

JACQUES PEYRIÈRE

**Processus de naissance avec interaction des voisins, évolution de graphes**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 31, n° 4 (1981), p. 187-218

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1981\\_\\_31\\_4\\_187\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_4_187_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## PROCESSUS DE NAISSANCE AVEC INTERACTION DES VOISINS, ÉVOLUTION DE GRAPHS

par Jacques PEYRIÈRE (\*)

### INTRODUCTION

B. Mandelbrot [11, 12, 13, 14] a donné beaucoup de constructions itératives et aléatoires d'êtres géométriques qu'il appelle fractals, c'est-à-dire dont la dimension de Hausdorff-Besicovitch diffère de la dimension topologique. Les constructions procèdent par adjonction de détails de plus en plus fins à une figure initiale : à chaque étape de la construction on a une figure composée d'objets géométriques simples (segments, triangles, cubes, ...); pour passer d'une figure à la suivante, chaque objet simple est remplacé par une collection d'objets semblables et plus petits. Quatre de ces constructions sont décrites ci-dessous dans la section 1.

Pour rendre compte simultanément de ces diverses constructions, nous nous sommes placés dans un cadre abstrait et avons introduit ce que nous appelons les systèmes de Mandelbrot (M-systèmes) décrits ici en section 2. Ils procèdent du même principe que les grammaires formelles, à ceci près que les substitutions sont simultanées et que l'on peut produire, non seulement des mots, mais aussi des graphes colorés. Les M-systèmes ont une certaine parenté avec les systèmes de Lindenmayer [9], [10] et les grammaires génératrices de graphes. Un M-système est une sorte d'automate non déterministe qui décrit un ensemble de constructions possibles.

Les M-systèmes sont randomisés à la section 3. Le procédé utilisé pour ce faire est différent de celui adopté par Jurgensen [7] pour les systèmes de

(\*) La majeure partie de ce travail a été effectuée au centre de recherches IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights (New York).

Lindenmayer. Voici brièvement décrite la façon dont fonctionne un M-système. A l'instant  $n$  on a une population organisée en graphe coloré (les couleurs correspondent aux différents types d'individus composant la population). A l'instant  $n + 1$  chaque sommet est remplacé aléatoirement par un graphe coloré; les graphes obtenus sont accrochés ensemble, ce qui fournit la population à l'instant  $n + 1$ . Une certaine dépendance des substitutions de sommets voisins est autorisée. Dans le cas où il y a indépendance, si l'on oublie la structure de graphe, on obtient simplement un processus de Galton-Watson à plusieurs types.

Les résultats concernent d'abord l'évolution du nombre d'éléments de la population (section 4), puis, dans certains cas, la fréquence d'occurrence d'un graphe coloré donné comme sous-graphe de la population à l'instant  $n$  (section 5). Dans les cas les plus simples un théorème de limite centrale précise les résultats précédents (section 7). Dans la section 6, on obtient un résultat sur le nombre de composantes connexes de la population, du moins dans le cas où tous les graphes considérés sont des arbres. Dans la section 8, on montre que les arbres de dérivation ont presque sûrement une certaine propriété d'homogénéité, ce qui permettrait, comme dans [16], de déterminer la dimension de Hausdorff-Besicovitch de certains ensembles construits par B. Mandelbrot, motivation initiale de ce travail.

Les résultats sont obtenus sous des hypothèses assez fortes. Par exemple, l'explosion exponentielle de la population est démontrée dans le cas où les moments d'ordre 2 existent, et non pas, comme il l'est vraisemblable, sous la condition logarithmique, comme pour les processus de Galton-Watson [1].

## 1. DES CONSTRUCTIONS DE B. MANDELBROT

### 1.1. Un « collier » de Mandelbrot.

On part d'un triangle  $T_0$  dont on distingue deux des côtés, l'un est le côté d'entrée, l'autre celui de sortie. On sélectionne au hasard et indépendamment une moitié de chacun de ces côtés. Pour joindre, en passant par l'intérieur de  $T_0$ , les deux moitiés sélectionnées on est amené à traverser un ou trois des quatre triangles homothétiques de  $T_0$  dans le

rapport  $\frac{1}{2}$  et qui le pavent. Chacun des triangles traversés est naturellement muni de côtés d'entrée et de sortie. On remplace  $T_0$  par le ou les triangles traversés et l'on répète l'opération précédente indéfiniment étant entendu que l'on sélectionne la même moitié d'un segment qu'il soit considéré comme côté de sortie d'un triangle ou côté d'entrée d'un autre. A part cela, tous les choix sont indépendants et faits selon la même loi : il n'est pas difficile de distinguer la moitié droite de la moitié gauche d'un segment d'entrée et d'attribuer à la première par exemple, la probabilité  $p$ .

On obtient ainsi une suite de colliers : après la  $n^{\text{ième}}$  étape on a une suite de  $N_n$  triangles semblables à  $T_0$  dans le rapport  $2^{-n}$ , telle que deux triangles consécutifs partagent un côté. (*Voir la figure 1*).

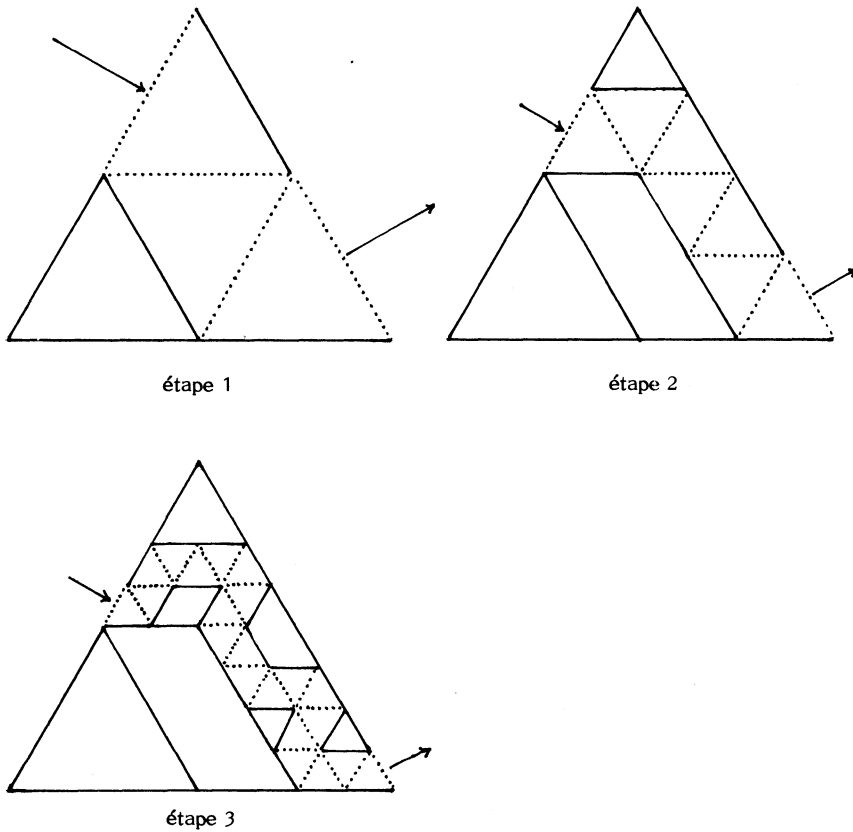


Figure 1. (Construction 1.1).

Notons  $E_n$  la réunion des triangles composant le  $n^{\text{ième}}$  collier. L'ensemble  $\bigcap_{n \geq 0} E_n$  est une courbe compacte dont J. Hawkes [5] a montré qu'elle n'a, avec probabilité 1, pas de points doubles. Les considérations qui suivent ont eu pour motivation le calcul de la dimension de Hausdorff de cette courbe. On obtient évidemment l'inégalité

$$\dim \gamma \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\text{Log}_2 N_n)/n.$$

L'homogénéité, sinon de la courbe, du moins de sa construction, laisse penser qu'avec probabilité 1 on a  $\dim \gamma = \liminf (\text{Log}_2 N_n)/n$ . D'où l'étude asymptotique de  $N_n$ . On est en présence d'un processus de naissance : une perle du  $n^{\text{ième}}$  collier donne naissance à une ou trois perles semblables dans le rapport  $\frac{1}{2}$ , ce processus n'est pas un processus classique car deux perles voisines ne procréent pas indépendamment, contrairement à deux perles non consécutives.

### 1.2. Un autre collier aléatoire.

Cette construction est voisine de la précédente. On part d'un carré  $Q_0$ . On distingue deux de ses côtés, l'un sert d'entrée, l'autre de sortie. On choisit aléatoirement une moitié sur chacun de ces côtés ainsi qu'un des quatre segments joignant le centre du carré aux milieux des côtés de  $Q_0$ . Pour joindre les moitiés sélectionnées sur l'entrée et la sortie, en passant par l'intérieur de  $Q_0$ , sans couper le segment sélectionné issu du centre il faut traverser selon les cas un, deux, trois ou quatre des quatre carrés égaux pavant  $Q_0$ . On remplace  $Q_0$  par les carrés traversés et l'on recommence indéfiniment l'opération. Comme précédemment, tout nouveau choix est indépendant des précédents et fait selon la même loi.

### 1.3. Un réseau fluvial.

Partons d'un triangle équilatéral blanc  $T_0$  dont deux des côtés sont peints en noir. Peignons en noir au hasard l'une des moitiés du côté blanc (les deux moitiés sont ici équiprobables). Pavons  $T_0$  au moyen de quatre triangles égaux, désignés génériquement par  $T_1$ .

Les triangles  $T_1$  forment un arbre : deux triangles sont liés s'ils partagent une arête ; le triangle  $T_1$  ayant en commun avec  $T_0$  une partie de la frontière blanche est la racine. Peignons, au hasard, en noir une moitié de chaque arête blanche des triangles  $T_1$ . Les triangles  $T_2$  (les  $4^2$  triangles égaux qui pavent  $T_0$ ) forment un arbre : deux triangles sont liés s'ils partagent une arête blanche, comme précédemment cet arbre a une racine... Chaque nouveau choix est indépendant des précédents. On obtient ainsi des arbres aléatoires. Le problème ici n'est évidemment pas d'estimer le nombre de sommets du  $n^{\text{ième}}$  arbre mais d'en étudier la structure. Pour parler de façon plus imagée appelons rivières les arêtes, les rivières issues d'une source (c'est-à-dire d'une feuille de l'arbre) sont les rivières d'ordre 1 ; après le confluent de deux rivières d'ordre  $p$  on a une rivière d'ordre  $p + 1$  ; après le confluent de deux rivières d'ordres différents  $p$  et  $q$  la rivière résultante a pour ordre  $\sup(p,q)$ . Le problème est d'étudier, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , le rapport du nombre de rivières d'ordre  $p$  dans le  $n^{\text{ième}}$  réseau fluvial à celui des rivières d'ordre  $p + 1$ . Il résultera d'un des théorèmes établis plus tard que, pour chaque  $p$ , ce rapport tend presque sûrement vers une constante.

