Annales de l'institut Fourier

Daniel Barlet

Fonctions de type trace

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 2 (1983), p. 43-76
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_43_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 43-76.

FONCTIONS DE TYPE TRACE

par Daniel BARLET

Plan.

1. Position du problème et énoncé du théorème. Réduction.

Dans un article antérieur [4] nous avons étudié le problème suivant :

Soit X un espace analytique réduit et irréductible de dimension $n+1$ et soit $f: X \to D = \{s \in \mathbf{C}/|s|<1\}$ une application holomorphe surjective. Alors pour K compact de X fixé, il existe $r_1, \ldots, r_m \in [0,2[\cap \mathbf{Q}$ tels que pour toute forme $\mathscr{C}^\infty$ de type (n,n) et à support dans K on ait :

$$F(s) = \int_{f=s} \varphi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n} \theta_{i,j}(s) . |s|^{r_i} \quad (\mathrm{Log}\,|s|)^j$$

où les $\theta_{i,j}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à supports compacts dans D (en fait ce résultat n'est pas énoncé sous cette forme [4], mais on le déduit immédiatement du théorème 4 *bis*).

Nous nous proposons ici d'étudier le problème analogue suivant (qui est aussi un cas particulier du problème général consistant à étudier les singularités des fonctions obtenues par intégration sur les fibres d'un morphisme surjectif entre espaces analytiques complexes de forme $\mathscr{C}^\infty$ à support compact de type convenable) :

Soit X un espace analytique réduit et irréductible de dimension n, et soit $\pi : X \to U$ une application analytique propre, finie et surjective de X sur un ouvert U de $\mathbf{C}^n$. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur X. Décrire les singularités de la fonction

$$F_\varphi(t) = \int_{\pi^{-1}(t)} \varphi = \pi_*(\varphi)(t) = \mathrm{trace}_{X/U}(\varphi)(t) = \sum_{x_j \in \pi^{-1}(t)} \varphi(x_j)$$

qui est continue, mais pas en général différentiable sur U.

Commençons par donner un exemple simple qui exhibe des pathologies que l'on ne rencontre pas pour $n = 1$ (remarquer que pour $n = 1$ notre problème est un cas particulier très simple de [4], et que dans ce cas les développements de Puiseux suffisent à résoudre le problème posé) :

Soit $X = \{(u,v,z) \in \mathbf{C}^3/(z^3-u)^2 = v\}$, $U = \mathbf{C}^2$ et π induite par la projection $(u,v,z) \to (u,v)$. La ramification de X sur U est alors la réunion de $\{u^2 = v\}$ et de $\{v = 0\}$ (remarquer que ce diviseur n'est pas à croisements normaux !).

Prenons $\varphi(u,v,z) = z\bar{z}$. Alors

$$\mathrm{trace}_{X/U}(z\bar{z}) = 3|u+\sqrt{v}|^{2/3} + 3|u-\sqrt{v}|^{2/3} \text{ (1)}.$$

Pour rendre la suite plus compréhensible, nous allons commencer par mettre en évidence quelques propriétés des fonctions

$$|s|^r(\mathrm{Log}\,|s|)^j \quad \text{pour} \quad r \in]0,2[\text{ et } j \in \mathbf{N} \text{ ou } r = j = 0.$$

1° Ces fonctions sont continues.

2° Pour $r \in]0,2[$ donné et $n \in \mathbf{N}$ donné le sous-faisceau

$$\sum_{j=0}^{n} |s|^r.(\mathrm{Log}\,|s|)^j.\mathscr{O}_{\mathbf{C}}$$

du faisceau $\mathscr{C}^0_{\mathbf{C}}$ des germes de fonctions continues sur $\mathbf{C}$ est un $\mathscr{O}_{\mathbf{C}}$-module

(1) On prendra garde au fait que $|u+\sqrt{v}|^{2/3}$ n'est pas défini ! Seule la somme $|u+\sqrt{v}|^{2/3} + |u-\sqrt{v}|^{2/3}$ est bien définie pour $(u,v) \in \mathbf{C}^2$.

cohérent, que l'on notera $\mathscr{M}(r,n)$ (il en est de même de

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}} + \sum_{j=1}^{n} |s|^2 \quad (\text{Log}\,|s|)^j \,.\, \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$$

que l'on notera $\mathscr{M}(0,n)$).

Pour prouver la cohérence de $\mathscr{M}(r,n)$ il suffit de montrer que si $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ vérifient

$$(1) \qquad \sum_{j=0}^{n} f_j(\text{Log}\,|s|)^j \equiv 0,$$

alors $f_0 = \cdots = f_n \equiv 0$. En appliquant l'opérateur différentiel $\bar{s}\dfrac{\partial}{\partial \bar{s}}$ au premier membre de (1), on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} f_j . j . (\text{Log}\,|s|)^{j-1} \equiv 0$$

d'où l'assertion, par récurrence sur n (le cas spécial $r = 0$ laissé au lecteur).

3° On a $s\dfrac{\partial}{\partial s}\mathscr{M}(r,n) \subset \mathscr{M}(r,n)$ c'est-à-dire que la connexion holomorphe naturelle donnée par $\dfrac{\partial}{\partial s}$ au sens des distributions induit une connexion méromorphe à point singulier (en 0) sur $\mathscr{M}(r,n)$. En effet, pour $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ on a :

$$s\frac{\partial}{\partial s}(f.|s|^r(\text{Log}\,|s|^j) = s\frac{\partial}{\partial s}(f).|s|^r.(\text{Log}\,|s|)^j$$
$$+ f.\left[\frac{r}{2}|s|^r.(\text{Log}\,|s|)^j + \frac{j}{2}|s|^r.(\text{Log}\,|s|)^{j-1}\right].$$

4° Le faisceau $\mathscr{M}(r,n)$ coïncide (²) avec son extension canonique $\hat{\mathscr{M}}(r,n)$ en $s = 0$. Rappelons que si e désigne la base horizontale multiforme de $\mathscr{M}/\mathbf{C} - \{0\}$, $\hat{\mathscr{M}}$ est le sous-faisceau de $j_*(\mathscr{M}/\mathbf{C}-\{0\})$ (où j: $\mathbf{C} - \{0\} \hookrightarrow \mathbf{C}$ est l'inclusion) formé des sections dont les

(²) Pour $r \in]0,2[$; pour $r = 0$ on a seulement une inclusion et

$$\hat{\mathscr{M}}(0,n) = \mathcal{O}_{\mathbf{C}} + \bar{s}\sum_{0}^{n}(\text{Log}\,|s|)^j\mathcal{O}_{\mathbf{C}}.$$

composantes dans la base e ont une croissance en $0(|\mathrm{Log}\,|s||^k)$ pour k assez grand (voir [5]).

Posons pour abréger, $\mathcal{M}(r,n) = \mathcal{M}$ dans ce qui suit.

Déterminons déjà une base horizontale multiforme de $\mathcal{M}/\mathbf{C} - \{0\}$; comme $\dfrac{\partial}{\partial s}(e) = 0$, e est formée de fonctions anti-holomorphes multiformes sur $\mathbf{C} - \{0\}$. Il est alors immédiat que les fonctions anti-holomorphes multiformes $(\bar{s})^{r/2}(\mathrm{Log}\,(\bar{s}))^j$ forment, pour $j \in [0,n]$ une base horizontale (multiforme) de $\mathcal{M}$. Une section σ de $\hat{\mathcal{M}}$ est donc de la forme :

$$\sigma = \sum_{j=0}^{n} f_j \,.\, (\bar{s})^{r/2} \,.\, (\mathrm{Log}\,(\bar{s}))^j \tag{2}$$

où les f_j sont holomorphes multiformes sur $\mathbf{C} - \{0\}$, telles que σ soit une fonction continue (uniforme !) sur $\mathbf{C} - \{0\}$ et vérifiant des majorations

$$|f_j| \leqslant \mathrm{C}\,.\,|\mathrm{Log}\,|s||^k \quad (^3).$$

L'inclusion de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$ est alors évidente puisque l'on a :

$$|s|^r \,.\, (\mathrm{Log}\,|s|)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(s)\right)^{j-k} s^{r/2} \,.\, \bar{s}^{r/2} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(\bar{s})\right)^k$$

qui donne l'écriture de $|s|^r.(\mathrm{Log}\,|s|)^j$ dans la base horizontale multiforme. Pour montrer l'égalité de $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ considérons une section σ de $\hat{\mathcal{M}}$ vérifiant (2). En posant $g_j = s^{-r/2} f_j$ les fonctions g_j sont également holomorphes multiformes sur $\mathbf{C} - \{0\}$ et vérifient des majorations :

$$|g_j| \leqslant \mathrm{C}\,.\,|s|^{-r/2} \,.\, |\mathrm{Log}|s||^k .$$

La fonction $\varphi = \sum\limits_{0}^{n} g_j \,.\, (\mathrm{Log}\,(\bar{s}))^j$ est uniforme sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Montrons que g_n est uniforme sur $\mathbf{C} - \{0\}$: en effet après un tour

(3) Une fonction multiforme sur $\mathrm{D}^* = \{s \in \mathrm{C}/0 < |s| < 1\}$ est par définition une fonction holomorphe sur le revêtement universel $\{\mathrm{Re}\,\xi < 0\} \xrightarrow{\exp} \mathrm{D}^*$ de D^*; une telle majoration aura lieu sur tout rectangle

$$\{\mathrm{Re}\,\xi \leqslant -a\} \times \{|\mathrm{Im}\,\xi| \leqslant \mathrm{A}\}.$$

autour de l'origine, on aura :

$$\varphi(s) = \varphi(e^{2i\pi}s) = \sum_{j=0}^{n} g_j(e^{2i\pi}s).(\mathrm{Log}\,(\bar{s})-2i\pi)^j$$

et le coefficient de $(\mathrm{Log}(\bar{s}))^n$ sera $g_n(e^{2i\pi}s)$. Comme on a vu que les fonctions $(\mathrm{Log}\,(\bar{s}))^j$ sont indépendantes sur $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$, cela donne $g_n(s) = g_n(e^{2i\pi}s)$ d'où l'assertion. Mais vu l'estimation satisfaite par g_n, g_n se prolonge analytiquement en $s = 0$ (on a $r/2 < 1$). On obtient alors l'égalité de $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ par récurrence sur n comme suit : $g_n . |s|^r(\mathrm{Log}\,|s|)^n \in \mathcal{M}$ et donc $\sigma - g_n . |s|^r(\mathrm{Log}\,|s|)^n$ est dans $\mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est engendré sur $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$ par les $|s|^r(\mathrm{Log}\,|s|)^j$ pour $j \in [0,n-1]$.

