

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILBERT LEVITT

Feuilletages des surfaces

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 2 (1982), p. 179-217

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_179_0

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FEUILLETAGES DES SURFACES

par Gilbert LEVITT

PLAN	Pages
INTRODUCTION	181
CONVENTIONS ET DÉFINITIONS	186
I. DÉCOMPOSITIONS CANONIQUES EN PANTALONS ET FEUILLETAGES CONNEXES . . .	188
I.1. Existence de décompositions canoniques	188
I.2. Les feuilletages connexes	195
II. MESURES TRANSVERSES INVARIANTES ET COURBES TRANSVERSES	203
II.1. Mesures transverses invariantes et classes de cohomologie	203
II.2. Courbes transverses et classes d'homologie	209

INTRODUCTION

Cet article poursuit l'étude des feuilletages orientables des surfaces entreprise dans [3] et comprend deux parties largement indépendantes. Pour plus de clarté, nous allons énoncer tout de suite le résultat principal de chaque partie, puis nous exposerons de façon plus détaillée le contenu de chacune d'elles. Certains résultats du présent article ont été annoncés dans [5].

Dans la première partie, nous dégagons la notion de *feuilletage connexe* en démontrant le théorème suivant (dans tout cet article, un feuilletage doit systématiquement être considéré comme *orientable*) :

THÉORÈME 1. — *Soit sur une surface compacte orientable sans bord $M \neq S^2, T^2$ un feuilletage \mathcal{F} dont les singularités sont des selles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} pouvant s'obtenir à partir de \mathcal{F} par opérations de Whitehead (on dira équivalent à \mathcal{F}) et admettant une décomposition canonique en pantalons (voir figure 1).*

ii) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} tel que, si x et y ne sont pas des selles de \mathcal{G} , il existe une transversale fermée à \mathcal{G} contenant x et y .*

iii) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} qui est la suspension d'un échange d'intervalles (au sens de [3] paragraphe 6).*

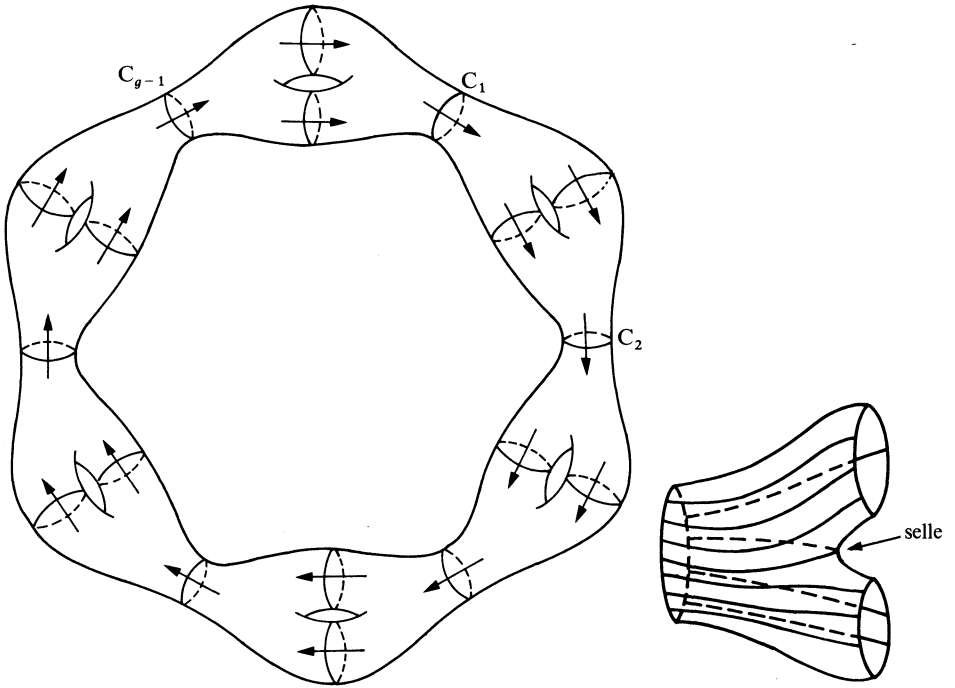
iv) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une 1-forme différentielle fermée transverse à \mathcal{G} .*

v) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une courbe fermée simple transverse à \mathcal{G} et rencontrant toute feuille de \mathcal{G} .*

vi) *Le feuilletage \mathcal{F} ne possède pas de barrière.*

(Certains termes figurant dans cet énoncé, par exemple « opérations de Whitehead », seront précisés plus loin. Voir en particulier la définition d'une barrière, en fonction des feuilles compactes et des cycles de feuilles de \mathcal{F} , ci-dessous dans l'Introduction et au début de la section I.2.)

Dans la deuxième partie, nous déterminons quelles classes d'homologie contiennent des courbes fermées simples transverses à un feuilletage donné \mathcal{F} ou à un feuilletage équivalent à \mathcal{F} . Pour cela, nous utilisons la classe



Les flèches indiquent dans quel sens le feuilletage — supposé orienté — traverse les courbes de la décomposition (ces courbes lui sont transverses). Les courbes C_1, C_2, \dots, C_{g-1} seront dites *principales*; elles sont homologues entre elles.

Fig. 1.

de cohomologie $[\mu] \in H^1(M, \mathbb{R})$ déterminée par une mesure transverse invariante μ (voir la définition de $[\mu]$ dans [9] ou dans la partie II ci-dessous) :

THÉORÈME 2. — Soit sur une surface compacte orientable sans bord M un feuilletage \mathcal{F} dont les singularités sont des selles. On suppose que \mathcal{F} ne possède pas de cycle de feuilles (mais il peut posséder des feuilles compactes régulières). Étant donnée une classe d'homologie indivisible $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$, il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une courbe fermée simple représentant α , transverse à \mathcal{G} et rencontrant toute feuille de \mathcal{G} , si et seulement si on a $[\mu](\alpha) \neq 0$ pour toute mesure transverse invariante μ .

(Une classe d'homologie est indivisible si et seulement si elle peut être représentée par une courbe fermée simple.)

Nous avons montré dans [3] l'existence de *décompositions canoniques en*

pantalons pour les feuilletages des surfaces dont les singularités sont des selles de Morse sans liaison entre elles et tels que toute feuille compacte soit coupée par une transversale fermée (une décomposition canonique en pantalons est une famille de courbes disjointes transverses au feuilletage et découpant la surface en pantalons disposés d'une certaine manière ; si par exemple la surface est sans bord, les pantalons doivent être disposés comme sur la figure 1 ; voir [3]). La condition sur les feuilles compactes est évidemment nécessaire pour l'existence d'une décomposition canonique ; nous avons d'autre part donné dans [3] un exemple de feuilletage pour lequel cette condition est satisfaite, mais qui n'admet pas de décomposition canonique à cause de la présence d'une liaison entre selles.

Nous avons toutefois remarqué dans [3] que cet exemple pouvait être modifié par une *opération de Whitehead* en un feuilletage admettant une décomposition canonique (une opération de Whitehead est une modification du feuilletage, mineure en ce sens qu'elle préserve de nombreuses caractéristiques importantes, tant géométriques que dynamiques : feuilles compactes, ensembles limites, mesures transverses invariantes, etc... Une définition précise des opérations de Whitehead sera donnée plus loin).

Le théorème I.1.1 ci-dessous généralise cette remarque en donnant des conditions suffisantes pour que, étant donné un feuilletage \mathcal{F} dont les singularités sont des selles (pas forcément de Morse : elles peuvent avoir plus de quatre séparatrices ; et il peut exister des liaisons entre elles), il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et admettant une décomposition canonique en pantalons (\mathcal{G} est équivalent à \mathcal{F} s'il peut s'obtenir à partir de \mathcal{F} par un nombre fini d'opérations de Whitehead). Du théorème I.1.1 on peut déduire assez facilement l'équivalence des conditions i) à v) du théorème 1 ci-dessus.

Par analogie avec la notion de composante connexe d'un feuilletage introduite par Novikov dans [8], nous qualifierons de *connexe* un feuilletage \mathcal{G} vérifiant la condition ii) du théorème 1, et par extension tout feuilletage équivalent à \mathcal{G} . Dans le cas non singulier, un feuilletage \mathcal{F} (sans singularité) de codimension 1 et transversalement orienté d'une variété fermée M de dimension quelconque est connexe (i.e. possède une seule composante connexe au sens de Novikov) si et seulement si il possède la propriété suivante : « soit $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ une famille de feuilles compactes de \mathcal{F} et M_1 l'adhérence d'une composante connexe de $M - (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k)$; si M_1 n'est pas égale à M , il existe au moins une composante de δM_1 le long de laquelle l'orientation transverse de \mathcal{F}

pointe vers l'intérieur de M_1 , et au moins une composante le long de laquelle cette orientation pointe vers l'extérieur de M_1 ».

Si \mathcal{F} n'est pas connexe, une famille $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de feuilles compactes mettant en défaut cette propriété sera appelée une *barrière* (empêchant le passage des transversales fermées). En particulier une feuille compacte homologue à 0 ou le bord d'une composante de Reeb (de dimension 2 ou 3) constitue une barrière.

Si maintenant \mathcal{F} est un feuilletage singulier d'une surface sans bord, la notion de barrière définie ci-dessus a encore un sens, et le théorème 1 exprime que l'absence d'une telle barrière est équivalente à la connexité du feuilletage (il faut toutefois généraliser légèrement la définition d'une barrière pour prendre en compte — en plus des feuilles compactes régulières — les cycles de feuilles presque transverses, dont on trouvera la définition dans [3] ou ci-dessous). Du théorème 1 on déduit que l'étude dynamique d'un feuilletage connexe se ramène à celle de l'échange d'intervalles dont il est la suspension (au sens de [3]); pour un feuilletage non connexe, il faut étudier séparément chacune des composantes connexes (délimitées par les barrières).

L'intérêt de la notion de barrière est de fournir une caractérisation des feuilletages connexes qui fait intervenir uniquement les feuilles compactes (et les cycles presque transverses), ainsi que leur orientation transverse, et non pas le feuilletage lui-même. De façon équivalente, on peut caractériser les feuilletages connexes au moyen des classes d'homologie déterminées par les feuilles compactes et les cycles presque transverses (voir la condition 4 du théorème I.2.1 ci-dessous). Dans la situation du théorème 4.1 de [3] (si la surface est sans bord), l'absence de barrière est exactement équivalente à la condition « toute feuille compacte est coupée par une transversale fermée », bien qu'a priori elle paraisse beaucoup plus faible.

L'idée que sur une surface l'homologie et la cohomologie sont des outils extrêmement puissants pour étudier un feuilletage se retrouve tout au long de la deuxième partie. C'est ainsi que déterminer quelles classes d'*isotopie* de courbes fermées simples contiennent des transversales à un feuilletage donné est en général un problème très délicat; par contre, comme on le verra dans la deuxième partie, il est possible de résoudre ce problème pour les classes d'*homologie*.

Nous commençons la deuxième partie par l'étude de la classe de cohomologie associée à une mesure transverse invariante d'un feuilletage, redémontrant et généralisant des résultats obtenus par Katok ([1]),

Keane ([2]), Stredder ([12]) et Veech ([14] [15]) – dans l'ordre chronologique aussi bien qu'alphabétique. Pour un feuilletage sans feuille compacte, une mesure transverse invariante est complètement déterminée par la classe de cohomologie qui lui est associée, et parce que $H^1(M, \mathbb{R})$ est de dimension finie on en déduit des résultats de finitude sur les mesures transverses ergodiques d'un feuilletage, ainsi que sur les mesures (sur le cercle) qui sont invariantes par un échange d'intervalles donné, et ergodiques.

Nous déterminons ensuite, en généralisant un résultat de Sullivan ([13]), les classes de cohomologie réelles qui contiennent des 1-formes différentielles fermées transverses à un feuilletage. Pour un feuilletage sans singularité, Sullivan a montré qu'une mesure transverse invariante définit un *cycle du feuilletage* (foliation cycle), et que la connaissance de ces cycles permet de déterminer quelles classes de cohomologie contiennent des formes fermées transverses au feuilletage.

Cela se généralise aux feuilletages singuliers des surfaces; la classe d'homologie du cycle défini par une mesure transverse μ correspond en fait par dualité de Poincaré à la classe de cohomologie $[\mu]$, et il ne reste plus pour prouver le théorème 2 qu'à relier les notions de forme fermée transverse à un feuilletage et de courbe transverse à ce feuilletage. On notera que la condition qui figure dans l'énoncé du théorème 2 (à savoir $[\mu](\alpha) \neq 0$ pour tout μ) est clairement nécessaire.

Les résultats de la deuxième partie permettent d'une part de donner un critère géométrique pour l'unique ergodicité d'un feuilletage, et d'autre part d'éclairer certains aspects de la première partie. C'est ainsi que, dans le langage de la seconde partie, une barrière s'interprète comme un cycle du feuilletage homologue à 0 (et invariant par opérations de Whitehead). On remarque également qu'une classe d'homologie indivisible $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$ satisfait aux deux conditions équivalentes du théorème 2 si et seulement si il existe pour un feuilletage équivalent à \mathcal{F} une décomposition canonique en pantalons dont les courbes principales appartiennent à α (voir la légende de la figure 1 pour une définition des courbes principales).