#### 1.4. Des surfaces chiffonnées.

Nous partons d'un cube fermé blanc  $Q_0$  dont certaines arêtes sont peintes en noir de façon que toute face de  $Q_0$  contienne deux arêtes blanches ou aucune.

$Q_0$  est pavé par 8 cubes fermés égaux appelés cubes  $Q_1$ . Chaque cube  $Q_1$  est pavé par 8 cubes fermés égaux ; les cubes ainsi obtenus sont appelés cubes  $Q_2$  et ainsi de suite.

On construit par récurrence une suite  $\{\mathcal{E}_n\}_{n \geq 0}$  de familles finies de cubes de façon que

- (i)  $\mathcal{E}_n$  soit composé de cubes  $Q_n$ ,
- (ii) chaque élément de  $\mathcal{E}_n$  ait une partie de sa frontière peinte en noir de telle façon que chacune de ses faces ait zéro ou deux de ses arêtes blanches.

On pose  $\mathcal{E}_0 = \{Q_0\}$ . Pour obtenir  $\mathcal{E}_{n+1}$  à partir de  $\mathcal{E}_n$  on effectue les opérations suivantes en considérant tour à tour chacun des éléments  $Q$  de  $\mathcal{E}_n$ . Toute face de  $Q$  dont la frontière est entièrement noire est peinte en noir. Ensuite on considère une à une les autres faces  $F$  de  $Q$  ; on peint

en noir une moitié de chacune des arêtes de  $F$  complètement blanches (s'il y en a). Si l'intérieur de  $F$  est totalement blanc on peint en noir l'un des segments joignant le centre de  $F$  aux milieux de ses arêtes. On pave  $F$  par quatre carrés égaux, si un de ces carrés a au moins les  $\frac{3}{4}$  de sa frontière noire on le peint en noir ainsi que sa frontière et l'on répète l'opération autant de fois qu'elle est possible. Finalement l'un des huit segments joignant le centre de  $Q$  aux centres de ses faces est peint en noir.

Alors  $\mathcal{E}_{n+1}$  est constitué des cubes  $Q_{n+1}$  contenus dans un élément de  $\mathcal{E}_n$  et dont au moins une arête est blanche.

Chaque nouvelle opération de peinture est faite au hasard et de façon indépendante des précédentes; à chaque stade, des événements similaires sont équiprobables.

Observons que l'on peut considérer  $\mathcal{E}_n$  comme les sommets d'un graphe : deux éléments de  $\mathcal{E}_n$  sont liés s'ils partagent une arête. Nous avons ainsi construit un processus de Markov dont les états successifs sont des graphes. Il s'agit aussi d'un processus de naissance : chaque sommet du graphe  $\mathcal{E}_n$  donne naissance à un nouveau graphe qui s'accroche aux rejets des voisins. Comme précédemment il y a interaction des voisins.

Notons  $E_n$  la réunion des éléments de  $\mathcal{E}_n$  et  $\Sigma$  l'intersection,  $\bigcap_{n \geq 0} E_n$ . Le problème initialement posé était d'évaluer la dimension de Hausdorff de  $\Sigma$  et de montrer qu'elle est presque sûrement constante. Là aussi la solution de ce problème suppose une étude asymptotique du nombre d'éléments de  $\mathcal{E}_n$ .

## 2. LES SYSTÈMES DE MANDELBROT

### 2.1. Graphes étiquetés.

Nous appellerons graphe étiqueté un triplet  $Z = (V, w, E)$  où  $V$  est un ensemble fini,  $w$  une application de  $V$  dans  $\mathbf{N}^*$  et  $E$  une partie de l'ensemble  $\{(a, m, b, n) \in V \times \mathbf{N} \times V \times \mathbf{N}; 1 \leq m \leq w(a) \text{ et } 1 \leq n \leq w(b)\}$  de telle sorte que l'on ait

- (i)  $(a, m, b, n) \in E \Rightarrow a \neq b$

(ii) pour chaque couple  $(a,m)$  dans  $V \times \mathbf{N}$  l'ensemble  $\{(b,n) \in V \times \mathbf{N}; (a,m,b,n) \in E \text{ ou } (b,n,a,m) \in E\}$  a un élément au plus.

$V$ , parfois noté  $V_Z$ , est l'ensemble des sommets de  $Z$ ,  $E$  l'ensemble de ses arêtes.

Il sera commode d'utiliser les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \{(a,m) \in V \times \mathbf{N}; 1 \leq m \leq w(a)\}, \\ W(X) &= \{\alpha \in \tilde{V}; (\forall \beta \in \tilde{V})((\alpha, \beta) \notin E \text{ et } (\beta, \alpha) \notin E)\}, \\ w(X) &= \text{card } W(X), \end{aligned}$$

$$\chi(a) = \text{card} \{(m,b,n) \in \mathbf{N} \times V \times \mathbf{N}; (a,m,b,n) \in E \text{ ou } (b,n,a,m) \in E\}.$$

La figure 2 illustre ces définitions et notations.

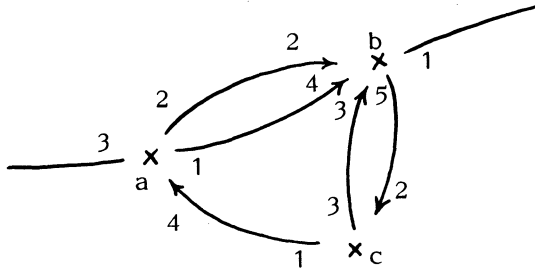


Figure 2. (Graphes étiquetés).

$$\begin{aligned} V &= \{a,b,c\} \\ w(a) &= 4, \quad w(b) = 5, \quad w(c) = 3 \\ E &= \{(a,1,b,4), (a,2,b,2), (b,5,c,2), (c,1,a,4), (c,3,b,3)\} \\ W(X) &= \{(a,3), (b,1)\} \\ \chi(a) &= 3, \quad \chi(b) = 4, \quad \chi(c) = 3. \end{aligned}$$

Il y a un seul graphe étiqueté  $\varepsilon$  tel que  $V_\varepsilon$  soit l'ensemble vide.

Soit  $Z$  un graphe étiqueté et  $V'$  une partie de  $V$ . Soit  $w'$  la restriction de  $w$  à  $V'$  et  $E'$  l'ensemble  $E \cap (\tilde{V}' \times \tilde{V}')$ . Le graphe étiqueté  $(V',w',E')$  est par définition le sous-graphe étiqueté de  $Z$  dont l'ensemble des sommets est  $V'$ .

Un graphe non orienté  $Z^*$  est associé au graphe étiqueté  $Z = (V,w,E)$  : l'ensemble des sommets de  $Z^*$  est  $V$ , celui de ses arêtes est

$$E^* = \{(a,b) \in V \times V; (\exists (m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N})((a,m,b,n) \in E \text{ ou } (b,n,a,m) \in E)\}.$$

Les composantes connexes d'un graphe étiqueté  $Z$  sont les sous graphes étiquetés correspondant aux composantes connexes de  $Z^*$ .



La distance le long de  $Z$ ,  $d_Z(a,b)$ , de deux sommets  $a$  et  $b$  de  $Z$  est la distance de  $a$  à  $b$  considérés comme sommets du graphe  $Z^*$ .

La boule de centre  $a$ , de rayon  $k$ , dans  $Z$  est le sous-graphe étiqueté de  $Z$  dont les sommets sont les sommets de  $Z$  situés à une distance de  $a$  inférieure à  $k$ ; elle est notée  $B_Z(a,k)$ .

## 2.2. Accrochages de graphes étiquetés.

Soit  $Z'$  un graphe étiqueté,  $\{Z_j\}_{j \in V_{Z'}}$  une famille finie de graphes étiquetés indexée par  $V_{Z'}$  et  $\varphi$  une injection d'une partie  $D_\varphi$  de  $\hat{V}_{Z'}$  dans la réunion disjointe de la famille  $\{W(Z_j)\}_{j \in V_{Z'}}$  telle que  $\varphi(j,m)$  soit dans  $W(Z_j)$  si  $(j,m)$  est dans  $D_\varphi$ .

Le graphe étiqueté  $Z''$  dont la définition suit sera appelé résultat de l'accrochage des graphes étiquetés  $\{Z_j\}_{j \in V_{Z'}}$  suivant le couple  $(Z', \varphi) : V_{Z''}$  est la réunion disjointe de la famille  $\{V_j\}$ ,  $w_{Z''}$  est la fonction qui prolonge chaque  $w_j$  et

$$E_{Z''} = \left( \bigcup_{a \in V'} E_a \right) \cup \{(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)); (\alpha, \beta) \in E' \cap D_\varphi \times D_\varphi\}.$$

## 2.3. Ions.

Soit  $A$  un ensemble dont nous appellerons les éléments couleurs et  $w$  une application de  $A$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

Considérons les couples  $(Z, \lambda)$  où  $Z$  est un graphe étiqueté et  $\lambda$  une application de  $V_Z$  dans  $A$  telle que l'on ait  $w_Z = w \circ \lambda$  (une telle application sera appelée coloration de  $Z$ ). Deux tels couples  $(Z, \lambda)$  et  $(Z', \lambda')$  sont équivalents s'il existe une bijection  $u$  de  $V_Z$  sur  $V_{Z'}$  telle que l'on ait  $\lambda' \circ u = \lambda$ ,  $w_{Z'} \circ u = w_Z$  et telle que  $(a, m, b, n)$  appartienne à  $E_Z$  si et seulement si  $(u(a), m, u(b), n)$  appartient à  $E_{Z'}$ . On appellera  $A$ -ions les classes d'équivalences.

Si la construction d'accrochage est effectuée sur des ions le résultat est naturellement muni d'une coloration (celle qui étend chacune des colorations des  $X_j$ ). On parlera donc d'accrochage d'ions selon un graphe étiqueté.

Si  $\alpha = (a, m, b, n)$  est dans  $E$  nous poserons  $\lambda(\alpha) = (\lambda(a), m, \lambda(b), n)$  (il n'y a pas d'inconvénient à utiliser à nouveau la lettre  $\lambda$ ).

**2.4. Les M-systèmes.**

A et  $w$  ont la même signification qu'en 2.3. Un M-système (système de Mandelbrot) agissant sur  $(A,w)$  est un quadruplet  $(\Omega,g,\psi,R)$  où

- (i)  $\Omega = \{\Omega_a\}_{a \in A}$  est une famille d'ensembles,
- (ii)  $g = \{g_a\}_{a \in A}$  où  $g_a$  est une application de  $\Omega_a$  dans l'ensemble des A-ions,
- (iii)  $\psi = \{\psi_a\}_{a \in A}$  où, pour chaque  $\omega$  dans  $\Omega_a$ ,  $\psi_a(\omega)$  est une injection d'une partie de  $W(g_a(\omega))$  dans l'ensemble  $\{1,2,\dots,w(a)\}$ ,
- (iv)  $R = \{R_a\}_{a \in \bar{A} \times \bar{A}}$  où  $R_{(a,m,b,n)}$  est une partie de  $\Omega_a \times \Omega_b$ .