5° Les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition 1. — *Soit* V *une variété analytique complexe, et soit* $\mathcal{M}$ *un faisceau de* $\mathcal{O}_{\mathrm{V}}$*-modules sur* V. *Nous dirons que* $\mathcal{M}$ *est de type trace s'il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{M}$ *est un sous-faisceau de* $\mathcal{O}_{\mathrm{V}}$*-modules de* $\mathscr{C}^0_{\mathrm{V}}$,

(ii) $\mathcal{M}$ *est cohérent comme faisceau de* $\mathcal{O}_{\mathrm{V}}$*-modules,*

(iii) *La connexion holomorphe naturelle*

$$\nabla : \quad \mathscr{C}^0_{\mathrm{V}} \to \mathscr{D}'_{\mathrm{V}} \underset{\mathcal{O}_{\mathrm{V}}}{\otimes} \Omega^1_{\mathrm{V}}$$

donnée par dérivation au sens des distributions sur V, *induit sur* $\mathcal{M}$ *une connexion méromorphe (c'est-à-dire que, localement sur* V *il existe* $f \not\equiv 0$ *telle que* $f\,\nabla\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_{\mathrm{V}}}{\otimes} \Omega^1_{\mathrm{V}}$) *à points singuliers réguliers (voir* [5]). *Nous noterons par* Δ *l'ensemble analytique fermé d'intérieur vide de* V *le long duquel* ∇ *n'est pas holomorphe.*

iv) *Si* $\hat{\mathcal{M}}$ *désigne l'extension canonique de* $\mathcal{M}/\mathrm{V}-\Delta$ *(c'est-à-dire le sous-faisceau de* $j_*\mathcal{M}$, *où* $j : \mathrm{V}-\Delta \hookrightarrow \mathrm{V}$ *désigne l'injection, formé des sections ayant, dans la base horizontale multiforme de* $j_*\mathcal{M}$, *une croissance logarithmique vers* Δ *(voir* [5]), *on a* $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$. *Nous dirons qu'une fonction continue sur* V *est de type trace si elle est, localement sur* V, *section d'un faisceau de type trace.*

Remarques. — 1) Soit $\mathcal{M}$ un faisceau de type trace sur V, et soit e une section horizontale de $\mathcal{M}$ sur un ouvert de V. Alors e est une fonction antiholomorphe sur cet ouvert. En effet la condition $\nabla e = 0$ équivaut à la nullité, au sens des courants, de $d'e$. Alors e est antiholomorphe d'après l'anti-lemme de Dolbeault-Grothendieck.

Il résulte de ceci que toute fonction de type trace sur V est analytique réelle en dehors d'une hypersurface fermée d'intérieur vide de V.

2) Les faisceaux $\mathcal{M}(r,n)$ considérés plus haut sont de type trace sur $\mathbf{C}$. En effet leurs connexions méromorphes ont des pôles simples (logarithmiques) en $s = 0$, ce qui donne la régularité.

3) La proposition 6 montrera que les fonctions de type trace forment une algèbre et que pour $r_1 \dots r_m \in [0, 2[$ le faisceau $\sum_{j=1}^{m} \mathcal{M}[r_j, n]$ est de type trace dans $\mathbf{C}$.

Donnons maintenant le résultat principal de cet article précédé d'un énoncé en terme de faisceau de type trace du théorème fondamental de [4].

THÉORÈME 0. — *Soit* X *un espace analytique réduit et irréductible de dimension* $n + 1$, *et soit* $f : X \to D$ *une application holomorphe surjective sur* $D = \{s \in \mathbf{C} / |s| < 1\}$. *Soit* K *un compact de* X; *alors il existe* $\mathcal{M}_K$ *faisceau de type trace sur* D *vérifiant au voisinage de* 0,

$$\int_f \mathscr{C}^{\infty (n,n)}_{X,K} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}_{D} . \mathcal{M}_K \quad (*)$$

(*ce qui signifie que pour toute forme* φ $\mathscr{C}^{\infty}$ *de type* (n, n) *et à support dans* K *la fonction* $F_{\varphi}(s) = \int_{f=s} \varphi$ *est, dans un voisinage de zéro ne dépendant pas de* φ, *combinaison linéaire finie à coefficients* $\mathscr{C}^{\infty}$ *de sections de* $\mathcal{M}_K$). □

De plus on peut choisir le faisceau $\mathcal{M}_K$ vérifiant les propriétés v), vi) et vii)$_n$ énoncées plus loin (n = dimension des fibres de f).

Si X est un polydisque de $\mathbf{C}^{n+1}$ et si $f^{-1}(0)$ est un diviseur à croisements normaux, on peut choisir $\mathcal{M}_K$ pour avoir égalité dans (*).

THÉORÈME 1. — *Soit* $\pi : X \to V$ *un morphisme propre fini et surjectif d'un espace analytique réduit et irréductible* X *sur une variété analytique* V . *Alors, localement sur* V, *il existe un faisceau* $\mathcal{M}$ *de type trace vérifiant*

$$\mathrm{trace}_{X/V}(\mathscr{C}^{\infty}_X) = \mathscr{C}^{\infty}_V . \mathcal{M} \ (^4).$$

(4) Rappelons que, par définition, une fonction φ sur un espace analytique réduit X est dite $\mathscr{C}^{\infty}$ si au voisinage de tout $x \in X$ il existe un plongement local de X dans un polydisque et une fonction $\mathscr{C}^{\infty}$ sur ce polydisque qui induit φ au voisinage de x.

On peut de plus choisir $\mathcal{M}$ *de manière qu'il satisfasse les conditions* v), vi) *et* vii)$_0$ (0 = *dimension des fibres de* π) *énoncées ci-dessous.* $\square$

Énonçons maintenant les conditions v), vi) et vii)$_n$ avec les notations de la définition 1, $\mathcal{M}$ étant de type trace.

v) $\mathcal{M}$ *est localement engendré par ses sections réelles (comme les sections de* $\mathcal{M}$ *sont des fonctions continues, on dira qu'elles sont réelles si elles prennent leurs valeurs dans* $\mathbf{R}$).

vi) Les exposants de $\mathcal{M}$ sont rationnels.

DÉFINITION 2. — *Si* $\mathcal{M}$ *est un faisceau de type trace sur* V *et si* Δ *est l'hypersurface polaire de la connexion de* $\mathcal{M}$, *on appellera exposant de* $\mathcal{M}$ *tout* $r \in \mathbf{C}/2\mathbf{Z}$ *tel qu'il existe une application holomorphe* $\gamma : \ D \to V$ *vérifiant* $\gamma^{-1}(\Delta) = \{0\}$, $\gamma'(0) \neq 0$ *et tel que* $e^{-i\pi r}$ *soit valeur propre de la monodromie de* $\gamma^*(\mathcal{M})$/*torsion.*

Par exemple, il est facile de voir que r *est le seul exposant de* $\mathcal{M}(r, n)$ *pour* $n \geqslant 0$ *arbitraire.* $\square$

vii)$_n$ *Nous dirons que* $\mathcal{M}$ *faisceau de type trace sur* V *et d'hypersurface polaire* Δ, *vérifie* vii)$_n$ *si pour toute application holomorphe* $\gamma : \ D \to V$ *vérifiant* $\gamma^{-1}(\Delta) = \{0\}$, $\gamma'(0) \neq 0$ *la monodromie en* 0 *de* $\gamma^*(\mathcal{M})$/*torsion a des blocs de Jordan de taille au plus égale à* $n + 1$.

Par exemple, il est facile de voir que $\mathcal{M}(r, n)$ satisfait vii)$_n$ pour tout $r \in [0, 2[$ (et pas vii)$_{n-1}$!).

Nous donnerons, après la proposition 4 une interprétation simple des conditions vi) et vii)$_n$ en terme du comportement des sections de près d'un point à croisements normaux de l'hypersurface polaire Δ. Le rapprochement des énoncés des théorèmes 0 et 1 suggère deux questions

1° que dans l'énoncé du théorème 0 on peut préciser $\displaystyle\int_f \mathcal{C}^{\infty\,(n,n)}_{X,K}$ en terme de faisceaux de type trace.

2° qu'il existe un théorème général décrivant les fonctions obtenues par intégration dans les fibres d'un morphisme équidimensionnel de formes $\mathcal{C}^\infty$ à supports propres de type convenable en terme de faisceau de type trace (vérifiant de plus v), vi) et vii)$_d$ où d est la dimension des fibres).

Réduction du problème :

Notre problème est local sur X, et nous pouvons supposer $X \subset U \times \mathbf{C}^p$ et π induite par la projection évidente; c'est-à-dire que nous pouvons nous limiter au cas où X est un revêtement ramifié de U contenu dans $U \times \mathbf{C}^p$ (voir [1], chp. 0, § 3).

Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ sont des coordonnées sur $\mathbf{C}^p$, le théorème de préparation de Malgrange montre que les germes $\mathscr{C}^\infty$ sur X forment un module de type fini sur le faisceau des germes $\mathscr{C}^\infty$ sur U qui est engendré en chaque point par les germes des restrictions à X des fonctions $x^a\bar{x}^b$ pour a et $b \in \mathbf{N}^p$ vérifiant $|a| \leqslant k-1$ et $|b| \leqslant k-1$. Par $\mathscr{C}^\infty_U$ linéarité de la $\mathrm{trace}_{X/U}$, nous sommes donc ramenés à l'étude des fonctions $\mathrm{trace}_{X/U}(x^a\bar{x}^b)$ sur U.

Précisons un peu cette réduction : considérons l'équation vectorielle canonique de X comme revêtement ramifié de degré k de U contenu dans $U \times \mathbf{C}^p$ (voir [2]) :

$$P(t,x) = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h S_h(t).x^{k-h} = 0 \quad (S_0 = 1)$$

où $S_h = U \to S_h(\mathbf{C}^p)$ est analytique et définie par la h-ième fonction symétrique (tensorielle) des branches locales de X sur U. Cette équation est à valeurs dans $S_k(\mathbf{C}^p)$ et pour $c \in \mathbf{N}^p$, $|c| = k$, notons par $P_c = \langle P(t,x), e^c\rangle$, où e désigne la base duale de $\mathbf{C}^p$ définie par $e_i(x) = x_i$ et $e^c = \prod_{\alpha=1}^{p} e^{c_\alpha}$ est considéré comme forme linéaire sur $S_k(\mathbf{C}^p)$. L'application $L : \mathbf{C}^{n+p} \to \mathbf{C}^{n+2N}$ donnée par

$$L(t,x) = (t, P_c(t,x), \overline{P_c(t,x)}) \qquad \text{pour} \qquad c \in \mathbf{N}^p \quad |c| = k$$

($N = \dim_{\mathbf{C}}(S_k(\mathbf{C}^p))$) est analytique réelle, et si M_0 et A désignent respectivement l'idéal maximal des germes $\mathscr{C}^\infty$ en 0 dans $\mathbf{C}^{n+2N}$ et l'anneau des germes $\mathscr{C}^\infty$ en 0 dans $\mathbf{C}^{n+p}$, l'espace vectoriel $A/L^*(M_0).A$ est de dimension finie et engendré par les monômes $x^a\bar{x}^b$ pour a et $b \in \mathbf{N}^p$ $|a| \leqslant k-1$ et $|b| \leqslant k-1$ (on a $t_1, \ldots, t_n$, x^c et $\bar{x}^c$ dans $L^*(M_0)$ pour $c \in \mathbf{N}^p$ et $|c| = k$).

Le théorème de préparation de Malgrange ([5]) donne alors que toute fonction $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^{n+p}$ s'écrit sous la forme

$$f = \Sigma L^*(g_{a,b}).x^a\bar{x}^b, \qquad a \text{ et } b \in \mathbf{N}^p \ |a| \leqslant k-1, \ |b| \leqslant k-1$$

où les $g_{a,b}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^{n+2N}$. La restriction à X de cette écriture (puisque $P_c = 0$ sur X) donne le résultat désiré.

