentale et les singularités d'une fonction analytique définie par un élément *LC*-dirichlétien

*Annales de l'institut Fourier*, tome 33, nº 4 (1983), p. 135-160
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_135_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 4 (1983). 135-160.

# SUR UNE INÉGALITÉ FONDAMENTALE ET LES SINGULARITÉS D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DÉFINIE PAR UN ÉLÉMENT LC-DIRICHLÉTIEN

par M. BLAMBERT et R. PARVATHAM

## INTRODUCTION

Ce travail comporte deux chapitres : dans le premier, utilisant une fonction entière $g \in B[1,T]$ (la classe des fonctions entières au plus de l'ordre borélien 1 et au plus du type fini T de leur ordre si cet ordre est égal à 1) et les propriétés relatives à son diagramme indicateur et à son diagramme conjugué, on établit une inégalité fondamentale liée au terme général d'un élément LC-dirichlétien. La méthode à la fois simple et élégante est distincte de celle utilisée par T. M. Gallie [6] dans le cas d'un élément C-dirichlétien et conduit à un résultat contenant celui de cet auteur comme cas particulier. La méthode est aussi beaucoup plus simple que celle due à M. M. Dzrbasjan [5] pour établir l'inégalité fondamentale obtenue dans un mémoire antérieur [3].

Dans le chapitre II, on donne des propriétés de convergence (un peu plus générales que celles introduites dans [1]) dans le but d'utiliser l'inégalité fondamentale obtenue dans le chapitre I pour préciser certaines propriétés liées au prolongement analytique de la fonction définie par l'élément LC-dirichlétien dans un ouvert connexe de convergence uniforme. Cette inégalité peut servir aussi à l'étude des ordres supérieur et inférieur au sens de Ritt pour les fonctions entières et permet de retrouver ainsi les résultats établis dans [3].

## CHAPITRE PREMIER

On considère un élément LC-dirichlétien :

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_n(s) \exp(-\lambda_n s), \quad \text{avec} \quad s = \sigma + i\tau, (\sigma, \tau) \in \mathbf{R}^2$$

où $\mathrm{P}_n(s) = \sum_{j=0}^{m_n} a_{nj} s^j$, les $a_{nj}$ étant des constantes complexes avec $a_{nm_n} \neq 0$ et où les $\lambda_n$ sont des constantes complexes telles que la suite des modules de $\lambda_n$, $(|\lambda_n|)$ est une D-suite ($\Leftrightarrow |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|$ *avec* $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$). On pose

$$\mathrm{D}^* = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} (m_i + 1)}{|\lambda_n|} \right\}$$

et

$$\beta^* = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{m_n}{|\lambda_n|} \right\}.$$

On désigne par $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ qui sont des zéros pour le polynôme $\mathrm{P}_n$ et par $\mathscr{E}_\infty$ l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ qui sont chacun un zéro pour une infinité de polynômes $\mathrm{P}_n$. On pose $\mathscr{E}^* = \mathscr{E}^d \cup \mathscr{E}_\infty$ où $\mathscr{E}^d$ désigne le dérivé de $\mathscr{E} = \bigcup_n \mathscr{E}_n$. On suppose $\mathrm{D}^* < +\infty$ ($\Rightarrow \beta^* < +\infty$) et $\mathbf{C} - \mathscr{E}^* \neq \varnothing$. Pour chaque point $s \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^*$ on a $\mathrm{P}_n(s) \neq 0$ à partir d'une certaine valeur de l'entier $n$, dépendant évidemment du point $s$ considéré. On pose :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^*} \quad \delta_*(s) = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{-\operatorname{Log} |\mathrm{P}_n(s) \exp(-\lambda_n s)|}{|\lambda_n|} \right\}$$

et

$$\forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \quad \mathscr{D}_{*\alpha} = \{ s \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^* / \delta_*(s) > \alpha \}.$$

On considère, en outre, une fonction entière $g$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1) $g$ admet, pour chaque $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, $\lambda_n$ pour zéro à l'ordre $m_n + 1$;

2) $g$ est au plus d'ordre borélien égal à 1 et du type fini T de cet ordre si cet ordre est égal à $1\ (\Leftrightarrow g \in \mathrm{B}[1,\mathrm{T}])$;

3) désignant par $\mathscr{C}$ l'image par rapport à l'axe imaginaire du diagramme indicateur de $g$, on a : $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}_{*,\beta^*}$.

*Remarque* I.1. – On sait que [4] le diagramme indicateur (et donc aussi $\mathscr{C}$) est inclus dans l'adhérence du disque de centre $s = 0$ et de rayon égal à T (on note $\overline{d(0,\mathrm{T})}$ cette adhérence) et qu'il a un point commun avec $\mathrm{Fr}\,\{\overline{d(0,\mathrm{T})}\}$. En outre, $\mathscr{C}$ est un compact.

*Remarque* I.2. – Eu égard à la condition $\mathbf{D}^* < +\infty$, le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} [1-(s/\lambda_n)^2]^{m_n+1}$ est absolument convergent dans $\mathbf{C}$ (on note $\bar{\mathrm{L}}(s)$ sa valeur au point $s \in \mathbf{C}$). La fonction $\bar{\mathrm{L}} : \mathbf{C} \ni s \mapsto \bar{\mathrm{L}}(s)$ satisfait aux conditions 1) et 2) ci-dessus si $\mathrm{T} \geqslant \pi \mathrm{D}^*$; on peut alors évidemment choisir pour fonction $g$ la fonction $\bar{\mathrm{L}}$ si elle satisfait en outre à la condition 3).

On considère, pour chaque $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, l'application

$$\psi_n : \mathbf{C} \ni s \Rightarrow \psi_n(s) = \frac{g(s)}{(s-\lambda_n)^{m_n+1}}$$

(définie par continuité au point $\lambda_n$). Chaque $\psi_n$ est holomorphe dans $\mathbf{C}$, avec $\psi_n(\lambda_n) \neq 0$. Pour chaque $n \in \mathbf{N}-\{0\}$, on considère la fonction $\varphi_n$, méromorphe dans $\mathbf{C}$, définie comme il suit :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \bigcup_{j=1}^{\infty} \lambda_j} \quad \varphi_n(s) = \frac{1}{\psi_n(s)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_n(\lambda_n) = \frac{1}{\psi_n(\lambda_n)}\cdot$$

$\varphi_n$ admet pour chaque $j \neq n$, l'élément $\lambda_j$ pour pôle d'ordre $m_j + 1$; $\varphi_n$ est évidemment holomorphe au point $\lambda_n$. On pose :

$$\mathrm{A}_j(\lambda_n) = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j\varphi_n}{ds^j}\right\}_{s=\lambda_n}$$

et pour $t \in \{1,2,\ldots,m_n+1\}$ :

$$\mathrm{Q}_{n,t}(s) = \sum_{j=0}^{m_n-t+1} \mathrm{A}_j(\lambda_n)(s-\lambda_n)^j ;$$

($\mathrm{Q}_{n,t}(s)$ est la valeur en $s$ du polynôme-section de degré $m_n - t + 1$ du germe taylorien de $\varphi_n$ au point $\lambda_n$), ainsi que :

$$\forall_{s \in \mathbf{C}} \ \Omega_{n,t}(s) = \frac{\psi_n(s) Q_n(s)(s-\lambda_n)^{t-1}}{(t-1)\,!}. \tag{I.1}$$

L'application $\Omega_{n,t} : \mathbf{C} \ni s \mapsto \Omega_{n,t}(s)$ est évidemment holomorphe dans $\mathbf{C}$ et a le même diagramme indicateur que $\psi_n$ et donc que $g$, en outre $\Omega_{n,t} \in \mathrm{B}[1,\mathrm{T}]$.