Un M-système donne lieu, de façon analogue à une grammaire formelle ou à un système de Lindemayer [10], à une notion de dérivation. Si

$Z = (V,w,E,\lambda)$  est un A-ion on note  $\Omega_Z$  l'ensemble  $\{\omega = \{\omega_a\}_{a \in V} \in \prod_{a \in V} \Omega_{\lambda(a)};$   
 $\forall (a,m,b,n) \in E, (\omega_a, \omega_b) \in R_{(\lambda(a),m,\lambda(b),n)}\}$ . Si  $\omega$  est dans  $\Omega_Z$  on définit une application  $\varphi$  d'une partie de  $\bar{V}$  dans la réunion disjointe des ensembles  $W(g_{\lambda(a)}(\omega_a))$ ,  $a \in V$  :  $\varphi(a,m)$  appartient à  $W(g_{\lambda(a)}(\omega_a))$  et, si  $m$  est dans l'image de  $\psi_a$ ,  $\varphi(a,m) = \psi_a^{-1}(m)$ ; on note alors  $g_Z(\omega)$  le résultat de l'accrochage suivant  $(Z,\varphi)$  des ions  $g_a(\omega_a)$ ,  $a \in V$ . On dira aussi que  $g_Z(\omega)$  dérive de  $Z$  selon le M-système considéré.

**3. M-SYSTÈMES PROBABILISÉS**

**3.1. Chaînes de Markov d'ions.**

A partir de maintenant nous n'étudierons qu'une version probabilisée de la notion de M-système. Ce qui change par rapport au paragraphe 2.4 est que le système des relations  $R$  est remplacé par un système projectif de probabilités comme on va l'expliquer.

L'ensemble  $A$  est supposé dénombrable. Soit  $\mathcal{G}$  un ensemble d'ions tel que si un ion est dans  $\mathcal{G}$ , ses sous-ions connexes y sont aussi. On suppose que, pour chaque  $Z$  dans  $\mathcal{G}$ , on s'est donné un espace probabilisé

dénombrable  $(\Omega_Z, p_Z)$  et, pour chaque sous-ion connexe  $Z'$  de  $Z$ , une application  $r_{Z',Z}$  de  $\Omega_Z$  dans  $\Omega_{Z'}$  telle que  $p_{Z'}$  soit la mesure image de  $p_Z$  par  $r_{Z',Z}$ . On suppose de plus que l'on a  $r_{Z',Z} = r_{Z',Z'} \circ r_{Z',Z}$ .

Si  $Z$  est un ion et  $a$  un de ses sommets on écrira  $r_{a,Z}$  au lieu de  $r_{Z',Z}$  pour désigner l'application associée au sous-ion  $Z'$  de  $Z$  dont le seul sommet est  $a$ .

Une application  $g_Z$  de  $\Omega_Z$  dans l'ensemble des A-ions est définie :  $g_Z(\omega)$  est le résultat de l'accrochage de la famille  $\{g_{\lambda(a)}(r_{a,Z}(\omega))\}_{a \in V_Z}$  suivant  $(Z, \varphi)$  où  $\varphi$  est construit comme en 2.4.

On suppose de plus que  $g_Z$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{G}$ . On définit alors une probabilité de transition  $Q$  sur  $\mathcal{G} \times \mathcal{G} : Q(Z, \cdot)$  est l'image de  $p_Z$  par  $g_Z$ .

$\{Z_n\}_{n \geq 0}$  désigne la chaîne de Markov canonique et stationnaire associée à  $Q$ . Comme d'habitude  $P_{Z_0}$  désigne la probabilité sur les trajectoires partant de  $Z_0$  et  $E_{Z_0}$  l'espérance correspondante.

### 3.2. Exemples.

#### 3.2.1. Ions arborescents.

On suppose que  $\mathcal{G}$  est composé d'ions dont les graphes sous-jacents à leurs composantes connexes sont des arbres. En fait, on exige plus : si  $Z = (V, w, E)$  est dans  $\mathcal{G}$ , les ensembles  $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (a, m, b, n) \in E \text{ ou } (b, n, a, m) \in E\}$  sont supposés avoir au plus un élément.

Pour chaque  $a$ , élément de  $A$ , on se donne un espace probabilisé dénombrable  $(\Omega_a, p_a)$  et pour chaque  $(a, m, b, n)$  élément de  $\tilde{A} \times \tilde{A}$ , on se donne une probabilité  $q_{(a,m,b,n)}$  sur  $\Omega_a \times \Omega_b$  dont les probabilités marginales sont  $p_a$  et  $p_b$ .

Si  $Z$  est un élément de  $\mathcal{G}$  on pose  $\Omega_Z = \prod_{a \in V_Z} \Omega_{p(a)}$  et

$$p_Z(\{\omega_a\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \prod_{a : \tilde{X}(a) > 1} p_{\lambda(a)}(\omega_a) = 0 \\ \prod_{a : \tilde{X}(a) = 0} p_{\lambda(a)}(\omega_a) \prod_{(a,m,b,n) \in E} q_{\lambda(a,m,b,n)}(\omega_a, \omega_b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que ce système de probabilités est projectif au sens où on l'a défini précédemment (les applications  $r$  sont les projections sur les produits partiels).

3.2.2. *Un autre exemple.*

Cette fois-ci on impose des restrictions à la façon dont les sommets voisins interagissent, ce qui permet de considérer des graphes qui ne soient pas des arbres.

On se donne pour chaque  $a$  dans  $A$  des espaces probabilisés dénombrables  $(\Omega_{a,i}, p_{a,i})_{1 \leq i \leq w(a)}$  dont le produit est  $(\Omega_a, p_a)$ . On se donne en outre une partie  $\Delta$  de  $\bar{A} \times \bar{A}$ , et, pour chaque  $(a, m, b, n)$  dans  $\Delta$ , une probabilité  $c_{a,m,b,n}$  sur  $\Omega_{a,m} \times \Omega_{b,n}$  dont les probabilités marginales sont  $p_{a,m}$  et  $p_{b,n}$ . On définit alors une probabilité  $q_{a,m,b,n}$  sur  $\Omega_a \times \Omega_b$  ainsi :

$$q_{a,m,b,n}(\{\omega_{a,i}\}, \{\omega_{b,j}\}) = \prod_{i \neq m} p_{a,i}(\omega_{a,i}) \cdot \prod_{j \neq n} p_{b,j}(\omega_{b,j}) \cdot c_{a,m,b,n}(\omega_{a,m}, \omega_{b,n}).$$

Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des ions  $Z$  tels que  $\rho(E_Z)$  soit contenu dans  $\Delta$ . Si  $Z$  est dans  $\mathcal{G}$  on définit  $(\Omega_Z, p_Z)$  comme au paragraphe précédent.

**3.3. Hypothèses et notations.**

Si  $Z$  est un  $A$ -ion on désigne par  $L(Z)$  l'élément de  $\mathbf{R}^A$  dont la composante associée à  $a$  est le nombre de sommets de  $Z$  dont la couleur est  $a$ ; le nombre de sommets de  $Z$  sera noté  $|Z|$ .

Nous supposons désormais que  $A$  est un ensemble fini. Nous désignerons par  $M$  la matrice indexée par  $A \times A$ , dont la colonne associée à  $a$  est  $E_{p_a}(L \circ g_a)$ .

En ce qui concerne les matrices à coefficients positifs nous adoptons la terminologie de [18].

Nous ferons sur  $M$  le groupe suivant d'hypothèses :

(M) Il existe une partition de  $A$ ,  $A = A_1 \cup A_2$ , telle que  $A_1$  soit non vide et telle que la forme correspondante de la matrice  $M$  soit  $\begin{pmatrix} S & O \\ T & U \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} S & T \\ O & U \end{pmatrix}$ , la matrice  $S$  (indexée par  $A_1 \times A_1$ ) étant irréductible et sa

valeur propre de Perron-Frobenius  $\rho$  étant strictement supérieure à 1 et au module de toute valeur propre de la matrice  $U$ .

Dans ces conditions les espaces propres de  $M$  et de sa transposée associés à  $\rho$  sont unidimensionnels. Soit  $\xi$  un vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre  $\rho$  et  $\xi^*$  un de la transposée de  $M$ , tels que l'on ait  $\langle \xi^*, \xi \rangle = 1$  (où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne l'accouplement entre  $\mathbf{R}^A$  et son dual). Les composantes de  $\xi$  et  $\xi^*$  sur les bases canoniques sont positives, non nulles si elles correspondent à des éléments de  $A_1$ .

Nous ferons en outre éventuellement une ou plusieurs des hypothèses suivantes.

(V) Pour tout  $a \in A$ ,  $E_{p_a}(|g_a|^2) < \infty$ .

(D1) Il existe un entier  $\ell$  tel que, quels que soient les sommets  $a_1$  et  $a_2$  d'un ion  $Z$ , dont la distance le long de  $Z$  est strictement supérieure à  $\ell$ , les variables  $r_{a_1, Z}$  et  $r_{a_2, Z}$  sont indépendantes.

(D2) Il existe un entier  $\ell$ , tel que, pour toute famille  $Z^{(1)}, \dots, Z^{(v)}$  de sous-ions connexes de  $Z$ , dont les distances mutuelles le long de  $Z$  sont strictement supérieures à  $\ell$ , les variables  $r_{Z^{(1)}, Z}, \dots, r_{Z^{(v)}, Z}$  sont indépendantes.

(G) Pour tout  $a \in A_1$ , pour  $p_a$ -presque tout  $\omega$  dans  $\Omega_a$ ,  $g_a(\omega)$  a un sommet dont la couleur appartient à  $A_1$ .

### 3.4. Résultats.

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses (M), pour chaque  $Z_0 \in \mathcal{G}$ ,  $\rho^{-n} \langle \xi^*, L(Z_n) \rangle$  tend  $P_{Z_0}$ -presque sûrement vers une v.a.r.  $W$ .*

2. *Sous les hypothèses (M), (V) et (D1),  $\rho^{-n} \langle \xi^*, L(Z_n) \rangle$  converge vers  $W$  dans  $L^2(P_{Z_0})$ .*

3. *Sous les hypothèses (M), (V), (D2) et (G) on a, pour tout  $a \in A_1$ ,  $P_a(W=0)=0$ .*

4. *Sous les hypothèses (M), (V), (D1) et si la matrice  $S$  est primitive, pour tout  $Z_0$ ,  $\rho^{-n} L(Z_n)$  converge vers  $W\xi$ ,  $P_{Z_0}$ -presque sûrement et dans  $L^2(P_{Z_0})$ .*

**4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.4.**

**4.1.**

On vérifie sans peine que l'on a  $E_Z(L \circ g_Z) = ML(Z)$  (cela n'utilise pas l'hypothèse (M)). On en déduit que la suite  $\rho^{-n} \langle \xi^*, L(Z_n) \rangle$  est une martingale; comme celle-ci est positive elle converge presque sûrement. Ceci prouve la première assertion. Pour prouver la seconde, il faut montrer que cette martingale est bornée dans  $L^2(P_Z)$ , ce qui sera fait dans les deux prochains paragraphes.