([5]) Voir par exemple : Wall : Introduction to the preparation theorem, Lecture Notes n° 192, p. 94, Springer-Verlag.

2. $\mathrm{Trace}_{X/U}(f\bar{g})$ est de type trace.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes : U désignera une variété analytique complexe connexe de dimension n et $X \subset U \times \mathbf{C}^p$ sera un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure n de $U \times \mathbf{C}^p$, définissant par la projection naturelle $\pi : X \to U$ un revêtement ramifié de degré k de U. On notera par $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_U$ les faisceaux structuraux de X et U et par $\mathcal{C}_U^0$ le faisceau des germes de fonctions continues sur U, que l'on considérera comme sous-faisceau du faisceau $\mathcal{D}'_U$ des germes de distributions sur U. On notera par ∇ la connexion holomorphe naturelle sur $\mathcal{D}'_U$ ($\nabla : \mathcal{D}'_U \to \mathcal{D}'_U \underset{\mathcal{O}_U}{\otimes} \Omega_U^1$ où Ω_U^1 désigne le faisceau des germes de 1-formes holomorphes sur U).

Nous noterons par I_Δ l'idéal discriminant réduit de $\pi : X \to U$ et par Δ le lieu de ramification de π, c'est-à-dire le support de $\mathcal{O}_U/I_\Delta$. Alors $X - \pi^{-1}(\Delta)$ est par π un revêtement à k-feuillets de $U - \Delta$.

Fixons $g \in \mathcal{O}_X(X)$ et considérons le morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules :

$$\tau : \quad \pi_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{C}_U^0$$

défini par $\tau(f) = \mathrm{trace}_{X/U}(f\bar{g})$. Rappelons que la continuité sur X de la fonction $f\bar{g}$ assure la continuité sur U de trace $_{X/U}(f\bar{g})$ (voir [3]).

Posons $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \tau$ et $\mathcal{M} = \operatorname{Im} \tau$.

PROPOSITION 1. — *Le faisceau de $\mathcal{O}_U$-modules $\mathcal{M}$ est cohérent sur $U - \Delta$.*

Démonstration. — Comme on a par définition la suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{K} \to \pi_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\tau} \mathcal{M} \to 0$$

sur U et comme $\pi_* \mathcal{O}_X$ est cohérent, il revient au même de prouver la cohérence de $\mathcal{K}$ sur $U - \Delta$. Ceci se ramène immédiatement à la proposition 1 *bis* ci-dessous, puisque le problème est local sur $U - \Delta$ (ce qui permet de se ramener au cas où X est un revêtement trivial !).

LEMME 1. — *Soit Z un espace analytique réduit et connexe. Soient $f_1 \ldots f_n$ et $g_1 \ldots g_n$ des fonctions holomorphes sur Z.*

Si la fonction continue $\sum_{i=1}^{n} f_i\bar{g}_i$ *sur* Z *est anti-holomorphe aux points lisses de* Z, *alors pour tout* $z_0 \in Z$, *on a :*

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i\bar{g}_i \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(z_0)\bar{g}_i \quad \textit{sur} \ \ Z.$$

Démonstration. — Montrons qu'il suffit de prouver le résultat pour $Z = \{s \in \mathbf{C}/|s|<1\}$. En effet, par prolongement analytique, il suffit de prouver la relation (*) au voisinage de z_0. Comme pour tout point $z \in Z$ assez voisin de z_0, il existe $\gamma : \{s \in \mathbf{C}/|s|<1\} \to Z$ holomorphe vérifiant $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = z$, et l'image de γ n'étant pas contenue dans le lieu singulier de Z, il suffit donc de traiter le cas particulier.

Considérons donc $f_1 \dots f_n$ et $g_1 \dots g_n$ holomorphes sur

$$D = \{s \in \mathbf{C}/|s|<1\}$$

et vérifiant : $\sum_{i=1}^{n} f_i\bar{g}_i$ est anti-holomorphe sur D.

Pour z et x dans D, on a

$$f_i(z) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu f_i}{ds^\nu}(x).(z-x)^\nu$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)g_i(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu f_i}{ds^\nu}(x).\overline{g_i(x)}.(z-x)^\nu .$$

Mais comme $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\overline{g_i(x)}$ est anti-holomorphe sur D, on obtient par dérivation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^\nu f_i}{ds^\nu}(x)\overline{g_i(x)} \equiv 0 \qquad \text{pour tout} \qquad \nu \geqslant 1 .$$

On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\overline{g_i(x)} = \sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{d^\nu f_i}{ds^\nu}(x).\overline{g_i(x)}\right)(z-x)^\nu = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).\overline{g_i(x)},$$

d'où le résultat désiré en prenant $z = 0$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Proposition 1 *bis*. — *Soit* Z *un espace analytique réduit et soient* $g_1 \ldots g_n$ *des fonctions holomorphes sur* Z.

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_Z^n$ *le sous-faisceau des* $(f_1 \ldots f_n) \in \mathcal{O}_Z^n$ *vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{g}_i \equiv 0$$

sur Z *(ensemblistement). Alors* $\mathcal{F}$ *est un sous-faisceau localement libre de* $\mathcal{O}_Z^n$.

Démonstration. — Soit U un ouvert connexe de Z. Soit r la dimension sur **C** du sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_Z(U)$ engendré par $g_1|U \ldots g_n|U$. Nous allons montrer qu'alors $\mathcal{F}|U \simeq \mathcal{O}_U^{n-r}$. Soit

$$E = \{(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in \mathbf{C}^n / \Sigma \lambda_i \bar{g}_i \equiv 0 \text{ sur } U\};$$

alors E est un **C**-espace vectoriel de dimension $n - r$.

Si V est un ouvert de U et si $(f_1 \ldots f_n) \in \mathcal{F}(V)$, on aura, d'après le lemme 1, que $\forall z \in V$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z) \bar{g}_i \equiv 0 \quad \text{sur} \quad U.$$

D'où un morphisme naturel

$$\mathcal{F} \to \mathcal{O}_U \underset{\mathbf{C}}{\otimes} E.$$

C'est visiblement un isomorphisme de faisceaux de $\mathcal{O}_U$-modules, d'où le résultat.

Reprenons nos notations initiales. Nous allons prouver maintenant que la connexion holomorphe naturelle du faisceau $\mathcal{D}'_U$ induit une connexion méromorphe sur $\mathcal{M}$ à pôles contenus dans Δ.

Proposition 2. — *Au voisinage de chaque point de* U, *il existe un idéal* I *de* $\mathcal{O}_U$ *non nul, tel que l'on ait* $I \nabla \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{O}_U} \otimes \Omega_U^1$ *au voisinage de ce point. Pour* $t \notin \Delta$, *on peut prendre* $I = \mathcal{O}_U$. *Donc* ∇ *induit sur* $\mathcal{M}$ *une connexion méromorphe à pôles dans* Δ.

Démonstration. — Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbf{C}^p$, $(e_1^*, \ldots, e_p^*)$ la base duale et $x_1, \ldots, x_p$ les coordonnées correspondants ($x_i = e_i^*(x)$ pour $x \in \mathbf{C}^p$).

Soit $S: U \to \mathrm{sym}^k(\mathbf{C}^p) \subset \bigoplus_1^k S_h(\mathbf{C}^p)$ l'application analytique associée au revêtement ramifié X de degré k de U contenu dans $U \times \mathbf{C}^p$ (voir [1], ch. 0, § 3) et soit

$$P(t,x) = \sum_0^k (-1)^h S_h(t) . x^{k-h} = 0$$

l'équation canonique de X (voir [1], ch. 0, § 3 ou [3]) à valeurs dans $S_k(\mathbf{C}^p)$. Pour $i \in [1,p]$, notons par

$$P_i(t,x) = \langle P(t,x), (e_i^*)^k \rangle = \sum_0^k (-1)^h \langle S_h(t), (e_i^*)^h \rangle x_i^{k-h} \ ;$$

c'est un polynôme unitaire de degré k en x_i seul (dont les coefficients dépendent analytiquement de $t \in U$) nul sur X. Nous noterons par Δ_i son discriminant ($\Delta_i \in \mathcal{O}_U$). Remarquons que $\{\Delta_i = 0\} \supset \{\Delta = 0\}$ pour chaque $i \in [1,p]$ et que si $t_0 \notin \Delta$, on peut choisir la base $(e_1, \ldots, e_p)$ pour avoir $\Delta_i(t_0) \neq 0$ pour tout $i \in [1,p]$. En particulier, nous supposerons dans la suite que la base $(e_1, \ldots, e_p)$ est choisie de manière qu'aucune des fonctions Δ_i ne soit identiquement nulle sur U. Nous nous proposons de montrer que dans ces conditions, on a :

$$\left(\prod_{\alpha=1}^p \Delta_\alpha\right) \nabla \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{O}_U} \otimes \Omega_U^1 .$$

Le problème étant local sur U, nous pouvons supposer que U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$; nous noterons alors par $t_1, \ldots, t_n$ les coordonnées sur U. Nous avons à montrer que si $f \in \pi_* \mathcal{O}_X$, on a :

$$\left(\prod_{\alpha=1}^p \Delta_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial t_j} [\mathrm{trace}_{X/U}(f g)] \in \mathcal{M}$$

où la dérivation par rapport à t_j est prise au sens des distributions sur U. Nous allons donc chercher $f_j \in \pi_* \mathcal{O}_X$ vérifiant :

$$\left(\prod_{\alpha=1}^p \Delta_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial t_j} [\mathrm{trace}_{X/U}(f \bar{g})] = \mathrm{trace}_{X/U}(f_j \bar{g})$$

au sens des distributions sur U.

Comme on a $P_i(t,x_i) = 0$ sur X, on obtient par différentiation

$$P_i'(t,x_i).dx_i + \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial t_\beta} dt_\beta = 0 \quad \text{sur} \quad X.$$

Si Q_i est un polynôme en x_i de degré $\leqslant k-1$ vérifiant :

$$\Delta_i = P_i'.Q_i \quad \text{sur} \quad X$$

(par définition du discriminant, cela existe !), on aura :

$$(*) \qquad \Delta_i\, dx_i = -\, Q_i \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial t_\beta} dt_\beta \quad \text{sur} \quad X.$$

Maintenant $\dfrac{\partial}{\partial t_j}[\mathrm{trace}_{X/U}(f\bar{g})]$ est le coefficient de

$$dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$$

dans $d'[\mathrm{trace}_{X/U}(f\bar{g}) \wedge dt_1 \wedge \ldots \widehat{dt_j} \ldots \wedge dt_n]$ et puisque la trace coïncide avec l'image directe des courants (6) et donc commute à d' et d'', on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t_j}[\mathrm{trace}_{X/U}(f\bar{g})]\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n = \mathrm{trace}_{X/U}[\bar{g}\, d'f \wedge dt_1 \wedge \ldots \widehat{dt_j} \ldots \wedge dt_n]$$

au sens des courants sur U.