PROPOSITION I.3. — *On a*

$$\forall_{\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}} \ \exists_{\mathrm{M}_1(=\mathrm{M}_1(\varepsilon))} \ \forall_{n \in \mathbf{N}-\{0\}} \ \forall_{s \in \mathbf{C}} \ |\psi_n(s)| \leqslant \mathrm{M}_1(\varepsilon) \exp[(\mathrm{T}+\varepsilon)|s|].$$

*Démonstration.* — Puisque $g \in \mathrm{B}[1,\mathrm{T}]$, on a :

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{r_\varepsilon > 0} \ \forall_{s \in \mathbf{C} - \overline{d(0, r_\varepsilon)}} \ |g(s)| < \exp[(\mathrm{T}+\varepsilon)|s|].$$

Posant $\mathrm{M}(g;r) = \mathrm{Sup}\,\{|g(s)|\,|\,|s| \leqslant r\}$ et

$$\mathrm{M}^+(g;r_\varepsilon) = \mathrm{Max}\,\{1, \mathrm{M}(g,r_\varepsilon)\},$$

et eu égard à l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\forall_{s \in \mathbf{C}} \ |g(s)| \leqslant \mathrm{M}^+(g;r_\varepsilon) \exp[(\mathrm{T}+\varepsilon)|s|].$$

On considère le disque ouvert de centre $\lambda_n$ et de rayon $1$, que l'on note $d(\lambda_n, 1)$. Si $s \in \mathbf{C} - d(\lambda_n, 1)$, on a :

$$\left|\frac{g(s)}{(s-\lambda_n)^{m_n+1}}\right| \leqslant |g(s)| \leqslant \mathrm{M}^+(g;r_\varepsilon) \exp[(\mathrm{T}+\varepsilon)|s|].$$

Si $s \in \overline{d(\lambda_n, 1)}$, alors il existe un point $s_1 \in \mathrm{Fr}\,\{d(\lambda_n, 1)\}$ tel que

$$|\psi_n(s)| = \left|\frac{g(s)}{(s-\lambda_n)^{m_n+1}}\right| \leqslant |g(s_1)| \leqslant \mathrm{M}^+(g;r_\varepsilon) \exp[(\mathrm{T}+\varepsilon)|s_1|].$$

(On rappelle que $\psi_n$ au point $\lambda_n$ est définie par continuité). Or $s \in d(\lambda_n, 1)$ et $s_1 \in \mathrm{Fr}\,\{d(\lambda_n, 1)\}$ entraînent $|s_1| \leqslant |s| + 2$, et donc :

$$|\psi_n(s)| = \left|\frac{g(s)}{(s-\lambda_n)^{m_n+1}}\right| \leqslant \mathrm{M}^+(g;r_\varepsilon) \exp[(\mathrm{T}+\varepsilon)(|s|+2)].$$

Posant $M_1(\varepsilon) = M^+(g;r_\varepsilon)\exp[2(T+\varepsilon)]$, on a :

$$\underset{n\in\mathbf{N}-\{0\}}{\forall}\ \underset{s\in\mathbf{C}}{\forall}\ |\psi_n(s)| \leqslant M_1(\varepsilon)\exp[(T+\varepsilon)|s|]$$

(où $M_1(\varepsilon)$ est indépendant de $n$ et de $s$).

Proposition I.4. — *On a, pour chaque* $n\in\mathbf{N}-\{0\}$ :

1) $\underset{j(\neq n)\in\mathbf{N}-\{0\}}{\forall}\ \underset{r\in\{0,1,2,\dots,m_n\}}{\forall}\ \Omega_{n,t}^{(r)}(\lambda_j) = 0,$

2) $\underset{r(\neq t-1)\in\{0,1,2,\dots,m_n\}}{\forall}\ \Omega_{n,t}^{(r)}(\lambda_n) = 0$ et $\Omega_{n,t}^{(t-1)}(\lambda_n) = 1,$

*(où* $\Omega_{n,t}^{(r)}(\lambda_j)$ *désigne la valeur en* $\lambda_j$ *de la dérivée d'ordre* $r$ *de* $\Omega_{n,t}$*).*

*Démonstration.* — L'assertion (1) est triviale eu égard à la représentation (I.1) de $\Omega_{n,t}(s)$.

On considère un disque de centre $\lambda_n$ et de rayon $\rho > 0$ — noté $d(\lambda_n,\rho)$ — dans lequel le germe taylorien de $\varphi$ en $\lambda_n$ est convergent (on peut choisir le disque de convergence de ce germe au point $\lambda_n$. Ce disque n'est pas vide puisque $\varphi_n$ est holomorphe en $\lambda_n$). On a :

$$\begin{aligned}\underset{s\in d(\lambda_n,\rho)}{\forall}\ \Omega_{n,t}(s) &= \frac{\psi_n(s)(s-\lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!}\left[\varphi_n(s) - \sum_{j=m_n-t+2}^{\infty} A_j(\lambda_n)(s-\lambda_n)^j\right]\\ &= \frac{(s-\lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!} - \frac{\psi_n(s)(s-\lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!}\sum_{j=m_n-t+2}^{\infty} A_j(\lambda_n)(s-\lambda_n)^j\\ &= \frac{(s-\lambda_n)^{t-1}}{(t-1)!} - \frac{\psi_n(s)(s-\lambda_n)^{m_n+1}}{(t-1)!}\sum_{j=m_n-t+2}^{\infty} A_j(\lambda_n)(s-\lambda_n)^{j+t-m_n-2}.\end{aligned}$$

Eu égard à cette dernière représentation, l'assertion (2) est triviale.

On pose :

$$\omega_{n,t} = \frac{1}{(t-1)!}\sum_{j=0}^{m_n-t+1} |A_j(\lambda_n)|\,|\lambda_n|^{j+t-m_n-1}$$

$$M_n = \operatorname{Max}\{|A_j(\lambda_n)|\,|j\in\{0,1,2,\dots,m_n+1\}\}$$

$$\gamma = \limsup_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Log} M_n}{|\lambda_n|}.$$

PROPOSITION I.5. — *On a :* $-\mathrm{T} \leqslant \gamma \leqslant +\infty$.

En effet, on a :

$$|\varphi_n \lambda_n)| = |\mathrm{A}_0(\lambda_n)| \leqslant \mathrm{M}_n$$

où par la proposition I.3. :

$$|\varphi_n(\lambda_n)| = \frac{1}{|\psi_n(\lambda_n)|} \geqslant \frac{1}{\mathrm{M}_1(\varepsilon)} \cdot \exp\left[-(\mathrm{T}+\varepsilon)\,|\lambda_n|\right] ;$$

d'où

$$\limsup \frac{\mathrm{Log}\,[1/\mathrm{M}_1(\varepsilon)]}{|\lambda_n|} - (\mathrm{T}+\varepsilon) \leqslant \gamma ,$$

$$-\mathrm{T} \leqslant \gamma .$$

*Notations.* — Soient un point donné $s_1$ et une partie donnée E de **C**; on désigne par $\{s_1\} + \mathrm{E}$ l'ensemble $\{s \in \mathbf{C} \mid s = s_1 + s' \text{ avec } s' \in \mathrm{E}\}$. On pose : $\mathrm{E}_0 = \{s \in \mathbf{C} \mid |s| \leqslant 1\}$

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall}\ \varepsilon \mathrm{E}_0 = \{s \in \mathbf{C} \mid |s| \leqslant \varepsilon\} .$$

$\mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_2$ étant deux parties de **C**, on désigne par $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$ l'ensemble $\{s + s' \mid s \in \mathrm{E}_1 \wedge s' \in \mathrm{E}_2\}$.

DÉFINITION I.6. — *Soit* F *une fonction holomorphe dans un ouvert* $\mathrm{G} \neq \varnothing$. *Soient* $s_1$ *un point et* E *un compact tels que* $\{s_1\} + \mathrm{E} \subset \mathrm{G}$. *Soient* $s_2$ *un point distinct de* $s_1$ *et* $\mathscr{L}$ *un chemin (continu) rectifiable joignant les points* $s_1$ *et* $s_2$. *On pose :*

$$\mathrm{G}_1 = \bigcup_{s \in \mathscr{L}} (\{s\} + \mathrm{E}) .$$

*Si* F *admet une extension holomorphe dans* $\mathrm{G} \cup \mathrm{G}_1$, *on convient de dire, avec S. Mandelbrojt, que* F *admet une extension holomorphe, au moyen de* E, *de* $\{s_1\} + \mathrm{E}$ *à* $\{s_2\} + \mathrm{E}$, *le long de* $\mathscr{L}$.

On énonce :

PROPOSITION I.7. — *Sous les conditions :*

1) *Il existe un point* $s_1$ *tel que l'ensemble* $\{s_1\} + \mathscr{C}$ *est inclus dans un composant connexe* D *de* $\mathscr{D}_{*,\beta^*}$ *(avec* $\mathrm{D}^* < +\infty$*);*

2) *L'application* $f:\ \mathrm{D} \ni s \mapsto f(s) = \{f\}_s$ *admet une extension holomorphe, au moyen de* $\mathscr{C}$, *de* $\{s_1\} + \mathscr{C}$ *à* $\{s_2\} + \mathscr{C}$, *le long d'un chemin rectifiable* $\mathscr{L}$ *joignant* $s_1$ *à* $s_2$ *(puisque* $\{s_2\} + \mathscr{C}$ *est un compact, il existe donc* $\varepsilon \in ]0, 1[$ *tel que* $f$ *est holomorphe sur le compact* $\{s_2\} + \mathscr{C} + \varepsilon \mathrm{E}_0)$;

*alors, posant* $m^f = \mathrm{Max}\,\{|f(s)|\,|\,s \in \{s_2\} + \mathscr{C} + \varepsilon \mathrm{E}_0\}$, *il existe un entier* $n_1$ *et une constante* $\mathrm{K}$ *ne dépendant que de* $\varepsilon$ *et de* $g$ *telle que pour chaque* $n \geqslant n_1$ :

$$\forall_{t \in \{1,2,\ldots,m_n+1\}} \quad \frac{|\mathrm{P}_n^{(t-1)}(s_2) \exp(-s_2\lambda_n)}{(t-1)!} \leqslant \frac{\mathrm{K} m^f |\lambda_n|^{m_n} \mathrm{Z}^{m_n+1} \omega_{n,t}(m_n+1)!}{\varepsilon^{m_n+1}}.$$