**4.2. Diversification des couleurs.**

Étant donné un nombre entier  $k \geq 1$ , posons

$$A^k = \{B_Z(a,k); Z \in \mathcal{G}, a \in V_Z\}$$

et définissons une application  $w^k$  de  $A^k$  dans  $\mathbf{N}$  :  $w^k(B_Z(a,k)) = w(a)$ .

Si  $Z$  est un A-ion on définit une nouvelle coloration  $\lambda^k$  sur le graphe étiqueté sous-jacent :  $\lambda^k(a) = B_Z(a,k)$ . On obtient ainsi un  $A^k$ -ion noté  $Z^k$ .

Soit  $\mathcal{G}^k$  l'ensemble des  $A^k$ -ions ainsi défini :  $\mathcal{G}^k$  contient  $\{Z^k; Z \in \mathcal{G}\}$  et si  $\mathcal{G}^k$  contient un ion il contient tous ses sous-ions connexes.

Notre intention est de définir un M-système probabilisé, opérant sur les  $A^k$ -ions, essentiellement équivalent au M-système dont nous sommes partis.

Pour cela nous devons d'abord associer un espace probabilisé à chaque élément de  $\mathcal{G}^k$ . L'espace associé à  $Z^k$  est  $(\Omega_Z, p_Z)$ . Si  $Y$  est un sous-ion connexe de  $Z^k$  on considère  $Y'$  le sous-ion de  $Z$  dont les sommets sont les sommets de  $Z$  situés à une distance, le long de  $Z$ , de  $V_Y$  inférieure ou égale à  $k$  et l'on associe à  $Y$  l'espace  $(\Omega_Y, p_Y)$ . Cet espace ne dépend que de  $Y$  et non pas du choix de  $Z$ . On définit de même les applications  $r_{ZZ'}$  : pour des A-ions convenables  $Y$  et  $Y'$  les espaces associés aux  $A^k$ -ions  $Z$  et  $Z'$  ( $Z$  étant un sous-ion de  $Z'$ ) sont les espaces  $(\Omega_Y, p_Y)$  et  $(\Omega_{Y'}, p_{Y'})$ , alors on pose  $r_{ZZ'} = r_{Y,Y'}$ .

Ensuite nous devons définir les applications de génération associées aux nouvelles couleurs. Soit  $\alpha = B_Z(a, k)$  un élément de  $A^k$  et  $\omega \in \Omega_\alpha$ , alors  $g^k(\omega)$  est le sous- $A^k$ -ion de  $(g_\alpha(\omega))^k$  dont les sommets sont les sommets de  $g_\alpha(\omega)$  engendrés par  $a$ . Les graphes étiquetés sous-jacents à  $g_\alpha(r_{a,\alpha}(\omega))$  et à  $g_\alpha^k(\omega)$  sont les mêmes et  $\psi_a$  définit une application  $\psi_\alpha^k$  d'une partie de  $W(g_\alpha^k(\omega))$  dans  $\{1, 2, \dots, w^k(a)\}$ .

Nous venons ainsi de construire, à partir d'un M-système probabilisé agissant sur  $A$ , un M-système agissant sur  $A^k$  et l'on peut vérifier que le processus  $\{Z_n^k\}_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov dont la transition est obtenue au moyen du nouveau M-système.

Comme précédemment une matrice  $M_k$  est associée à ce nouveau M-système. Cette matrice s'obtient en remplaçant chaque élément  $m_{a,b}$  de  $M$  par une matrice à coefficients positifs ou nuls dont la somme des éléments de chaque colonne est  $m_{a,b}$ . Par suite  $\rho$  est une valeur propre de  $M_k$  et toute valeur propre de  $M_k$  a un module inférieur à  $\rho$ .

Notons  $L^k(Z)$  le vecteur  $L(Z^k)$  (appartenant à  $\mathbf{R}^{A^k}$ ) associé à  $Z^k$  comme  $L(Z)$  l'est à  $Z$ . Comme en 4.1 nous avons

$$E_{p_Z}(L^k \circ g_Z) = M_k L^k(Z),$$

d'où

$$E_{Z_0}(L^k(Z_n)) = M_k^n L^k(Z_0).$$

### 4.3. Estimation des moments d'ordre 2.

Nous faisons les hypothèses (V) et (D1).

Si  $\alpha = B_Z(a, \ell)$  est un élément de  $A^\ell$ , on note  $V$  l'ensemble de ses sommets et l'on pose

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha &= \sum_{b \in V} E_{p_\alpha} [(L \circ g_{\lambda(a)} \circ r_{a,\alpha}) \otimes (L \circ g_{\lambda(b)} \circ r_{b,\alpha})] \\ &\quad - \sum_{b \in V} [E_{p_{\lambda(a)}}(L \circ g_{\lambda(a)})] \otimes [E_{p_{\lambda(b)}}(L \circ g_{\lambda(b)})]. \end{aligned}$$

Si  $Z$  est un A-ion et si  $a$  et  $b$  sont deux de ses sommets dont la distance est inférieure ou égale à  $\ell$ , la distribution du couple  $(r_{a,Z}, r_{b,Z})$  est

la même que celle du couple  $(r_{a,\alpha}, r_{b,\alpha})$  où  $\alpha = B_Z(a, \ell)$ ; donc à cause de l'hypothèse (D1) on a

$$\begin{aligned} E_{\rho Z}(L \circ g_Z \otimes L \circ g_Z) &= (M \otimes M)(L(Z) \otimes L(Z)) + \sum_{a \in V_Z} \Lambda_{\lambda'(a)} \\ &= (M \otimes M)(L(Z) \otimes L(Z)) + \Lambda \cdot L'(Z) \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\Lambda \cdot L'(Z) = \sum_{\alpha \in A'} \Lambda_{\alpha}(L'(Z))_{\alpha}$ .

Par suite on a la formule de récurrence

$$E_{Z_0}(L(Z_{n+1}) \otimes L(Z_{n+1})) = (M \otimes M)E(L(Z_n) \otimes L(Z_n)) + \Lambda \cdot M^n L'(Z_0)$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\begin{aligned} \rho^{-2n} E_{Z_0}[L(Z_n) \otimes L(Z_n)] &= \left[ \left( \frac{M}{\rho} \right)^n \otimes \left( \frac{M}{\rho} \right)^n \right] [L(Z_0) \otimes L(Z_0)] \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \left( \frac{M}{\rho} \right)^{n-j-1} \otimes \left( \frac{M}{\rho} \right)^{n-j-1} \right] \Lambda \cdot \left( \frac{M'}{\rho^2} \right)^j L'(Z_0). \end{aligned}$$

Dans le cas où la matrice S est primitive, on a  $\left( \frac{M}{\rho} \right)^n = \xi \otimes \xi^* + 0(\alpha^n)$  où  $\alpha$  est un nombre de l'intervalle ]0,1[ (c'est uniquement sous cette forme que l'on utilise l'hypothèse de primitivité de S). Ceci, compte-tenu de l'égalité précédente, entraîne que l'on a

$$\begin{aligned} \rho^{-2n} E_{Z_0}[L(Z_n) \otimes L(Z_n)] &= (\xi \otimes \xi^* \otimes \xi \otimes \xi^*) \times \\ &\quad \left[ L(Z_0) \otimes L(Z_0) + \frac{1}{\rho^2} \Lambda \cdot \left( I - \frac{M'}{\rho^2} \right)^{-1} L'(Z_0) \right] + 0(\alpha^n) \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est un nombre de l'intervalle ]0,1[. On termine alors la démonstration de la quatrième assertion du théorème 3.4 comme Harris ([4] p. 313) le fait pour les processus de Galton-Watson.

Dans le cas où la matrice S est simplement supposée irréductible on peut seulement déduire de ce qui précède le fait que la suite  $\rho^{-2n} E_{Z_0}[L(Z_n) \otimes L(Z_n)]$  a un nombre fini de valeurs d'adhérence, ce qui suffit à montrer que la suite  $\rho^{-2n} E_{Z_0}(|\langle \xi^*, L(Z_n) \rangle|^2)$  est bornée. Ceci démontre la seconde assertion du théorème.



#### 4.4. Démonstration de 3.4-3.

Posons  $\Omega = \cup \{\Omega_Z; Z \in \mathcal{G}\}$  et  $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \times \Omega$ . Si  $Z$  appartient à  $\mathcal{G}$ , la formule  $\tilde{g}_Z(\omega) = (g_Z(\omega), \omega)$  définit une application  $\tilde{g}_Z$  de  $\Omega_Z$  dans  $\tilde{\mathcal{G}}$ . On définit une probabilité de transition  $\tilde{Q}$  sur  $\mathcal{G} \times \tilde{\mathcal{G}}$  de la façon suivante :  $\tilde{Q}(Z, \zeta, \cdot)$  est l'image par  $\tilde{g}_Z$  de la probabilité  $p_Z$ . On remarque que la probabilité  $\tilde{Q}((Z, \zeta), \cdot)$  ne dépend pas de  $\zeta$  et que son image par la projection naturelle de  $\tilde{\mathcal{G}}$  sur  $\mathcal{G}$  est la probabilité  $Q(Z, \cdot)$ . Par suite, si  $\{(Z_n, \zeta_n)\}_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov ayant  $\tilde{Q}$  pour probabilité de transition, alors  $\{Z_n\}_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov dont la probabilité de transition est  $Q$ .

Considérons une chaîne de Markov  $\{(Z_n, \zeta_n)\}_{n \geq 0}$  dont la probabilité de transition est  $\tilde{Q}$ . Pour chaque sommet  $a$  de  $Z_0$  définissons par récurrence une suite  $\{(Z_{a,n}, \zeta_{a,n})\}_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\tilde{\mathcal{G}}$  :  $Z_{a,0}$  est le sous-ion de  $Z_0$  correspondant au sommet  $a$ ,  $\zeta_{a,0}$  est arbitrairement choisi et, pour  $n \geq 0$ , on a les relations  $\zeta_{a,n+1} = r_{Z_{a,n}, Z_n}(\zeta_{n+1})$  et  $Z_{a,n+1} = g_{Z_{a,n}}(\zeta_{a,n+1})$ . On obtient ainsi pour chaque  $a$  dans  $V_{Z_0}$  une chaîne de Markov dont la probabilité de transition est  $\tilde{Q}$  et l'ion  $Z_n$  résulte de l'accrochage des ions  $\{Z_{a,n}\}_{a \in V_{Z_0}}$ , selon  $Z_0$  et une famille d'applications que nous n'explicitons pas.

Conformément aux résultats déjà démontrés les suites  $\rho^{-n} \langle \xi^*, L(Z_n) \rangle$  et  $\rho^{-n} \langle \xi^*, L(Z_{a,n}) \rangle$  convergent presque sûrement ; soit  $W'$  et  $W_a$  leurs limites respectives. La distribution de  $W'$  est celle de  $W$  par rapport à  $P_{Z_0}$ , celle de  $W_a$  est identique de  $W$  par rapport à  $P_a$ . On a évidemment  $W' = \sum_{a \in V_{Z_0}} W_a$ . Enfin, si  $a_1$  et  $a_2$  sont deux sommets de  $Z_0$  distants d'au moins  $\ell + 1$ , l'hypothèse (D2) entraîne l'indépendance de  $W_{a_1}$  et  $W_{a_2}$ .