Je suis heureux de pouvoir remercier ici tous les mathématiciens qui m'ont aidé lors de la préparation de cet article, notamment A. Fathi, W. Goldman, F. Laudenbach, H. Rosenberg et W. Thurston.

Je dois une reconnaissance toute particulière à David Fried, qui m'a donné l'idée d'utiliser les formes fermées transverses pour démontrer le théorème 2.

CONVENTIONS ET DÉFINITIONS

Dans tout cet article nous désignerons par M une surface compacte orientable, différente de S^2 , D^2 , T^2 , $S^1 \times I$. Les feuilletages considérés seront orientables (i.e. ils peuvent être définis par un flot), transverses à δM si δM est non vide, et de classe C^0 . Les singularités de ces feuilletages seront des selles possédant un nombre pair au moins égal à 4 de séparatrices. Un feuilletage dont toutes les selles ont quatre séparatrices sera dit simple (Attention : dans [3], tous les feuilletages étaient simples, et les feuilletages considérés ici sont les « feuilletages généralisés » de [3], paragraphe 6).

Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} seront dits équivalents (au sens de Whitehead) si l'on peut passer de l'un à l'autre par une isotopie (i.e. conjugaison par un homéomorphisme isotope à l'identité) et un nombre fini d'opérations de Whitehead : une opération de Whitehead consiste à modifier un feuilletage soit au voisinage d'une selle possédant plus de quatre séparatrices en « éclatant » cette selle (voir figure 2a), soit au contraire au voisinage d'une séparatrice reliant deux selles distinctes (séparatrice dite de type 2 dans [3], paragraphe 1) en « écrasant » cette séparatrice (voir figure 2b).

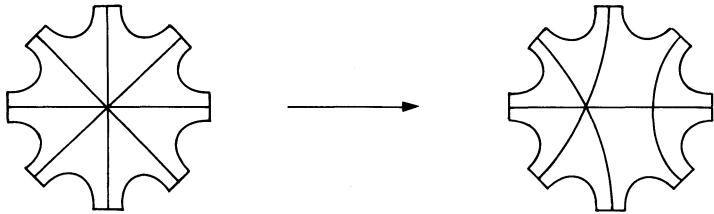


Fig. 2a.

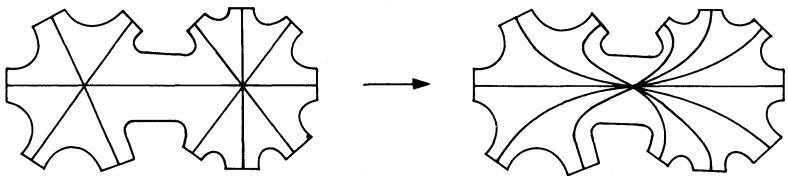


Fig. 2b.

En raison du rôle important joué dans la suite par les cycles presque transverses, nous rappelons et détaillons ici leur définition (cf. [3], paragraphe 1). Un exemple est indiqué à la figure 3. Signalons toutefois que

la considération des cycles presque transverses est presque entièrement inutile dans le cas particulier (mais important) où le feuilletage peut être défini par une 1-forme différentielle fermée.

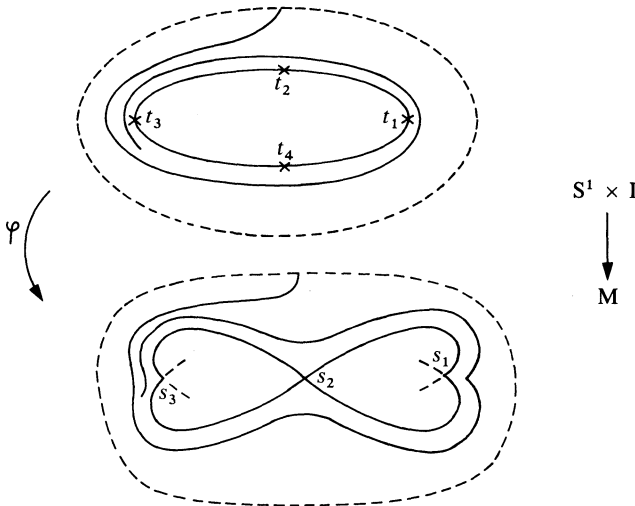


Fig. 3.

Un cycle de feuilles presque transverse d'un feuilletage \mathcal{F} est l'image $\gamma = \varphi(S^1 \times \{0\})$, où $\varphi : S^1 \times [0,1] \rightarrow M$ est une application continue telle que :

- il existe des points t_1, \dots, t_p dans S^1 tels que la restriction de φ à $S^1 \times [0,1]$ privé des points $(t_i, 0)$ soit un plongement et que le point $\varphi(t, u)$ soit une selle de \mathcal{F} si et seulement si $u = 0$ et t est l'un des t_i ($1 \leq i \leq p$).

- il existe un feuilletage non singulier sur $S^1 \times [0,1]$ tel que :

- $S^1 \times \{0\}$ est une feuille et son image par φ se compose des selles $\varphi(t_i, 0)$ et de séparatrices joignant ces selles (on n'impose pas de conditions sur la position de $S^1 \times \{1\}$ par rapport au feuilletage).

- l'image par φ de toute autre feuille est contenue dans une feuille de \mathcal{F} .

Si s est une selle de \mathcal{F} possédant $2k$ séparatrices, il peut exister jusqu'à k points t_i tels que $\varphi(t_i, 0) = s$. Un cycle de feuilles presque transverse n'est donc pas forcément plongé. Dans l'image de φ , au voisinage d'un cycle presque transverse $\gamma = \varphi(S^1 \times \{0\})$, ou bien les feuilles de \mathcal{F} spiralent vers γ (c'est le cas représenté à la figure 3), ou bien

il existe des feuilles compactes intérieures de \mathcal{F} arbitrairement proches de γ (c'est en particulier le cas si \mathcal{F} est défini par une 1-forme différentielle fermée, car alors toutes les feuilles de $\mathcal{F}|_{\varphi(S^1 \times]0,1])}$ sont compactes).

Nous dirons enfin qu'un feuilletage (simple) \mathcal{F} d'une surface M admet une *décomposition canonique* (en pantalons) si la conclusion du théorème 4.1 de [3] s'applique à \mathcal{F} , c'est-à-dire si l'on peut trouver sur M une décomposition en pantalons \mathcal{D} transverse à \mathcal{F} telle que le modèle défini par \mathcal{D} et \mathcal{F} soit équivalent à $\mathcal{M}_{g,r,s}$ ou $\mathcal{M}'_{g,r,s}$ pour g, r, s convenablement choisis (voir [3], paragraphe 4).

I. DÉCOMPOSITIONS CANONIQUES EN PANTALONS ET FEUILLETAGES CONNEXES

I.1. Existence de décompositions canoniques.

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté d'une surface M . Dans les deux cas suivants, il existe un feuilletage simple \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et admettant une décomposition canonique :*

a) *\mathcal{F} possède une demi-feuille (au sens de [3]) ne rencontrant pas δM (en particulier si $\delta M = \emptyset$ ou si \mathcal{F} possède une feuille compacte intérieure), et toute feuille compacte intérieure ainsi que tout cycle de feuilles presque transverse est coupé par une transversale fermée.*

b) *Toute demi-feuille de \mathcal{F} rencontre δM et \mathcal{F} ne possède pas de cycle de feuilles.*

Remarque 1.2. — Lorsque toute demi-feuille de \mathcal{F} rencontre δM , le théorème peut être précisé de la manière suivante : s'il n'existe pas de feuilletage équivalent à \mathcal{F} et admettant une décomposition canonique, on peut trouver un feuilletage simple \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et deux courbes λ_1 et λ_2 transverses à \mathcal{G} telles que :

i) λ_1 et λ_2 découpent M en trois sous-variétés M_0, M_1, M_2 (cf. figure 4); δM_0 se compose de λ_1 et des bords rentrants de M ; δM_1 se compose de λ_1 et λ_2 ; δM_2 se compose de λ_2 et des bords sortants de M .

ii) Il existe sur M_0 (resp. M_2) une décomposition en pantalons \mathcal{D}_0 (resp. \mathcal{D}_2) transverse à \mathcal{G} telle que le modèle défini par \mathcal{D}_0 et $\mathcal{G}_{|M_0}$ (resp. \mathcal{D}_2 et $\mathcal{G}_{|M_2}$) soit équivalent à $\mathcal{M}_{g_0, r_0, 1}$ (resp. $\mathcal{M}_{0, 0, s_2}$) pour g_0, r_0, s_2 convenablement choisis.

iii) $\mathcal{G}_{|M_1}$ contient un cycle de feuilles totalement dissymétrique (au sens de [3]), et les selles de \mathcal{G} qui appartiennent à M_1 sont celles qui possèdent la propriété de *double passage* suivante : « pour tout voisinage de la selle, il existe une feuille régulière de \mathcal{G} passant deux fois dans ce voisinage » (la structure de $\mathcal{G}_{|M_1}$ apparaîtra plus clairement au cours de la démonstration du lemme 1.4 ci-dessous).

(L'énoncé des conditions i) et ii) doit être modifié de façon évidente si M_0 et/ou M_2 est vide).

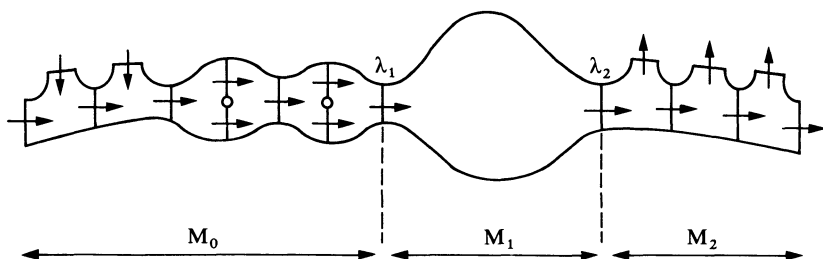


FIG. 4.

Démonstration du théorème 1.1. — La démonstration du théorème 4.1 de [3] utilisait la notion de séparatrices opposées. Ici, nous devons considérer des séparatrices opposables. Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté et l une séparatrice libre, c'est-à-dire qui ne réalise pas une liaison entre selles ; la séparatrice l est issue d'une selle s , que nous appellerons son *extrémité*, et l sera dite *positive* si elle part de s , *négative* si elle y arrive (nous utilisons pour définir le signe de l l'orientation de \mathcal{F}). Cela étant, deux *séparatrices opposables* sont deux séparatrices libres de même signe dont les extrémités appartiennent à la même composante connexe du 1-complexe $K(\mathcal{F})$ dont les arêtes sont les séparatrices de type 1 ou 2 de \mathcal{F} (liaisons entre selles).

Une séparatrice libre « se conserve » par opérations de Whitehead, et nous laissons au lecteur le soin de vérifier que deux séparatrices libres de même signe l et l' sont opposables si et seulement si il existe un feuilletage simple équivalent à \mathcal{F} pour lequel l et l' sont des séparatrices opposées (i.e. ayant la même extrémité).

LEMME 1.3. — Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté d'une surface M . Il existe un feuilletage \mathcal{F}' équivalent à \mathcal{F} , des courbes disjointes $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ transverses à \mathcal{F}' , et des parties disjointes $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ de M telles que (voir figure 14 de [3]) :

1) Pour $1 \leq i \leq m$, la courbe α_i sépare M et X_i est l'adhérence d'une composante de $M - \alpha_i$; α_i est un bord sortant de X_i .

2) Pour $1 \leq j \leq n$, la courbe β_j sépare M et Y_j est l'adhérence d'une composante de $M - \beta_j$; β_j est un bord rentrant de Y_j .

3) Pour $1 \leq i \leq m$ (resp. $1 \leq j \leq n$), il existe une décomposition de X_i (resp. Y_j) transverse à $\mathcal{F}'|_{X_i}$ (resp. $\mathcal{F}'|_{Y_j}$) et définissant un modèle équivalent à $\mathcal{M}_{0,r_i,1}$ (resp. $\mathcal{M}_{0,1,s_j}$); r_i (resp. s_j) est un entier au moins égal à 2; en particulier toute composante de δX_i (resp. δY_j) différente de α_i (resp. β_j) est un bord rentrant (resp. sortant) de M .

4) Si H désigne l'adhérence du complémentaire dans M de l'union des X_i et des Y_j , H est connexe et deux séparatrices opposables de $\mathcal{F}'|_H$ qui rencontrent δH ne rencontrent jamais deux composantes différentes de δH .

5) Si de plus on se donne un bord rentrant R et un bord sortant S de M , on peut choisir les courbes α_i et β_j et les décompositions de X_1 et Y_1 de façon que R (resp. S) ou bien appartienne à H ou bien appartienne à X_1 (resp. Y_1) et soit identifié à un bord primaire de $\mathcal{M}_{0,r_1,1}$ (resp. $\mathcal{M}_{0,1,s_1}$).

