

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL ZINSMEISTER

## **Courbes de Jordan vérifiant une condition corde-arc**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 32, n° 2 (1982), p. 13-21

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1982\\_\\_32\\_2\\_13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_13_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## COURBES DE JORDAN VÉRIFIANT UNE CONDITION CORDE-ARC

par Michel ZINSMEISTER

---

### 1. Introduction.

Soit  $\Gamma$  un arc de Jordan fermé rectifiable du plan complexe. Pour  $M, N \in \Gamma$  on note  $\widehat{MN}$  la plus petite des longueurs des deux sous-arcs de  $\Gamma$  joignant  $M$  et  $N$ .

DÉFINITION 1. — *On dit que  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout couple  $(M, N)$  de points de  $\Gamma$  on ait :*

$$\widehat{MN} \leq CMN.$$

Keldysh et Lavrent'ev ont été les premiers à étudier ces courbes [5] et les travaux de Coifman et Meyer [3] ont montré le rôle important que joue cette classe de courbes dans le problème de Calderón sur l'intégrale de Cauchy.

Soit  $\Omega$  le domaine limité par l'arc de Jordan  $\Gamma$  vérifiant une condition corde-arc et  $\Phi$  une transformation conforme du disque unité  $D$  sur  $\Omega$ . Le but de cet article est d'étudier les propriétés de  $\Phi$  et notamment celles concernant la distorsion au bord. Cette étude nous amène à considérer une autre classe de courbes de Jordan, un peu plus générale que la précédente :

si  $\Gamma$  est une courbe de Jordan fermée (non nécessairement rectifiable) et  $(M, N)$  un couple de points de  $\Gamma$ , appelons  $d(M, N)$  le plus petit des diamètres des deux sous-arcs de  $\Gamma$  joignant  $M$  et  $N$ .

DÉFINITION 2. — *On dit que  $\Gamma$  est un quasicercle s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout couple de points  $(M, N)$  de  $\Gamma$  on ait :*

$$d(M, N) \leq CMN.$$

Cette classe de courbes a été introduite par Ahlfors [1].

## 2. Généralités.

Dans toute la suite  $\Gamma$  désignera un arc de Jordan fermé quelconque entourant le domaine  $\Omega$  et  $\Phi$  une transformation conforme du disque unité  $\mathbb{D}$  sur  $\Omega$ .

PROPOSITION 1. —  $\Phi$  se prolonge en un homéomorphisme de  $\bar{\mathbb{D}}$  sur  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  et en particulier  $\theta \rightarrow \Phi(e^{i\theta})$  est une paramétrisation de  $\Gamma$ .

—  $\Gamma$  est rectifiable si, et seulement si,  $\Phi' \in H^1(\mathbb{D})$ , l'espace de Hardy usuel du disque et, si c'est le cas, les propriétés suivantes sont vraies :

—  $\theta \rightarrow \Phi(e^{i\theta})$  est absolument continue et l'on a

$$\frac{d}{d\theta}(\Phi(e^{i\theta})) = ie^{i\theta}\Phi'(e^{i\theta}) (= ie^{i\theta} \lim_{r \rightarrow 1} \Phi'(re^{i\theta})) \text{ p.p.}$$

—  $\Phi$  est conforme en presque tout point du cercle unité.

Tous ces résultats sont classiques. On se reportera par exemple à [10] pour les démonstrations.

DÉFINITION 3. — On dit que  $\Omega$  est un domaine de Smirnov si  $\Gamma$  est rectifiable et si la fonction  $\Phi'$  est extérieure, ce qui signifie que la fonction  $\text{Log} |\Phi'|$ , harmonique dans  $\mathbb{D}$ , est l'intégrale de Poisson de sa valeur au bord.

La condition de Smirnov joue un rôle important dans la théorie des espaces de Hardy  $H^p(\Omega)$  (voir [9]). On vérifie facilement par exemple que tout domaine de Jordan étoilé est un domaine de Smirnov (à condition que  $\Gamma$  soit rectifiable).

Keldysh et Lavrent'ev [5] ont montré que si  $\Gamma$  est corde-arc, alors  $\Omega$  est un domaine de Smirnov. Nous utiliserons ce résultat dans la suite.