Posons, pour  $a$  dans  $A_1$ ,  $\lambda_a = P_a(\{W=0\})$ . Nous allons d'abord montrer que tous les  $\{\lambda_a\}_{a \in A_1}$  sont égaux. Numérotons les éléments de  $A_1$ ,  $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ , de façon que l'on ait  $\lambda_{a_1} \geq \lambda_{a_2} \geq \dots \geq \lambda_{a_r}$ . Étant donné  $j$  dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, r\}$ , pour  $p_{a_j}$ -presque tout  $\omega$ , on note  $m_j(\omega)$  le plus grand indice des éléments de  $A_1$  apparaissant comme couleur d'un sommet de  $g_{a_j}(\omega)$  (l'hypothèse (G) en assure l'existence). On considère alors la chaîne  $\{(Z_n, \zeta_n)\}_{n \geq 0}$  où l'on suppose que l'on a  $Z_0 = a_j$ ; en conditionnant d'abord par rapport à  $(Z_1, \zeta_1)$ , on

obtient l'inégalité  $\lambda_{a_j} \leq \int \lambda_{a_{m_j(\omega)}} dp_{a_j}(\omega)$ . Or, la matrice  $S$  étant irréductible, si  $j < r$ , on a  $\sup \{ \text{ess sup } m_k; 1 \leq k \leq j \} > j$ . Par suite si, pour un  $j$  strictement inférieur à  $r$ , on a  $\lambda_{a_1} = \lambda_{a_2} = \dots = \lambda_{a_j}$  alors on a aussi  $\lambda_{a_{j+1}} = \lambda_{a_1}$ . Ceci montre que tous les  $\lambda_a$  sont égaux; désignons par  $\lambda$  leur valeur commune.

Notons  $|Z|_1$  le nombre de sommets de l'ion  $Z$ , dont les couleurs appartiennent à  $A_1$ . Considérons la chaîne  $\{Z_n\}_{n \geq 0}$  partant de  $Z_0 = a \in A_1$ . Supposons que  $P_a$ -presque sûrement on ait, pour tout  $n$ ,  $|Z_n|_1 = 1$ ; compte tenu de l'irréductibilité de la matrice  $S$  et de l'hypothèse (G) cela entraîne que la transposée de la matrice  $S$  est markovienne, ce qui contredit l'hypothèse  $\rho > 1$ . Nous venons de montrer qu'avec une  $P_a$ -probabilité non nulle il existe  $n$  tel que l'on ait  $|Z_n|_1 > 1$ . Par suite, pour tout entier  $v$ , avec une probabilité non nulle, il existe  $n$  tel que l'on ait  $|Z_n|_1 \geq v$  (on utilise à nouveau l'hypothèse (G)). Choisissons l'entier  $v$  de façon que tout ion  $Z$  tel que  $|Z|_1 \geq v$  ait deux sommets distants de plus de  $\ell + 1$  dont les couleurs soient dans  $A_1$ . Soit maintenant un élément  $a$  de  $A_1$ . Soit  $n_0$  un entier tel que l'on ait  $P_a(\{|Z_{n_0}|_1 \geq v\}) = \tau > 0$ . Comme précédemment on peut écrire  $\rho^{n_0}W = \sum_{x \in V_{Z_{n_0}}} W_x$ , d'où l'on déduit l'inégalité  $\lambda \leq \tau \lambda^2 + (1 - \tau)\lambda$  car, avec probabilité  $\tau$ , deux des variables du second membre sont indépendantes. Ceci prouve que l'on a  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ . Mais nous savons que la martingale  $\rho^{-n} \langle \xi^*, L(Z_n) \rangle$  converge dans  $L^2(P_a)$  vers  $W$  et, donc, que l'on a  $E_a(W) = 1$ , ce qui exclut le cas  $\lambda = 1$ .

**4.5. Des précisions sur le paragraphe précédent.**

Le résultat 3.4 – 3 peut être amélioré de la façon suivante.

**PROPOSITION.** – *Sous les hypothèses (M), (V), (D2) et (G) il existe un nombre  $\alpha$  strictement positif tel que, pour tout  $a$  dans  $A_1$ , on ait  $E_a(W^{-\alpha}) < \infty$ .*

*Démonstration.* – Posons  $F_a(t) = E_a(e^{-tW})$  ( $t \geq 0, a \in A_1$ ) et notons  $F(t)$  le vecteur  $\{F_a(t)\}_{a \in A_1}$ . L'espace vectoriel  $\mathbf{R}^{A_1}$  est muni de l'ordre dont le cône des éléments positifs est  $(\mathbf{R}^+)^{A_1}$ .

Soit  $v$  un nombre entier tel que, pour tout ion  $Z$  tel que  $|Z|_1 \geq v$ , il existe deux sommets de  $Z$  distants de plus de  $\ell + 1$  et ayant comme couleur un même élément de  $A_1$ .

La discussion de la fin du paragraphe 4.4 montre qu'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  et  $\tau > 0$  tels que, pour tout  $a$  dans  $A_1$ , on ait  $P_a(\{|Z_{n_0}|_1 \geq v\}) \geq \tau$ . On écrit  $\rho^{n_0}W = \sum_{x \in V_{Z_{n_0}}} W_x$ , d'où  $E_a(\exp - t \rho^{n_0}W | Z_{n_0}) \leq F_a(t)$  si  $a'$  est la couleur d'un quelconque des sommets de  $V_{Z_{n_0}}$ . Si  $|Z_{n_0}|_1 \geq v$  on peut obtenir une meilleure majoration:  $E_a[\exp(-t \rho^{n_0}W) | Z_{n_0}] \leq F_a(t)^2$  où  $a'$  est la couleur commune à deux sommets assez éloignés de  $Z_{n_0}$ . Mais, si  $t$  est assez grand, on a  $F_a(t) \leq \frac{1}{2}$  (en effet  $E_a(\exp - tW)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ). On en déduit donc que l'on a  $F(\rho^{n_0}t) \leq M'F(t)$  pour  $t \geq t_0$ , la matrice  $M'$  étant telle que la somme des éléments de chacune de ses lignes soit inférieure à  $1 - \frac{1}{2}\tau$ . Il résulte de ceci que, lorsque  $t$  tend

vers  $+\infty$ ,  $F(t) = O(t^{-\alpha})$  avec  $\alpha = \frac{-\log\left(1 - \frac{1}{2}\tau\right)}{n_0 \log \rho}$ . Par suite, pour tout  $a \in A_1$ , pour tout  $0 \leq \alpha' < \alpha$ , on a  $E_a(W^{-\alpha'}) < \infty$ .

#### 4.6. Étude des moments d'ordres supérieurs à 2.

**THÉORÈME.** — *On suppose que les hypothèses (M) et (D2) sont satisfaites et qu'il existe un entier  $k \geq 2$  tel que, pour tout  $a \in A$ ,  $E_a(|g_a|^k)$  soit fini. Dans ces conditions, pour tout  $Z_0 \in \mathcal{G}$ ,  $E_{Z_0}(W^k)$  est fini.*

*Démonstration.* — On munit l'espace  $(\mathbf{R}^A)^{\otimes}$  de l'ordre associé au cône constitué des  $j$ -tenseurs ayant, par rapport à la base canonique, des coordonnées positives.

$\mathfrak{S}_j$  désigne, comme d'habitude, le groupe des permutations d'un ensemble à  $j$  éléments; il agit sur  $(\mathbf{R}^A)^{(j+1)\otimes}$  par permutation des  $j$  derniers facteurs.

Supposons  $k \geq 2$  et montrons par récurrence que, pour tout  $j = 2, 3, \dots, k$ , on a  $E_{Z_0}[L(Z_n)^{j\otimes}] \leq \rho^{jn} C_j |Z_0|$  où  $C_j$  est un  $j$ -tenseur convenable.

Si  $\alpha \in A^\ell$ , c'est-à-dire si  $\alpha = B_Z(a, j\ell)$  pour un  $Z \in \mathcal{G}$ , on pose

$$\Lambda_\alpha^{(j)} = \left| \sum_{x_1, \dots, x_j \in V_\alpha} [E_{p_\alpha}(L \circ g_a \otimes L \circ g_{x_1} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_j}) - E_{p_a}(L \circ g_a) \otimes E_{p_\alpha} \otimes E_{p_\alpha}(L \circ g_{x_1} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_j})] \right|$$

(on a commis l'abus de notation consistant à écrire  $L \circ g_x$  au lieu de  $L \circ g_x \circ r_{x, \alpha}$ ).

On veut évaluer, étant donné  $Z \in \mathcal{G}$ ,

$$E_{p_Z}[(L \circ g_Z)^{\otimes (j+1)}] = \sum_{a \in V_Z} \sum_{x_1, \dots, x_j \in V_Z} E_{p_Z}(L \circ g_a \otimes L \circ g_{x_1} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_j}).$$

Pour chaque élément  $a \in V_Z$  et pour chaque  $j$ -uplet  $(x_1, \dots, x_j) \in V_Z^j$  on considère le plus petit entier  $v$  tel qu'il existe un élément  $\sigma \in \mathfrak{S}_j$  tel que l'on ait

- (i)  $d(x_{\sigma(m)}, \{a, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m-1)}\}) \leq \ell$  pour  $m = 1, 2, \dots, v$ ,
- (ii)  $d(x_{\sigma(m)}, \{a, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(v)}\}) > \ell$  pour  $v < m \leq j$ .

Dans ces conditions on a les faits suivants

- (iii)  $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(v)}$  sont des sommets de  $B_Z(a, v\ell)$ ,
- (iv) 
$$E_{p_Z}(L \circ g_a \otimes L \circ g_{x_1} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_j}) \leq E_{p_a}(L \circ g_a) \otimes E_{p_Z}(L \circ g_{x_1} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_j}) + \sigma^{-1} \cdot \{ [E_{p_Z}(L \circ g_a \otimes L \circ g_{x_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_{\sigma(v)}}) - E_{p_a}(L \circ g_a) \otimes E_{p_Z}(L \circ g_{x_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_{\sigma(v)}})] \otimes E_{p_Z}(L \circ g_{x_{\sigma(v+1)}} \otimes \dots \otimes L \circ g_{x_{\sigma(j)}}) \}.$$

On obtient donc la majoration

$$E_{p_Z}[(L \circ g_Z)^{\otimes (j+1)}] \leq \sum_{a \in V_Z} E_{p_a}(L \circ g_a) \otimes E_{p_Z}[(L \circ g_Z)^{\otimes j}] + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_j} \sigma \cdot \sum_{v=1}^j \sum_{a \in V_Z} \Lambda_{B_Z(a, v\ell)}^{(v)} \otimes E_{p_Z}(L \circ g_Z^{\otimes (j-v)})$$

(beaucoup de termes sont comptés plusieurs fois). Finalement

$$E_{pZ}[(L \circ g_Z)^{(j+1)\otimes}] \leqslant ML(Z) \otimes E_{pZ}[(L \circ g_Z)^{j\otimes}] \\ + \sum_{v=1}^j \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_j} \sigma \cdot [\Lambda^{(v)} \cdot L^{v\prime}(Z) \otimes E_{pZ}[(L \circ g_Z)^{(j-v)\otimes}]]$$

où

$$\Lambda^{(v)} \cdot L^{v\prime}(Z) = \sum_{\alpha \in A^{v\prime}} \Lambda_{\alpha}^{(v)}(L^{v\prime}(Z))_{\alpha}.$$

Par récurrence sur  $j$ , on obtient l'inégalité

$$E_{pZ}[(L \circ g_Z)^{(j+1)\otimes}] \leqslant (ML(Z))^{(j+1)\otimes} + D_{j+1}|Z|^j,$$

pour  $j = 1, 2, \dots, k-1$ ,

$D_{j+1}$  étant un  $(j+1)$ -tenseur positif indépendant de  $Z$ .