*Démonstration.* — $\mathscr{L}$ est un continu borné, donc un compact. La fonction $f$ a une extension holomorphe sur le compact $\{s\} + \mathscr{C}$, indexé par $s \in \mathscr{L}$. On a :

$$\exists_{\eta \in ]0,1[}\ \forall_{s \in \mathscr{L}}\ f \text{ est holomorphe sur } \{s\} + \mathscr{C} + \eta \mathrm{E}_0 .$$

On désigne par $\Gamma_\eta$ la frontière de $-\mathscr{C} + \eta \mathrm{E}_0$ et par $b_{n,t}$ la transformée de Borel de $\Omega_{n,t}$. On considère l'intégrale :

$$(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} f(s-z) b_{n,t}(z)\, dz .$$

On sait que $b_{n,t}$ est holomorphe dans le complémentaire par rapport à $\mathbf{C}$ du diagramme conjugué de $\Omega_{n,t}$; celui-ci étant l'image du diagramme indicateur de $\Omega_{n,t}$ par rapport à l'axe réel, $-\mathscr{C}$ est donc précisément le diagramme conjugué de $\Omega_{n,t}$ et $b_{n,t}$ est holomorphe sur $\Gamma_\eta$. On pose :

$$\Delta = \bigcup_{s \in \mathscr{L}} (\{s\} + \mathscr{C} + \eta \mathrm{E}_0).$$

$\Delta \cup \mathrm{D}$ est un connexe. En chaque point $s \in \mathscr{L}$, il existe un disque ouvert $d(s, \rho_s)$, centré en $s$ et de rayon égal à $\rho_s > 0$, tel que la fonction des deux variables complexes $\zeta$ et $z$ :

$$f_s :\ d(s,\rho_s) \times (-\mathscr{C} + \eta \mathrm{E}_0) \ni (\zeta, z) \mapsto f(\zeta - z)$$

est holomorphe sur $\overline{d(s,\rho_s)} \times (-\mathscr{C} + \eta \mathrm{E}_0)$. Il en résulte que l'application

$$d(s,\rho_s) \ni \zeta \mapsto (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} f(\zeta - z) b_{n,t}(z)\, dz$$

est holomorphe dans son support $d(s,\rho_s)$. On désigne par $F_n$ la fonction définie comme suit : à $\zeta \in \bigcup_{s\in\mathscr{L}} d(s,\rho_s)$, on associe un point $s_\zeta \in \mathscr{L}$ tel que $\zeta \in d(s_\zeta, \rho_{s_\zeta})$ et on fait correspondre à $\zeta$ la valeur en $\zeta$ de l'application

$$\text{(I.2)} \qquad d(s_\zeta,\rho_{s_\zeta}) \ni \zeta' \mapsto (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} f(\zeta' - z) b_{n,t}(z)\, dz .$$

$F_n$ est, comme il est évident, holomorphe dans $\bigcup_{s\in\mathscr{L}} d(s,\rho_s)$. On désigne par $\ell_\eta$ la longueur de $\Gamma_\eta$ et on pose :

$$B_{n,\eta} = \operatorname{Sup} \{|b_{n,t}(z)| \,|\, z \in \Gamma_\eta\},$$

$$m(f;s_2;\eta) = \operatorname{Sup} \{|f(\zeta)| \,|\, \zeta \in \{s_2\} + \mathscr{C} + \eta E_0\}.$$

On a :

$$\text{(I.3)} \qquad \left|(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} f(s_2 - z) b_{n,t}(z)\, dz\right| \leqslant (1/2\pi)\ell_\eta B_{n,\eta} m(f; s_2; \eta).$$

En outre, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(s-\lambda_n)^{t-1} Q_{n,t}(s)}{(t-1)!}\right| &= \frac{1}{(t-1)!}\left|\sum_{j=0}^{m_n-t+1} A_j(\lambda_n)(s-\lambda_n)^{j+t-1}\right| \\
&\leqslant \frac{\left(1+\left|\frac{s}{\lambda_n}\right|\right)^{m_n}}{(t-1)!} \sum_{j=0}^{m_n-t+1} |\lambda_n|^{j+t-1}|A_j(\lambda_n)| \\
&= \frac{(|s|+|\lambda_n|)^{m_n}}{(t-1)!} \sum_{j=0}^{m_n-t+1} |\lambda_n|^{j+t-m_n-1}|A_j(\lambda_n)| \\
&= (|s|+|\lambda_n|)^{m_n}\, \omega_{n,t}.
\end{aligned}$$

Eu égard à ce résultat, on a :

$$\forall_{r>0} \ \operatorname{Sup} \{|\Omega_{n,t}(s)| \,|\, |s| = r\} \leqslant \omega_{n,t}(r+|\lambda_n|)^{m_n} \operatorname{Sup} \{|\psi_n(s)| \,|\, |s| = r\}.$$

Puisque $b_{n,t}$ est la transformée de Borel de $\Omega_{n,t} \in B'[1,T]$, on a, comme on le sait :

$$\forall_{z\in E(\theta,T)} \ b_{n,t}(z) = \exp(-i\theta) \int_0^{+\infty} \Omega_{n,t}(r\exp(-i\theta)) \exp[-zr\exp(-i\theta)]\, dr$$

où la constante $\theta \in ]-\pi,\pi]$ et où $E(\theta,T)$ désigne le demi-plan ouvert $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}[z\exp(-i\theta)] > T\}$. Soit $\varepsilon \in ]0,1[$ arbitraire fixé; on a :

$$\mathrm{Sup}\,\{|b_{n,t}(z)| \mid z \in E(\theta, T + \varepsilon)\} \leqslant \omega_{n,t}\int_0^{+\infty}(r+|\lambda_n|)^{m_n}\exp[-r(T+\varepsilon)].\mathrm{Sup}\,\{|\psi_n(\zeta)| \mid |\zeta| = r\}\,dr.$$

Eu égard à la proposition V.3, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sup}\,\{|b_{n,t}(z)| \mid z \in E(\theta,T+\varepsilon)\} &\leqslant \omega_{n,t}M_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_0^{+\infty}(r+|\lambda_n|)^{m_n}\exp[-r(T+\varepsilon)]\exp\left[r\left(T+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]dr \\ &= \omega_{n,t}M_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_0^{+\infty}(r+|\lambda_n|)^{m_n}\exp\left[-\frac{\varepsilon r}{2}\right]dr.\end{aligned}$$

On a : $\underset{n_1}{\exists}\ \underset{n \geqslant n_1}{\forall}\ |\lambda_n| \geqslant 1$; d'où :

$$\underset{n \geqslant n_1}{\forall}\ \{\mathrm{Sup}\,|b_{n,t}(z)| \mid n \in E(\theta,T+\varepsilon)\} \leqslant \omega_{n,t}|\lambda_n|^{m_n}M_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_0^{+\infty}(1+r)^{m_n}\exp\left(-\frac{\varepsilon r}{2}\right)dr.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(1+r)^{m_n}\exp\left(-\frac{\varepsilon r}{2}\right)dr &= \frac{1}{(\varepsilon/2)}\left[1+\sum_{i=0}^{m_n-1}\frac{m_n(m_n-1)\ldots(m_n-i)}{(\varepsilon/2)^{i+1}}\right] \\ &< \frac{(m_n+1)!}{(\varepsilon/2)^{m_n+1}} \quad (\text{puisque } \varepsilon \in ]0,1[).\end{aligned}$$

En définitive, on a pour $\theta \in ]-\pi,\pi]$ et pour $n \geqslant n_1$ :

$$\text{(I.4)}\quad \underset{\varepsilon \in ]0,1[}{\forall}\ \mathrm{Sup}\,\{|b_{n,t}(z)| \mid z \in E(\theta,T+\varepsilon)\} \leqslant \omega_{n,t}|\lambda_n|^{m_n}M_1(\varepsilon/2)\,\frac{(m_n+1)!}{(\varepsilon/2)^{m_n+1}}.$$

Le majorant obtenu est indépendant de $\theta$ sur $]-\pi,\pi]$. De ce dernier résultat, on déduit :

$$\text{(I.5)}\quad \underset{\varepsilon \in ]0,1[}{\forall}\ \mathrm{Sup}\,\{|b_{n,t}(z)| \mid z \in \mathrm{Fr}\{d(0,T+\varepsilon)\}\} \leqslant \omega_{n,t}|\lambda_n|^{m_n}M_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{(m_n+1)!}{(\varepsilon/2)^{m_n+1}}.$$