La démonstration du lemme 1.3 est une généralisation directe de celle du lemme 4.1 de [3], compte tenu de la caractérisation des séparatrices opposables donnée plus haut (juste avant l'énoncé du lemme 1.3). \square

LEMME 1.4. — Soit \mathcal{F} un feuilletage simple orienté d'une surface M tel que toute demi-feuille de \mathcal{F} rencontre δM et que \mathcal{F} ne possède pas de séparatrices opposables. Alors :

1) δM a deux composantes (l'une rentrante, l'autre sortante).

2) Toute selle de \mathcal{F} appartient à un cycle de feuilles totalement dissymétrique.

3) Toute selle de \mathcal{F} possède la propriété de double passage définie dans la remarque 1.2.

Démonstration du lemme 1.4. — Soit K_0 une composante connexe du 1-complexe $K(\mathcal{F})$ défini plus haut (on notera que $K(\mathcal{F})$ contient toutes les selles de \mathcal{F}). Les hypothèses faites sur \mathcal{F} entraînent qu'à K_0 sont attachées exactement deux séparatrices libres, l'une positive et l'autre négative. Appelons l' la séparatrice négative, x' le point de δM d'où elle

provient, et C' la composante de δM contenant x' . On définit de même l'' , x'' , C'' en utilisant la séparatrice positive (cf. fig. 5).

Parce que \mathcal{F} ne possède pas de séparatrices opposables les feuilles partant de C' au voisinage de x' sont forcées d'aboutir à δM sur C'' au voisinage de x'' après être passées deux fois au voisinage de chaque selle de K_0 (dans deux quadrants opposés). On déduit facilement de cette remarque les assertions 2 et 3 du lemme.

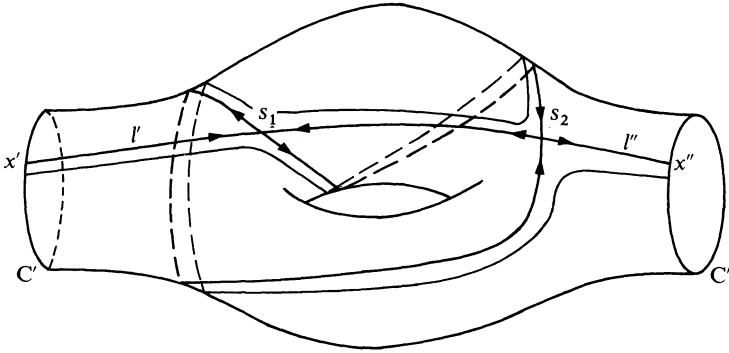


FIG. 5.

Étant donné un point x de C' , on peut considérer, si la feuille issue de x n'aboutit pas à une selle, la composante (sortante) de δM à laquelle cette feuille arrive. Lorsque x se déplace sur C' , cette composante ne peut changer que lors du passage à un point dont la feuille aboutit à une selle. Mais nous venons de voir que le passage par ces points exceptionnels n'entraîne en fait aucun changement. En d'autres termes, toute feuille régulière qui part de C' aboutit à C'' .

Considérons la partie de M formée par les feuilles régulières joignant C' à C'' , les séparatrices rencontrant C' ou C'' , et les composantes connexes de $K(\mathcal{F})$ contenant les extrémités de ces séparatrices. D'après ce qui précède, c'est un ouvert de M ; mais c'est aussi un fermé car son complémentaire est une réunion d'ouverts obtenus par le même procédé à partir d'autres composantes de δM . Cela prouve l'assertion 1 et donc le lemme 1.4. \square

Le lemme suivant généralise le lemme 4.2 de [3].

LEMME 1.5. — Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté d'une surface M tel que toute demi-feuille rencontre δM et que \mathcal{F} ne possède pas de séparatrices opposables rencontrant des composantes différentes de δM .

Alors δM a deux composantes; de plus il existe un feuilletage simple \mathcal{F}' équivalent à \mathcal{F} et une courbe C_0 transverse à \mathcal{F}' séparant M en deux sous-variétés N et N' telles que :

– N contient la composante rentrante de δM et, si N n'est pas un anneau, il existe sur N une décomposition en pantalons transverse à \mathcal{F}' et définissant avec $\mathcal{F}'|_N$ un modèle équivalent à $\mathcal{M}_{g,1,1}$ pour un certain g inférieur ou égal au genre de M .

– N' contient la composante sortante de δM et $\mathcal{F}'|_{N'}$ ne possède pas de séparatrices opposables.

Démonstration du lemme 1.5. – On peut supposer sans perte de généralité que \mathcal{F} est simple. La démonstration, comme celle du lemme 4.2 de [3], se fait par récurrence sur le nombre q de selles de \mathcal{F} . Le résultat est trivial pour $q = 0$. Supposons-le démontré pour $q < q_0$ et considérons un feuilletage simple \mathcal{F} à q_0 selles. Si \mathcal{F} ne possède pas de séparatrices opposables, il n'y a rien à démontrer, compte tenu du lemme 1.4. Sinon, \mathcal{F} possède deux séparatrices opposables négatives. On peut donc construire un feuilletage simple \mathcal{F}_1 équivalent à \mathcal{F} et possédant deux séparatrices opposées l et l' . Ces deux séparatrices rencontrent la même composante C_1 de δM et on en déduit, comme dans la démonstration du lemme 4.2 de [3], un pantalon P_1 contenant C_1 et ces séparatrices, et dont le bord est transverse à \mathcal{F}_1 . Appelons C'_1 et C''_1 les composantes de δP_1 autres que C_1 .

En considérant les séparatrices adjacentes à l et l' , et le cas échéant la composante connexe de $K(\mathcal{F}_1)$ contenant l'extrémité commune de l et l' , on voit que, parce que \mathcal{F}_1 ne possède pas de séparatrices opposables rencontrant des composantes différentes de δM , la surface $M' = \overline{M - P_1}$ est *connexe*.

Parce que $\mathcal{F}|_{M'}$ possède $q_0 - 1$ selles et que $\delta M'$ possède au moins trois composantes, $\mathcal{F}|_{M'}$ ne vérifie pas les hypothèses du lemme, et donc il existe deux séparatrices opposables de $\mathcal{F}|_{M'}$ rencontrant l'une C'_1 et l'autre C''_1 . On peut maintenant modifier \mathcal{F}_1 dans M' pour obtenir sur M un feuilletage simple \mathcal{F}_2 équivalent à \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}_2|_{M'}$ possède deux séparatrices opposées rencontrant l'une C'_1 et l'autre C''_1 . On en déduit un pantalon P'_1 dont le bord, transverse à \mathcal{F}_2 , contient C'_1 et C''_1 , et on obtient le lemme 1.5 en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\overline{M - (P_1 \cup P'_1)}$. \square

En utilisant successivement les lemmes 1.3, 1.5 et 1.4, on peut

maintenant prouver le cas b) du théorème 1.1, ainsi que la remarque 1.2. Soit donc \mathcal{F} un feuilletage vérifiant les hypothèses du cas a).

LEMME 1.6. — *Il existe une famille finie de courbes disjointes transverses à \mathcal{F} telle que toute demi-feuille de \mathcal{F} qui ne rencontre pas δM coupe une des courbes de cette famille.*

Remarque 1.7. — Ce lemme est le corollaire 2.2 de [3] dans le cas où \mathcal{F} est simple et ne possède pas de cycle de feuilles totalement dissymétrique. L'affirmation du lemme est en fait équivalente à l'hypothèse que toute feuille compacte intérieure ainsi que tout cycle presque transverse est coupé par une transversale fermée (rappelons qu'une feuille compacte intérieure est considérée comme une demi-feuille — voir [3]).

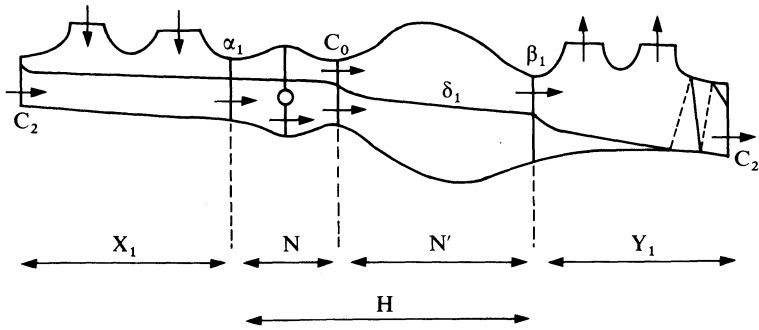
Démonstration du lemme 1.6. — Comme \mathcal{F} vérifie les hypothèses du cas a), on peut construire une famille finie de courbes disjointes transverses à \mathcal{F} dont la réunion coupe toute feuille compacte intérieure ainsi que tout cycle de feuilles presque transverse ; en supprimant des courbes si besoin est, on peut supposer qu'il n'y a pas dans la famille deux courbes isotopes. Parmi toutes les familles satisfaisant ces conditions, soit \mathcal{C} une famille de cardinalité maximale. Si une demi-feuille l de \mathcal{F} ne rencontre ni δM ni \mathcal{C} , elle contient dans son adhérence une feuille régulière non compacte, et donc il existe une courbe fermée transverse à \mathcal{F} qui coupe l une infinité de fois mais est disjointe de \mathcal{C} . Du choix de \mathcal{C} il résulte que cette courbe borde avec une courbe de \mathcal{C} un anneau (ne contenant pas de selle de \mathcal{F}), ce qui est une contradiction. \square

Considérons maintenant l'ensemble des couples $(\mathcal{H}, \mathcal{C})$, où \mathcal{H} est un feuilletage équivalent à \mathcal{F} et \mathcal{C} une famille finie (T_1, \dots, T_h) de courbes disjointes transverses à \mathcal{H} et coupant toute demi-feuille de \mathcal{H} qui ne rencontre pas δM . Cet ensemble est non vide d'après le lemme 1.6, et on peut choisir dedans un couple $(\mathcal{H}_1, \mathcal{C}_1)$ pour lequel la cardinalité h de \mathcal{C}_1 est minimale. En découpant M selon les courbes de \mathcal{C}_1 et en appliquant les lemmes 1.3 et 1.5, on prouve comme dans la démonstration du théorème 4.1 de [3] que la minimalité de h entraîne nécessairement $h = 1$, autrement dit qu'il existe une courbe transverse à \mathcal{H}_1 coupant toute demi-feuille qui ne rencontre pas δM .

Si \mathcal{F} ne possède pas de cycle de feuilles, on obtient le théorème 1.1 en découpant M munie de \mathcal{H}_1 selon une telle courbe et en appliquant les lemmes 1.3 et 1.5 : d'après le lemme 1.4 (assertion 2), la surface N' fournie par le lemme 1.5 est nécessairement un anneau $S^1 \times I$.

Dans le cas général, la démonstration est plus compliquée. Il faut considérer, parmi tous les couples (\mathcal{H}, C) où \mathcal{H} est équivalent à \mathcal{F} et C est une courbe transverse coupant toute demi-feuille de \mathcal{H} qui ne rencontre pas δM , un couple (\mathcal{H}_2, C_2) qui maximise le nombre des liaisons de \mathcal{H} coupées par C .

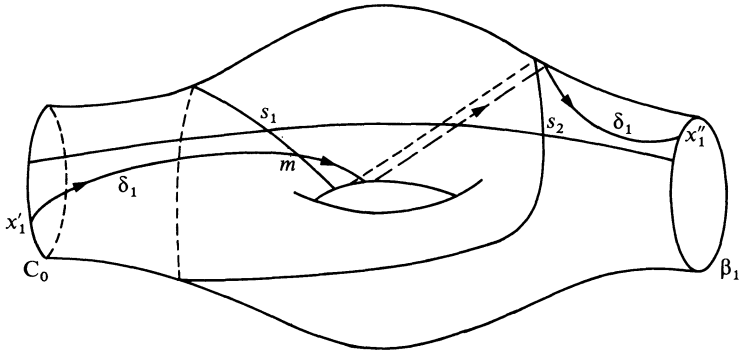
Découpons M munie de \mathcal{H}_2 selon C_2 et appliquons les lemmes 1.3 et 1.5 à la surface (connexe) M^0 ainsi obtenue (cf. fig. 6). On obtient un feuilletage simple \mathcal{H}^0 sur M^0 qui provient par découpage d'un feuilletage simple \mathcal{H}_3 de M équivalent à \mathcal{F} . Notons que le nombre des liaisons de \mathcal{H}_3 coupées par C_2 est égal au nombre des liaisons de \mathcal{H}_2 coupées par C_2 . Si la surface N' fournie par le lemme 1.5 est un anneau, le théorème est prouvé. Si N' n'est pas un anneau, on va obtenir une contradiction en construisant dans M une courbe C_3 transverse à \mathcal{H}_3 et coupant davantage de liaisons que C_2 .



La surface M^0 ; les courbes α_1 et β_1 sont données par le lemme 1.3, C_0 par le lemme 1.5.

FIG. 6.