## 3. La transformation conforme et la condition corde-arc.

Avant d'énoncer le théorème principal, rappelons la définition de la classe  $A^\infty$  de poids de Muckenhoupt.

DÉFINITION 4. — Soit  $p$  un réel tel que  $1 < p < \infty$  et  $w$  une fonction positive intégrable sur  $\partial\mathbb{D}$ . On dit que  $w \in A^p(\partial\mathbb{D})$  s'il existe une constante

$C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I$  de  $\partial D$  on ait :

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I w(z)|dz|\right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(z)^{-1/p-1}|dz|\right)^{p-1} \leq C,$$

on note alors  $A^\infty(\partial D) = \bigcup_{p>1} A^p(\partial D)$ .

(Voir [2] pour plus de détails sur cette classe.)

**THÉORÈME 1.** —  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc si et seulement si  $\Gamma$  est un quasicercle,  $\Omega$  est un domaine de Smirnov et  $|\Phi'|$ , restreint à  $\partial D$ , est un poids de  $A^\infty(\partial D)$ .

Le point de départ de la démonstration du théorème 1 est un lemme dû à Pommerenke [7].

**LEMME 1.** — Si  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc avec une constante  $\alpha$ , il existe une constante  $\beta$  ne dépendant que de  $\alpha$  telle que

$$(1) \quad \forall \zeta \in D, \quad \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)| |dz| \leq \beta(1 - |\zeta|) |\Phi'(\zeta)|.$$

Réciproquement, si  $\Gamma$  est un quasicercle avec une constante  $\alpha$  et s'il existe  $\beta$  tel que l'on ait (1), alors  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc avec une constante  $\leq C\alpha\beta$ .

(Dans cet énoncé,  $I(\zeta)$  désigne l'intervalle de centre  $\frac{\zeta}{|\zeta|}$  et de longueur  $1 - |\zeta|$ ).

Passons alors à la démonstration du théorème 1. Supposons tout d'abord que  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc. Alors on sait déjà que  $\Gamma$  est un quasicercle et que  $\Omega$  est un domaine de Smirnov. Par le lemme 1, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$(2) \quad \forall \zeta \in D, \quad \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)| |dz| \leq C|\Phi'(\zeta)|.$$

Ce résultat, combiné avec le théorème de distorsion de Koebe permet de montrer (voir [7]) que  $\text{Log } |\Phi'| \in \text{BMO}(\partial D)$  et donc que  $\text{Log } \frac{1}{|\Phi'|} \in \text{BMO}(\partial D)$ . D'après l'inégalité de John et Nirenberg, il existe  $a$ ,

$c > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in \mathbf{D}, \quad \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} \frac{1}{|\Phi'(z)|^a} |dz| &\leq C \exp \left( -a \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} \text{Log} |\Phi'(z)| |dz| \right) \\ &\leq \frac{C}{|\Phi'(\zeta)|^a} \exp a \left( \text{Log} |\Phi'(\zeta)| - \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} \text{Log} |\Phi'(z)| |dz| \right). \end{aligned}$$

Mais  $\text{Log} |\Phi'(\zeta)|$  est l'intégrale Poisson de ses valeurs au bord et, comme  $\text{Log} |\Phi'| \in \text{BMO}(\partial\mathbf{D})$ , on en déduit facilement

$\exists C > 0 \forall \zeta \in \mathbf{D}$ ,

$$(3) \quad \left| \text{Log} |\Phi'(\zeta)| - \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} \text{Log} |\Phi'(z)| |dz| \right| \leq C \|\text{Log} |\Phi'|\|_{\text{BMO}}.$$

De toute cette étude on déduit l'existence d'une constante  $C'$  telle que :

$$(4) \quad \forall \zeta \in \mathbf{D}, \quad \left( \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} \frac{1}{|\Phi'(z)|^a} |dz| \right)^{1/a} \leq C' \frac{1}{|\Phi'(\zeta)|}.$$

En multipliant (2) et (4) on s'aperçoit alors que  $|\Phi'| \in A^p(\partial\mathbf{D})$  avec  $p = 1 + \frac{1}{a}$ .