On considère maintenant la restriction de $F_n$ au disque $d(s_1, \rho_{s_1})$; on a

$$\forall_{s \in d(s_1, \rho_{s_1})} \quad F_n(s) = (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} f(s-z) b_{n,t}(z)\, dz;$$

or

$$\forall_{s \in d(s_1, \rho_{s_1})} \quad \forall_{z \in \Gamma_\eta} \quad s - z \in \mathscr{D}_{*,\beta^*};$$

d'où :

$$f(s-z) = \{f\}_{s-z}.$$

Eu égard à la convergence uniforme de l'élément LC-dirichlétien

$$\{f\} : \quad \sum_{j=1}^{\infty} P_j(s-z) \exp[-\lambda_j(s-z)]$$

par rapport au couple $(s,z) \in d(s_1, \rho_{s_1}) \times \Gamma_\eta$, on a :

$$\begin{aligned}\forall_{s \in d(s_1, \rho_{s_1})} \quad F_n(s) &= (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} \left( \sum_{j=1}^{\infty} P_j(s-z) \exp[-\lambda_j(s-z)] \right) b_{n,t}(z)\, dz \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-s\lambda_j) \left[ (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} P_j(s-z) \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z)\, dz \right],\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}&(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} P_j(s-z) \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z)\, dz \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{m_j} a_{j,i} \left[ (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} (s-z)^i \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z)\, dz \right].\end{aligned}$$

On sait que :

$$\Omega_{n,t}(\lambda_j) = (1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z)\, dz,$$

et donc

$$(1/2\pi i) \oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} P_j(s-z) \exp(z\lambda_j) b_{n,t}(z)\, dz = \sum_{i=0}^{m_j} a_{j,i} \sum_{\nu=0}^{i} \binom{i}{\nu} (-1)^\nu s^{i-\nu} \Omega_{n,t}^{(\nu)}(\lambda_j).$$

Or, on a montré que (Proposition I.4) :

$$\forall_{j (\neq n) \in \mathbf{N} - \{0\}} \quad \forall_{\nu \in \{0,1,2,\ldots,m_n\}} \quad \Omega_{n,t}^{(\nu)}(\lambda_j) = 0$$

et que :

$$\forall_{\nu(\neq t-1)\in\{0,1,2,\dots,m_n\}} \quad \Omega_{n,t}^{(\nu)}(\lambda_n) = 0$$

et

$$\Omega_{n,t}^{(t-1)}(\lambda_n) = 1 .$$

Il en résulte :

$$(1/2\pi i)\oint_{\Gamma_\eta \curvearrowleft} \mathrm{P}_j(s-z)\exp(z\lambda_j)b_{n,t}(z)\,dz = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad j \neq n \\ \displaystyle\sum_{i=t-1}^{m_n} a_{n,i}\binom{i}{t-1}(-1)^{t-1}s^{i-t+1} \end{cases}.$$

En définitive, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall_{s\in d(s_1,\rho_{s_1})} \quad \mathrm{F}_n(s) &= \exp(-s\lambda_n)\left[\sum_{i=t-1}^{m_n}(-1)^{t-1}a_{n,i}\binom{i}{t-1}s^{i-t+1}\right] \\ &= (-1)^{t-1}\frac{\mathrm{P}_n^{(t-1)}(s)}{(t-1)!}\exp(-s\lambda_n). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{F}_n$ holomorphe dans $\bigcup_{s\in\mathcal{L}} d(s,\rho_s)$ est l'extension à cet ouvert connexe de la fonction

$$d(s_1,\rho_{s_1}) \ni s \mapsto (-1)^{t-1}\frac{\mathrm{P}_n^{(t-1)}(s)}{(t-1)!}\exp(-s\lambda_n).$$

On a donc :

$$\forall_{s'\in \bigcup_{s\in\mathcal{L}} d(s,\rho_s)} \quad \mathrm{F}_n(s') = (-1)^{t-1}\frac{\mathrm{P}_n^{(t-1)}(s')}{(t-1)!}\exp(-s'\lambda_n);$$

en particulier, on a :

$$\text{(I.6)} \qquad \mathrm{F}_n(s_2) = (-1)^{t-1}\frac{\mathrm{P}_n^{(t-1)}(s_2)}{(t-1)!}\exp(-s_2\lambda_n).$$

Eu égard aux majorations obtenues antérieurement, ((I.2), (I.3) et (I.6)) on a :

$$\left|\frac{\mathrm{P}_n^{(t-1)}(s_2)}{(t-1)!}\exp(-s_2\lambda_n)\right| \leqslant (1/2\pi)\ell_\eta \mathrm{B}_{n,\eta}m(f;s_2;\eta).$$

Choisissant maintenant $\varepsilon = \eta \in ]0,1[$, on a, pour $n \geqslant n_1$, par (I.5)

$$\mathrm{B}_{n,\eta} \leqslant \omega_{n,t}|\lambda_n|^{m_n}\mathrm{M}_1(\eta/2)\frac{(m_n+1)!}{(\eta/2)^{m_n+1}}.$$

En définitive, on a, K étant une constante ne dépendant que de $\eta$ et de la fonction $g$ et pour $n \geqslant n_1$ :

$$\left|\frac{\mathrm{P}_n^{(t-1)}(s_2)}{(t-1)!}\exp(-s_2\lambda_n)\right| \leqslant \mathrm{K}m\,(f;s_2;\eta)\,\frac{\omega_{n,t}|\lambda_n|^{m_n}(m_n+1)!\,2^{m_n+1}}{\eta^{m_n+1}}$$

(où $m(f;s_2;\eta)$ n'est autre, par le choix $\varepsilon = \eta$, que le $m^f$ de l'énoncé de la proposition I.7) qui établit la proposition.

# CHAPITRE II

On considère la condition suivante (dite condition (C)) :

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}(m_j+1)}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0 .$$

Elle implique, comme il est trivial :

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0 ,$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \limsup_{n\to\infty} \frac{m_n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0 .$$

La condition $D^* < +\infty$ implique que la condition (C) est satisfaite mais, par contre la condition (C) n'implique pas nécessairement $D^* < +\infty$ (ni nécessairement $\beta^* < +\infty$). Soit $s \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^*$. On sait que :

$$\underset{n'(=n_s)}{\exists}\ \underset{n\geqslant n'}{\forall}\ P_n(s)\exp(-s\lambda_n) \neq 0$$

et donc $-\operatorname{Log}|P_n(s)\exp(-s\lambda_n)| < +\infty$ ; on pose :

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geqslant n'}{\forall}\ \delta^{\varepsilon}(n,s) = \frac{-\operatorname{Log}|P_n(s)\exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} ,$$

$$\delta^{\varepsilon}_{*}(s) = \liminf_{n\to\infty} \delta^{\varepsilon}(n,s) ,$$

et

$$\underset{\alpha\in\mathbf{R}}{\forall}\ \mathscr{D}^{\varepsilon}_{*\alpha} = \{s\in\mathbf{C} - \mathscr{E}^* \mid \delta^{\varepsilon}_{*}(s) > \alpha\} .$$

Proposition II.1. — *Sous la condition* (C) *l'élément* LC-*dirichlétien* $\{f\}$ *converge absolument dans* $\mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0}$ *pour chaque* $\varepsilon > 0$.

*Démonstration.* — Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé. Si $\mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0} \neq \varnothing$, soit un point $s \in \mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0}$. On a : $\delta^{\varepsilon}_{*}(s) > 0$ et

$$\underset{\varepsilon'\in]0,\delta^{\varepsilon}_{*}(s)[}{\forall}\ \underset{n'(=n_{s,\varepsilon,\varepsilon'})}{\exists}\ \underset{n\geqslant n'}{\forall}\ \delta^{\varepsilon}(n,s) > \varepsilon'$$

d'où :

$$\underset{n \geqslant n'}{\forall} \; |\mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp[-\varepsilon' |\lambda_n|^{1+\varepsilon}].$$

Or la condition (C) implique :

$$\underset{\varepsilon''>0}{\forall} \; \underset{n''(=n_{\varepsilon,\varepsilon''})}{\exists} \; \underset{n \geqslant n''}{\forall} \; \frac{n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} < \varepsilon''.$$

Rapprochant ces inégalités, on a :

$$\underset{n \geqslant \max(n',n'')}{\forall} |\mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < \exp\left[\frac{-n\varepsilon'}{\varepsilon''}\right].$$

L'élément $\{f\}$ converge donc absolument en chaque point $s \in \mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0}$.