Mais on a $d'f = \sum_1^n \dfrac{\partial f}{\partial t_\beta} dt_\beta + \sum_1^p \dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$ et donc :

$$\bar{g}\, d'f \wedge dt_1 \wedge \ldots \widehat{dt_j} \ldots \wedge dt_n = (-1)^{j-1} \bar{g} \frac{\partial f}{\partial t_j} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n + \bar{g} \sum_1^p \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \wedge dt_1 \wedge \ldots \widehat{dt_j} \ldots \wedge dt_n.$$

(6) Si h est continue sur X, le courant image direct $\pi_* h$ est défini par $\langle \pi_* h, \omega \rangle = \langle h, \pi^* \omega \rangle$ pour ω forme $\mathscr{C}^\infty$ à support compact de type (n,n) sur U; comme $\mathrm{trace}_{X/U}(h)$ est continue sur U on a

$$\langle h, \pi^*\omega \rangle = \int_U \mathrm{trace}_{X/U}(h)\omega = \langle \mathrm{trace}_{X/U}(h), \omega \rangle,$$

en utilisant le fait qu'une hypersurface fermée d'intérieur vide est négligeable dans l'intégration sur un ensemble analytique (voir [7], 2e partie, § 1), et le théorème banal du changement de variable dans une intégrale.

Grâce à la relation (*), on obtient :

$$\left[\prod_{\alpha=1}^{p} \Delta_\alpha\right] dx_i \wedge dt_1 \wedge \ldots \widehat{dt_j} \ldots \wedge dt_n$$
$$= (-1)^{j-1}\left[\prod_{\alpha\neq i} \Delta_\alpha\right] Q_i \frac{\partial P_i}{\partial t_j} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$$

et donc :

$$\left[\prod_{\alpha=1}^{p} \Delta_\alpha\right] . \bar{g}\, d'f \wedge dt_1 \wedge \ldots \widehat{dt_j} \ldots \wedge dt_n = \bar{g} f_j\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$$

avec

$$f_j = (-1)^{j-1}\left[\left[\prod_{\alpha=1}^{p} \Delta_\alpha\right] \frac{\partial f}{\partial t_j} + \sum_{i=1}^{p} \left[\prod_{\alpha\neq i} \Delta_\alpha\right] Q_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial P_i}{\partial t_j}\right],$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Le faisceau* $\mathcal{M}$ *est localement libre sur* $U - \Delta$ (7).

Démonstration. — On sait en effet que $\mathcal{M}$ est cohérent sur $U - \Delta$ et muni d'une connexion holomorphe intégrable (car $d'^2 = 0$ sur X !). Il est classique que dans ces conditions, le faisceau cohérent est localement libre (voir [5]).

PROPOSITION 3. — *Le faisceau* $\mathcal{M}$ *est cohérent sur* U.

Démonstration. — Comme on sait qu'il est de type fini sur $\mathcal{O}_U$ (car c'est par définition l'image de $\pi_*\mathcal{O}_X$ qui est de type fini), il suffit de montrer qu'il est contenu dans un faisceau cohérent sur U.

Notons par $(\mathcal{V}, \nabla)$ le fibré à connexion intégrable sur $U - \Delta$ défini par $\mathcal{M}/U - \Delta$ et notons par $j\colon\ U - \Delta \hookrightarrow U$ l'inclusion. Soit $\tilde{\mathcal{V}}$ l'extension canonique de $\mathcal{V}$ définie dans [5], c'est-à-dire le sous-faisceau du faisceau $j_*\mathcal{V}$ formé des sections de $j_*\mathcal{V}$ ayant dans la base horizontale multiforme de $(\mathcal{V}, \nabla)$ des coordonnées qui croissent au plus en $0(|\mathrm{Log}\, d(t)|^k)$, où $d(t)$ désigne la distance de t à Δ, pour k assez grand. Alors, d'après [5], prop. 5.7, $\tilde{\mathcal{V}}$ est cohérent sur U. Mais si

(7) Ceci ne résulte pas de la locale liberté de $\mathcal{H}$ sur $U - \Delta$ mais la redonne (car $\pi_*\mathcal{O}_X$ est localement libre sur $U - \Delta$!).

$h_1, \ldots, h_k$ sont les branches locales de X sur $U - \Delta$, les $\overline{g(h_j)}$ forment la section horizontale multiforme de $(\mathscr{V}, \nabla)$ et par définition de la trace, pour $f \in \pi_* \mathcal{O}_X$, $\mathrm{trace}_{X/U}(f\bar{g})$ admet les $f(h_j)$ comme coordonnées dans cette base. Ces quantités sont localement bornées sur U, ce qui prouve que $\mathscr{M}$ s'injecte dans $\tilde{\mathscr{V}}$ (on utilise ici le fait que $\mathscr{M}$ est sans torsion, puisque sous-faisceau de $\mathscr{C}_U^0$ qui est sans torsion). Ceci prouve la cohérence de $\mathscr{M}$ sur U (8).

COROLLAIRE. — *La connexion méromorphe* ∇ *sur le faisceau cohérent* $\mathscr{M}$ *est à points singuliers réguliers, et* $\mathscr{M}$ *est de type trace.*

Démonstration. — D'après [5], prop. 5.7, il y a unicité de la structure méromorphe prolongeant $\mathscr{V}$ pour laquelle $(\mathscr{V}, \nabla)$ est à points singuliers réguliers le long de Δ. Or, dans la preuve de la proposition 3 ci-dessus, nous avons exhibé une injection de $\mathscr{M}$ dans $\tilde{\mathscr{V}}$; ceci donne donc le résultat.

Remarque. — Il n'est pas difficile de tester directement cette régularité de ∇ près d'un point lisse de Δ, ce qui est suffisant pour donner la régularité partout. □

3. — Comportement des fonctions de type trace près de l'hypersurface polaire.

Nous nous proposons maintenant de montrer que les sections d'un sous-$\mathcal{O}_U$-module localement libre de type fini de $\mathscr{C}_U^0$ pour lequel la connexion naturelle ∇ induit une connexion méromorphe à points singuliers réguliers le long d'un diviseur à croisements normaux admettent des développements en séries très simples au voisinage d'un pôle de la connexion, puis d'étendre ce résultat à un faisceau de type trace général.

PROPOSITION 4. — *Soit* X *un polydisque ouvert de centre* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *et soit* p *un entier,* $1 \leqslant p \leqslant n$; *soit* $Y = \{z \in X / z_1 \ldots z_p = 0\}$. *Soit* $\mathscr{V}$ *un sous-*$\mathcal{O}_X$*-module libre de type fini de* $\mathscr{C}_X^0$ *le faisceau des fonctions continues sur* X, *sur lequel la connexion holomorphe naturelle* ∇ *induit une connexion méromorphe à pôles dans* Y *et à points singuliers réguliers. Alors, il existe* $r_1, \ldots, r_q$ *dans* $\mathbf{C}^p$ *tels que pour tout* $\varphi \in \mathscr{V}$ (φ *est une fonction*

(8) Un sous-faisceau de type fini d'un faisceau cohérent est cohérent !

continue !), on ait un développement fini de la forme :

$$\varphi(z) = \sum_{0 \leqslant j_\alpha \leqslant \ell - 1} \sum_{i=1}^{q} a_{i,j}(z) |z|^{r_i} (\mathrm{Log}\,|z|)^j \qquad (\text{où } \ell = rg_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V})$$

au voisinage de $z = 0$, *où les* $a_{i,j}$ *sont des fonctions analytiques réelles au voisinage de* 0, *avec les notations suivantes pour* $r \in \mathbf{C}^p$ $|z|^r = |z|^{r_1} \dots |z_p|^{r_p}$ *et pour* $j \in \mathbf{N}^p$:

$$(\mathrm{Log}\,|z|)^j = (\mathrm{Log}\,|z_1|)^{j_1} \dots (\mathrm{Log}\,|z_p|)^{j_p}.$$

Démonstration. — Soit $e_1, \dots, e_\ell$ une base locale de $\mathcal{V}$ au voisinage de $z = 0$ et notons par E la matrice colonne des e_λ. Pour $\mathrm{N} \in \mathbf{N}^p$, posons $z^{\mathrm{N}} = z_1^{\mathrm{N}_1} \dots z_p^{\mathrm{N}_p}$; pour N assez grand, il existe des matrices holomorphes (ℓ,ℓ) $\mathrm{M}_i(z)$ pour $i \in [1,n]$, telles que l'on ait :

$$z^{\mathrm{N}} \frac{\partial}{\partial z_i}(\mathrm{E})(z) = \mathrm{M}_i(z).\mathrm{E}(z), \qquad \forall i \in [1,n]\ (*).$$

Le système (*) dans lequel E est considéré comme une inconnue holomorphe est complètement intégrable et à points singuliers réguliers le long de Y. Il admet donc une matrice fondamentale de la forme $z^{\mathrm{H}}\mathrm{F}(z)$ où $\mathrm{H} = (\mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_p)$ sont des matrices constantes commutant deux à deux, où l'on a posé $z^{\mathrm{H}} = z_p^{\mathrm{H}_1} \dots z_p^{\mathrm{H}_p}$ et où F est une matrice holomorphe inversible sur X − Y, méromorphe le long de Y. De plus, si z_0 est un point fixé de X − Y assez près de 0, on peut supposer que $\mathrm{F}(z_0) = \mathrm{Id}$. Posons $\mathrm{B}(z) = \mathrm{F}(z)^{-1} z^{-\mathrm{H}} \mathrm{E}(z)$; alors B est multiforme continue sur X − Y. Au sens des distributions, on obtient en remplaçant $\mathrm{E}(z)$ par $z^{\mathrm{H}}\mathrm{F}(z)\mathrm{B}(z)$:

$$z^{\mathrm{N}} \frac{\partial}{\partial z_i}(z^{\mathrm{H}}\mathrm{F}(z)\,\mathrm{B}(z)) = z^{\mathrm{N}} \frac{\partial}{\partial z_i}(z^{\mathrm{H}}\mathrm{F}(z)).\mathrm{B}(z) + z^{\mathrm{H}}\mathrm{F}(z).z^{\mathrm{N}} \frac{\partial}{\partial z_i}(\mathrm{B})(z)$$

et comme $z^{\mathrm{H}}\mathrm{F}(z)$ est par définition une matrice fondamentale du système (*) et que $\mathrm{E}(z)$ est une solution (pas holomorphe en général !) de (*), on en déduit aisément qu'au sens des distributions, on a :

$$z^{\mathrm{H}}\mathrm{F}(z).z^{\mathrm{N}} \frac{\partial}{\partial z_i}(\mathrm{B})(z) = 0 \qquad \text{sur} \quad \mathrm{X} - \mathrm{Y}$$

au moins, ce qui donne $\dfrac{\partial}{\partial z_i}(\mathrm{B}) = 0$ sur X − Y pour chaque $i \in [1,n]$.

D'après le lemme de Dolbeault-Grothendieck, ceci montre que B est anti-holomorphe sur $X - Y$.

Notons par t_h, pour $h \in [1,p]$, l'opération consistant à tourner une fois dans le sens direct autour de l'hyperplan $\{z_h = 0\}$ (ou si l'on préfère, l'addition de $2i\pi$ *à* $Log\, z_h$!). Comme E est uniforme, on aura :

$$E(t_h z) = E(z) = e^{2i\pi H_h} z^H F(z) B(t_h z)$$

puisque F est également uniforme sur $X - Y$. On aura donc :

$$B(t_h z) = F(z)^{-1} z^{-H} e^{-2i\pi H_h} z^H F(z) B(z) \qquad \text{pour} \qquad z \in X - Y.$$

Comme z^H commute à $e^{-2i\pi H_h}$ (puisque $H_1, \ldots, H_p$ commutent deux à deux) on obtient :

$$B(t_h z) = F(z)^{-1} e^{\dotplus 2i\pi H_h} F(z).B(z) \qquad \text{pour} \qquad z \in X - Y.$$

Mais B étant anti-holomorphe, nous pouvons utiliser le lemme 1. On a donc, grâce à ce lemme et à l'hypothèse $F(z_0) = \mathrm{Id}$, que $B(t_h z) = e^{-2i\pi H_h} B(z)$. Posons alors $B(z) = \bar{z}^H \bar{A}(z)$.