Réciproquement, supposons maintenant que  $\Gamma$  est un quasicercle,  $\Omega$  un domaine de Smirnov et  $|\Phi'|$  un poids de  $A^\infty(\partial\mathbf{D})$ . On sait alors que  $|\Phi'|$  vérifie une inégalité de Hölder inverse du type :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \quad \forall \zeta \in \mathbf{D}, \\ \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} |\Phi'(z)| |dz| \leq C \exp \left( \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} \text{Log} |\Phi'(z)| |dz| \right). \end{aligned}$$

Mais  $\Omega$  est un domaine de Smirnov et donc (3) est encore vrai, car  $\text{Log} |\Phi'| \in \text{BMO}(\partial\mathbf{D})$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \exists C' > 0, \quad \forall \zeta \in \mathbf{D}, \\ \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{\mathbf{I}(\zeta)} |\Phi'(z)| |dz| \leq C' |\Phi'(\zeta)| \end{aligned}$$

et le lemme 1 permet de conclure.

Le théorème 1 est ainsi démontré. Signalons que ce théorème a été

indépendamment démontré par D. S. Jerison et C. Kenig [4], mais les méthodes sont différentes.

**COROLLAIRE 1.** — Si  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc, il existe un réel  $p > 1$  tel que  $\Phi'$  appartienne à l'espace de Hardy  $H^p(\mathbb{D})$ .

*Démonstration.* — Cela découle immédiatement de la propriété des poids de la classe  $A^\infty$  de satisfaire une inégalité de Hölder inverse du type

$$\exists C > 0, \quad \exists p > 1, \quad \forall I \subset \partial\mathbb{D},$$

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I w^p(z) |dz| \right)^{1/p} \leq \frac{C}{|I|} \int_I w(z) |dz|$$

(voir [2]).

**COROLLAIRE 2.** — Supposons que  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc. Alors il existe deux constantes  $c, C > 0$ , telles que

$$\forall \zeta \in \mathbb{D}, \quad c \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)| |dz| \leq |\Phi'(\zeta)| \leq C \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)| |dz|.$$

*Démonstration.* — La première inégalité a déjà été démontrée. Pour démontrer l'autre, on utilise le (4) du théorème 1.

$$|\Phi'(\zeta)| \leq \frac{C'}{\left( \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{I(\zeta)} \left| \frac{1}{\Phi'(z)} \right|^a |dz| \right)^{1/a}} \leq C' \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{I(\zeta)} |\Phi'(z)| |dz|$$

(la deuxième inégalité est une conséquence de l'inégalité de Hölder).

**COROLLAIRE 3.** — Si  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc alors les courbes  $\Gamma_r$ , transformées par  $\Phi$  des cercles de centre 0 et de rayon  $r$  vérifient uniformément une condition corde-arc pour  $0 < r \leq 1$ .

*Démonstration.* — L'analogie du corollaire 3 pour les quasicerclles est vrai : ce résultat est implicite dans [1]. D'après le lemme de Pommerenke pour démontrer le corollaire 3 il suffit donc de prouver l'existence d'une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\forall \zeta \in \mathbb{D}, \quad \forall r \in ]0, 1],$$

$$(5) \quad \frac{1}{1 - |\zeta|} \int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)| |dz| \leq \beta |\Phi'(r\zeta)|.$$

Pour ce faire, on utilise d'abord le corollaire 2 qui fournit :

$$\exists C > 0, \quad \forall \zeta \in D, \\ \int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)| |dz| \leq \frac{C}{1-r} \int_{I(\zeta)} \left( \int_{I(rz)} |\Phi'(u)| |du| \right) |dz|$$

et l'on considère 2 cas pour estimer la dernière intégrale.

1<sup>er</sup> cas.  $1 - r \leq 1 - |\zeta|$ . Il vient en appliquant le théorème de Fubini

$$\frac{1}{1-r} \int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)| |dz| \leq \int_{I(r\zeta)} |\Phi'(u)| |du| \leq C(1-r|\zeta|) |\Phi'(r\zeta)|.$$

Mais  $1 - r|\zeta| \leq 2(1-|\zeta|)$  et (5) en découle.