En se reportant à la démonstration du lemme 1.4, on voit que, si N' n'est pas un anneau, on peut construire dans N' (cf. fig. 7) un segment δ_1 transverse à \mathcal{H}^0 joignant un point x'_1 de C_0 à un point x''_1 de β_1 et coupant une liaison de $\mathcal{H}^0_{|N'}$. On choisit l'orientation transverse de \mathcal{H}_3 pour laquelle δ_1 , parcouru de x'_1 à x''_1 , traverse les feuilles dans le sens positif, et ce choix induit une orientation de C_2 , C_0 et β_1 . On choisit ensuite une feuille régulière δ_2 de $\mathcal{H}^0_{|X_1 \cup N}$ joignant un point x'_2 de C_2 à un point x''_2 de C_0 , puis une feuille régulière δ_3 de $\mathcal{H}^0_{|Y_1}$ joignant un point x'_3 de β_1 à un point x''_3 de C_2 , et on considère le lacet δ de M obtenu de la manière suivante : on parcourt successivement δ_2 de x'_2 à x''_2 , C_0 dans le sens positif de x''_2 à x'_1 , δ_1 de x'_1 à x''_1 , β_1 dans le sens



La surface N' .

FIG. 7.

positif de x'_1 à x'_3 , δ_3 de x'_3 à x''_3 , puis on fait un tour complet sur C_2 dans le sens positif et on complète en parcourant C_2 dans le sens positif de x''_3 à x'_2 . L'immersion anguleuse δ peut être déformée en un plongement transverse à \mathcal{H}_3 (représenté sur la figure 6), et la courbe fermée ainsi obtenue coupe toutes les liaisons de \mathcal{H}_3 que coupait C_2 (à cause du tour complet fait sur C_2), mais aussi une liaison dans N' que ne coupait pas C_2 . C'est une contradiction, et le théorème 1.1 est prouvé. \square

I.2. Les feuilletages connexes.

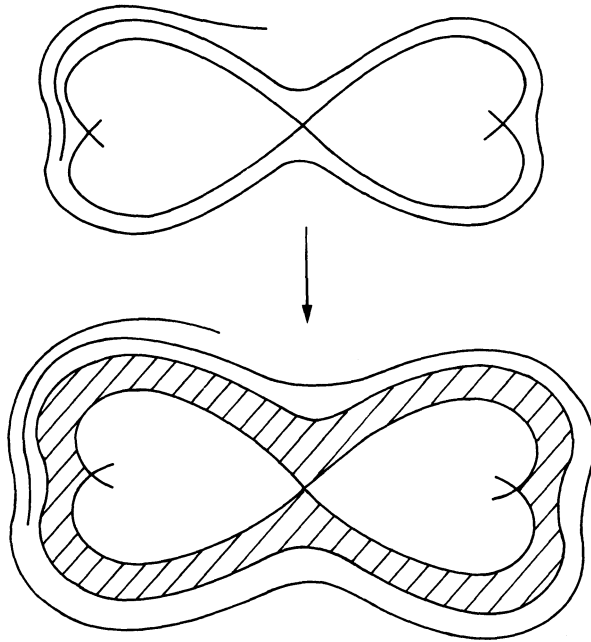
Dans toute cette section, \mathcal{F} désignera un feuilletage orienté d'une surface M sans bord. Nous commençons par préciser les notions de forme fermée transverse à \mathcal{F} et de barrière de \mathcal{F} .

Une forme fermée transverse à \mathcal{F} est une 1-forme différentielle fermée ω possédant les mêmes singularités que \mathcal{F} et définissant un feuilletage $F(\omega)$ transverse à \mathcal{F} en dehors des singularités. Les singularités de \mathcal{F} , considérées comme singularités de $F(\omega)$, sont des selles possédant le même nombre de séparatrices, mais les séparatrices pour \mathcal{F} et pour $F(\omega)$ sont différentes.

Choisissons une orientation transverse de \mathcal{F} . Plus haut, nous avons appelé barrière une famille de feuilles compactes $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ telle que l'une des composantes de la surface obtenue en découpant M selon les γ_i ($1 \leq i \leq k$) possède uniquement des bords rentrants ou uniquement des bords sortants. Mais cette définition, suffisante si \mathcal{F} peut être défini par

une forme fermée, est insuffisante en général car elle ne tient pas compte des cycles presque transverses. Pour donner la définition correcte, nous allons associer à \mathcal{F} un feuilletage auxiliaire $\tilde{\mathcal{F}}$, et nous dirons que \mathcal{F} possède une barrière si et seulement si $\tilde{\mathcal{F}}$ possède une barrière au sens de l'Introduction.

Si $\gamma = \varphi(S^1 \times \{0\})$ est un cycle presque transverse vers lequel spiralent des feuilles de \mathcal{F} , nous pouvons modifier \mathcal{F} dans l'image de φ (cf. fig. 8) de façon à introduire au voisinage de γ des feuilles compactes isotopes à $\varphi(S^1 \times \{1\})$, et nous construisons le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ en « épaisissant » ainsi les cycles presque transverses vers lesquels spiralent des feuilles de \mathcal{F} . Une barrière $(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k)$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ (comme dans l'Introduction) définit une famille $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ où les γ_i sont des feuilles compactes de \mathcal{F} ou des cycles presque transverses de \mathcal{F} , et une *barrière* de \mathcal{F} sera par définition une famille $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ pouvant être obtenue par ce procédé.



Épaissement d'un cycle presque transverse ; dans la partie hachurée, toutes les feuilles sont compactes.

FIG. 8.

Parce que \mathcal{F} est orienté, une feuille compacte ou un cycle presque transverse γ détermine une *classe d'homologie* $\bar{\gamma}$ dans $H_1(M, \mathbb{Z})$. Quand

on modifie \mathcal{F} par des opérations de Whitehead, un cycle presque transverse se transforme en un nouveau cycle presque transverse qui détermine la même classe d'homologie. Une feuille compacte $\tilde{\gamma}$ de \mathcal{F} correspond à une feuille compacte ou un cycle presque transverse γ de \mathcal{F} , et $\tilde{\gamma}$ définit la même classe d'homologie $\bar{\gamma}$ que γ .

THÉORÈME 2.1. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage orienté d'une surface sans bord M . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe un feuilletage simple \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et admettant une décomposition canonique en pantalons.*

2) *Il existe un échange d'intervalles dont la suspension est équivalente à \mathcal{F} .*

3) *\mathcal{F} est connexe (i.e. il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} tel que, si x et y sont des points de M qui ne sont pas des selles de \mathcal{G} , il existe une transversale fermée à \mathcal{G} contenant x et y).*

4) *Pour toute famille $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ formée de feuilles compactes ou de cycles presque transverses de \mathcal{F} , la somme $\bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_k$ est non nulle dans $H_1(M, \mathbb{Z})$.*

5) *\mathcal{F} ne possède pas de barrière.*

6) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une forme fermée transverse à \mathcal{G} .*

7) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une courbe fermée transverse à \mathcal{G} rencontrant toute demi-feuille de \mathcal{G} .*

8) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} tel que toute feuille compacte et tout cycle de feuilles presque transverse de \mathcal{G} soit coupé par une transversale fermée.*

Remarque 2.2. — Les échanges d'intervalles et leur suspension sont définis dans le paragraphe 6 de [3]. Voir aussi la remarque II.1.4 ci-dessous.

Remarque 2.3. — Le cas a) du théorème 1.1 s'exprime par $8 \Rightarrow 1$.

Remarque 2.4. — L'équivalence $4 \Leftrightarrow 6$ est à rapprocher du théorème I.7 de [13]. Nous reviendrons sur ce point dans la partie II.

Démonstration du théorème 2.1. — Nous allons montrer successivement $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8$, $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 8$, $1 \Rightarrow 6 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 8$, ce qui compte tenu du théorème 1.1 suffira à prouver le théorème 2.1. La seule démonstration difficile est celle de $5 \Rightarrow 8$.

1 \Rightarrow 2. Si \mathcal{G} admet une décomposition canonique en pantalons, on peut construire (cf. fig. 9) une courbe C transverse à \mathcal{G} et rencontrant tout cycle de feuilles de \mathcal{G} . En écrasant les liaisons de \mathcal{G} qui ne coupent pas C , on obtient un feuilletage équivalent à \mathcal{F} qui est la suspension d'un échange d'intervalles sur C (cf. [3] paragraphe 6).

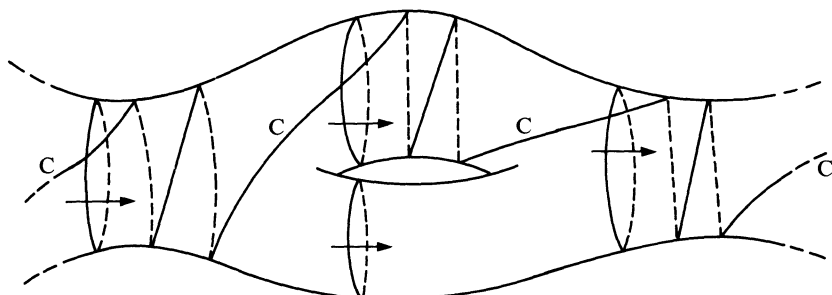


FIG. 9.

2 \Rightarrow 7 résulte de la définition d'une suspension (proposition 6.1 de [3]).

7 \Rightarrow 8 provient du fait qu'une feuille compacte est une demi-feuille et qu'une courbe transverse coupant toute demi-feuille coupe aussi tout cycle presque transverse.

2 \Rightarrow 3. La suspension d'un échange d'intervalles est évidemment connexe car il existe une courbe transverse coupant toute demi-feuille et toute liaison.

3 \Rightarrow 8 est clair.

1 \Rightarrow 6. Si \mathcal{G} admet une décomposition en pantalons, on construit immédiatement une forme fermée ω transverse à \mathcal{G} telle que les courbes de la décomposition soient des feuilles de $F(\omega)$ et que toutes les feuilles régulières de $F(\omega)$ soient compactes.

6 \Rightarrow 4. Soient \mathcal{G} et ω comme dans 6. Si $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ est une famille formée de feuilles compactes ou de cycles presque transverses de \mathcal{G} , l'intégrale de ω sur chacun des γ_i (orientés par \mathcal{G}) est non nulle et son signe est indépendant de i . La somme $\bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_k$ est donc non nulle dans $H_1(M, \mathbb{Z})$. Les $\bar{\gamma}_i$ étant invariants par opérations de Whitehead, on en déduit 4.

4 \Rightarrow 5. Si \mathcal{F} possède une barrière, on peut trouver une sous-variété M_1 de M dont le bord se compose de feuilles compactes $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ de \mathcal{F} , et telle que tous les $\tilde{\gamma}_i$ soient des bords rentrants (resp. sortants) de

M_1 . Il existe alors une orientation de M pour laquelle le bord (orienté) de M_1 est égal à $\bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_k$, ce qui prouve que \mathcal{F} (et donc \mathcal{F}) ne vérifie pas 4.

Il reste à montrer $5 \Rightarrow 8$. On remarque d'abord qu'il suffit de prouver qu'il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} tel que toute feuille compacte de \mathcal{F} (ou de \mathcal{G}) soit coupée par une transversale fermée à \mathcal{G} . L'absence de barrière entraînant l'absence de composante de Reeb, on peut même se limiter à une famille finie $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de feuilles compactes en choisissant une feuille dans chaque classe d'isotopie de courbes fermées simples contenant une feuille compacte de \mathcal{F} . Nous choisissons une orientation transverse de \mathcal{F} , ce qui induit une orientation transverse sur les feuilles λ_i ($1 \leq i \leq m$).

Nous commençons par une construction purement topologique qui fait intervenir les λ_i et leur orientation transverse, mais pas le feuilletage. Nous voulons trouver une famille finie de courbes fermées simples orientées (pas forcément disjointes) coupant les λ_i transversalement et dans le sens imposé par l'orientation transverse de \mathcal{F} . De plus, chaque λ_i doit rencontrer au moins une courbe de cette famille (l'existence d'une telle famille serait évidente si l'on savait que \mathcal{F} vérifie 8).

Considérons les composantes de $M - (\lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_m)$ telles qu'il existe un chemin orienté joignant λ_1 à cette région et coupant tous les λ_i transversalement et dans le sens correspondant à leur orientation transverse (cela implique en particulier que tous ces chemins quittent λ_1 du même côté). L'adhérence de l'union de ces composantes est une sous-variété connexe de M dont le bord se compose de certains des λ_i . Mais par construction cette surface ne peut posséder que des bords rentrants, ce qui lui impose d'être égale à M (car \mathcal{F} ne possède pas de barrière). On peut donc construire une courbe fermée orientée coupant les λ_i transversalement et dans le sens requis, et rencontrant λ_1 . Si cette courbe ne rencontre pas tous les λ_i , on construit une seconde courbe à partir d'un λ_i non coupé, et ainsi de suite jusqu'à obtention de la famille cherchée.

Pour tout i ($1 \leq i \leq m$), nous appelons θ_i le nombre de fois où les courbes de la famille coupent λ_i , et nous pouvons oublier ces courbes qui ne nous ont servi qu'à déterminer des entiers $\theta_i \geq 1$ possédant la propriété suivante : pour toute composante M_1 de la surface obtenue en découpant M selon $\lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_m$, la somme des indices affectés aux bords rentrants de M_1 est égale à la somme des indices affectés aux bords sortants de M_1 (l'existence de tels θ_i est en fait équivalente à l'absence de barrière).