Alors A est holomorphe et uniforme sur $X - Y$. Montrons que A est méromorphe le long de Y : on a, par définition :

$$\overline{A(z)} = \bar{z}^{-H} F(z)^{-1} z^{-H} E(z).$$

Comme E est continue sur X tout entier et comme F est méromorphe le long de Y, on obtient pour A une majoration de la forme $|A(z)| \leqslant$ Constante. $|z \ldots z_p|^L$ au voisinage de chaque point de Y, ce qui prouve la méromorphie de A le long de Y. Nous avons donc établi l'égalité suivante :

$$E(z) = \bar{z}^H F(z) z^H \overline{A(z)}$$

où F et A sont holomorphes sur $X - Y$, méromorphes le long de Y et où $H = (H_1, \ldots, H_p)$ sont des matrices constantes commutant deux à deux. Le résultat est maintenant une conséquence immédiate du corollaire du lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient* $a \in \mathbf{C}^*$ *et* $P \in \mathbf{C}[x,y]$, $P \neq 0$. *Si pour tout* $x \in \mathbf{C}$ *on a l'égalité :*

$$a.P(x + 2i\pi, \bar{x} - 2i\pi) = P(x, \bar{x}),$$

alors $a = 1$ *et il existe* $Q \in \mathbf{C}[t]$ *tel que* $P(x,y) = Q(x+y)$.

Démonstration. — Par récurrence sur le degré $\deg_x P$ de P en la première variable. Si $\deg_x P = 0$, alors on a $P \in \mathbf{C}[y]$ et $P \neq 0$ vérifiant $a.P(y-2i\pi) = P(y)$ pour tout $y \in \mathbf{C}$. Si $P(y_0) = 0$, alors $P(y_0-2i\pi)=0$ et P est donc constant, d'où $a = 1$.

Supposons maintenant le résultat prouvé pour $\deg_x P_1 = d - 1 \geqslant 0$ et soit P vérifiant nos hypothèses avec $\deg_x P = d$. Posons $P_1 = \frac{\partial}{\partial x}(P)$. Alors $\deg_x P_1 = d - 1$ et P_1 est soit nul, soit satisfait nos hypothèses. Le premier cas ayant déjà été vu, on obtient dans le second que $a = 1$ et qu'il existe $Q_1 \in \mathbf{C}[t]$ tel que $P_1(x,y) = Q_1(x+y)$. Soit $Q \in \mathbf{C}[t]$ un polynôme vérifiant $Q' = Q_1$. Alors $P(x,y) - Q(x+y)$ a une dérivée nulle par rapport à la variable x et définit donc un polynôme $R \in \mathbf{C}[y]$. Comme on sait que $a = 1$, R satisfera $R(y-2i\pi) \equiv R(y)$ et sera constant, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — *Si* a *et* b *sont dans*

$$U = \{w \in \mathbf{C}^p / 0 \leqslant \mathrm{Re}(w_i) < 1\,,\ \forall i \in [1,p]\}$$

et si $P \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_p, y, \ldots, y_p]$ *est non nul, la fonction*

$$z^a \bar{z}^b\, P(\operatorname{Log} z, \operatorname{Log} \bar{z})$$

est uniforme sur $\mathbf{C}^p - Y$, *où* $Y = \{z \in \mathbf{C}^p / z_1 \ldots z_p = 0\}$, *si, et seulement si, l'on a les deux conditions suivantes :*

i) $a = b$

ii) *il existe* $Q \in \mathbf{C}[t_1, \ldots, t_p]$ *tel que*

$$P(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p) = Q(x_1+y, \ldots, x_p+y_p) \quad \forall x, y \in \mathbf{C}^p.$$

On a utilisé ci-dessus les notations suivantes :

$$z^a = z_1^{a_1} \ldots z_p^{a_p} \qquad \operatorname{Log} z = (\operatorname{Log} z_1, \ldots, \operatorname{Log} z_p) \ldots$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme précédent à chaque variable.

Remarques. — On notera que les exposants $r_1, \ldots, r_p$ qui apparaissent dans la proposition 4 sont construits à partir des valeurs propres des matrices $H_1, \ldots, H_p$, c'est-à-dire à partir des résidus de la connexion sur les différentes branches du diviseur à croisements normaux Y.

Si $\mathcal{M}$ est de type trace sur X, alors la proposition 4 ne s'applique pas telle quelle à $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M}$ n'est pas localement libre, ni à $\hat{\mathcal{M}}$, l'extension canonique de $\mathcal{M}/\mathrm{X}-\mathrm{Y}$, car $\hat{\mathcal{M}}$ n'est pas en général contenu dans $\mathscr{C}_{\mathrm{X}}^{0}$. Par contre il existe toujours $\mathrm{N}=(\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_p)$ tel que $z^{\mathrm{N}}\hat{\mathcal{M}}\subset\mathcal{M}$ (d'après le Nullstellensatz) au voisinage de 0, et on peut appliquer la proposition 4 à $z^{\mathrm{N}}\hat{\mathcal{M}}$ qui est localement libre et contenu dans $\mathscr{C}_{\mathrm{X}}^{0}$. On en déduit le corollaire suivant de la proposition 4.

PROPOSITION 4 *bis*. — *La proposition* 4 *s'applique à un faisceau* $\mathcal{M}$ *de type trace. Si de plus les sections horizontales multiformes de* $\mathcal{M}$ *sont à croissance logarithmique, on peut prendre* $r_1\ldots r_q$ *dans* $([0,2[+i\mathbf{R})^p$. □

On notera que la proposition 4 *bis* décrit avec précision le comportement d'une fonction de type trace près d'un point lisse de l'hypersurface polaire Δ ainsi que le long de toute courbe complexe $\gamma:\mathrm{D}\to\mathrm{V}$ vérifiant $\gamma^{-1}(\Delta)=\{0\}$.

Ceci permet de constater que l'on s'est finalement peu éloigné des faisceaux $\mathcal{M}(r,n)$ introduits plus haut.

Montrons maintenant comment les conditions vi) et vii)$_n$ influent sur les développements des sections d'un faisceau de type trace.

LEMME 3. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un faisceau de type trace dans la situation de la proposition* 4 *bis.*

a) Si $\mathcal{M}$ *vérifie* vi) *alors on peut prendre* $r_1\ldots r_q$ dans $\mathbf{Q}^p$ *dans la conclusion de la proposition* 4 *bis.*

b) si $\mathcal{M}$ *vérifie* vii)$_n$ *alors on pourra prendre* $a_{i,j}\equiv 0$ *si*

$$\sup\{j_1,\ldots,j_p\}>n \qquad \text{où} \qquad j=(j_1\ldots j_p). \qquad \square$$

La démonstration est un exercice facile laissé au lecteur.

Terminons l'étude du faisceau de type trace

$$\mathcal{M}=\{\mathrm{trace}_{\mathrm{X}/\mathrm{U}}(f\bar{g}),\, f\in\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{X}}\}$$

en montrant que son extension canonique est encore un faisceau de type trace :

PROPOSITION 5. — *Dans la situation étudiée plus haut, l'extension canonique* $\tilde{\mathcal{V}}$ *de* $\mathcal{V}=\mathcal{M}/\mathrm{U}-\Delta$ *est encore un sous-faisceau de* $\mathscr{C}_{\mathrm{U}}^{0}$.

Démonstration. — Reprenons les notations de la proposition 3 : soit $s \in j_*\mathscr{V}$. Alors il existe une fonction holomorphe a : $X - \pi^{-1}(\Delta) \to \mathbf{C}$ telle que l'on ait $s(t) = \sum_1^k a(h_j(t)).\overline{g(h_j(t))}$ si h_j pour $j \in [1,k]$ désignent les branches locales de X sur U [9]. De plus, si $s \in \tilde{\mathscr{V}}$, on aura une majoration de la forme

$$|a(t,x)| \leqslant \mathrm{C}.|\mathrm{Log}\,(d(t))|^{\mathrm{N}}$$

au voisinage de chaque point de $\pi^{-1}(\Delta)$. Le lemme suivant montre qu'alors la fonction a est localement bornée sur X :

LEMME 4. — *Soit* X *un espace analytique réduit et irréductible et soit* Δ *une hypersurface fermée de* X *d'intérieur vide. Notons par* $d(x)$ *la distance de* $x \in X$ *à* Δ. *Si* f : $X - \Delta \to \mathbf{C}$ *est holomorphe et vérifie :*

$$|f(x)| \leqslant \mathrm{C}.|\mathrm{Log}\,(d(x))|^{\mathrm{N}},$$

alors f *est localement bornée sur* X.

Démonstration. — On peut supposer que X est un revêtement ramifié d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$ car le problème est local sur X. Alors les fonctions $f_p = \mathrm{trace}_{X/U}(f^p)$ sont holomorphes sur U privé d'une hypersurface fermée d'intérieur vide et sont majorées en module de la même manière que f. Comme f est solution d'une équation unitaire dont les coefficients sont des polynômes en les f_p, il suffit de prouver le lemme pour U, c'est-à-dire pour un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Dans ce cas, f est localement bornée si, et seulement si, elle se prolonge analytiquement à travers Δ et il suffit donc de montrer que f se prolonge analytiquement à travers Δ près d'un point non singulier de Δ. On est alors ramené [10] à montrer qu'une fonction holomorphe ayant une singularité isolée à l'origine dans $\mathbf{C}$ et une croissance majorée par une puissance de $|\mathrm{Log}\,|z||$ se prolonge analytiquement en 0, ce qui est élémentaire; ceci achève la démonstration du lemme 4. □

Pour achever la preuve de la proposition 5, considérons une

[9] En effet, quitte à remplacer X par son image X_g par

$$id_{\mathbf{C}^n} \times g : \quad \mathrm{U} \times \mathbf{C}^p \to \mathrm{U} \times \mathbf{C},$$

on peut supposer les fonctions anti-holomorphes $g(h_j(t))$ indépendantes sur $\mathbf{C}$.

[10] En utilisant par exemple la proposition 2 de [1], ch. 0, § 1.

normalisation $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to X$ de X. Puisque a est localement bornée sur X, il existe une fonction holomorphe b sur $\tilde{X}$ telle que $a \circ \tilde{\pi} = b$. Donc si $\hat{\pi} : \tilde{X} \to U$ est défini par $\hat{\pi} = \pi \circ \tilde{\pi}$, on aura $s = \mathrm{trace}_{\tilde{X}/U}(\overline{b . g \circ \tilde{\pi}})$, ce qui prouve la continuité de s sur U et achève la démonstration de la proposition 5.