Appliquons cette inégalité à la chaîne  $\{Z_n\}_{n \geqslant 0}$ . On obtient

$$E_{Z_0}[L(Z_{n+1})^{j\otimes}] \leqslant M^{j\otimes} E_{Z_0}(L(Z_n)^{j\otimes}) + D_j E_{Z_0}(|Z_n|^{j-1}).$$

Supposons que l'on ait montré l'inégalité

$$E_{Z_0}(L(Z_n)^{(j-1)\otimes}) \leqslant \rho^{n(j-1)} C_{j-1} |Z_0|, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

(elle est évidente pour  $j = 2$ ). On a alors

$$E_{Z_0}(|Z_n|^{(j-1)}) \leqslant \rho^{n(j-1)} a_{j-1} |Z_0| \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{où } a_{j-1}$$

est un nombre convenable.

On a alors

$$\rho^{-(n+1)j} E_{Z_0}[L(Z_{n+1})^{j\otimes}] \leqslant \left(\frac{M}{\rho}\right)^{j\otimes} \rho^{-nj} E_{Z_0}[L(Z_n)^{j\otimes}] + \rho^{-j-n} a_{j-1} D_j |Z_0|$$

d'où, puisque  $\sup_{n \geqslant 0} \left(\frac{M}{\rho}\right)^n \leqslant \tilde{M}$  (propriété des matrices irréductibles),

$$\rho^{-nj} E_{Z_0}[L(Z_n)^{j\otimes}] \leqslant \tilde{M}^{j\otimes} L(Z_0) + \frac{\rho^{1-j}}{\rho-1} a_{j-1} \tilde{M}^{j\otimes} D_j |Z_0|.$$

Ceci achève la démonstration.

## 5. UNE CLASSE RESTREINTE DE M-SYSTÈMES

Le formalisme de génération décrit ci-dessus est lourd ; il se simplifie lorsque l'on désire engendrer des arbres connexes.

Les notations et concepts que l'on va définir sont très proches des précédents.

### 5.1. Des ions arborescents.

Un arbre étiqueté est un triplet  $Z = (V, E, w)$  où

- (i)  $V$  est un ensemble fini, l'ensemble des sommets de  $Z$ ,
- (ii)  $w$  est une application de  $V$  dans  $\mathbb{N}$ ,
- (iii)  $E$  est une partie de  $V \times \mathbb{N} \times V$  telle que la relation  $(a, m, b) \in E$  entraîne  $m \leq w(a)$  et  $b \neq a$  et telle que, pour chaque  $b$ , l'ensemble  $\{(a, m); (a, m, b) \in E\}$  ait, au plus, un élément.
- (iv) Le graphe sous-jacent à  $Z$  est un arbre (le graphe sous-jacent a  $V$  pour ensemble de sommets et  $\{(a, b) \in V \times V; \exists m, (a, m, b) \in E\}$  pour ensemble d'arêtes).

L'arbre sous-jacent à un arbre étiqueté est orienté, chacune de ses composantes connexes a donc une racine.

On note  $\tilde{V}_Z$  l'ensemble  $\{(a, m) \in V \times \mathbb{N}; 0 \leq m \leq w(a)\}$  et  $W(Z)$  l'ensemble des  $(a, n) \in \tilde{V}_Z$  tels qu'il n'existe pas de  $b \in V_Z$  tel que  $(a, n, b) \in E$ .

De même que pour les graphes, on peut procéder à l'accrochage d'arbres. Considérons un arbre étiqueté  $Z'$ , une famille  $\{Z_j\}_{j \in V_{Z'}}$  d'arbres étiquetés et connexes et une injection  $\varphi$  de  $\tilde{V}_{Z'}$  dans la réunion disjointe de la famille  $\{W(Z_j)\}_{j \in V_{Z'}}$  telle que  $\varphi(j, m)$  appartienne à  $W(Z_j)$ .

On construit comme suit l'arbre étiqueté  $Z''$ , résultat de l'accrochage des arbres  $\{Z_j\}_{j \in V_{Z'}}$  selon  $(Z', \varphi)$ .  $V_{Z''}$  est la réunion disjointe des ensembles  $V_{Z_j}$ ,  $w_{Z''}$  est la fonction qui prolonge chaque  $w_j$  et  $E_{Z''}$  est la réunion de  $\bigcup_{j \in V_{Z'}} E_{Z_j}$  et de l'ensemble des triplets  $(a, m, b)$  tels qu'il existe  $(a', m', b') \in E_{Z'}$  tel que  $b$  soit la racine de  $Z_{b'}$  et tel que  $(a, m) = \varphi(a', m')$ .

Si l'arbre  $Z'$  est connexe,  $Z''$  l'est aussi.

De même que précédemment on colore les arbres étiquetés, l'application  $w$ , définie sur l'ensemble  $A$  des couleurs, est, cette fois-ci, à valeurs dans  $\mathbf{N}$ .

Ce que nous appellerons ion dans ce paragraphe est un arbre étiqueté, connexe et coloré.

### 5.2. M-systèmes générateurs d'arbres.

$\mathcal{G}$  est un ensemble d'ions arborescents et connexes. On suppose que si  $Z \in \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}$  contient aussi tous les sous-ions arborescents et connexes de  $Z$ .

On suppose donnée une famille projective  $(\Omega_Z, P_Z)_{Z \in \mathcal{G}}$  d'espaces probabilisés dénombrables (comme en 3.1) ainsi que, pour chaque  $a \in A$ , une application  $g_a$  de  $\Omega_a$  dans  $\mathcal{G}$  et, pour chaque  $\omega \in \Omega_a$ , une injection de  $\{0, 1, \dots, w(a)\}$  dans  $W(g_a(\omega))$ .

On se persuadera que ces données, un peu plus simples qu'en 2.4 et 3.1, définissent un M-système.

Comme précédemment à ce M-système est associée une matrice  $M$ .

### 5.3. Structure asymptotique des arbres générés.

Nous considérons un M-système au sens restreint des paragraphes 5.1 et 5.2. Nous avons le résultat suivant.

**THÉORÈME.** — *On suppose que, pour tout  $Z$  dans  $\mathcal{G}$  et pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_Z$ , on a  $w(g_Z(\omega)) = w(Z)$ . On fait en outre les hypothèses (M), (V) et (D1). Alors, quel que soit  $Z \in \mathcal{G}$ ,  $v_n(Z)$  désignant le nombre de fois que  $Z$  figure comme sous-ion de  $Z_n$ , le quotient  $v_n(Z)/|Z_n|$  tend  $P_{Z_0}$ -presque sûrement vers une constante, et ceci, quel que soit  $Z_0 \in A_1$ .*

*Démonstration.* — On adjoint à l'ensemble  $A$  un élément  $\mathcal{W}$ , on obtient un nouvel ensemble de couleurs,  $\hat{A}$ . On complète chaque élément  $Z$  de  $\mathcal{G}$  ainsi : on ajoute à  $V_Z$  l'ensemble  $W(Z)$  et  $(a, m)$  a pour couleur  $\mathcal{W}$  et est lié à  $a$ ; on obtient ainsi un  $\hat{A}$ -ion,  $\hat{Z}$ . L'espace probabilisé associé à  $\hat{Z}$  est le même que celui qui est associé à  $Z$ . L'espace associé à  $\mathcal{W}$  possède un seul élément et  $g_{\mathcal{W}} = \mathcal{W}$ .

La hauteur d'un arbre est la distance maximum de sa racine à ses sommets. On note  $\mathcal{B}^k$  l'ensemble des sous-ions connexes de hauteur  $k$ , apparaissant avec une probabilité non nulle, dans la descendance de l'ion  $\dot{Z}$ , lorsque  $Z$  est constitué d'un seul élément.

On pose  $\mathcal{B}^0 = \{\mathcal{W}\}$  et  $A^k = \bigcup_{0 \leq j \leq k} \mathcal{B}^j$ .

A chaque  $\dot{A}$ -ion  $\dot{Z}$  on associe un  $A^k$ -ion  $Z^k$ .  $Z^k$  et  $Z$  ont le même arbre sous-jacent et si  $a \in V_Z$ , sa nouvelle couleur est le sous-arbre de  $Z$ , de hauteur  $\leq k$ , de racine  $a$ , et maximum pour l'inclusion.

De même qu'en 4.2, on définit des applications de génération : si  $\alpha \in A^k$ ,  $g_\alpha^{(k)}(\omega)$  est le sous-ion de  $(g_\alpha(\omega))^k$  dont les sommets sont engendrés par la racine de  $\alpha$ . Les applications  $\varphi$  sont définies de façon évidente.

On distingue dans  $A^k$  trois parties : la première  $(A^k)_1$  est constituée des arbres dont aucun sommet n'a la couleur  $\mathcal{W}$  et dont la couleur de la racine est dans  $A_1$  ; la seconde  $(A^k)_2$  est constituée des arbres dont aucun sommet n'a la couleur  $\mathcal{W}$  et dont la couleur de la racine est dans  $A_2$  ; la troisième est constituée des autres. La forme, associée et cette partition de  $A^k$ , de la matrice  $M_k$  est, suivant la forme de  $M$

$$\begin{pmatrix} S_k & 0 & T'_k \\ T_k & U_k & T''_k \\ 0 & 0 & U'_k \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} S_k & T_k & T'_k \\ 0 & U_k & T''_k \\ 0 & 0 & U'_k \end{pmatrix}.$$

La matrice  $S_k$  est, comme nous allons le voir, primitive et sa valeur propre de Perron-Frobenius est  $\rho$ . Les valeurs propres de  $U_k$  sont  $\leq 1$  car, sinon, le nombre de sommets de  $\dot{Z}_n$  de couleur  $\mathcal{W}$  pourrait croître indéfiniment. Les valeurs propres positives de la matrice  $U_k$  sont inférieures ou égales à la plus grande valeur propre positive de  $U$  (on obtient  $U_k$  en remplaçant chaque élément  $u_{ij}$  de  $U$  par une matrice dont la somme des éléments de chaque colonne est  $u_{ij}$ ).