La démonstration du théorème 2.1 se ramène alors à celle du lemme suivant :

LEMME 2.5. — Soit M_1 une composante de la surface obtenue en découpant M selon $\lambda_1 \cup \dots \cup \lambda_m$ et \mathcal{F}_1 le feuilletage induit par \mathcal{F} sur M_1 . Il existe un feuilletage \mathcal{G}_1 équivalent à \mathcal{F}_1 et des chemins v_1, \dots, v_n disjoints et transverses à \mathcal{G}_1 tels que :

- i) Chaque v_i relie une composante rentrante de δM_1 à une composante sortante de δM_1 .
- ii) Une composante de δM_1 , qui provient par découpage d'une feuille compacte λ_i de \mathcal{F} , rencontre exactement θ_i de ces chemins.

Il est clair que ce lemme entraîne le résultat : les feuilletages fournis par le lemme 2.5 se recollent en un feuilletage \mathcal{G} de M équivalent à \mathcal{F} (notons que les opérations de Whitehead se font « loin » des λ_i), et les courbes transverses à \mathcal{G} que l'on cherche s'obtiennent en reliant deux à deux les $2\theta_i$ chemins transverses à \mathcal{G} qui aboutissent à chaque λ_i .

Démonstration du lemme 2.5. — On va d'abord montrer, sans changer le feuilletage, qu'il existe des chemins vérifiant les conditions du lemme à ceci près qu'ils ne seront pas transverses à \mathcal{F}_1 mais simplement « bons » par rapport à \mathcal{F}_1 . Nous expliquons ci-dessous ce que nous entendons par « bon », mais disons qu'en gros un chemin est bon par rapport à \mathcal{F}_1 s'il est transverse à un feuilletage équivalent à \mathcal{F}_1 . Il restera à prouver que l'on peut modifier \mathcal{F}_1 par des opérations de Whitehead de manière à rendre transverses *simultanément* tous ces chemins.

Un chemin orienté η plongé dans M_1 sera dit *bon* par rapport à \mathcal{F}_1 si :

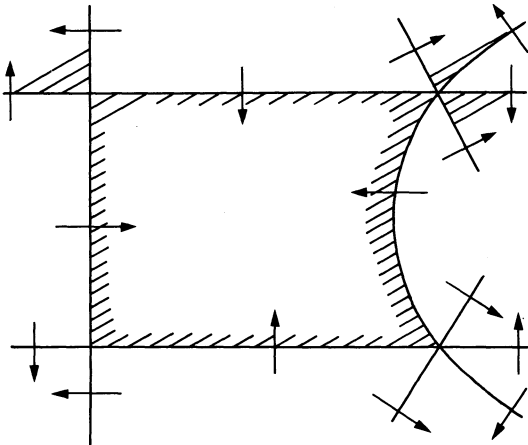
- η est lisse par morceaux, et les points où η « fait un angle » sont des selles de \mathcal{F}_1 .
- η se compose de parties lisses transverses à \mathcal{F}_1 et de morceaux de séparatrices joignant ou bien une selle de \mathcal{F}_1 et une extrémité de η ou bien deux selles (distinctes) de \mathcal{F}_1 .
- Sur chacune des parties transverses à \mathcal{F}_1 , l'orientation de η coïncide avec l'orientation transverse de \mathcal{F}_1 .

LEMME 2.6. — Tout bord rentrant de M_1 peut être joint à tout bord sortant par un chemin bon par rapport à \mathcal{F}_1 .

Démonstration du lemme 2.6. — Remarquons tout d'abord que, si γ est une feuille compacte ou un cycle presque transverse de \mathcal{F}_1 , alors γ est isotope à une composante de δM_1 (si $\gamma = \varphi(S^1 \times \{0\})$ est un cycle presque transverse, il faudrait dire plus précisément que $\varphi(S^1 \times \{1\})$ est isotope à une composante de δM_1). Cela résulte de la construction de $\tilde{\mathcal{F}}$ et du choix des λ_i .

Ceci étant noté, choisissons un bord rentrant R de M_1 . Soit A l'ensemble des points x de M_1 tels qu'il existe un bon chemin joignant R à x ; A contient R , mais ne contient aucun autre bord rentrant de M_1 , et nous allons montrer que A contient tous les bords sortants de M_1 , ce qui entraînera le lemme 2.6. Appelons α la frontière de A . Une feuille de α ne pouvant pas passer deux fois dans un ouvert distingué de \mathcal{F}_1 , α ne peut contenir que des feuilles compactes de \mathcal{F}_1 ou des séparatrices de type 1 ou 2 (réalisant une liaison entre selles). α sépare donc M_1 en deux ouverts; l'un est l'intérieur de A , l'autre (appelons-le B) est disjoint de A .

Les séparatrices contenues dans α constituent un sous-complexe K_α du 1-complexe $K(\mathcal{F}_1)$ défini dans I.1. Remarquons qu'un sommet de K_α appartient à au moins deux arêtes de K_α (ou à l'adhérence d'une séparatrice de type 1 contenue dans K_α). Montrons d'abord que K_α est contenu dans A : si une composante connexe K_α^0 de K_α n'est pas contenue dans A , aucune séparatrice issue d'une selle de K_α^0 ne peut être contenue dans A , ce qui implique que K_α^0 contient un cycle presque transverse (cf. fig. 10). Mais ce cycle est isotope à une composante de δM_1



La partie hachurée représente A .

FIG. 10.

qui, parce que \mathcal{F}_1 ne possède pas de composante de Reeb, est nécessairement sortante. Ceci est impossible, et K_α est donc bien contenu dans A ; par conséquent toute séparatrice issue d'une selle de K_α est aussi contenue dans A .

Supposons maintenant qu'il existe un bord sortant S de M_1 qui n'est pas contenu dans A . On va obtenir une contradiction en considérant la composante connexe B_0 de B qui contient S . Comme \mathcal{F}_1 ne possède pas de composante de Reeb, la frontière de B_0 ne peut pas contenir de feuille compacte (car toute feuille compacte est isotope à une composante de δM_1). Elle contient donc un cycle de feuilles et, parce que toute séparatrice issue d'une selle de K_α est contenue dans A , elle contient en fait un cycle de feuilles presque transverse. Mais ceci est également impossible, toujours parce qu'un cycle presque transverse est isotope à une composante de δM_1 et que \mathcal{F}_1 ne contient pas de composante de Reeb. \square

Nous terminons maintenant la démonstration du lemme 2.5. Du lemme 2.6, on déduit l'existence de bons chemins η_1, \dots, η_n vérifiant les conditions i) et ii) du lemme 2.5. Ces chemins ne sont pas forcément disjoints, mais en les modifiant si besoin est on peut supposer qu'ils sont *presque* disjoints, en ce sens que pour $1 \leq i < j \leq n$ il existe un chemin arbitrairement proche de η_i et disjoint de η_j .

Définissons la *complexité* $c(\eta_i)$ d'un bon chemin η_i comme le nombre de selles qu'il contient, et la complexité de la famille (η_1, \dots, η_n) comme la somme $\sum_{i=1}^n c(\eta_i)$ des complexités des constituants. Considérons l'ensemble des $(\mathcal{F}'_1, \eta'_1, \dots, \eta'_n)$ où \mathcal{F}'_1 est un feuilletage de M_1 équivalent à \mathcal{F}_1 , et les η'_i sont des chemins plongés presque disjoints, bons par rapport à \mathcal{F}'_1 et vérifiant les conditions i) et ii) du lemme 2.5. Dans cet ensemble choisissons un élément $(\mathcal{G}_1, v_1, \dots, v_n)$ de *complexité minimale*, et montrons par l'absurde que cette complexité est nulle (c'est-à-dire que les v_i sont transverses à \mathcal{G}_1).

Remarquons d'abord que les v_i sont composés uniquement de morceaux transverses à \mathcal{G}_1 . Si en effet l'un des v_i contenait une liaison entre deux selles de \mathcal{G}_1 (distinctes car les v_i sont plongés), on pourrait par une opération de Whitehead écraser cette liaison et diminuer la complexité du chemin considéré. La complexité des autres chemins n'a pu que diminuer, mais ils ne sont peut-être plus plongés. On peut néanmoins obtenir une famille (v'_1, \dots, v'_n) de chemins plongés presque disjoints et bons par

rapport au nouveau feuilletage, telle que la complexité de (v'_1, \dots, v'_n) soit strictement inférieure à celle de (v_1, \dots, v_n) ; mais ceci est impossible d'après le choix des v_i .

Sans perdre de généralité on peut supposer que $c(v_1)$ est non nul. Soit donc s une selle de v_1 . Les séparatrices issues de s sont séparées par v_1 en deux groupes, un de chaque côté de v_1 (cf. fig. 11), et à cause de la troisième hypothèse de la définition d'un bon chemin chacun de ces groupes contient un nombre *impair* de séparatrices (ce nombre est en fait au moins égal à trois car s'il était égal à 1 on pourrait diminuer la complexité de v_1 en modifiant v_1 au voisinage de s). On peut alors remplacer \mathcal{G}_1 par un feuilletage équivalent \mathcal{G}'_1 comme indiqué à la figure 11 et construire un chemin v'_1 bon par rapport à \mathcal{G}'_1 avec $c(v'_1) = c(v_1) - 1$. Parce que les v_i étaient presque disjoints, on peut modifier les v_i ($i > 1$) en des chemins v'_i bons par rapport à \mathcal{G}'_1 *sans augmenter leur complexité*. Cela prouve que les v_i étaient en fait transverses à \mathcal{G}_1 . \square

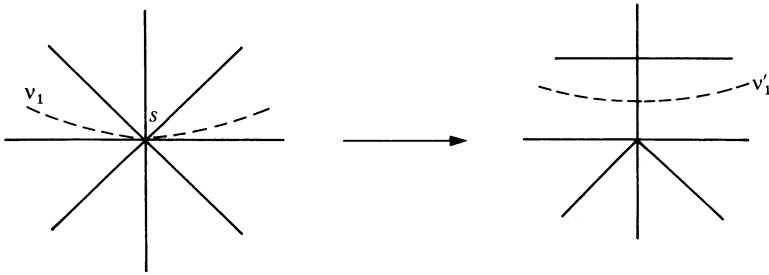


FIG. 11.

II. MESURES TRANSVERSES INVARIANTES ET COURBES TRANSVERSES

Dans toute cette partie, M est une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et \mathcal{F} est un feuilletage transversalement orienté de M .

II.1. Mesures transverses invariantes et classes de cohomologie.

Cette section est consacrée à l'étude des mesures transverses invariantes d'un feuilletage et des classes de cohomologie qu'elles déterminent.

Une *mesure transverse invariante* μ d'un feuilletage est la donnée d'une mesure positive finie μ_J sur chaque intervalle J transverse à \mathcal{F} (les extrémités de J peuvent être des selles de \mathcal{F}). La collection des μ_J doit satisfaire aux deux propriétés suivantes :

– si J est contenu dans J' , la mesure induite sur J par $\mu_{J'}$ est égale à μ_J .

– la mesure μ_J est laissée invariante quand on déplace J de façon que ses extrémités ne changent pas de feuille ; plus précisément, si ψ est une injection continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans M envoyant les segments $[0,1] \times \{u\}$ dans des feuilles de \mathcal{F} , alors l'application qui à $\psi(0,u)$ associe $\psi(1,u)$ induit un isomorphisme entre μ_{J_0} et μ_{J_1} , où J_t désigne l'intervalle transverse $\psi(\{t\} \times [0,1])$; les images $\psi([0,1] \times \{0\})$ et $\psi([0,1] \times \{1\})$ peuvent contenir des selles de \mathcal{F} .

La masse totale de μ_J sera appelée la *mesure* de J et notée $\mu(J)$.

De la définition ci-dessus il résulte qu'une mesure μ ne peut posséder une *masse atomique* en un point $x \in J$ que si x appartient à une feuille compacte ou à une liaison entre selles. Dans le deuxième cas, toute séparatrice issue d'une des extrémités de cette liaison réalise elle-même une liaison entre selles et porte la même masse atomique.

Parce que \mathcal{F} est transversalement orienté, on peut associer à tout chemin orienté θ (pas forcément transverse à \mathcal{F}) un nombre réel $(\mu)(\theta)$ de la façon suivante :

Le chemin θ est homotope à extrémités fixes à un chemin formé de morceaux I_i ($1 \leq i \leq h$) contenus dans des feuilles de \mathcal{F} et de morceaux J_i ($1 \leq i \leq h$) transverses à \mathcal{F} , et on pose

$$(\mu)(\theta) = \sum_{i=1}^h \varepsilon_i \left[\mu(J_i) - \frac{1}{2} \mu_{J_i}(\delta J_i) \right],$$

où ε_i vaut $+1$ ou -1 selon que l'orientation de J_i (induite par celle de θ) coïncide ou non avec l'orientation transverse de \mathcal{F} , et δJ_i désigne la réunion des deux extrémités de J_i (la considération de δJ_i n'est utile que si μ possède des masses atomiques). On vérifie facilement que $(\mu)(\theta)$ ne dépend pas des arcs I_i et J_i choisis ; si l'on se restreint aux chemins θ qui sont des lacets, on obtient un homomorphisme de $\pi_1(M)$ dans \mathbb{R} qui définit une *classe de cohomologie* $[\mu] \in H^1(M, \mathbb{R})$. On considèrera également la classe d'homologie μ duale de $[\mu]$; par définition on a $\mu \cdot \alpha = [\mu](\alpha)$ pour tout $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$. Si par exemple μ est une masse

atomique portée par une feuille compacte γ , la classe μ est un multiple réel de la classe entière $\bar{\gamma}$ définie dans la section I.2.