Proposition II.2. — *Désignant par* $\mathrm{E}_a^f$ *l'ensemble de convergence absolue de l'élément* LC-*dirichlétien* $\{f\}$, *on a :*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{s \in \mathrm{E}_a^f \cap (\mathbf{C}-\mathscr{C}^*)}{\forall} \; \delta^{\varepsilon}_*(s) \leqslant \delta_*(s).$$

*Démonstration.* — Soit $s \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^*$; on a :

$$\underset{n'(=n_s)}{\exists} \; \underset{n \geqslant n'}{\forall} \; -\mathrm{Log}\, |\mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < +\infty.$$

Soit $s$ appartenant à $\mathrm{E}_a^f \cap (\mathbf{C}-\mathscr{E}^*)$ supposé non vide; on a :

$$\underset{n''(=n_s)}{\exists} \; \underset{n \geqslant n''}{\forall} \; 0 < -\mathrm{Log}\, |\mathrm{P}_n(s) \exp(-s\lambda_n)| < +\infty$$

et donc $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \delta^{\varepsilon}(n,s) < \delta(n,s)$; d'où : $\delta^{\varepsilon}_*(s) \leqslant \delta_*(s)$.

Proposition II.3. — *Sous la condition* (C), *on a :*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0} \subset \mathscr{D}_{*0}.$$

*Démonstration.* — Sous la condition (C) et eu égard à la proposition II.1 on a :

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0} \subset \mathrm{E}_a^f \cap (\mathbf{C}-\mathscr{E}^*);$$

d'où, eu égard à la proposition II.2, on a :

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \{\mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0} \ni s \Rightarrow 0 < \delta^{\varepsilon}_{*}(s) \leqslant \delta_{*}(s) (\Rightarrow s \in \mathscr{D}_{*0})\}$$

et donc

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \mathscr{D}^{\varepsilon}_{*0} \subset \mathscr{D}_{*0} .$$

$\mathscr{K}$ désignant un compact quelconque de $\mathbf{C}$, on énonce :

PROPOSITION II.4. — $\varepsilon > 0$ *étant arbitraire fixé, on a :*

1) $\underset{\mathscr{K} \subset \mathbf{C}-\mathscr{E}^*}{\forall} \ \underset{n'(=n_{\mathscr{K}})}{\exists} \ \underset{n \geqslant n'}{\forall}$ {*la fonction* $\mathscr{K} \ni s \mapsto \delta^{\varepsilon}(n,s)$ *est lipschitzienne*}.

2) *Sous la condition* (C), *on a :*

$$\underset{\alpha \in \mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}}{\exists} \delta^{\varepsilon}_{*}(\mathbf{C}-\mathscr{E}^*) = \{\alpha\},$$

(*l'image par* $\delta^{\varepsilon}_{*}$ *de son support* $\mathbf{C} - \mathscr{E}^*$ *se réduit à un seul point réel pouvant être* $+\infty$ *ou* $-\infty$).

*Démonstration.* — En suivant la démonstration du lemme 1 dans [2], on a :

$$\underset{\varepsilon' \in ]0,\varepsilon_{\mathscr{K}}[}{\forall} \ \underset{n'(=n_{\varepsilon'})}{\exists} \ \underset{n \geqslant n'}{\forall} \ \underset{(s,s') \in \mathscr{K}\times\mathscr{K}}{\forall} |\delta^{\varepsilon}(n,s) - \delta^{\varepsilon}(n,s') \leqslant \mu^{\varepsilon}_{n,\varepsilon'}|s-s'|$$

où

$$\underset{\mathscr{K} \subset \mathbf{C}-\mathscr{E}^*}{\forall} \mathscr{E}_{\mathscr{K}} = \operatorname{dist}(\mathscr{K},\mathscr{E}^*)$$

et

$$\mu^{\varepsilon}_{n,\varepsilon'} = \frac{1}{|\lambda_n|^{\varepsilon}}\left[1 + \frac{m_n}{\varepsilon'|\lambda_n|}\right],$$

qui établit l'assertion (1).

Soit un compact $\mathscr{K}$ inclus dans $\mathbf{C} - \mathscr{E}^*$ et soit $\varepsilon'$ fixé dans $]0,\varepsilon_{\mathscr{K}}[$. La condition (C) implique : $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^{\varepsilon}_{n,\varepsilon'} = 0$. Il en résulte :

$$\underset{(s,s') \in \mathscr{K}\times\mathscr{K}}{\forall} d^{\varepsilon}_{*}(s) = \delta^{\varepsilon}_{*}(s').$$

Soit $s_0$ un point arbitraire fixé dans $\mathbf{C} - \mathscr{E}^*$. $\mathscr{K}$ étant un compact inclus dans $\mathbf{C} - \mathscr{E}^*$, l'ensemble $\{s_0\} \cup \mathscr{K}$ est encore un compact inclus dans

$\mathbf{C} - \mathscr{E}^*$. Posant $\alpha = \delta^\varepsilon_*(s_0)$, on a donc :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^*} \delta^\varepsilon_*(s) = \alpha .$$

L'assertion (2) est établie.

PROPOSITION II.5. — *Sous la condition* $D^* < +\infty$, *on a :*

$$\forall_{\varepsilon>0} \mathscr{D}_{*0} = \mathscr{D}^\varepsilon_{*0} .$$

*Démonstration.* — Sous la condition $D^* < +\infty$, on sait que $\{f\}$ converge absolument en chaque point $s \in \mathscr{D}_{*0}$. On a alors, pour $s$ arbitraire fixé dans $\mathscr{D}_{*0}$ :

$$\forall_{\varepsilon' \in ]0,\delta_*(s)[} \quad \exists_{n'(=n_{s,\varepsilon'})} \quad \forall_{n \geqslant n'} \frac{-\operatorname{Log}|P_n(s)\exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|} > \varepsilon' > 0;$$

d'où :

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \forall_{n \geqslant n'} \frac{-\operatorname{Log}|P_n(s)\exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = \delta^\varepsilon(n,s) > \frac{\varepsilon'}{|\lambda_n|^\varepsilon} > 0$$

et donc $\delta^\varepsilon_*(s) \geqslant 0$ ($\Rightarrow s \in \bar{\mathscr{D}}^\varepsilon_{*0} \cap \mathbf{C} - \mathscr{E}^*$ puisque, eu égard à l'assertion (2) de la proposition II.4, $\delta^\varepsilon_*$ est trivialement continue dans $\mathbf{C} - \mathscr{E}^*$). Ainsi : $\mathscr{D}_{*0} \ni s \Rightarrow s \in (\bar{\mathscr{D}}^\varepsilon_{*0} \cap (\mathbf{C} - \mathscr{E}^*))$. Or $\mathscr{D}_{*0}$ est un ouvert et donc

$$\mathscr{D}_{*0} \subset \operatorname{Int}(\bar{\mathscr{D}}^\varepsilon_{*0} \cap (\mathbf{C} - \mathscr{E}^*)) .$$

En outre, eu égard à l'assertion (2) de la proposition II.4, l'ensemble $\mathscr{D}^\varepsilon_{*0}$ est aussi un ouvert; enfin, $\operatorname{Int}(\bar{\mathscr{D}}^\varepsilon_{*0} \cap (\mathbf{C} - \mathscr{E}^*)) = \mathscr{D}^\varepsilon_{*0}$. D'où : $\mathscr{D}_{*0} \subset \mathscr{D}^\varepsilon_{*0}$, et, eu égard à la proposition II.3, on a, en définitive : $\mathscr{D}_{*0} = \mathscr{D}^\varepsilon_{*0}$.

*Remarque* II.6. — On considère un disque $d(s,\rho)$, de centre $s$ et de rayon $\rho$, dont l'adhérence, $\overline{d(s,\rho)}$, est incluse dans $\mathbf{C} - \mathscr{E}^*$. Eu égard à la proposition II.4, on sait qu'il existe pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé, un indice $n'$ tel que les applications $\overline{d(s,\rho)} \ni \zeta \mapsto \delta^\varepsilon(n,\zeta)$, indexées par $n \geqslant n'$, sont lipschitziennes (donc continues). En outre, il est évident que ces applications sont dérivables dans $d(s,\rho)$ partiellement par rapport à $\operatorname{Re}\zeta$ et $\operatorname{Im}\zeta$. On désignera par $\delta^{\varepsilon'}_\sigma(n,s)$ la valeur au point $\zeta = s = \sigma + i\tau$ de la dérivée partielle de l'application d'indice $n$.