Ceci montre que  $\rho^{-n}M_k^n$  a une limite et que l'on a  $\rho^{-n}M_k^n - \lim \rho^{-n}M_k^n = O(\alpha^n)$  avec  $0 < \alpha < 1$ . On conclut au moyen du théorème 3.4(3); on a, en effet, déjà observé que l'hypothèse  $\rho^{-n}M_k^n - \lim \rho^{-n}M_k^n = O(\alpha^n)$  pouvait remplacer l'hypothèse de primitivité de  $M_k$ .

La primitivité de la matrice  $S_k$  résulte des considérations qui suivent. Soit  $\alpha \in (A^k)_1$ ; on note  $\tau(\alpha)$  le plus petit entier tel qu'il existe  $a \in A_1$ , tel



que, avec une  $P_a$ -probabilité non nulle,  $Z_{\tau(\alpha)}$  contienne  $\alpha$  comme sous-ion. Soit  $\tau = \sup\{\tau(\alpha); \alpha \in (A^k)_1\}$ . Alors si  $\alpha \in (A^k)_1$ , il existe  $a \in A$  tel que, avec une  $P_a$ -probabilité non nulle,  $Z_\tau$  contienne  $\alpha$  comme sous-ion. En vertu du théorème 3.4, pour tout  $v$ , il existe un entier  $m$  tel que, avec une probabilité non nulle, toutes les composantes de  $L(Z_m)$  soient supérieures à  $v$ . Si l'on a choisi  $v$  assez grand, on est donc assuré, qu'avec une probabilité non nulle,  $Z_m$  possède suffisamment de sommets de couleurs prescrites, situés à une distance  $> \ell$  les uns des autres. Par conséquent, avec une  $P_a$ -probabilité non nulle,  $Z_{m+\tau}$  contient tous les éléments de  $(A^k)_1$  comme sous-ions. Ceci montre, en prenant les espérances, la primitivité de  $S_k$ .

## 6. D'AUTRES GÉNÉRATEURS D'ARBRES COLORÉS

Les M-systèmes décrits en section 5 se prêtent à la génération d'arbres non connexes. On considère l'un des M-systèmes que l'on a décrit en 5.2. On distingue dans  $A$  une partie  $A'$  telle que l'on ait  $A' \cap w^{-1}(0) = \emptyset$  et  $g_a \equiv a$ . Pour chaque  $a \in A'$  on se donne une partie  $F_a$  de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, w(a)\}$ .

Si  $Z \in \mathcal{G}$  et si  $x$  est un sommet de  $Z$  dont la couleur est dans  $A'$ , on construit un nouvel ion  $Z(x)$  ainsi :

$$\begin{aligned} V_{Z(x)} &= V_Z \setminus \{x\}, \\ E_{Z(x)} &= E_Z \cap (V_{Z(x)} \times \mathbf{N} \times V_{Z(x)}) \\ &\quad \cup \{(a, m, b); (a, m, x) \in E_Z \text{ et } \exists j \in F_x, (x, j, b) \in E_Z\}, \end{aligned}$$

la coloration de  $Z(x)$  est la restriction de celle de  $Z$ .

On prend un à un les sommets de  $Z$  dont la couleur est dans  $A'$  et l'on effectue à chaque fois l'opération précédente; on obtient un ion  $Z^\#$  (le résultat est indépendant de l'ordre des opérations).

Partant de  $Z_0$ , on obtient donc une suite aléatoire  $Z_n^\#$  (il s'agit d'une chaîne de Markov à cause de l'hypothèse  $g_a \equiv a$  pour  $a \in A'$ ) d'arbres colorés non nécessairement connexes. On peut se persuader que les M-systèmes généraux engendrant des arbres peuvent se décrire de la manière

précédente : il suffit d'ajouter deux couleurs pour se ramener au cas considéré ici.

L'un des problèmes qui se posent est d'évaluer le nombre de composantes connexes de  $Z_n^\#$ . Le théorème suivant fournit une réponse à cette question.

**THÉORÈME.** — *Les hypothèses étant les mêmes que pour le théorème 5.3, pour tout  $Z_0 \in A_1$ , le rapport du nombre de composantes connexes de  $Z_n^\#$  à  $|Z_n|$  tend  $P_{Z_0}$ -presque sûrement vers une constante.*

*Démonstration.* — On utilise les mêmes notations qu'en 5.3. Si l'on enlève le sommet  $x$ , dont la couleur est dans  $A'$ , à l'ion connexe  $\dot{Z}$  on obtient  $\dot{Z}(x)$ . Le nombre de composantes connexes de  $\dot{Z}(x)$  est  $1 + w(x) - \text{card } F_{\lambda(x)}$  si  $x$  n'est pas la racine de  $Z$ ,  $w(x)$  sinon. Pour démontrer les composantes connexes de  $(\dot{Z})^\#$  il suffit donc de classifier et de dénombrer les sous-arbres de  $\dot{Z}$ , de hauteur 2, dont la couleur de la racine est dans  $A'$ . Le résultat découle alors du théorème 5.3.

## 7. UN THÉORÈME DE LIMITE CENTRALE

Dans toute cette partie, nous nous intéressons uniquement aux  $M$ -systèmes qui engendrent des chaînes. Leur description est beaucoup plus simple que celle des systèmes généraux, ou même, que celle des générateurs d'arbres.

### 7.1. Générateurs de mots.

On reprend, aux notations près, les considérations développées dans [17].

$A$  est un ensemble fini dont les éléments, plutôt que couleurs, seront appelés lettres. On se donne un ensemble  $\mathcal{G}$  de mots construits avec l'alphabet  $A$ . On suppose que tout sous-mot d'un élément de  $\mathcal{G}$  appartient à  $\mathcal{G}$ . On se donne un système d'espaces probabilisés dénombrables  $(\Omega_z, \mathcal{P}_z)_{z \in \mathcal{G}}$ , projectif au sens où on l'a défini en 3.1. On se donne aussi, pour chaque  $a \in A$ , une application  $g_a$  de  $\Omega_a$  dans  $\mathcal{G}$ .

Si  $Z = a_1 \dots a_v$  est un élément de  $\mathcal{G}$  et si  $\omega \in \Omega_Z$ ,  $g_Z(\omega)$  est le mot obtenu en mettant bout à bout, dans l'ordre où ils se présentent, les mots  $g_{a_1}(r_{a_1, Z}(\omega)), \dots, g_{a_v}(r_{a_v, Z}(\omega))$ . On obtient ainsi un M-système encore plus particulier que ceux qui ont été considérés au paragraphe 5.

Nous faisons les hypothèses (M), (V), (D2) et (G). Considérons la chaîne de Markov canonique  $\{Z_n\}_{n \geq 0}$  associée à ce système.

## 7.2.

**THÉORÈME.** — *Sous les hypothèses décrites en 7.1, quel que soit  $Z_0 \in A_1$ , la loi de  $|Z_n|^{-1/2} \langle \xi^*, L(Z_n) \rangle - \rho^n W$  converge étroitement vers une loi de Gauss centrée.*

Ce résultat est classique pour les processus de Galton-Warson [6] et, donc, n'est nouveau que si  $\ell \geq 1$ . La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 7.3, 7.4 et 7.5.

### 7.3. Formule de régression.

Si l'on suppose  $|Z_n| = a_1 a_2 \dots a_{|Z_n|}$  fixé, on peut écrire, comme en 4.4,  $\rho^n W = \sum_{j=1}^{|Z_n|} W_{a_j}$ , où la distribution de  $W_a$  (conditionnellement à  $Z_n$ ) est identique à celle de  $W$  par rapport à  $P_a$ . De plus la suite  $\{W_{a_j}\}_{1 \leq j \leq |Z_n|}$  possède la propriété de  $\ell$ -indépendance (c'est-à-dire celle qui est décrite dans la condition D2).

On a donc :

$$\langle \xi^*, L(Z_n) \rangle - \rho^n W = \sum_{j=1}^{|Z_n|} (\xi_{a_j}^* - W_{a_j}).$$

### 7.4. Étude de $E_{Z_0}[(\langle \xi^*, L(Z_n) \rangle - \rho^n W)^2 | Z_n] / |Z_n|$ .

On utilise les mêmes notations qu'en 5.3.

Si  $\alpha \in A'$ , alors pour un  $k \geq 0$ , on a  $\alpha = a_0 \dots a_k$  et l'on pose

$$\Lambda_\alpha = \sum_{0 \leq j \leq k} E_\alpha[(\xi_{a_0}^* - W_{a_0})(\xi_{a_j}^* - W_{a_j})].$$

On a alors, de façon analogue à 4.3,

$$E[(\langle \xi^*, L(Z_n) \rangle - \rho^n W)^2 | Z_n] = \sum_{\alpha \in A^\ell} \Lambda_\alpha L'_\alpha(Z_n).$$

Il résulte de 3.4 et 5.3 que  $W$  est p. s. non nul et que le rapport  $L'(Z_n)/|Z_n|$  tend p. s. vers une constante. Donc  $E[(\langle \xi^*, L(Z_n) \rangle - \rho^n W)^2 | Z_n]/|Z_n|$  tend  $P_{Z_0}$ -presque sûrement vers une constante que nous noterons  $\sigma^2$ .

**7.5. Estimation de la fonction caractéristique.**

Définissons deux suites  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1}$  et  $\{\beta_k\}_{k \geq 1}$  de nombres entiers :

$$\alpha_k = \left[ \frac{k(k-1)}{2} + (k-1) \right] \ell, \quad \beta_k = \alpha_k + k\ell.$$

On a  $\alpha_{k+1} - \beta_k = \ell$ .

Définissons deux entiers aléatoires  $v$  et  $v'$  ainsi :

si  $\alpha_k < |Z_n| \leq \beta_k$ , alors  $v = k$  et  $v' = k - 1$ ,  
 si  $\beta_k < |Z_n| \leq \alpha_{k+1}$ , alors  $v = v' = k$ .

On décompose  $\langle \xi^*, L(Z_n) \rangle - \rho^n W$  en somme de trois termes :

$$\langle \xi^*, L(Z_n) \rangle - \rho^n W = S_n + S'_n + S''_n.$$

Pour définir  $S_n, S'_n, S''_n$ , on écrit  $Z_n = a_1 \dots a_{|Z_n|}$ , puis on pose

$$S_n = \sum_{1 \leq k \leq v'} \sum_{j=\beta_{k+1}}^{\alpha_{k+1} \wedge |Z_n|} (\xi_{a_j}^* - W_{a_j}),$$

$$S'_n = \sum_{1 \leq k \leq v} \sum_{j=\alpha_{k+1}}^{\beta_k \wedge |Z_n|} [\varphi_k(\xi_{a_j}^* - W_{a_j}) - E(\varphi_k(\xi_{a_j}^* - W_{a_j}) | Z_n)]$$

où l'on a posé  $\varphi_k(x) = x 1_{[-\sqrt{k}, \sqrt{k}]^C}(x)$ .

Dans ce qui suit  $C$  désigne un nombre qui ne dépend que du  $M$ -système considéré. Deux occurrences de  $C$  peuvent désigner deux nombres différents.