Pour toute mesure transverse μ , on peut considérer dans M^* (l'ensemble des points de M qui ne sont pas des selles) les points x tels que tout intervalle ouvert transverse contenant x ait une mesure strictement positive. Ces points forment dans M^* un fermé saturé, et son adhérence dans M (obtenue en lui ajoutant certaines selles) est appelée le *support* de μ . Si par exemple \mathcal{F} est défini par une 1-forme fermée ω , la forme ω détermine canoniquement une mesure transverse dont le support est égal à M ; la classe de cohomologie de cette mesure est celle de ω . Si par contre on considère le feuilletage défini dans l'exemple 3 de [3], le support de toute mesure transverse est d'intérieur vide (voir [12] pour plus de détails et d'autres exemples). Remarquons qu'une feuille non compacte contenue dans le support d'une mesure transverse ne peut pas spiraler vers une feuille compacte ou un cycle presque transverse. Par ailleurs on peut montrer que, si l est une demi-feuille de \mathcal{F} qui ne spirale pas vers un cycle presque transverse, il existe une mesure transverse non triviale dont le support est contenu dans l'adhérence de l .

Une mesure transverse non nulle μ est *ergodique* si, pour toute famille J_1, \dots, J_h d'intervalles transverses et tout ensemble $A \subset M$ qui est une réunion de feuilles de \mathcal{F} , on a $\sum_{i=1}^h \mu_{J_i}(A \cap J_i) = 0$ ou $\sum_{i=1}^h \mu_{J_i}(A \cap J_i) = \sum_{i=1}^h \mu(J_i)$; pour éviter certaines pathologies, il convient de supposer dans cette définition que, si A contient une séparatrice issue d'une selle s , alors il contient aussi toutes les autres séparatrices issues de s . Le feuilletage \mathcal{F} est *uniquement ergodique* si toute mesure transverse est ergodique; cela revient à dire que deux mesures transverses non nulles quelconques μ_1 et μ_2 sont *proportionnelles* (i.e. $\exists \lambda > 0$ tel que $\mu_1 = \lambda \mu_2$).

Pour pouvoir étudier l'application qui à une mesure μ associe sa classe de cohomologie $[\mu]$, nous devons donner une dernière définition. Soit L l'union des feuilles compactes et des cycles de feuilles de \mathcal{F} . Il est facile de voir que L est fermé (cf. la démonstration du lemme 2.1 de [3]), et pour toute mesure transverse μ on peut définir une nouvelle mesure μ^c en posant pour tout intervalle ouvert transverse J : $\mu^c(J) = \mu_J(J \cap L)$; on remarque que la différence $\mu^a = \mu - \mu^c$ est également une mesure transverse. La mesure μ sera dite *compacte* si $\mu = \mu^c$, *antcompacte* si $\mu = \mu^a$. Toute mesure s'écrit ainsi de façon unique comme somme d'une mesure compacte et d'une mesure antcompacte. Le support d'une mesure

antcompacte ne contient pas de feuille compacte, mais peut contenir des cycles de feuilles.

Le feuilletage \mathcal{F} étant fixé, nous désignons par \mathcal{M} (resp. \mathcal{M}^c , resp. \mathcal{M}^a) l'ensemble de ses mesures transverses (resp. de ses mesures transverses compactes, resp. de ses mesures transverses antcompactes). Nous notons $[\mathcal{M}^c]$ (resp. $[\mathcal{M}^a]$) le sous-espace vectoriel de $H^1(M, \mathbb{R})$ engendré par l'image de \mathcal{M}^c (resp. \mathcal{M}^a). La forme d'intersection canonique (cup-produit) sur $H^1(M, \mathbb{R})$ sera notée \wedge : si μ et μ' sont deux mesures transverses, on a $[\mu] \wedge [\mu'] = \mu \cdot \mu' = [\mu](\mu')$.

THÉORÈME 1.1. — a) L'intersection $[\mathcal{M}^c] \cap [\mathcal{M}^a]$ est réduite à 0.

b) La restriction à \mathcal{M}^a de l'application $[\] : \mathcal{M} \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})$ est injective.

c) La restriction à $[\mathcal{M}^c] \oplus [\mathcal{M}^a]$ de la forme \wedge est identiquement nulle.

COROLLAIRE 1.2. — Un feuilletage \mathcal{F} possède au plus g classes de proportionnalité de mesures transverses ergodiques antcompactes ; il possède un nombre fini de classes de proportionnalité de mesures transverses ergodiques si et seulement si il possède un nombre fini de feuilles compactes.

COROLLAIRE 1.3. — Un échange d'intervalles sans point périodique possédant n points de discontinuité admet au plus $(n+1)/2$ mesures probabilité invariantes ergodiques.

Remarque 1.4. — Un échange d'intervalles est pour nous une application strictement croissante par morceaux d'un cercle orienté dans lui-même, définie sauf en nombre fini de points, et dont l'image est le cercle privé d'un nombre fini de points (cf. [3]). En définissant convenablement une telle application aux points de discontinuité, on peut la considérer comme une bijection continue à droite du cercle dans lui-même et parler sans ambiguïté de points périodiques et de mesures invariantes. Notre définition est plus générale que celle de [2] car nous n'imposons pas aux échanges d'intervalles de préserver la mesure de Lebesgue.

Remarque 1.5. — Dans le cas où les feuilles régulières de \mathcal{F} sont (localement) denses, les assertions b) et c) du théorème 1.1 et le corollaire 1.2 ont été annoncés par Katok ([1]). De ces résultats il est possible de déduire le corollaire 1.3 pour les échanges d'intervalles préservant la mesure de Lebesgue. Indépendamment, Keane a montré dans [2] qu'un échange d'intervalles minimal préservant la mesure de Lebesgue

admet au plus n mesures de probabilité invariantes ergodiques ; Stredder a généralisé cette démonstration et prouvé ([12], proposition 8.7) qu'un feuilletage sans feuille compacte ni liaison entre selles possède au plus $5g - 4$ mesures transverses ergodiques (à proportionnalité près). Veech a montré le corollaire 1.3 pour les échanges d'intervalles minimaux préservant la mesure de Lebesgue ([14], théorème 0.5) ; parce qu'il travaille sur $[0,1]$ et non sur le cercle, il obtient en fait au plus $n/2$ mesures ergodiques (au lieu de $(n+1)/2$). Il a également montré le corollaire 1.2 (dans [15]).

Remarque 1.6. — On peut montrer des résultats analogues au théorème 1.1 et au corollaire 1.2 dans le cas où \mathcal{F} est un feuilletage non singulier de codimension 1 d'une variété fermée M de dimension quelconque (voir [4]).

Remarque 1.7. — On trouvera dans [10] et dans [12] (section 10.4) des exemples de feuilletages sans feuille compacte possédant exactement g mesures ergodiques anticompactes (à proportionnalité près).

Remarque 1.8. — Il résultera de la démonstration du théorème 1.1 que l'on peut remplacer l'assertion *a*) par l'assertion plus forte suivante : « l'intersection $[\mathcal{M}^a] \cap ([\mathcal{M}^c] + \mathcal{A})$ est réduite à 0 » (\mathcal{A} désigne le sous-espace de $H^1(M, \mathbb{R})$ engendré par les classes correspondant par dualité de Poincaré aux classes d'homologie déterminées par les cycles de feuilles de \mathcal{F}).

Démonstration du théorème 1.1. — Appelons U_i ($1 \leq i \leq m$) les composantes de $M - L$ qui ne sont pas homéomorphes à $S^1 \times]0,1[$. Une mesure transverse anticomacte s'écrit de façon unique comme somme $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$, le support de μ_i étant contenu dans $\overline{U_i}$. Remarquons que la classe d'homologie μ_i duale de $[\mu_i]$ appartient à l'image de $H_1(U_i, \mathbb{R})$ dans $H_1(M, \mathbb{R})$. Les assertions *a*) et *b*) du théorème vont résulter du lemme suivant :

LEMME 1.9. — Soient μ_i et μ'_i deux mesures transverses anticompactes dont les supports sont contenus dans un même $\overline{U_i}$ ($1 \leq i \leq m$). Si $[\mu_i]$ et $[\mu'_i]$ coïncident sur toute classe d'homologie entière représentable par une courbe contenue dans U_i , alors $\mu_i = \mu'_i$.

Démonstration du lemme 1.9. — Pour alléger les notations, on pose $\mu = \mu_i$, $\mu' = \mu'_i$, $U = U_i$. On désigne par V la surface (compacte

connexe mais peut-être anguleuse) obtenue en découpant M le long de la frontière de U . On dira que deux points x et y de V sont *équivalents* s'il existe dans V un arc θ_0 les joignant et tel que $(\mu)(\theta_0) = (\mu')(\theta_0)$. On définit ainsi une relation d'équivalence, et parce que les classes $[\mu]$ et $[\mu']$ coïncident sur $H_1(U, \mathbb{Z})$ on a $(\mu)(\theta) = (\mu')(\theta)$ pour tout arc θ joignant deux points équivalents. Les classes d'équivalence sont des réunions de feuilles de \mathcal{F} (ou plus précisément du feuilletage \mathcal{F}_V que \mathcal{F} définit sur V); si une séparatrice issue d'une selle s de \mathcal{F}_V est contenue dans une classe, la selle s et toutes les autres séparatrices issues de s sont contenues dans la même classe. De plus, parce que les mesures μ et μ' ne possèdent pas de masse atomique, les classes d'équivalence sont *fermées* dans V . On sait d'autre part qu'il ne peut pas exister dans M plus de g compacts disjoints qui sont des réunions de feuilles de \mathcal{F} et ne contiennent ni selle ni feuille compacte ([6], [9]). Comme \mathcal{F}_V ne contient qu'un nombre fini de selles et de feuilles compactes, cela entraîne qu'il n'existe dans V qu'un nombre fini de classes d'équivalence; donc tous les points de V sont en fait équivalents, et par conséquent $\mu = \mu'$. \square

L'assertion *b*) du théorème 1.1 est maintenant claire car, si μ est anticomacte, la connaissance de $[\mu]$ détermine chacune des composantes μ_i ($1 \leq i \leq m$) de μ d'après le lemme 1.9. Montrons l'assertion *a*). Soit $h \in [\mathcal{M}^c] \cap [\mathcal{M}^a]$. Alors il existe deux mesures anticomactes μ et μ' telles que $[\mu] - [\mu'] = h$. D'après la définition des U_i et le fait que h appartient à $[\mathcal{M}^c]$, on a $h(\alpha) = 0$ pour tout α appartenant à $H_1(U_i, \mathbb{Z})$, et donc pour tout i les composantes μ_i et μ'_i de μ et μ' satisfont aux hypothèses du lemme 1.9. Il en résulte $h = 0$.

Vérifions enfin l'assertion *c*). Parce que toute mesure appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble formé par les mesures ergodiques, il suffit de montrer que le nombre d'intersection $[\mu] \wedge [\mu']$ est nul pour deux mesures transverses ergodiques. C'est clair si μ et μ' sont compactes, ou si μ est compacte et μ' anticomacte. Le seul cas non trivial est en fait celui où μ et μ' sont anticomactes, de support contenu dans le même \overline{U}_i . Dans ce cas la classe d'homologie μ' duale de $[\mu']$ peut être considérée comme un cycle asymptotique porté par une feuille l de $\mathcal{F}_{|U_i}$ ([11]; cf. aussi le paragraphe 5 de [3]); plus précisément, on peut trouver sur l une suite monotone de points t_0, \dots, t_n, \dots tendant vers l'infini sur l mais contenus dans un même ouvert distingué $W \subset U_i$, et une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels tendant vers l'infini, de façon que μ' soit la limite dans $H_1(M, \mathbb{R})$ de la classe définie par C_n/λ_n , où l'on désigne par C_n le cycle obtenu en parcourant l de t_0 à t_n , puis en joignant t_n à t_0

dans W . La suite des $[\mu](C_n)$ est bornée, mais la suite (λ_n) ne l'est pas, et donc $[\mu](\mu') = 0$, ce qui montre $[\mu] \wedge [\mu'] = 0$. Le théorème 1.1 est ainsi prouvé. \square

Démonstration des corollaires 1.2 et 1.3. — D'après l'assertion c) du théorème 1.1, la dimension de $[\mathcal{M}^g]$ est au plus g . Or d'après l'assertion b) une famille de mesures transverses ergodiques anticompatibles deux à deux non proportionnelles détermine un système libre de $[\mathcal{M}^g]$. Cela prouve la première assertion du corollaire 1.2; la deuxième résulte du fait qu'une mesure ergodique est soit compacte soit anticompatibile et que le support d'une mesure compacte ergodique est une feuille compacte ou une composante connexe du 1-complexe $K(\mathcal{F})$ défini dans la section I.1.