On considère la suite $(P'_n)$ des dérivées premières des polynômes de la suite $(P_n)$. On désigne par $\mathscr{E}_n^{(1)}$ l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ qui sont des zéros de $P'_n$. Désignant par $\mathscr{E}^{(1)d}$ le dérivé de $\mathscr{E}^{(1)} = \bigcup_n \mathscr{E}_n^{(1)}$, on pose $\mathscr{E}^{(1)*} = \mathscr{E}^{(1)d} \cup \mathscr{E}_\infty^{(1)}$, où $\mathscr{E}_\infty^{(1)}$ est l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ qui sont chacun zéro d'une infinité de polynômes $P'_n$. En d'autres termes, on a considéré pour les polynômes $P'_n$ des ensembles analogues à ceux considérés pour les polynômes $P_n$. Supposant $\mathbf{C} - \mathscr{E}^{(1)*} \neq \emptyset$, on a :

$$\forall_{s \in \mathbf{C} - \varepsilon^{(1)*}} \quad \exists_{n'(=n_s)} \quad \forall_{n \geqslant n'} \quad P'_n(s) \neq 0$$

et on pose, pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé et $s$ et $n$ satisfaisant aux choix ci-dessus :

$$\delta^{\varepsilon(1)}(n,s) = \frac{-\operatorname{Log}|P'_n(s)\exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

et

$$\delta_*^{\varepsilon(1)}(s) = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{-\operatorname{Log}|P'_n(s)\exp(-s\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \right\}.$$

Considérant un ensemble $E$ de $\mathbf{C}$ et les ensembles associés suivants :

$$\forall_{\alpha \in E} \; \Delta_\alpha = \{s \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} s = \operatorname{Im}\alpha \wedge \operatorname{Re} s \leqslant \operatorname{Re}\alpha\},$$

$$\Delta_E = \bigcup_{\alpha \in E} \Delta_\alpha,$$

($\Delta_\alpha$ est un fermé de $\mathbf{C}$ mais $\Delta_E$ n'est pas nécessairement un fermé), on convient d'appeler « *étoile rectiligne associée à* E » l'ouvert $\mathbf{C} - \bar{\Delta}_E$; on le note $\mathscr{E}(E)$.

PROPOSITION II.7. — *Supposant* $\mathscr{E}(\mathscr{E}^* \cup \mathscr{E}^{(1)*}) \neq \emptyset$, *on a :*

$$\forall_{s \in \mathscr{E}(\mathscr{E}^* \cup \mathscr{E}^{(1)*})} \quad \delta_*^\varepsilon(s) \leqslant \delta_*^{\varepsilon(1)}(s)$$

$$\leqslant \delta_*^\varepsilon(s) - \liminf \frac{\operatorname{Log}\left|1 - \delta_\sigma^{\varepsilon'}(n,s)|\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\lambda_n^{-1}\left(\dfrac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial \sigma}\right)_s\right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}},$$

*où* : $\varepsilon > 0$ *est arbitraire fixé*;

$\left(\dfrac{\partial(\operatorname{Arg} A_n)}{\partial\sigma}\right)_s$ *désigne la valeur en un point* $s \in \mathscr{E}(\mathscr{E}^* \cup \mathscr{E}^{(1)*})$ *de la dérivée partielle de la fonction*

$$\mathscr{E}(\mathscr{E}^* \cup \mathscr{E}^{(1)*}) \ni s \mapsto \operatorname{Arg} A_n(s),$$

*avec* $\operatorname{Arg} A_n(s) \in ]-\pi,\pi]$, *où* $A_n(s) = P_n(s)\exp(-s\lambda_n)$; $\operatorname{Arg}\lambda_n \in ]-\pi,\pi]$.

*Démonstration.* — Soient $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé et $s \in \mathbf{C} - (\mathscr{E}^* \cup \mathscr{E}^{(1)*})$; on a :

$$\forall_{\rho \in ]0, \operatorname{dist}(s, \mathscr{E}^* \cup \mathscr{E}^{(1)*})[} \ \exists_{n'(=n_\rho)} \ \forall_{n \geq n'} \ \forall_{s' \in d(s,\rho)} \ \{P_n(s') \neq 0 \quad \text{et} \quad P'_n(s') \neq 0\}.$$

On fixe $\rho \in ]0, \operatorname{dist}(s, \mathscr{E}^* \cup \mathscr{E}^{(1)*})[$; pour $n \geqslant n'(=n_\rho)$, on a, pour $s' \in d(s,\rho)$ :

$$\delta^{\varepsilon}(n,s') = \frac{-\operatorname{Log}|P_n(s')\exp(-s'\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

et

$$\begin{aligned} A_n(s') &= |A_n(s')|\exp[i\operatorname{Arg} A_n(s')] \\ &= \exp[-\delta^{\varepsilon}(n,s')|\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\operatorname{Arg} A_n(s')], \end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{Arg} A_n(s') \in ]-\pi,\pi].$$

Posant $s' = s + h$, avec $0 < |h| < \rho$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{P_n(s+h) - P_n(s)}{h} = \frac{1}{h}\{&\exp[-\delta^{\varepsilon}(n,s+h)|\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\operatorname{Arg} A_n(s+h) + (s+h)\lambda_n] \\ &- \exp[-\delta^{\varepsilon}(n,s)|\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\operatorname{Arg} A_n(s) + s\lambda_n]\}. \end{aligned}$$

Posant : $\theta_h = \delta^{\varepsilon}(n,s+h) - \delta^{\varepsilon}(n,s)$ et $\alpha_h = \operatorname{Arg} A_n(s+h) - \operatorname{Arg} A_n(s)$, le membre de droite de l'égalité ci-dessus, peut s'écrire :

$$\frac{1}{h}\{\exp[-\delta^{\varepsilon}(n,s)|\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\operatorname{Arg} A_n(s) + s\lambda_n]\}\{\exp[h\lambda_n - \theta_h|\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\alpha_h] - 1\},$$

et $\exp[h\lambda_n - \theta_h|\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\alpha_h]$ peut s'écrire

$$\exp\{\lambda_n[h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}]\}.$$

On a donc :

$$\frac{\exp[h\lambda_n - \theta_h|\lambda_n|^{1+\varepsilon} + i\alpha_h] - 1}{h}$$
$$= \frac{\exp\{\lambda_n[h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}]\} - 1}{h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}}$$
$$\cdot\frac{h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}}{h}.$$

Or $\lim_{h\to 0}\{h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}\} = 0$, puisque $\zeta \mapsto \delta^{\varepsilon}(n,\zeta)$ est lipschitzien sur tout compact $\mathscr{K} \subset \mathbf{C} - \mathscr{E}^*$ dès que $n$ est supérieur à un certain $n_{\mathscr{K}}$. En outre :

$$\frac{h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}}{h}$$
$$= 1 - |\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n)\frac{\theta_h}{h} + i\lambda_n^{-1}\frac{\alpha_h}{h}$$

avec :

$$\lim\frac{\theta_h}{h} = \lim\frac{\delta^{\varepsilon}(n, s+h) - \delta^{\varepsilon}(n,s)}{h} = \delta^{\varepsilon'}_{\sigma}(n,s)$$

et

$$\lim\frac{\alpha_h}{h} = \lim\frac{\operatorname{Arg}\mathrm{A}_n(s+h) - \operatorname{Arg}\mathrm{A}_n(s)}{h} = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\operatorname{Arg}\mathrm{A}_n\right)_s,$$

lorsque $h$ *réel* tend vers $0$, et enfin

$$\lim\frac{\exp\{\lambda_n[h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}]\} - 1}{h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}} = \lambda_n$$

lorsque $h$ tend vers $0$ (cette limite est, en effet, la valeur de la dérivée de la fonction $\mathbf{C} \ni s \mapsto \exp(s\lambda_n)$ au point $s = 0$). On obtient donc, pour $h$ *réel* tendant vers $0$ :

$$\lim\frac{h - \theta_h|\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) + i\alpha_h\lambda_n^{-1}}{h}$$
$$= 1 - |\lambda_n|^{\varepsilon}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n)\,\delta^{\varepsilon'}_{\sigma}(n,s) + i\lambda_n^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\operatorname{Arg}\mathrm{A}_n\right)_s.$$

Or $P_n$ étant holomorphe dans $\mathbf{C}$, on a :

$$\underset{s\in\mathbf{C}}{\forall}\left(\frac{\partial P_n}{\partial\sigma}\right)_s = P'_n(s) = -i\left(\frac{\partial P}{\partial\tau}\right)_s ;$$

il en résulte que, pour $h$ réel tendant vers $0$, on a, en définitive :

$$P'_n(s) = \lambda_n\{\exp[-\delta^\varepsilon(n,s)|\lambda_n|^{1+\varepsilon}+i\operatorname{Arg}A_n(s)+s\lambda_n]\}$$
$$\left[1-|\lambda_n|^\varepsilon\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n)\,\delta^{\varepsilon'}_\sigma(n,s)+i\lambda_n^{-1}\left(\frac{\partial\operatorname{Arg}A_n}{\partial\sigma}\right)_s\right].$$

De ce résultat, on déduit :

$$\delta^{\varepsilon(1)}(n,s) = \delta^\varepsilon(n,s) - \frac{\operatorname{Log}|\lambda_n|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} + \frac{i\operatorname{Arg}A_n(s)}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$
$$-\frac{\operatorname{Log}\left|1-\delta^{\varepsilon'}_\sigma(n,s)|\lambda_n|^\varepsilon\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n)+i\lambda_n^{-1}\left(\frac{\partial\operatorname{Arg}A_n}{\partial\sigma}\right)_s\right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$

et enfin :