4. L'algèbre des fonctions de type trace; fin de la preuve du théorème. Applications.

Pour parachever la construction du faisceau de type trace du théorème 1 il nous suffit de montrer, grâce à la réduction effectuée, que le faisceau

$$\sum_{0 \leqslant |b| \leqslant k-1} \{\mathrm{trace}_{X/U}(f \bar{x}^b), f \in \pi_* \mathcal{O}_X\} \ (^{11})$$

est de type trace. Ceci résulte du corollaire de la proposition 3 et du résultat suivant, où l'on utilise les notations de la définition 1.

PROPOSITION 6. — *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux sous-faisceaux de $\mathcal{O}_V$-modules de $\mathcal{C}_V^0$ vérifiant les conditions* ii) *et* iii) *de la définition* 1. *Alors les sous-faisceaux $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} . \mathcal{N}$ image de $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathcal{N}$ par les applications d'addition et de multiplication des fonctions continues vérifient encore les propriétés* ii) *et* iii). *Si de plus $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont de type trace il en est de même de $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} . \mathcal{N}$.*

Démonstration. — Remarquons déjà que $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} . \mathcal{N}$ sont de type fini sur $\mathcal{O}_V$ par construction. Soit Δ un fermé analytique d'intérieur vide dans V contenant les pôles des connexions de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Comme notre problème est local sur V, nous pouvons supposer V connexe; alors $V - \Delta$ sera également connexe.

Premier point : la cohérence sur $V - \Delta$.

Notons par (f) et (g) les bases horizontales multiformes de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Soit r le rang sur $\mathbf{C}$ des fonctions (f) et (g), c'est-à-dire la dimension du $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par les germes en un point de $V - \Delta$ des fonctions (f) et (g) (si les germes en un point de fonctions

(11) Il s'agit d'une somme de sous-faisceaux de $\mathcal{O}_U$-modules de $\mathcal{C}_U^0$.

antiholomorphes sont indépendants sur $\mathbf{C}$, cela reste vrai en chaque point de la composante connexe par prolongement analytique); de même notons par s le rang des fonctions $f_i g_j$. Soit (h) r fonctions choisies parmi les f_i et g_j de rang r (resp. s fonctions choisies parmi les $f_i g_j$ de rang s); montrons qu'alors (h) est une base (qui sera horizontale car formée de fonctions antiholomorphes !) de $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{M}.\mathcal{N}$) sur $V - \Delta$. Nous avons à montrer que (h) est libre sur $\mathcal{O}_V$, puisque (h) est manifestement générateur. Si on a

$$\Sigma\, a_k . h_k = 0$$

sur un ouvert $U \subset V - \Delta$ où les fonctions a_k sont holomorphes sur U, les fonctions h_k étant supposées uniformes sur U (ce qui revient à dire que l'on a choisi U assez petit), le lemme 1 donne, puisque les fonctions h_k sont antiholomorphes, que pour chaque $z \in U$ on aura $\Sigma\, a_k(z) . h_k \equiv 0$ sur $V - \Delta$ (par prolongement analytique et connexité). L'indépendance sur $\mathbf{C}$ des h_k donne alors la nullité en z des a_k; comme ceci a lieu pour chaque $z \in U$, on en déduit l'indépendance sur $\mathcal{O}_V$ des h_k. Nous avons donc prouvé la cohérence sur $V - \Delta$ de $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ et de $\mathcal{M}.\mathcal{N}$ (et même le fait qu'ils sont localement libres !). D'autre part les restrictions à $V - \Delta$ de ces faisceaux sont stables par ∇; c'est évident pour $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ et cela résulte de la remarque qui suit la définition 1 pour $\mathcal{M}.\mathcal{N}$: en effet les sections locales de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sur $V - \Delta$ sont analytiques réelles, et on peut appliquer la formule de dérivation d'un produit $\nabla(a.b) = a.\nabla(b) + \nabla(a).b$ pour $a \in \mathcal{M}$ et $b \in \mathcal{N}$. La cohérence sur V et la régularité de ∇ résultera du

Second point : $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{M}.\mathcal{N}$ sont contenus dans des extensions méromorphiquement équivalentes à leurs extensions canoniques.

Notons comme plus haut par (f), (g) et (h) les bases horizontales multiformes de $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{M}.\mathcal{N}$). On a vu qu'il existe des matrices à coefficients constants u et v telles que l'on ait $(f) = u.(h)$ et $(g) = v.(h)$ (resp. w à coefficients constants telle que $f_i . g_j = w_{i,j}.(h)$).

Si s est une section locale de $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{M}.\mathcal{N}$) il existe des sections locales m et n de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement telles que $s = m + n$ (resp. des sections m_k et n_k de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ telles que $s = \Sigma m_k . n_k$). Comme $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ vérifient la condition iii) les composantes de m et n dans les bases (f) et (g) sont à croissance modérée vers Δ (resp. les composantes de m_k et $n_k \ldots$). Comme les composantes de s dans la base (h) se déduisent de celles-là par des combinaisons linéaires à coefficients constants, elles sont également à croissance modérée vers Δ. De plus on peut, au voisinage de chaque point de Δ modérer uniformément cette croissance en utilisant la finitude de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{N}$. Ceci montre qu'au voisinage de chaque point de Δ le faisceau $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{M}.\mathcal{N}$) se plonge dans une extension de sa restriction à $V - \Delta$ qui est méromorphiquement équivalente à l'extension canonique. Ceci prouve que $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{M}.\mathcal{N}$) est cohérent comme sous-faisceau de type fini d'un faisceau cohérent, et que ∇ est à points singuliers réguliers le long de Δ. Ceci achève la démonstration du second point.

Il reste à voir que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont contenus dans leurs extensions canoniques respectives, il en est de même de $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{M}.\mathcal{N}$. Ceci s'obtient immédiatement à partir du raisonnement effectué dans le second point en remplaçant croissance modérée vers Δ par croissance logarithmique vers Δ. Ceci achève la démonstration de la proposition 6.

$\square$

Pour achever la preuve du théorème 1, il nous reste à vérifier les conditions v), vi) et $\text{vii})_0$ sur le faisceau de type trace que nous venons de construire :

$$\mathcal{M} = \sum_{0 \leqslant |b| \leqslant k-1} \{\mathrm{trace}_{X/U}(f\bar{x}^b), f \in \pi_* \mathcal{O}_X\}.$$

Comme $\mathcal{M}$ est engendré sur $\mathcal{O}_U$ par les $\mathrm{trace}_{X/U}(x^a\bar{x}^b)$ pour $|a| \leqslant k-1$, $|b| \leqslant k-1$ car $\pi_*\mathcal{O}_X$ est engendré sur $\mathcal{O}_U$ par les x^a pour $|a| \leqslant k-1$, $\mathcal{M}$ est également engendré sur $\mathcal{O}_U$ par les

$$\mathrm{Re}(\mathrm{trace}_{X/U}(x^a\bar{x}^b)) = \mathrm{trace}_{X/U}\left(\frac{x^a\bar{x}^b + x^b\bar{x}^a}{2}\right)$$

et les

$$\mathrm{Im}(\mathrm{trace}_{X/U}(x^a\bar{x}^b)) = \mathrm{trace}_{X/U}\left(\frac{x^a\bar{x}^b - x^b\bar{x}^a}{2i}\right)$$

qui sont réelles, d'où la condition v).

La vérification de vi) et $\text{vii})_0$ peut soit se faire en considérant une application holomorphe $\gamma : D \to V$ vérifiant $\gamma^{-1}(\Delta) = \{0\}$ et $\gamma'(0) \neq 0$ et en se ramenant au cas élémentaire d'un revêtement ramifié à l'origine du disque unité (les développements de Puiseux permettant de calculer les exposants et de voir qu'il n'y a pas de logarithmes), soit en remarquant que la monodromie d'un revêtement ramifié (fini) est *unipotente* (car on représente $\pi_1(V-\Delta)$ dans un groupe fini de permutations) ce qui donne simultanément vi) et $\text{vii})_0$ puisqu'un unipotent est semi-simple avec des valeurs propres racines de l'unité.

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Terminons en donnant deux exemples de problèmes simples où interviennent les fonctions de type trace.

Interpolation de Lagrange d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}$.

Soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}$ à valeurs complexes. Pour chaque P polynôme unitaire de degré k à coefficients complexes et ayant k racines 2 à 2 distinctes il existe un unique polynôme Q_P de degré $\leqslant k-1$ prenant les mêmes valeurs que φ aux racines de P. Si on identifie $\mathbf{C}^k$ à l'ensemble des polynômes unitaires de degré k (au moyen des coefficients de z^h pour $0 \leqslant h \leqslant k-1$) et si Δ désigne l'hypersurface de $\mathbf{C}^k$ associée aux polynômes P dont le discriminant est nul, φ définit donc une application :

$$\Phi : \mathbf{C}^k - \Delta \to \mathbf{C}^k$$

par $\Phi(P) = Q_P$.

LEMME 5. — *Chaque composante de Φ est de la forme $\dfrac{f}{\Delta}$ où f est une fonction de type trace sur $\mathbf{C}^k$ et $\Delta : \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}$ la fonction discriminante.*

Démonstration. — On a $Q_P(z) = \sum_{P(z_j)=0} \varphi(z_j) \prod_{\alpha \neq j} \dfrac{(z-z_\alpha)}{(z_j - z_\alpha)}$

Donc chaque coefficient de Q_p est de la forme $\dfrac{g(z_1 \ldots z_k)}{\Delta(P)}$ où g est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}^k$, symétrique en $z_1 \ldots z_k$. On est donc dans un cas particulier du « mauvais » théorème des fonctions symétriques traité ci-dessous.

Le « mauvais » théorème des fonctions symétriques :

Soit $\varphi : \mathbf{C}^k \to \mathbf{C}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et symétrique, c'est-à-dire que pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_k$, le groupe des permutations de $\{1,2\ldots k\}$, on a

$$\varphi(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(k)}) = \varphi(z_1 \ldots z_k).$$

Pour $s = (s_1 \dots s_k) \in \mathbf{C}^k$ posons

$$\Phi(s) = \varphi(z_1 \dots z_k) \qquad \text{si} \qquad \prod_{j=1}^{k} (z-z_j) = \sum_{0}^{k} (-1)^h s_h z^{k-h}$$

(avec $s_0 = 1$).

LEMME 6. — *Φ est de type trace sur $\mathbf{C}^k$.*

Démonstration. — Soit π: $\mathbf{C}^k \to \mathbf{C}^k$ l'application donnée par

$$\pi(z_1 \dots z_k) = (s_1 \dots s_k)$$

où $s_1 \dots s_k$ sont définies par

$$\prod_{j=1}^{k} (z-z_j) = \sum_{h=0}^{k} (-1)^h s_h z^{k-h} \quad (s_0 = 1).$$

Alors π est propre finie et surjective (de degré $k!$) et on a

$$\mathrm{trace}_\pi(\varphi)(s_1 \dots s_k) = k! \quad \Phi(s_1 \dots s_k)$$

ce qui prouve le résultat d'après le théorème 1.

Appendice.

J. E. Björk m'a récemment fait remarquer que si V est une variété analytique complexe et si $\mathcal{M}$ désigne un faisceau de type trace sur V, le sous-D_V-module ([12]) à gauche engendré par $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{D}'_V$, le faisceau des distributions sur V, n'est pas clairement holonome à point singulier régulier (le long de l'hypersurface critique) au sens de Kashiwara-Oshima. Le point obscur étant l'éventuelle présence, dans ce D_V-module, de sections non triviales supportées par l'hypersurface critique (qui est, rappelons-le, l'hypersurface polaire de la connexion méromorphe sur $\mathcal{M}$ induite par dérivation au sens des distributions; cette connexion méromorphe est, *par hypothèse*, à point singulier régulier), c'est-à-dire l'existence éventuelle de $\mathcal{O}_V$-torsion dans $D_V . \mathcal{M}$.