Un échange d'intervalles φ à n points de discontinuité peut être « suspendu » en un feuilletage \mathcal{F} d'une surface de genre au plus $(n+1)/2$ ([3], proposition 6.1). Si φ n'a pas de point périodique, le feuilletage \mathcal{F} n'a pas de mesure transverse compacte, et le corollaire 1.3 se déduit de la première assertion du corollaire 1.2. \square

II.2. Courbes transverses et classes d'homologie.

Avant d'énoncer le principal résultat de cette section, remarquons qu'une classe d'homologie non nulle α de $H_1(M, \mathbb{Z})$ qui contient une courbe fermée simple est *indivisible* en ce sens que l'égalité $\alpha = n\beta$ avec $\beta \in H_1(M, \mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$ entraîne $|n| = 1$. Réciproquement, toute classe indivisible peut être représentée par une courbe fermée simple ([7]). Une classe α est indivisible si et seulement si ses composantes dans une base de $H_1(M, \mathbb{Z})$ sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble.

THÉORÈME 2.1. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orienté sans cycle de feuilles d'une surface fermée M . Pour une classe d'homologie indivisible $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une courbe fermée simple représentant α , transverse à \mathcal{G} , et rencontrant toute demi-feuille de \mathcal{G} .*
- ii) *Il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une décomposition canonique en pantalons transverse à \mathcal{G} dont les courbes principales appartiennent à α (voir la définition des courbes principales à la légende de la figure 1).*
- iii) *On a $[\mu](\alpha) \neq 0$ pour toute mesure transverse invariante μ de \mathcal{F} .*

COROLLAIRE 2.2. — Soit sur une surface fermée M un feuilletage \mathcal{F} sans cycle de feuilles défini par une 1-forme différentielle fermée ω . Le feuilletage \mathcal{F} est uniquement ergodique si et seulement si, pour toute classe indivisible $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$ telle que $\int_{\alpha} \omega \neq 0$, il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une courbe fermée simple transverse à \mathcal{G} et représentant α .

Remarque 2.3. — Pour le théorème 2.1, le feuilletage \mathcal{F} est supposé sans cycle de feuilles, mais il peut posséder des feuilles compactes régulières. Au contraire, dans le corollaire 2.2, l'absence de cycle de feuilles entraîne l'absence de feuilles compactes parce que \mathcal{F} est défini par une forme fermée. Nous donnerons à la fin de cette section quelques indications sur le cas où \mathcal{F} possède des cycles de feuilles.

Remarque 2.4. — Si la condition iii du théorème 2.1 est vérifiée, tous les nombres $[\mu](\alpha)$ ont le même signe (car l'image de \mathcal{M} dans $H^1(M, \mathbb{R})$ est convexe).

Des lemmes I.1.5 et I.1.4, on déduit immédiatement l'implication $i \Rightarrow ii$ du théorème 2.1. D'autre part, l'implication $ii \Rightarrow iii$ (ou même $i \Rightarrow iii$) est claire. Tout revient donc à montrer $iii \Rightarrow i$. Pour cela nous allons, en généralisant un résultat de Sullivan ([13]), déterminer quelles classes de cohomologie $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ contiennent des 1-formes fermées transverses à \mathcal{F} (on pourra se reporter à la section I.2 pour une définition précise des formes fermées transverses); l'idée d'utiliser les formes fermées transverses à \mathcal{F} nous a été suggérée par David Fried.

THÉORÈME 2.5. — Soit \mathcal{F} un feuilletage simple transversalement orienté et sans cycle de feuilles d'une surface fermée orientée M . Une classe de cohomologie $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ contient une forme fermée transverse à \mathcal{F} si et seulement si on a $[\mu] \wedge \Omega \neq 0$ pour toute mesure transverse μ de \mathcal{F} .

Remarque 2.6. — On peut montrer que ce théorème (ainsi que le théorème 2.5' ci-dessous) reste vrai même si \mathcal{F} n'est pas simple; on peut ainsi ajouter à l'énoncé du théorème 2.1 la quatrième condition équivalente suivante :

iv) La classe de cohomologie Ω duale de α contient une forme fermée transverse à \mathcal{F} .

Avant de montrer le théorème 2.5, nous allons indiquer comment on en déduit le théorème 2.1. Si $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$ vérifie la condition iii du théorème 2.1, sa classe de cohomologie duale $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ vérifie

$[\mu] \wedge \Omega \neq 0$ pour toute mesure transverse μ , et donc d'après le théorème 2.5 contient une forme fermée transverse à \mathcal{F} (on peut supposer sans perte de généralité que le feuilletage \mathcal{F} considéré dans l'énoncé du théorème 2.1 est simple). Le théorème 2.1 se ramène donc au lemme suivant :

LEMME 2.7. — Soit \mathcal{F} un feuilletage d'une surface fermée M . Soit ω une forme fermée transverse à \mathcal{F} dont la classe de cohomologie Ω est duale d'une classe indivisible $\alpha \in H_1(M, \mathbb{Z})$. Alors il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une courbe fermée simple C représentant α , transverse à \mathcal{G} , et rencontrant toute demi-feuille de \mathcal{G} .

Nous allons maintenant donner la démonstration du corollaire 2.2, puis nous montrerons le lemme 2.7 et le théorème 2.5.

Démonstration du corollaire 2.2. — La partie « seulement si » du corollaire est une conséquence immédiate de l'implication $\text{iii} \Rightarrow \text{i}$ du théorème 2.1. Supposons réciproquement que toute classe indivisible α telle que $\int_{\alpha} \omega \neq 0$ soit représentable par une transversale, et considérons une mesure transverse μ de \mathcal{F} . Alors, pour une classe d'homologie $\beta \in H_1(M, \mathbb{Z})$, la condition $\int_{\beta} \omega > 0$ entraîne $[\mu](\beta) > 0$. La classe $[\mu]$ est donc proportionnelle à la classe de cohomologie de ω , et d'après le théorème II.1.1 (assertion b) il en résulte que la mesure μ est proportionnelle à la mesure transverse déterminée par ω . Cela signifie que \mathcal{F} est uniquement ergodique. \square

Démonstration du lemme 2.7. — La classe Ω est entière, et donc toutes les feuilles régulières du feuilletage $F(\omega)$ défini par ω sont compactes. Le lemme est trivial si toutes ces feuilles appartiennent à la même classe d'isotopie. Sinon, choisissons un représentant λ_i ($1 \leq i \leq m$) dans chaque classe d'isotopie de feuilles et notons d_i la « largeur » de l'anneau contenant λ_i (d_i peut être défini comme la borne supérieure des valeurs absolues des intégrales de ω le long d'arcs transverses à $F(\omega)$ et rencontrant λ_i , mais ne rencontrant aucune séparatrice de $F(\omega)$). Une orientation transverse de \mathcal{F} induit une orientation des courbes λ_i , et on peut écrire, en choisissant convenablement cette orientation transverse, $\sum_{i=1}^m d_i \overline{\lambda_i} = \alpha$ dans $H_1(M, \mathbb{R})$.

Les nombres d_i ne sont pas forcément entiers, mais on peut trouver des

nombre rationnels strictement positifs d'_i ($1 \leq i \leq m$) tels que $\sum_{i=1}^m d'_i \overline{\lambda}_i = \alpha$ (un système linéaire à coefficients entiers a une solution sur \mathbb{Q} s'il en a une sur \mathbb{R}). En réduisant les d'_i au même dénominateur et en remplaçant les feuilles λ_i par une union de feuilles si besoin est, on voit qu'il existe des feuilles λ'_i ($1 \leq i \leq p$) de $F(\omega)$ et un entier $k \geq 1$ tels que $\sum_{i=1}^p \overline{\lambda}'_i = k\alpha$ dans $H_1(M, \mathbb{Z})$. Remarquons que toute demi-feuille de \mathcal{F} rencontre une des courbes λ_i , donc aussi une des courbes λ'_i .

Fixons k , et considérons l'ensemble des $(\mathcal{F}', T_1, \dots, T_q)$, où :

- \mathcal{F}' est un feuilletage équivalent à \mathcal{F} ;
- les T_i ($1 \leq i \leq q$) sont des courbes fermées simples disjointes transverses à \mathcal{F}' (orientées car \mathcal{F} , et donc \mathcal{F}' , est transversalement orienté), et $\sum_{i=1}^q T_i = k\alpha$ dans $H_1(M, \mathbb{Z})$;
- toute demi-feuille de \mathcal{F}' rencontre l'une des courbes T_i .

Nous avons montré que cet ensemble est non vide, et par conséquent nous pouvons y choisir un élément $(\mathcal{G}, C_1, \dots, C_r)$ pour lequel r est minimal. Considérons une composante M_1 de la surface obtenue en découpant M selon les courbes C_i . De la minimalité de r on déduit que M_1 satisfait les hypothèses du lemme I.1.5, et donc que δM_1 possède deux composantes. Cela entraîne que toutes les courbes C_i sont homologues, et par conséquent que chacune est homologue à α . Le lemme 2.7 est ainsi prouvé. \square

Démonstration du théorème 2.5. - Commençons par rappeler brièvement certains résultats de [13]. Supposons que \mathcal{H} est un feuilletage non singulier de dimension 1 et orienté d'une variété fermée M de dimension quelconque. On appelle \mathcal{D}' l'espace des 1-courants de M ; c'est le dual de l'espace \mathcal{D} des 1-formes différentielles de classe C^∞ . Soit $X \in T_x^+ \mathcal{H}$ un vecteur tangent à \mathcal{H} dans le sens positif en un point $x \in M$. Le vecteur X détermine un courant de Dirac c_X ($c_X(\omega) = \omega_x(X)$ pour $\omega \in \mathcal{D}$), et on appelle \mathcal{C} le cône convexe fermé engendré dans \mathcal{D}' par tous ces courants tangents c_X . Sullivan montre (prop. I.5 de [13]) que \mathcal{C} est un cône convexe compact (i.e. à base compacte), et en utilisant le théorème de Hahn-Banach il en déduit (théorème I.7) que, si \mathcal{H} satisfait à une condition de « non-dégénérescence », une classe $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ contient une forme fermée transverse à \mathcal{H} si et seulement si $\Omega(c)$ est non nul pour tout $c \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ ($\mathcal{L} \subset \mathcal{D}'$ est l'espace des courants fermés, ou

cycles). Puis il montre (théorèmes I.12 et I.13) comment identifier les « cycles du feuilletage » $c \in \mathcal{C} \cap \mathcal{L}$ avec les mesures transverses invariantes de \mathcal{H} .

Soit maintenant \mathcal{F} un feuilletage d'une surface comme dans l'énoncé du théorème 2.5. On désigne par $\text{sing } \mathcal{F}$ l'ensemble des $2g - 2$ singularités du feuillage simple \mathcal{F} ; les notations \mathcal{D}' , \mathcal{D} , $T_x^+ \mathcal{F}$, c_x , \mathcal{L} auront ci-dessous la même signification que précédemment. On choisit une orientation de \mathcal{F} , et on définit $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}'$ comme l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des courants de Dirac c_x tangents à \mathcal{F} aux points de $M^* = M - \text{sing } \mathcal{F}$. Le cône \mathcal{C} n'est pas un cône convexe compact (au sens de [13]) parce qu'il contient le sous-espace \mathcal{E} de \mathcal{D}' engendré par tous les courants de Dirac aux points de $\text{sing } \mathcal{F}$. Remarquons toutefois que \mathcal{E} est de dimension finie, donc fermé, et qu'il est par conséquent raisonnable de considérer l'espace quotient \mathcal{D}'/\mathcal{E} . Soit p la projection $p : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'/\mathcal{E}$.

LEMME 2.8. — *L'image $p(\mathcal{C})$ est un cône convexe compact de \mathcal{D}'/\mathcal{E} .*

Démonstration du lemme 2.8. — Soit $\omega \in \mathcal{D}$ une forme transverse à \mathcal{F} dont les singularités sont du premier ordre (i.e. si s est une selle de \mathcal{F} le jet d'ordre 1 de ω en s est non singulier). Parce que ω s'annule sur $\text{sing } \mathcal{F}$, il existe une forme linéaire (continue) $\bar{\omega}$ sur \mathcal{D}'/\mathcal{E} telle que ω (considérée comme forme linéaire sur \mathcal{D}') s'écrive $\omega = p^* \bar{\omega}$. La transversalité de ω et de \mathcal{F} entraîne que, lorsque \bar{c} parcourt $p(\mathcal{C})$, tous les nombres $\bar{\omega}(\bar{c})$ sont de même signe, par exemple positifs. Nous allons montrer que $\bar{\omega}(\bar{c})$ est strictement positif si $\bar{c} = p(c)$ est non nul (i.e. si $c \notin \mathcal{E}$).