2<sup>e</sup> cas.  $1 - |\zeta| \leq 1 - r$ . On utilise alors le fait que  $I(rz) \subset I(r\zeta)$ , et donc

$$\int_{I(\zeta)} |\Phi'(rz)| |dz| \leq \frac{1-|\zeta|}{1-r} \int_{I(r\zeta)} |\Phi'(z)| |dz| \leq C \frac{1-r|\zeta|}{1-r} (1-|\zeta|) |\Phi'(r\zeta)|.$$

Mais  $1 - r|\zeta| \leq 2(1-r)$  et on a encore (5).

#### 4. Cas particuliers.

Lorsqu'on impose des conditions supplémentaires à la courbe  $\Gamma$  on peut parfois préciser les conclusions du théorème 1.

a) Un domaine  $\Omega$  est dit spirauté de type  $\alpha$  ( $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ ) si l'on a la condition

$$\forall w \in \Omega, \quad \forall \tau \geq 0, \quad we^{-\tau e^{-i\alpha}} \in \Omega.$$

Pour  $\alpha = 0$  cette condition n'est autre que la définition d'un domaine étoilé. On montre (voir [8]) que si  $f$  est une fonction analytique injective sur  $D$  telle que  $f(0) = 0$ , alors  $f(D)$  est spirauté de type  $\alpha$  si et seulement si

$$(*) \quad \operatorname{Re} \left( e^{i\alpha z} \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > 0 \quad \text{pour} \quad |z| < 1.$$

PROPOSITION 2. — Soit  $\Gamma$  une courbe de Jordan vérifiant la condition corde-arc entourant un domaine spiralé de type  $\alpha$  et  $\Phi$  la transformation conforme de  $D$  sur  $\Omega$  vérifiant  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) \geq 0$ . Alors  $|\Phi'|$  appartient à tous les  $A^p(\partial D)$  pour  $p > 2$ .

Démonstration. — La fonction  $\frac{\Phi(z)}{z}$  est une fonction analytique sur  $D$  continue sur  $\bar{D}$  qui ne s'annule pas. On en déduit que  $\text{Log} \left| \frac{\Phi(z)}{z} \right|$  est bornée sur  $\bar{D}$ . D'autre part, en posant  $p(z) = e^{i\alpha z} \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$  on a que  $p$  est une fonction de  $H^1(D)$  (parce que  $\Gamma$  est rectifiable) qui est extérieure d'après la condition (\*). On a donc

$$\text{Log} |p(e^{i\theta})| = -H(\text{Arg } p(e^{i\theta}))$$

où  $H$  désigne la transformée de Hilbert, avec  $|\text{Arg } p| < \pi/2$ . On en déduit que  $|\Phi'(e^{i\theta})| = e^{u+Hv}$ , avec  $u \in L^\infty(\partial D)$  et  $\|v\|_\infty \leq \pi/2$ , et par conséquent, d'après le théorème de Helson-Szegö,

$$\forall \delta < 1, \quad |\Phi'|^\delta \in A^2(\partial D).$$

La proposition va alors découler du lemme suivant :

LEMME 2. — Soit  $w$  un poids appartenant à  $A^\infty(\partial D)$  tel que  $\forall \delta \in ]0, 1[$ ,  $w^\delta \in A^2(\partial D)$ , alors  $w \in A^p(\partial D)$  pour tout  $p > 2$ .