(II.1)

$$\delta^\varepsilon_*(s)-\limsup\frac{\operatorname{Log}\left|1-\delta^{\varepsilon'}_\sigma(,\sigma)\,|\lambda_n|^\varepsilon\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n)+i\lambda_n^{-1}\left(\frac{\partial\operatorname{Arg}A_n}{\partial\sigma}\right)_s\right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}$$
$$\leqslant \delta^{\varepsilon\,(1)}_*(s)$$
$$\leqslant \varepsilon^\varepsilon_*(s)-\liminf\frac{\operatorname{Log}\left|1-\delta^{\varepsilon'}_\sigma(n,\sigma)\,|\lambda_n|^\varepsilon\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n)+i\lambda_n^{-1}\left(\frac{\partial\operatorname{Arg}A_n}{\partial\sigma}\right)_s\right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}.$$

On se propose de déterminer un minorant de la limite supérieure figurant ci-dessus. Pour cela, on constate facilement que, au point $s$ considéré, on a :

$$\text{(II.2)}\qquad \frac{\left(\frac{\partial|A_n|}{\partial\sigma}\right)_s}{|A_n(s)|} = \frac{A'_n(s)}{A_n(s)} - i\left(\frac{\partial\operatorname{Arg}A_n}{\partial\sigma}\right)_s$$

$\Bigg($où $\left(\frac{\partial|A_n|}{\partial\sigma}\right)_s$ désigne la valeur en $s$ de la dérivée partielle par rapport à $\operatorname{Re}\zeta$ de la fonction $d(s,\rho)\ni\zeta\mapsto|A_n(\zeta)|\Bigg)$,

$$\delta^{\varepsilon'}_\sigma(n,s) = -\frac{1}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}\frac{\left(\frac{\partial|A_n|}{\partial\sigma}\right)_s}{|A_n(s)|},$$

et par (II.2)

$$\text{(II.3.)}\quad |\lambda_n|^{\varepsilon}\,\delta_\sigma^{\varepsilon'}(n,s)\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n) = -\frac{1}{|\lambda_n|}\left\{\frac{A_n'(s)}{A_n(s)} - i\left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial\sigma}\right)_s\right\}\exp(-i\operatorname{Arg}\lambda_n)$$

avec

$$\frac{A_n'(s)}{A_n(s)} = \frac{P_n'(s)}{P_n(s)} - \lambda_n$$

et

$$\text{(II.4)}\quad \left|-\frac{1}{|\lambda_n|}\frac{A_n'(s)}{A_n(s)}\right| \leqslant 1 + \frac{1}{|\lambda_n|}\sum_{j=1}^{m_n}\frac{1}{|s-\alpha_{nj}|} \leqslant 1 + \frac{m_n}{\rho|\lambda_n|}.$$

D'autre part, on a :

$$\underset{K_0(=K_0(n))\in Z}{\exists}\quad \operatorname{Arg} A_n(s) = \operatorname{Arg} a_{n,m_n} + \sum_{j=1}^{m_n}\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj}) + 2\pi K_0$$

et

$$\underset{K_1(=K_1(n))\in Z}{\exists}\quad \operatorname{Arg}(\exp(-s\lambda_n)) = -\operatorname{Im}(s\lambda_n) + 2\pi K_1$$

(avec la convention : $\operatorname{Arg} z$ désigne l'argument principal du nombre complexe $z$, à savoir, par définition : $\operatorname{Arg} z \in ]-\pi,\pi]$).

$$A_n(s) = |A_n(s)|\exp\Big\{i\Big[\operatorname{Arg} a_{n,m_n} + \sum_{j=1}^{m_n}\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj}) - \operatorname{Im}(s\lambda_n) + 2\pi(K_0+K_1)\Big]\Big\}$$

d'où :

$$\text{(II.5)}\quad \left(\frac{\partial \operatorname{Arg} A_n}{\partial\sigma}\right)_s = \sum_{j=1}^{m_n}(\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj}))_\sigma' - (\operatorname{Im}(s\lambda_n)_\sigma').$$

De $s-\alpha_{nj} = |s-\alpha_{nj}|\exp[i\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj})]$, on déduit :

$$1 = (|s-\alpha_{nj}|)_\sigma'\exp[i\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj})] + i|s-\alpha_{nj}|\exp[i\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj})](\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj}))_\sigma'$$

d'où :

$$i|s-\alpha_{nj}|(\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj}))_\sigma' = \exp[-i\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj})] - (|s-\alpha_{nj}|)_\sigma'$$

et donc, puisque $|(|s-\alpha_{nj}|)'_\sigma| \leqslant 1$ :

$$|(\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj}))'_\sigma| \leqslant \frac{2}{|s-\alpha_{nj}|}$$

$$\text{(II.6)} \qquad \left|\sum_{j=1}^{m_n} (\operatorname{Arg}(s-\alpha_{nj}))'_\sigma\right| \leqslant 2 \sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{|s-\alpha_{nj}|}.$$

En outre :

$$(\operatorname{Im}(s\lambda_n))'_\sigma = \operatorname{Im}(\lambda_n)$$

et donc

$$\text{(II.7)} \qquad |(\operatorname{Im}(s\lambda_n))'_\sigma| = |\operatorname{Im}(\lambda_n)| \leqslant |\lambda_n|.$$

Réunissant ces résultats, (II.5), (II.6) et (II.7)), on a :

$$\text{(II.8)} \qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(\operatorname{Arg} A_n)\right)_s\right| \leqslant |\lambda_n| + 2\sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{|s-\alpha_{nj}|};$$

utilisant (II.4) et (II.8) dans (II.3) on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_n|^\varepsilon |\delta_\sigma^{\varepsilon'}(n,s) \exp(-i \operatorname{Arg} \lambda_n)| &\leqslant \frac{1}{|\lambda_n|}\left|\frac{A'_n(s)}{A_n(s)}\right| + \frac{1}{|\lambda_n|}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} \operatorname{Arg} A_n\right)_s\right| \\ &\leqslant 2 + \frac{3}{|\lambda_n|}\sum_{j=1}^{m_n}\frac{1}{|s-\alpha_{nj}|} \leqslant 2 + \frac{3m_n}{\rho|\lambda_n|} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} &\left|1-\delta_\sigma^{\varepsilon'}(n,s)|\lambda_n|^\varepsilon \exp(-i \operatorname{Arg}\lambda_n) + i\lambda_n^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\operatorname{Arg} A_n\right)_s\right| \\ &\qquad\qquad \leqslant 4 + \frac{5}{|\lambda_n|}\sum_{j=1}^{m_n}\frac{1}{|s-\alpha_{nj}|} \leqslant 4 + \frac{5m_n}{\rho|\lambda_n|} \end{aligned}$$

et eu égard à la condition (C) :

$$\text{(II.9)} \quad \limsup \frac{\operatorname{Log}|\ldots|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \leqslant \limsup \frac{\operatorname{Log}\left[4+\dfrac{5m_n}{|\lambda_n|^p}\right]}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0.$$

La proposition II.7 résulte de (II.1) et (II.9).

Soit $T_0 = \operatorname{Inf}\{m_n \mid n \in \mathbf{N}-\{0\}\}$. $j$ étant un entier positif fixé, tel que $j \in \{0,\ldots,T_0\}$, on pose :

$$\forall_{n \in \mathbf{N}-\{0\}} \ \forall_{j \in \{0,\ldots,T_0\}} \ \forall_{s \in \mathbf{C}} \ A_n^{(j)}(s) = P_n^{(j)}(s)\exp(-s\lambda_n),$$

où $P_n^{(j)}(s)$ désigne la valeur en $s$ de la dérivée d'ordre $j$ de $P_n$. On définit pour la suite des dérivées $j^{\text{ième}}$ des polynômes de la suite $(P_n)$ des ensembles $\mathscr{E}^{(j)}$, $\mathscr{E}^{(j)d}$, $\mathscr{E}_\infty^{(j)}$, $\mathscr{E}^{(j)*}$ respectivement analogues aux ensembles $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^d$, $\mathscr{E}_\infty$, $\mathscr{E}^*$ définies pour la suite $(P_n)$. En outre pour $\varepsilon \geqslant 0$, on définit, à l'aide des $A_n^{(j)}$ des fonctions $s \mapsto \delta^{\varepsilon(j)}(n,s)$, $s \mapsto \delta_*^{\varepsilon(j)}(s)$ respectivement analogues aux fonctions $s \mapsto \delta^\varepsilon(n,s)$, $s \mapsto \delta_*^\varepsilon(s)$ définies à l'aide des $A_n$, et on pose :

$$\text{(II.10)} \qquad \forall_{j \in \{0,\ldots,T_0\}} \ \forall_{\alpha \in \mathbf{R}} \ \mathscr{D}_{*\alpha}^{\varepsilon(t)} = \{s \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^{(t)*} \mid \delta_*^{\varepsilon(t)} > \alpha\}$$

avec les conventions, pour $\varepsilon = 0$ et $t = 0$ :

$$\mathscr{E}^{(0)*} = \mathscr{E}^*; \quad \delta^{(0)}(n,s) = \delta(n,s), \quad \delta_*^{(0)}(s) = \delta_*(s); \quad \mathscr{D}_{*\alpha}^{(0)} = \mathscr{D}_{*\alpha}.$$