Soit $\omega' \in \mathcal{D}$ une forme quelconque s'annulant sur $\text{sing } \mathcal{F}$. Parce que les singularités de ω sont génériques, la forme $\omega + t\omega'$ est transverse à \mathcal{F} pour $|t|$ suffisamment petit, et on en déduit pour $|t|$ petit l'inégalité $(\omega + t\omega')(c) \geq 0$. L'égalité $\bar{\omega}(\bar{c}) = 0$ entraînerait $\omega(c) = 0$, et donc $\omega'(c) = 0$ pour toute forme ω' s'annulant sur $\text{sing } \mathcal{F}$, ce qui exprime $c \in \mathcal{E}$. Nous avons ainsi montré $\bar{\omega}(\bar{c}) > 0$ pour tout élément non nul $\bar{c} \in p(\mathcal{C})$.

Pour prouver que $p(\mathcal{C})$ est un cône convexe compact, il nous reste à montrer, comme dans [13], la propriété suivante : si l'on fixe une forme $\bar{\eta}$ dans le dual de \mathcal{D}'/\mathcal{E} , alors l'ensemble $A_{\bar{\eta}}$ formé des $\bar{\eta}(\bar{c})$, où $\bar{c} \in p(\mathcal{C})$ et $\bar{\omega}(\bar{c}) = 1$, est borné dans \mathbb{R} . Si l'on pose $\eta = p^*(\bar{\eta})$, cet ensemble $A_{\bar{\eta}}$ s'identifie à l'ensemble des $\eta(c)$, où $c \in \mathcal{C}$ et $\omega(c) = 1$. La forme ω

étant transverse à \mathcal{F} et à singularités génériques, il existe un voisinage ouvert U de $\text{sing } \mathcal{F}$ et un nombre positif a tel que $|\eta(X)| \leq a \cdot \omega(X)$ pour tout vecteur $X \in T_x^+ \mathcal{F}$ tangent à \mathcal{F} en un point x de $U - \text{sing } \mathcal{F}$ (car η s'annule sur $\text{sing } \mathcal{F}$). D'autre part il existe un nombre positif b tel que $|\eta(X)| \leq b \cdot \omega(X)$ pour tout vecteur $X \in T_x^+ \mathcal{F}$ basé en un point x appartenant au compact $M - U$. Il en résulte facilement que $A_{\bar{\eta}}$ est contenu dans le plus grand des intervalles $[-a, +a]$ et $[-b, +b]$, donc borné. \square

Le lemme 2.8 permet, comme dans [13], d'utiliser le théorème de Hahn-Banach. Parce qu'il n'existe pas de forme exacte transverse à \mathcal{F} , on obtient par le même raisonnement que dans la démonstration du théorème I.7 de [13] le résultat suivant : il existe une forme fermée transverse à \mathcal{F} si et seulement si $p(\mathcal{C}) \cap p(\mathcal{B}) = \{0\}$ ($\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ est l'espace des courants exacts); si cette condition est vérifiée, une classe de cohomologie $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ contient une forme fermée transverse à \mathcal{F} si et seulement si $\Omega(\bar{c}) \neq 0$ pour tout $\bar{c} \in p(\mathcal{L}) \cap p(\mathcal{C})$. Le cône convexe $p(\mathcal{L}) \cap p(\mathcal{C})$ s'identifiant à $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$, nous devons maintenant étudier les cycles du feuilletage $c \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$ et vérifier que leurs classes d'homologie correspondent par dualité de Poincaré aux classes de cohomologie des mesures transverses de \mathcal{F} .

Si $c \in \mathcal{L} \cap \mathcal{C}$ est un cycle de \mathcal{F} , on remarque que c ne possède pas de composante sur \mathcal{C} : pour toute famille de fonctions continues $f_\varepsilon : M \rightarrow [0, 1]$ dont le support est contenu dans un ε -voisinage de $\text{sing } \mathcal{F}$, et pour toute forme ω , l'évaluation $c(f_\varepsilon \cdot \omega)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. Le cycle c peut donc être considéré comme un cycle du feuilletage $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}|_{M^*}$, et par les mêmes raisonnements que ceux de [13] (section 3, pp. 235 à 237) on montre que c correspond canoniquement à une mesure transverse μ^* de \mathcal{F}^* . Si une séparatrice de \mathcal{F} porte une masse atomique pour μ^* , cette séparatrice réalise nécessairement une liaison entre selles et, parce que c est un cycle de \mathcal{F} , cette liaison fait partie d'un cycle de feuilles (totalement dissymétrique au sens de [3]). Par hypothèse \mathcal{F} ne possède pas de cycle de feuilles, donc aucune séparatrice ne porte de masse atomique pour μ^* , et par conséquent μ^* est la restriction à M^* d'une mesure transverse μ de \mathcal{F} . Il ne reste plus pour prouver le théorème 2.5 qu'à remarquer (en utilisant par exemple la remarque ii) p. 237 de [13]) que la classe de cohomologie $[\mu]$ correspond par dualité de Poincaré à la classe d'homologie de c (ou à son opposée selon l'orientation choisie pour \mathcal{F}). \square

Si \mathcal{F} possède des cycles de feuilles, une mesure μ^* de \mathcal{F}^* s'écrit

comme la somme $\mu^* = \mu + \mu'$ de la restriction à M^* d'une mesure transverse μ de \mathcal{F} , et d'une mesure μ' de \mathcal{F}^* portée par les cycles de feuilles totalement dissymétriques de \mathcal{F} . L'orientation de M et l'orientation transverse de \mathcal{F} étant fixées, changeons si besoin est l'orientation de \mathcal{F} de façon qu'un repère formé d'un vecteur tangent à \mathcal{F} et d'un vecteur transverse à \mathcal{F} soit direct (cette convention d'orientation sera systématiquement adoptée dans la suite). Alors, si c est un cycle du feuilletage \mathcal{F} , il existe une mesure transverse μ de \mathcal{F} et une famille $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ de cycles de feuilles totalement dissymétriques de \mathcal{F} tels que la classe d'homologie de c soit égale à $\mu + a_1 \bar{\gamma}_1 + \dots + a_k \bar{\gamma}_k$, où $\bar{\gamma}_i \in H_1(M, \mathbb{Z})$ est la classe définie par γ_i (orienté par \mathcal{F}) et a_i est un réel positif. On obtient ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 2.5'. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage simple transversalement orienté d'une surface fermée orientée M . Une classe de cohomologie $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ contient une forme fermée transverse à \mathcal{F} si et seulement si tous les nombres $\Omega \wedge [\mu]$ et $\Omega(\bar{\gamma})$ restent non nuls et de même signe lorsque μ parcourt l'ensemble des mesures transverses de \mathcal{F} et γ parcourt l'ensemble des cycles de feuilles totalement dissymétriques de \mathcal{F} (l'orientation de \mathcal{F} est choisie de la façon expliquée plus haut).*

La notion de « cycle du feuilletage » permet de mieux comprendre l'équivalence $4 \Leftrightarrow 6$ du théorème I.2.1. Comme nous l'avons vu, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un feuilletage (simple) \mathcal{F} n'admette pas de forme fermée transverse est qu'il possède un cycle du feuilletage homologue à 0. Dans ce cas, d'après le théorème 1.1 et la remarque 1.8, il existe une relation non triviale de la forme $\mu^c + a_1 \bar{\gamma}_1 + \dots + a_k \bar{\gamma}_k = 0$, où μ^c est une mesure transverse compacte, les a_i des réels positifs, et les γ_i des cycles de feuilles totalement dissymétriques. Il existe donc aussi une relation non triviale de la forme $\sum_{i=1}^m \bar{\delta}_i = 0$, où les δ_i sont des feuilles compactes ou des cycles de feuilles totalement dissymétriques (les δ_i ne sont pas forcément disjoints).

Lorsqu'on modifie \mathcal{F} par opérations de Whitehead, les cycles de feuilles totalement dissymétriques qui ne sont pas presque transverses ne sont en général pas préservés, et l'implication $4 \Rightarrow 6$ du théorème I.2.1 s'exprime de la façon suivante : s'il n'existe pas de relation non triviale

$$\sum_{i=1}^p \bar{\delta}'_i = 0, \text{ où les } \delta'_i \text{ sont des feuilles compactes ou des cycles de feuilles}$$

presque transverses, on peut par opérations de Whitehead éliminer les cycles

totalelement dissymétriques gênants et modifier \mathcal{F} en un feuilletage équivalent \mathcal{G} ne possédant pas de cycle du feuilletage homologue à 0, et donc admettant des formes fermées transverses.

A la lumière du théorème I.2.1 et de cette interprétation, on peut penser que le théorème 2.5' se généralise de la façon suivante : « soit \mathcal{F} comme dans l'énoncé du théorème 2.5', et $\Omega \in H^1(M, \mathbb{R})$; si tous les nombres $\Omega \wedge [\mu]$ et $\Omega(\bar{\gamma})$ sont non nuls et de même signe, pour $\mu \in \mathcal{M}$ et γ cycle de feuilles presque transverse, il existe un feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} et une forme fermée $\omega \in \Omega$ transverse à \mathcal{G} ». Malheureusement cet énoncé est faux, comme le montre l'exemple suivant :

Considérons sur une surface M de genre 2 une forme fermée ω définissant un feuilletage simple $F(\omega)$ dont toutes les feuilles régulières sont compactes, isotopes entre elles, et non homologues à 0. Soit C une courbe fermée transverse rencontrant chacune de ces feuilles en un point. La forme ω induit sur C une mesure « de Lebesgue » dont on peut supposer la masse totale égale à 1. En découpant M selon C et en recollant par une rotation irrationnelle, on obtient un feuilletage sans feuille compacte qui possède exactement trois liaisons entre selles (le feuilletage induit sur la surface obtenue en découpant M selon C est représenté à la figure 5; si dans M on écrase en un même point les trois liaisons de \mathcal{F} , on obtient une surface homéomorphe à T^2 munie d'un feuilletage conjugué à un flot irrationnel).

Le feuilletage \mathcal{F} possède exactement une mesure transverse invariante μ (à proportionnalité près) et il ne possède pas de cycle presque transverse. La classe de cohomologie Ω duale de C vérifie $\Omega \wedge [\mu] \neq 0$, et pourtant tout feuilletage \mathcal{G} équivalent à \mathcal{F} possède un cycle de feuilles totalement dissymétrique disjoint de C , et donc n'admet pas de forme fermée transverse appartenant à Ω .

Pour un feuilletage sans cycle de feuilles, le théorème 2.1 et la remarque 2.6 fournissent quatre conditions équivalentes i à iv. Pour un feuilletage possédant des cycles de feuilles, les implications ii \Rightarrow iv \Rightarrow i \Rightarrow iii restent vraies (la condition i implique même la condition iii' suivante : « tous les nombres $[\mu](\alpha)$ et $\bar{\gamma} \cdot \alpha$ sont non nuls et de même signe, pour μ mesure transverse et γ cycle presque transverse »). Mais l'exemple ci-dessus montre que l'implication réciproque i \Rightarrow iv peut être fautive si \mathcal{F} possède des cycles de feuilles. Il est toutefois possible que l'implication i \Rightarrow iii' soit toujours une équivalence.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. B. KATOK, Invariant measures of flows on oriented surfaces, *Soviet Math. Dokl.*, 14, n° 4 (1973), 1104-1108.
- [2] M. KEANE, Interval exchange transformations, *Math. Z.*, 141 (1975), 25-31.
- [3] G. LEVITT, Pantalons et feuilletages des surfaces, *Topology*, 21 (1) (1982), 9-33.
- [4] G. LEVITT, Sur les mesures transverses invariantes d'un feuilletage de codimension 1, *C.R.A.S. Paris*, 290 (1980), 1139-1140.
- [5] G. LEVITT, Propriétés homologiques des feuilletages des surfaces, *C.R.A.S. Paris*, 293 (1981), 597-600.
- [6] E. B. LIMA, Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds, *Comm. Math. Helv.*, 39 (1964), 97-110.
- [7] M. D. MEYERSON, Representing homology classes of closed orientable surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 61 (1976), 181-182.
- [8] S. P. NOVIKOV, Topology of foliations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 14 (1965), 268-304.
- [9] J. F. PLANTE, Foliations with measure-preserving holonomy, *Ann. of Math.*, 102 (1975), 327-361.
- [10] E. A. SATAEV, On the number of invariant measures for flows on orientable surfaces, *Math. USSR Izv.*, 9 (1975), 813-830.
- [11] S. SCHWARTZMAN, Asymptotic cycles, *Ann. of Math.*, 66 (1957), 270-284.
- [12] P. J. STREDDER, Morse foliations, Thesis, Warwick 1976.
- [13] D. SULLIVAN, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Inventiones Math.*, 36 (1976), 225-255.
- [14] W. A. VEECH, Interval exchange transformations, *Jour. d'Anal. Math.*, 33 (1976), 222-272.
- [15] W. A. VEECH, Quasiminimal invariants for foliations of orientable closed surfaces, preprint.

Manuscrit reçu le 2 mars 1981.

Gilbert LEVITT,
Department of Mathematics
University of California
Berkeley-Ca. 94720 (USA).
et
UER de mathématiques
Université Paris 7
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05