Démonstration. — Puisque  $w \in A^p(\partial D)$  pour  $p$  assez grand, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \forall I \text{ intervalle de } \partial D, \quad \frac{1}{|I|} \int_I w &\leq C \exp \frac{1}{|I|} \int_I \log w \\ &\leq C \left( \frac{1}{|I|} \int_I w^\delta \right)^{1/\delta}. \end{aligned}$$

Soit alors  $p$  un réel  $> 2$ . Alors  $1/p - 1 < 1$  et, d'après l'hypothèse,  $w^{1/p-1} \in A^2$  et donc

$$\begin{aligned} \exists C_p > 0, \quad \forall I, \\ \left( \frac{1}{|I|} \int_I w^{1/p-1} \right)^{p-1} \left( \frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/p-1} \right)^{p-1} &\leq C_p. \end{aligned}$$



Mais d'après ce qui vient d'être dit

$$\frac{1}{|I|} \int_I w \leq C \left( \frac{1}{|I|} \int_I w^{1/p-1} \right)^{p-1}$$

et donc :

$$\forall I \text{ intervalle } \subset \partial D, \quad \left( \frac{1}{|I|} \int_I w \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/p-1} \right)^{p-1} \leq C_p,$$

ce qui prouve que  $w \in A^p(\partial D)$ .

D'un autre côté, on peut montrer (voir [6]) que pour tout  $p < 2$  il existe un domaine vérifiant la condition corde-arc (même Lipschitz) tel que  $|\Phi'| \notin A^p$ .

b) On peut également préciser les conclusions du théorème 1 lorsqu'on impose des conditions de régularités à  $\Gamma$ .

**DÉFINITION 5.** — Soit  $\Gamma$  un arc de Jordan rectifiable. On dit que  $\Gamma$  est presque régulier si l'on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall M, N \in \Gamma, \\ MN \leq \eta \Rightarrow \widehat{MN} \leq (1 + \varepsilon)MN.$$

On vérifie facilement que toute courbe presque régulière vérifie la condition corde-arc. D'autre part, toute courbe de classe  $C^1$  est presque régulière, la réciproque étant fautive (voir [9]). Dans [9] on montre qu'une courbe  $\Gamma$  est presque régulière si et seulement si  $\text{Log } \Phi' \in \text{VMOA}(D)$  (c'est-à-dire  $H^1(D) \cap \text{VMO}(\partial D)$  où  $\text{VMO}(\partial D)$  désigne l'adhérence dans  $\text{BMO}(\partial D)$  des polynômes trigonométriques). De ceci on déduit facilement que si  $\Gamma$  est presque régulière, alors  $|\Phi'|$  appartient à tous les  $A^p(\partial D)$  pour  $p > 1$ .

## 5. Conclusion.

Tous ces résultats permettent de développer une théorie des espaces  $H^p(\Omega)$  lorsque  $\Gamma$  vérifie une condition corde-arc avec notamment caractérisation de ces espaces par fonction maximale non tangentielle et par l'intégrale de Paley-Littlewood. Voir [9] pour les détails. Notons enfin qu'il est vraisemblable que le résultat de la proposition 2 soit vrai pour toute courbe vérifiant la condition corde-arc, mais le problème est ouvert.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. AHLFORS, *Lectures on quasiconformal mappings*, Princeton, 1966.
- [2] R. R. COIFMAN, C. FEFFERMAN, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.*, 51 (1974), 241-249.
- [3] R. R. COIFMAN, Y. MEYER, Le théorème de Caldéron par des méthodes de variable réelle, *C.R.A.S.*, Paris, Sér. A, t. 289 (1979), 425-428.
- [4] D. S. JERISON, C. E. KENIG, Hardy spaces,  $A^\infty$  and singular integrals on chord-arcs domains, (preprint).
- [5] M. B. KELDYSCH, M. LAVRENT'EV, Sur la transformation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, *Ann. Sci. E.N.S.*, 3<sup>e</sup> série, t. 54 (1937), 1-38.
- [6] C. E. KENIG, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, *Amer. J. Math.*, 102 (1980), 129-163.
- [7] Ch. POMMERENKE, Schlichte Funktionen und BMOA, *Comm. Math. Helv.*, 62 (1977), 591-602.
- [8] Ch. POMMERENKE, *Univalent functions*, Göttingen, 1975.
- [9] M. ZINSMEISTER, Espaces de Hardy généralisés, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Orsay (1980).
- [10] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Cambridge, 1959.

Manuscrit reçu le 8 mai 1981.

Michel ZINSMEISTER,  
Centre de Mathématiques  
de l'École Polytechnique  
Plateau de Palaiseau  
91128 Palaiseau Cedex.

---