A l'aide d'une technique analogue à celle utilisée dans la démonstration de la proposition II.7, on prouve :

PROPOSITION II.8. — *Supposant* $\mathscr{E}(\mathscr{E}^{(j)*} \cup \mathscr{E}^{(j+1)*}) \neq \varnothing$, *on a :*

$$\forall_{j \in \{0,\ldots,T_0\}} \ \forall_{s \in \mathscr{E}(\mathscr{E}^{(j)*} \cup \mathscr{E}^{(j+1)*})} \ \delta_*^{\varepsilon(j)}(s) \leqslant \delta_*^{\varepsilon(j+1)}(s)$$

$$\leqslant \delta_*^{\varepsilon(j)}(s) - \liminf \left\{ \frac{\operatorname{Log}\left|1 - \delta_\sigma^{\varepsilon(j)}(n,s)|\lambda_n|^\varepsilon \exp\left[-i \operatorname{Arg}\lambda_n) + i\lambda_n^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\operatorname{Arg} A_n^{(j)}\right)\right|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \right\}$$

*où :* $\varepsilon > 0$ *est arbitraire fixé;*

$\left(\dfrac{\partial \operatorname{Arg} A_n^{(j)}}{\partial\sigma}\right)_s$ *désigne la valeur en* $s \in \mathscr{E}(\mathscr{E}^{(j)*} \cup \mathscr{E}^{(j+1)*})$ *de la dérivée partielle de la fonction* $s \mapsto \operatorname{Arg} A_n^{(j)}(s)$ *avec*

$$\operatorname{Arg} A_n^{(j)}(s) \in ]-\pi,\pi]; \qquad \operatorname{Arg}\lambda_n \in ]-\pi,\pi].$$

Proposition II.9. — *Soit* $t$ *un entier positif fixé tel que* $t \in \{0,\ldots,T_0\}$. *Sous la condition* $\mathscr{E}\left(\bigcup_{j=0}^{t} \mathscr{E}^{(j)*}\right) \neq \emptyset$, *on a :*

$$\forall_{s \in \mathscr{E}\left(\bigcup_{j=1}^{t} \mathscr{E}^{(j)*}\right)} \quad \delta_*^{\varepsilon}(s) \leqslant \delta_*^{\varepsilon\,(t)}(s)$$

(*avec* $\varepsilon > 0$ *arbitraire fixé*).

Procédant comme dans la démonstration de la proposition II.5 et eu égard à la proposition II.9, on énonce :

Proposition II.10. — *Sous les conditions :* $D^* < +\infty$, $t \in \{0,\ldots,T_0\}$ *et* $\mathscr{E}\left(\bigcup_{j=0}^{t} \mathscr{E}^{(j)*}\right) \neq \emptyset$, *on a, pour* $\varepsilon > 0$ *arbitraire fixé et* $t$ *entier positif :*

$$\mathscr{D}_{*0}^{(t)} = \mathscr{D}_{*0}^{\varepsilon(t)}$$

*et*

$$\mathscr{D}_{*0} \cap \left(\mathscr{E}\left(\bigcup_{j=0}^{t} \mathscr{E}^{(j)*}\right)\right) = \mathscr{D}_{*0}^{\varepsilon} \cap \left(\mathscr{E}\left(\bigcup_{j=0}^{t} \mathscr{E}^{(j)*}\right)\right) \subset \mathscr{D}_{*0}^{\varepsilon(t)} \cap \left(\mathscr{E}\left(\bigcup_{j=0}^{t} \mathscr{E}^{(j)*}\right)\right)$$

On se propose maintenant d'utiliser certaines propriétés établies antérieurement en vue du prolongement de la fonction définie par l'élément LC-dirichlétien $\{f\}$. On énonce :

Proposition II.11. — *Sous les conditions* $D^* < +\infty$ *et* $\gamma < +\infty$, *il n'existe pas d'extension holomorphe, au moyen de* $\mathscr{C}$, *de la fonction*

$$\mathscr{D}_{*\beta*} \ni s \mapsto \{f\}_s$$

*de* $\{s_1\} + \mathscr{C} \subset \mathscr{D}_{*\beta*}$ *à* $\{s_2\} + \mathscr{C}$, *avec* $s_2 \in (\mathbf{C} - \mathscr{E}^{(t-1)*}) - \overline{\mathscr{D}_{*0}^{\varepsilon(t-1)}}$ (*où* $\{f\}_s$ *désigne la somme en* $s$ *de la série* $\{f\}$ : $\Sigma P_n(s)\exp(-s\lambda_n)$) *avec* $t \in \{1,\ldots,T_0+1\}$).

*Démonstration.* — On suppose fausse l'assertion; il existe alors $s_2 \in (\mathbf{C} - \mathscr{E}^{(t-1)*}) - \mathscr{D}_{*0}^{\varepsilon(t-1)}$ où $t \in \{1,\ldots,T_0+1\}$ tel que $\mathscr{D}_{*\beta*} \ni s \mapsto \{f\}_s$ admet une extension holomorphe de $\{s_1\} + \mathscr{C} \subset \mathscr{D}_{*\beta*}$ à $\{s_2\} + \mathscr{C}$, au moyen de $\mathscr{C}$, le long d'un arc rectifiable joignant les points $s_1$ et $s_2$. Eu égard à la proposition I.7, on a pour chaque $n \geqslant n_1$ :

$$\forall_{t \in \{1,2,\ldots,m_n+1\}} \quad \frac{|P_n^{(t-1)}(s_2)\exp(-s_2\lambda_n)|}{(t-1)!} \leqslant \frac{Km^f|\lambda_n|^{m_n} 2^{m_n+1}\omega_{n,t}(m_n+1)!}{\eta^{m_n+1}}$$

où : $\eta$ est une constante appartenant à l'intervalle $]0,1[$, K est une constante ne dépendant que de $\eta$ et de la fonction $g$,

$$\omega_{n,t} = \frac{1}{(t-1)!} \sum_{j=0}^{m_n-t+1} |A_j(\lambda_n)|\, |\lambda_n|^{j+t-m_n-1}$$

avec $|A_j(\lambda_n)| \leqslant M_n$; d'où, pour $n$ tel que $|\lambda_n| \geqslant 1$ :

$$\omega_{n,t} \leqslant \frac{m_n M_n}{(t-1)!}.$$

Pour $t \in \{1,2,\ldots,m_n+1\}$ (donc pour $t \in \{1,\ldots,T_0+1\}$) et $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé, on a :

$$\forall_{n \geqslant n_1} \frac{\operatorname{Log} |P_n^{(n-1)}(s_2) \exp(-s_2\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{\operatorname{Log}(Km^f |\lambda_n|^{m_n} 2^{m_n+1}\, \omega_{n,t}(m_n+1)!/2^{m_n+1})}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}},$$

d'où, comme il est évident (sous la condition $D^* < +\infty$)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} |P_n^{(t-1)}(s_2) \exp(-s_2\lambda_n)|}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} M_n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}}.$$

Or la condition $\gamma < +\infty$, jointe à la proposition I.5, implique : $|\gamma|$ fini; d'où : $\limsup \frac{\operatorname{Log} M_n}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = 0$, et enfin, puisque $s_2 \in \mathbf{C} - \mathscr{E}^{(t-1)*}$ : $\delta_*^{\varepsilon(t-1)}(s_2) \geqslant 0$ qui implique, eu égard à II.10 : $s_2 \in \overline{\mathscr{D}_{*0}^{\varepsilon(t-1)}}$. Il y a contradiction; ce qui établit l'assertion.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Blambert et R. Parvatham, Ultraconvergence et singularités pour une classe de séries d'exponentielles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 29-1 (1979), 239-262.
[2] M. Blambert and R. Parvatham, On the overconvergence of certain series, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 2 (1979), 45-60.
[3] M. Blambert et R. Parvatham, Sur les ordres inférieur et supérieur des fonctions entières définies par des éléments L-dirichlétiens (à paraître).
[4] R. P. Boas, *Entire functions*, Academic Press, New York (1954).

[5] M. M. Dzrbasjan, Uniqueness theorems for analytic functions asymptotically representable by Dirichlet-Taylor series, *Math. U.S.S.R. Sbornik*, 20 (1973), 603-649.
[6] T. M. Gallie, Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), 57-72.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1980.

M. Blambert †,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Institut Fourier
38402 St-Martin-d'Hères Cedex.

R. Parvatham,
Ramanujan Institute
for Advanced Study in Mathematics
University of Madras
Madras 600 005 (Inde).