([12]) D_V désigne le faisceau des opérateurs différentiels holomorphes à coefficients holomorphes sur V.

Nous prouvons ici que $D_V.\mathcal{M}$ est sans $\mathcal{O}_V$-torsion (et même que $D_V(C^\infty.\mathcal{M})$ est sans $\mathcal{O}_V$-torsion) pour un faisceau de type trace $\mathcal{M}$ dont les sections horizontales multiformes sont à croissance logarithmique. On remarquera que cette hypothèse est stable par addition et multiplication (proposition 6) et que les faisceaux de type trace que donne le théorème 1 vérifient toujours cette condition. Ceci fait apparaître que les fonctions de type trace donnent naissance, par division par des fonctions holomorphes (au sens des valeurs principales d'Herrera-Lieberman [6]) à une classe de distributions très sympathiques. En particulier, deux telles distributions peuvent être multipliées à l'intérieur de cette classe, puisque le produit de deux fonctions de type trace est encore de type trace d'après la proposition 6 ci-dessus.

Je tiens à remercier ici J. E. Björk qui a attiré mon attention sur cette très intéressante question.

PROPOSITION 1. — *Soit* V *une variété analytique complexe connexe et soit* $\mathcal{M}$ *un faisceau de type trace sur* V *dont les sections horizontales multiformes sont à croissance logarithmique. Notons par* D_V *le faisceau des germes d'opérateurs différentiels holomorphes sur* V *et par* $\mathcal{D}'_V$ *le faisceau des germes de distributions sur* V, *muni de sa structure naturelle de* D_V-*module. Alors le sous-*D_V*-module de* $\mathcal{D}'_V$ *engendré par* $\mathcal{M}$ *est un* $\mathcal{O}_V$*-module sans torsion. De manière plus précise, si* $T \in D_V.\mathcal{M}$ *et si* $f = 0$ *est une équation locale de l'hypersurface polaire de la connexion « naturelle » sur* $\mathcal{M}$ *(qui est méromorphe et à points singuliers réguliers par définition), on a, pour toute forme* φ, $\mathscr{C}^\infty$ *à support compact et de type* (n,n) *sur* V *(on a posé* $n = \dim_{\mathbf{C}} V$) :

$$\langle T,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|\geq\varepsilon}\tilde{T}.\varphi$$

où $\tilde{T}$ *désigne la restriction de* T *à* $\{f\neq 0\}$ *qui est une fonction analytique réelle sur cet ouvert.* □

Nous déduirons cette proposition 1 d'un critère plus général donnant l'absence de $\mathcal{O}_V$-torsion pour le D_V-module engendré par un nombre fini de distributions engendrant un $\mathcal{O}_V$-module à connexion méromorphe (mais pas nécessairement à singularité régulière).

PROPOSITION 2. — *Soit* V *une variété analytique complexe connexe et soit* $f\colon V \to \mathbf{C}$ *une fonction holomorphe non identiquement nulle. Soit*

$T_1, \ldots, T_p$ *des fonctions* $\mathscr{C}^\infty$ *sur l'ouvert* $\{f \neq 0\}$. *On suppose que :*

1° *Il existe* $M \in H^0(V, \Omega_V^1 \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathrm{End}(\mathbf{C}^p))$ *et* $q \in \mathbf{N}$ *tels que*

$$f^q \nabla T_i = \sum_{j=1}^{p} M_{ij} . T_j \qquad \forall i \in [1,p] \quad \text{sur} \quad \{f \neq 0\}$$

où $\nabla : \mathscr{C}_V^\infty \to \mathscr{C}_V^\infty \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \Omega_V^1$ *désigne la connexion holomorphe donnée par* $h \to d'h$.

2° *a) Pour tout* $i \in [1,p]$ *et toute* $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(V)$ *de type* $(n-1,n)$ *et tout* $m \in \mathbf{N}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f|=\varepsilon} \frac{T_i . \varphi}{f^m} = 0 .$$

b) Pour tout $i \in [1,p]$ *et tout* $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(V)$ *de type* (n,n) *et tout* $m \in \mathbf{N}$:

$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| \geq \varepsilon} \frac{T_i . \psi}{f^m}$ *existe et définit une distribution, notée* $T_i(m)$, *sur* V.

Alors le D_V*-module engendré par* $T_1(0), \ldots, T_p(0)$ *(qui est un sous-faisceau de* $\mathscr{D}'_V$*) est sans* $\mathcal{O}_V$*-torsion.*

Plus précisément, pour toute distribution T *dans ce* D_V*-module et pour toute forme* $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(V)$ *de type* (n,n), *on a :*

$$\langle T, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| \geq \varepsilon} \tilde{T} . \psi$$

où $\tilde{T}$ *désigne la restriction de* T *à l'*ouvert $\{f \neq 0\}$, *qui est une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *sur cet ouvert (car* $T_1, \ldots, T_p$ *sont* $\mathscr{C}^\infty$ *sur cet ouvert, par hypothèse).* □

Démonstration. — Montrons que le $\mathcal{O}_V$-module engendré par les $T_i(m)$ pour $i \in [1,p]$ et $m \in \mathbf{N}$ (qui est contenu dans $\mathscr{D}'_V$) est en fait un D_V-module. Il suffit pour cela de prouver qu'il est stable par $\dfrac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial t_n}$ où $t_1, \ldots, t_n$ désignent des coordonnées locales sur V (notre assertion est locale sur V !). Calculons $\dfrac{\partial}{\partial t_1}(T_i(m))$ au sens des distributions; pour

$\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{V})$, on a :

$$\langle \frac{\partial}{\partial t_1}(\mathrm{T}_i(m)), \psi \, dt \wedge d\bar{t} \rangle = - \langle \mathrm{T}_i(m), \frac{\partial \psi}{\partial t_1} dt \wedge d\bar{t} \rangle \text{ (}^{13}\text{)}$$
$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \frac{\mathrm{T}_i}{f^m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t_1} dt \wedge d\bar{t}$$

d'après la définition de $\mathrm{T}_i(m)$ et :

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|f| \geqslant \varepsilon} d\left[\frac{\mathrm{T}_i}{f^m} \psi \, dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_n \wedge d\bar{t} \right] \right.$$
$$\left. - \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \frac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial t_1} \frac{\psi}{f^m} dt \wedge d\bar{t} + m \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \frac{\mathrm{T}_i}{f^{m+1}} \psi \frac{\partial f}{\partial t_1} dt \wedge d\bar{t} \right],$$

ce qui donne, en utilisant la formule de Stokes pour la première intégrale et la définition de $\mathrm{T}_i(m+1)$ pour la troisième :

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|f| = \varepsilon} \frac{\mathrm{T}_i}{f^m} \psi \, dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_n \wedge d\bar{t} \right.$$
$$\left. - \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \frac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial t_1} \frac{\psi}{f^m} dt \wedge d\bar{t} \right] - m \langle \mathrm{T}_i(m+1) \cdot \frac{\partial f}{\partial t_1}, \psi \, dt \wedge d\bar{t} \rangle .$$

En utilisant l'hypothèse 2° *a)* pour la première intégrale et les hypothèses 1° et 2° *b)* pour la seconde, on obtient :

$$\frac{\partial \mathrm{T}_i(m)}{\partial t_1} = \sum_{j=1}^{p} m_{ij}^1 . \mathrm{T}_j(m+q) - m \mathrm{T}_i(m+1) \cdot \frac{\partial f}{\partial t_1} \text{ dans } \mathscr{D}'_{\mathrm{V}}$$

où les fonctions holomorphes m_{ij}^k sont définies par la relation :

$$\mathrm{M}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ij}^k \otimes dt_k .$$

Nous avons donc montré que le $\mathscr{O}_{\mathrm{V}}$-module engendré par les $\mathrm{T}_i(m)$ pour $i \in [1,p]$ et $m \in \mathbf{N}$ est un D_{V}-module. Comme il contient les distributions $\mathrm{T}_i(0)$ pour $i \in [1,p]$, il contient le D_{V}-module engendré par

([13]) Dans les calculs qui suivent, $dt \wedge d\bar{t}$ sera une abréviation pour

$$dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n \wedge d\bar{t}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{t}_n .$$

les $T_i(0)$. Mais tout élément T du $\mathcal{O}_V$-module engendré par les $T_i(m)$ vérifie :

i) La restriction $\tilde{T}$ de T à l'ouvert $\{f \neq 0\}$ est $\mathscr{C}^\infty$.

ii) Pour toute forme $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(V)$ de type (n,n), on a :

$$\langle T,\psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \tilde{T}.\psi ,$$

puisque les $T_i(m)$ satisfont ces conditions et qu'elles sont stables par $\mathcal{O}_V$-linéarité ([14]). Mais si T satisfait i) et ii) et si T est de $\mathcal{O}_V$-torsion, on a clairement $T = 0$. Ceci achève la démonstration de la proposition 2.

Montrons comment on peut déduire la proposition 1 de la proposition 2 : d'abord, comme la conclusion cherchée est locale sur V, il suffit, un faisceau de type trace étant donné sur V, de vérifier les hypothèses 1° et 2° *a*) et *b*) pour un système générateur local de ce faisceau de type trace. De plus, la condition 1) est satisfaite par définition. Nous allons donc examiner les hypothèses 2° *a*) et *b*).

Ces conditions sont locales sur V le long de $f = 0$ et si $\pi : \tilde{V} \to V$ est une modification propre induisant un isomorphisme de $\{f \circ \pi \neq 0\}$ sur $\{f \neq 0\}$, il suffit de vérifier les conditions 2° *a*) et *b*) pour les $\pi^*(h_i)$ si $h_1, \ldots, h_p$ engendrent le faisceau de type trace considéré.

Nous sommes donc ramenés, grâce au théorème de désingularisation d'Hironaka, à vérifier ces conditions 2° *a*) et *b*) pour une fonction de type trace sur un polydisque U centré à l'origine de $\mathbf{C}^n$, avec

$$f(s) = s_1^{a_1} \ldots s_n^{a_n}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers non tous nuls.

Comme les conditions que l'on veut vérifier sont stables par combinaisons linéaires $\mathscr{C}^\infty$, il suffit de prouver, d'après la proposition 4 *bis* plus haut, le résultat pour une fonction de la forme :

$$|s_1|^{r_1} \ldots |s_n|^{r_n} (\mathrm{Log}\,|s_1|)^{j_1} \ldots (\mathrm{Log}\,|s_n|)^{j_n}$$

où $r_1, \ldots, r_n$ ont des parties réelles positives et $j_1, \ldots, j_n$ des entiers.

([14]) En fait, ces conditions sont stables par $\mathscr{C}^\infty$-linéarité, ce qui permet de voir que le module engendré par les $T_i(0)$ sur l'anneau des opérateurs différentiels holomorphes à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ est encore sans $\mathcal{O}_V$-torsion.