On a évidemment  $v \leq v' \leq C\sqrt{|Z_n|}$ .

On voit facilement que l'on a

$$E(S_n^2|Z_n) \leq C\sqrt{|Z_n|},$$

par suite  $E\left(\frac{S_n^2}{|Z_n|}\right)$  tend vers 0.

On a aussi, en utilisant la  $\ell$ -indépendance,

$$E(S_n^2|Z_n) = \sum_{1 \leq k \leq v} E \left\{ \left[ \sum_{j=\alpha_k+1}^{\beta_k \wedge |Z_n|} \varphi_k(\xi_{a_j}^* - w_{a_j}) - E(\varphi_k(\xi_{a_j}^* - w_{a_j})|Z_n) \right]^2 |Z_n \right\} \\ \leq C \sum_{1 \leq k \leq v} k u_k$$

où

$$u_k = \sup_{|Z_0|=1} E_{Z_0} \left[ |\langle \xi_{a_j}^*, L(Z_0) \rangle - W|^2 1_{|\langle \xi_{a_j}^*, L(Z_0) \rangle - w| > \sqrt{k}} \right].$$

Par suite  $|Z_n|^{-1}E(S_n^2|Z_n)$  et  $E(|Z_n|^{-1}S_n^2)$  tendent vers 0.

Il en résulte que l'on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n|^{-1}E(S_n^2|Z_n) = \sigma^2$  p.s. et que, pour montrer la convergence en loi de  $\frac{S_n + S'_n + S''_n}{|Z_n|}$ , il nous suffit d'étudier  $E\left(\exp it \frac{S''_n}{\sqrt{|Z_n|}}\right)$ .

Pour simplifier les notations, posons, si

$$\alpha_k < j \leq \beta_k \wedge |Z_n|, \\ X_j = (\xi_{a_j}^* - w_{a_j}) 1_{\{|\xi_{a_j}^* - w_{a_j}| \leq \sqrt{k}\}} - E\left[(\xi_{a_j}^* - w_{a_j}) 1_{\{|\xi_{a_j}^* - w_{a_j}| > \sqrt{k}\}} |Z_n\right].$$

Compte tenu de la relation  $E(\xi_{a_j}^* - w_{a_j}|Z_n) = 0$ , on a  $E(X_j|Z_n) = 0$ . On voit facilement que l'on a  $\|X_j\|_\infty \leq C\sqrt{k}$ .

On a

$$S''_n = \sum_{k=1}^v \Delta_k$$

où

$$\Delta_k = \sum_{j=\alpha_k+1}^{\beta_k \wedge |Z_n|} X_j.$$

La propriété de  $\ell$ -indépendance des  $X_j$  et les relations  $E(X_j|Z_n) = 0$  et  $\|X_j\|_\infty \leq C\sqrt{k}$  permettent d'établir les majorations suivantes

$$\begin{aligned} E(\Delta_k^2|Z_n) &\leq C_1 k \\ |E(\Delta_k^3|Z_n)| &\leq Ck^{3/2} \\ E(\Delta_k^4|Z_n) &\leq Ck^2 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\left| E\left(\exp it \frac{\Delta_k}{\sqrt{|Z_n|}} \middle| Z_n\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2|Z_n|} E(\Delta_k^2|Z_n)\right) \right| \leq C_2 \left( \frac{|t|^3 k^{3/2}}{|Z_n|^{3/2}} + \frac{t^4 k^2}{|Z_n|^2} \right).$$

Supposons  $t$  fixé, non nul. Si l'on a

$$\frac{t^4}{|Z_n|} \leq \frac{1}{3(1+C_1+C_2)}$$

alors on a la majoration

$$\left| \log E\left(\exp it \frac{\Delta_k}{\sqrt{|Z_n|}} \middle| Z_n\right) + \frac{t^2}{2|Z_n|} E(\Delta_k^2|Z_n) \right| \leq C \frac{|t|^3 k^{3/2}}{|Z_n|^{3/2}},$$

d'où, dans les mêmes conditions,

$$\left| \log E\left(\exp it \frac{S_n''}{\sqrt{|Z_n|}} \middle| Z_n\right) + \frac{t^2}{2|Z_n|} E(S_n''^2|Z_n) \right| \leq C|t|^3|Z_n|^{-\frac{1}{4}}$$

et 
$$\left| E\left(\exp it \frac{S_n''}{\sqrt{|Z_n|}} \middle| Z_n\right) - \exp - \frac{t^2}{2|Z_n|} E(S_n''^2|Z_n) \right| \leq C|Z_n|^{-\frac{1}{4}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| E\left(\exp it \frac{S_n''}{\sqrt{|Z_n|}}\right) - E\left(\exp - \frac{t^2}{2|Z_n|} E(S_n''^2|Z_n)\right) \right| &\leq CE(|Z_n|^{-\frac{1}{4}}) \\ &\quad + P(\{|Z_n| \leq 3t^4(1+C_1+C_2)\}). \end{aligned}$$

Puisque presque sûrement  $|Z_n|$  croît vers  $+\infty$  et  $|Z_n|^{-1}E(S_n''^2|Z_n)$  tend vers  $\sigma^2$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\exp it \frac{S_n''}{\sqrt{|Z_n|}}\right) = \exp - \frac{t^2}{2} \sigma^2,$$

ce qui achève la démonstration.

## 8. UNE PROPRIÉTÉ D'HOMOGENÉITÉ DES ARBRES GÉNÉALOGIQUES

Nous reprenons l'étude des M-systèmes généraux définis au chapitre 2.

A chaque trajectoire de la chaîne  $\{Z_n\}_{n \geq 0}$  on associe un arbre  $\mathcal{C}$  : l'ensemble des sommets de  $\mathcal{C}$  est la réunion abstraite des  $V_{Z_n}$ , un élément de  $V_{Z_n}$  est lié aux sommets de  $V_{Z_{n+1}}$  qu'il a engendrés. On note  $\bar{\mathcal{C}}$  la compactification naturelle de  $\mathcal{C}$  [3] et l'on pose  $\partial\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}$ .

Si  $x \in \partial\bar{\mathcal{C}}$ , pour chaque  $n \geq 0$ , il existe un unique sommet  $a_n \in V_{Z_n}$  tel que  $x$  soit approché par des descendants de  $a_n$ ; on note  $I_n(x)$  ou  $I_{a_n}$  l'intersection de  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  et de l'adhérence dans  $\bar{\mathcal{C}}$  des descendants de  $a_n$ .

**THÉORÈME.** — *On suppose les hypothèses (M), (V) et (D2) satisfaites. Pour chaque  $Z_0 \in A_1$ ,  $P_{Z_0}$ -presque sûrement il existe une mesure de probabilité,  $\mu$ , sur  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  telle que, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , on ait*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{n} = -\log \rho.$$

*Démonstration.* —  $P_{Z_0}$  presque sûrement, une collection  $\{W_a\}_{a \in \bar{\mathcal{C}}}$  est définie : si  $a \in V_{Z_n}$ ,  $W_a$  est la limite lorsque  $m \rightarrow \infty$  de  $\rho^{-m} \langle \xi, L_{a,m} \rangle$  où  $L_{a,m}$  est le vecteur qui décrit la composition de la descendance de  $a$  dans  $Z_{n+m}$ .

On a  $\rho W_a = \sum_b W_b$  où la dernière somme est étendue aux sommets de  $Z_{n+1}$  engendrés par le sommet  $a$  de  $Z_n$ .

Il existe donc une unique mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\partial\bar{\mathcal{C}}$  telle que, pour tout  $a \in \bar{\mathcal{C}}$ , on ait  $\mu(I_a) = \rho^{-n} W^{-1} W_a$ .

Soit  $\alpha$  un nombre réel. On a

$$\begin{aligned} E_{Z_0} \left( \int W [\rho^n \mu(I_n(x))]^\alpha d\mu(x) | Z_n \right) \\ = \rho^{-n} E_{Z_0} \left( \sum_{a \in V_{Z_n}} W_a^{1+\alpha} | Z_n \right) = \rho^{-n} \sum_{a \in V_{Z_n}} E_a(W^{1+\alpha}). \end{aligned}$$

Donc si  $-1 \leq \alpha \leq 1$ , on a

$$\sup_n E_{z_0} \int W[\mathbb{W}\rho^n, \mu(I_n(x))]^\alpha d\mu(x) < \infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli donne alors le résultat.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction ce théorème permet de calculer la dimension de Hausdorff-Besicovitch d'ensembles résultant de constructions de B. Mandelbrot.

Un exemple d'un tel calcul est donné dans [16], il utilise un procédé décrit dans [2] p. 144 et [8].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. B. ATHREYA and P. E. NEY, *Branching processes*, Springer, New York, 1972.
- [2] P. BILLINGSLEY, *Ergodic theory and information*, J. Wiley and Sons, 1965.
- [3] P. CARTIER, Fonctions harmoniques sur un arbre, *Sympos. math.*, 9, Calcolo Prob., teor. Turbolenza 1971, pp. 203-270 (1972).
- [4] T. E. HARRIS, Some mathematical models for branching processes, *Second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, Univ. Calif. Press 1951.
- [5] J. HAWKES, *Trees generated by a simple branching process*, to appear.
- [6] P. JAGERS, *Branching processes with biological applications*, J. Wiley, 1975.
- [7] H. JÜRGENSEN, Probabilistic L-systems, *Automata, Languages, Development*, pp. 211-225. North Holland Publishing Company (1976).
- [8] J. R. KINNEY and T. S. PITCHER, The dimension of the support of a random distribution function, *Bull. Amer. Math. Soc.*, (1964), 161-164.
- [9] K. P. LEE and G. ROZENBERG, Developmental systems with finite axiom sets, *International J. of Computer Mathematics*, 4 (1974), 43-48 and 281-304.
- [10] A. LINDENMAYER, Mathematical models for cellular interaction in development, *J. theoretical biology*, 18 (1968), 280-315.
- [11] B. MANDELBROT, *Fractals : Form, Chance and Dimension*, Freeman and Co. (1977).
- [12] B. MANDELBROT, Les objets fractals, *La Recherche*, 9, 85, pp. 1-13.
- [13] B. MANDELBROT, Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle : les cordonnets discrets et fractals, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 286 (1978), 933-936.
- [14] B. MANDELBROT, Fractal limits of random beadsets and geometric imbedding of birth processes, to appear.
- [15] J. PEYRIERE, Sur les colliers aléatoires de B. Mandelbrot, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 286 (1978), 937-939.



- [16] J. PEYRIERE, Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction, *I.B.M. Research report*, RC-7417.
- [17] J. PEYRIERE, Processus de naissance avec interaction des voisins, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 289 (1979), 223-224 et 557.
- [18] E. SENETA, *Non-negative matrices*, J. Wiley (1973).

Manuscrit reçu le 13 novembre 1980.

Jacques PEYRIERE,  
Université de Paris-Sud  
Équipe de recherche associée au  
CNRS (296)  
Analyse harmonique  
Mathématique (Bât. 425)  
91405 Orsay Cedex.

---