C'est précisément ce que donne le lemme suivant :

LEMME. — *Soit* U *un polydisque de centre* 0 *dans* $\mathbf{C}^n$ *et soit*

$$f(s) = s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n}$$

où $a_1, \dots, a_n$ *sont des entiers non tous nuls. Posons :*

$$\theta(s) = |s_1|^{r_1} \dots |s_n|^{r_n} (\operatorname{Log}|s_1|)^{j_1} \dots (\operatorname{Log}|s_n|)^{j_n}$$

où $r_1, \dots, r_n$ *ont des parties réelles positives,* $j_1, \dots, j_n$ *des entiers positifs. Alors :*

a) Pour toute forme différentielle $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{U})$ *de type* $(n-1,n)$, *on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f|=\varepsilon} \frac{\theta(s)\varphi}{f^m} = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad m \in \mathbf{N}.$$

b) Pour toute forme différentielle $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{U})$ *de type* (n,n) *et tout* $m \in \mathbf{N}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| \geq \varepsilon} \frac{\theta(s)\psi}{f^m}$$

existe et définit une distribution sur U. □

Démonstration. — Commençons par un premier calcul : soit $\rho \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{C})$ une fonction radiale valant identiquement 1 au voisinage de 0, de support assez petit pour que

$$\bar{\rho}(s_1, \dots, s_n) = \prod_1^n \rho(s_j)$$

ait un support contenu dans U. Montrons que pour $b_j \leqslant a_j . m$ pour tout $j \in [1,n]$, et tout $c \in \mathbf{N}^n$ on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f|=\varepsilon} \bar{\rho}(s) \frac{\theta(s)}{f^m} s^b \bar{s}^c \overset{\hat{k}}{ds} \wedge d\bar{s} = 0,$$

pour tout $k \in [1,n]$, où l'on a posé

$$\overset{\hat{k}}{ds} = ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{k-1} \wedge ds_{k+1} \wedge \dots \wedge ds_n \quad \text{et} \quad s^b = s_1^{b_1} \dots s_1^{b_n}.$$

En posant $s_j = x_j.\exp(iy_j)$ (15), on obtient

$$\int_{|f|=\varepsilon} \bar{\bar{\rho}}(s)\frac{\theta(s)}{f^m} s^b \bar{s}^c \overset{\hat{k}}{ds} \wedge d\bar{s} = C_k \int_{\prod_1^n x_j = \varepsilon} \bar{\rho}(x)\theta(x)x^{b+c-a.m}\Big(\prod_{j\neq k} x_j\, dx_j\Big)$$

$$\times \Big(\prod_{j\neq k}\int_0^{2\pi} \exp\,(i(b_j - a_j m - c_j)y_j)\, dy_j\Big)$$

$$\times \int_0^{2\pi} \exp\,(i(b_k - a_k m - c_k)\,y_k) i x_k \exp\,(-iy_k)\, dy_k$$

où $C_k = \pm\,(2i)^{n-1}$. L'intégrale en y_k est nulle car on a $b_k - a_k m - 1 < 0$ par hypothèse, d'où notre assertion.

D'autre part, si χ est une fonction continue à support compact dans U, pour $b+c = a.m$ on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|f|=\varepsilon} \frac{\theta(s)}{f^m}\chi(s) s^b \bar{s}^c \overset{\hat{k}}{ds} \wedge d\bar{s} = 0,$$

puisque $f^m = s^{a.m}$ par hypothèse et que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,[\mathrm{vol}\,[(|f| = \varepsilon) \cap \mathrm{K}].(\mathrm{Log}\,\varepsilon)^p] = 0$$

pour K compact et $p \in \mathbf{N}$ (voir par exemple [7], 2e partie, p. 5).

Considérons maintenant $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{U})$ de type $(n-1,n)$. On a

$$\varphi = \sum_1^n \varphi_k \overset{\hat{k}}{ds} \wedge d\bar{s} \qquad \text{avec} \qquad \varphi_k \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{U}).$$

D'après le petit lemme de [4] (version complexe améliorée !), on peut écrire :

$$\varphi_k(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{q+r<a_p.m} s_p^q \bar{s}_p^r \varphi_{k,p}^{q,r}(\overset{\hat{p}}{s}) + \sum_{b+c=a.m} s^b \bar{s}^c \varphi_{k,\infty}^{b,c}(s)$$

où $\varphi_{k,p}^{q,r}$ ne dépend pas de s_p (c'est ce que signifie $(\overset{\hat{p}}{s})$), est $\mathscr{C}^\infty$ (ainsi que $\varphi_{k,\infty}$) et dépend continuement de φ_k (ainsi que $\varphi_{k,\infty}$) pour la topologie $\mathscr{C}^\infty$. En remplaçant φ par $\tilde{\rho}.\varphi$ où on suppose maintenant

(15) C'est-à-dire en passant en coordonnées polaires !

que, en plus des hypothèses précédentes, on a $\tilde{\rho} \equiv 1$ au voisinage du support de φ, pour prouver le a) du lemme, il suffit de voir que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f|=\varepsilon} \frac{\theta(s)}{f^m} \tilde{\rho}(s) s_p^q \bar{s}_p^r \varphi_{k,p}^{q,r} (\overset{\hat{p}}{s}) \overset{\hat{k}}{ds} \wedge d\bar{s} = 0$$

et que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f|=\varepsilon} \theta(s) \tilde{\rho}(s) \varphi_{k,\infty}(s) \overset{\hat{k}}{ds} \wedge d\bar{s} = 0 .$$

Le second point résulte immédiatement de ce qui vient d'être vu en prenant $\chi = \tilde{\rho}\varphi_{k,\infty}$; le premier point résulte du fait que l'on a $q < a_p m$ et du calcul en coordonnées polaires effectué plus haut : en effet, pour l'intégrale par rapport à la variable s_p, $\varphi_{k,p}^{q,r}$ n'intervient pas et l'intégrale en y_p est :

$$\int_0^{2\pi} \exp\left(i(q - a_p m - r - \delta_{k,p}) y_p\right) . dy_p$$

où $\delta_{k,p} = 1$ pour $k = p$ et 0 sinon; dans tous les cas, cette intégrale est nulle, d'où le point a) du lemme.

Passons au point b) :

Si $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{U})$, on posera comme plus haut :

$$\psi(s) = \sum_{p=1}^{n} s_p^q \bar{s}_p^r \psi_p^{q,r} (\overset{\hat{p}}{s}) + \sum_{b+c=a.m} s^b \bar{s}^c \psi_\infty^{b,c}(s)$$

et on a clairement :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \tilde{\rho}(s) \frac{\theta(s)}{f^m} s^b \bar{s}^c \psi_\infty^{b,c}(s)\, ds \wedge d\bar{s} \quad (^{16})$$

qui donne bien une distribution (en ψ) puisque θ est intégrable et que ψ_∞ dépend continuement de ψ (pour la topologie C^∞).

Reste à voir que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|f| \geqslant \varepsilon} \tilde{\rho}(s) \frac{\theta(s)}{f^m} s_p^q \bar{s}_p^r \psi_p^{q,r} (\overset{\hat{p}}{s})\, ds \wedge d\bar{s} = 0,$$

[16] Ici, on suppose bien sûr $\tilde{\rho} \equiv 1$ au voisinage du support de ψ.

ce que l'on obtient en intégrant d'abord par rapport à la variable s_p et en passant en coordonnées polaires, puisque l'on a :

$$\int_0^{2\pi} \exp\left(i(q-r-a_p m)y_p\right).dy_p = 0,$$

puisque $q < a_p m$; ceci achève la démonstration du lemme.

Pour terminer cet appendice, montrons que, sous les hypothèses précédentes, $D_V.\mathcal{M}$ est D_V-cohérent, c'est-à-dire que pour chaque $m \in \mathbf{N}$ le faisceau $D_V(m).\mathcal{M}$ est $\mathcal{O}_V$-cohérent, où $D_V(m)$ désigne le faisceau (cohérent) des opérateurs différentiels holomorphes sur V d'ordre au plus égal à m et à coefficients holomorphes.

Remarquons d'abord que $D_V(m).\mathcal{M}$ est de type fini sur $\mathcal{O}_V$ puisque $D_V(m)$ et $\mathcal{M}$ le sont. Il nous suffit donc d'exhiber une injection de $D_V(m).\mathcal{M}$ dans un faisceau cohérent sur V. Pour cela, commençons par remarquer que si Δ désigne le lieu polaire de la connexion ∇ sur $\mathcal{M}$, $D_V(m).\mathcal{M}$ est localement libre sur $V - \Delta$ et muni d'une connexion intégrable. Cette connexion est méromorphe le long de Δ; en effet si on a, localement sur V:

$$f\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial z}$ désigne un champ de vecteur holomorphe, on aura également :

$$f\frac{\partial}{\partial z}[D_V(m).\mathcal{M}] \subset D_V(m)\mathcal{M} \qquad \text{pour chaque} \qquad m \geqslant 0$$

puisque, si $P \in D_V(m)$ et $h \in \mathcal{M}$, on a :

$$f\frac{\partial}{\partial z}(Ph) = P.\left(f\frac{\partial}{\partial z}h\right) + \left[f\frac{\partial}{\partial z}, P\right]h$$

qui est dans $D_V(m).\mathcal{M}$ puisque $f\dfrac{\partial}{\partial z}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ et puisque

$$\left[P, f\frac{\partial}{\partial z}\right] \in D_V(m).$$

Mais les sections de $D_V(m).\mathcal{M}$ ont des composantes à croissance uniformément modérée vers Δ dans la base horizontale multiforme de $D_V(m).\mathcal{M}/V - \Delta$. En effet la base horizontale multiforme est la même que celle de $\mathcal{M}$, et pour $P \in D_V(m)$ et $h \in \mathcal{M}$ les composantes de $P.h$ dans cette base horizontale se déduisent de celles de h dans cette même base en faisant agir P. Comme l'ordre de P est au plus égal à m, l'assertion en découle.

On constate alors que $D_V(m).\mathcal{M}$ s'injecte naturellement dans une extension cohérente de sa restriction à $V - \Delta$ qui est méromorphiquement équivalente à son extension canonique. Ceci achève la preuve de la cohérence sur D_V de $D_V.\mathcal{M}$ pour un faisceau de type trace $\mathcal{M}$ sur une variété analytique complexe V ayant des sections horizontales multiformes à croissance logarithmique.

Février 83 : tout faisceau de type trace vérifiant v) a des sections horizontales multiformes à croissance logarithmique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Espace analytique des cycles... Fonctions de plusieurs variables II, *Lecture Note* n° 482.
[2] Familles analytiques de cycles et classes fondamentales relatives. Fonction de plusieurs variables complexes IV, *Lecture Note* n° 807.
[3] Convexité de l'espace des cycles, *Bull. Soc. Math.*, 106 (1978).
[4] Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres. *Inv. Math.*, 68 (1982), 129-174.
[5] P. Deligne, Équations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Note* n° 163.
[6] Herrera Lieberman, Residues and principal values on complex spaces, *Math. Annalen*, 194 (1971).
[7] Séminaire de géométrie analytique, *Revue Inst. E. Cartan*, n° 5 (Nancy).

Manuscrit reçu le 7 juin 1982.

Daniel Barlet,
E.R.A. n° 839
Institut Elie Cartan
U.E.R. Sciences Mathématiques
Université de Nancy I
B.P. 239
54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex.