Annales de l'institut Fourier

François Gallissot

Les formes extérieures et la mécanique des milieux continus

Annales de l'institut Fourier, tome 8 (1958), p. 291-335
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1958__8__291_0>

LES FORMES EXTÉRIEURES ET LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

par F. GALLISSOT.

INTRODUCTION

Dans le tome IV des Annales de l'Institut Fourier (1952) j'ai montré le parti qu'on peut tirer dans l'étude de la mécanique des systèmes rigides, de l'existence d'une forme extérieure Ω_2 de degré deux, de rang maximum sur une variété V_{2n+1} différentiable, de dimension $2n + 1$, génératrice des équations du mouvement. Il est alors naturel de se poser la question : les équations de la mécanique des milieux continus possèdent-elles une forme extérieure génératrice et quel est son support topologique.

Si l'on revient à la notion première de mouvement d'un milieu continu Galiléen à 3 dimensions (espace numérique ρ^3) observons que ce mouvement n'est autre qu'une application φ de classe C^r ($r \geqslant 2$) de l'espace numérique R^4 (produit de l'espace numérique R^3 par la droite numérique t) dans ρ^3. En relativité comme le temps est lié au milieu, le mouvement d'un milieu continu relativiste sera une application de R^4 dans ρ^4. Plus généralement nous sommes conduits à envisager des applications φ de classe C^r (r-applications) d'un espace R^p dans un espace ρ^n, puis d'une variété (V_p) dans une variété (W_n) et à associer à ces applications la variété des jets du premier ordre de M. Ehresmann $J^1(V_p, W_n)$. Nous démontrons que sur $J^1(V_p, W_n)$, $\xi(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in (W_n)$, $x(x^1, x^2, \ldots, x^p) \in (V_p)$, il existe une forme extérieure Ω_{p+1} de degré $p+1$ dont les solutions du système extérieure associé $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ satisfaisant de plus à $d\xi^\sigma \wedge V_p = 0$ [V_p désigne la forme volume sur la variété (V_p)] sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui généralise celui d'Hamilton. Ce système est équivalent à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Le système des équations d'Hamilton généralisées est déterminé dès qu'on se donne une forme de Pfaff ω sur la variété $J^1(V_p, W_n)$ et une forme volume V_p sur (V_p).

Pour les applications à la mécanique, tout revient à construire la forme Ω_{p+1} sur $J^1(V_p, W_n)$. Or à une mécanique est associé un groupe G qui opère sur (V_p, W_n) et par prolongement sur $J^1(V_p, W_n)$. Le groupe G laissant invariantes les équations de la mécanique, la forme Ω_{p+1} doit être invariante par G. Cette propriété permet de préciser la forme extérieure correspondant au cas de la mécanique Galiléenne. Il est important de noter que les équations de la mécanique des systèmes indéformables découlent naturellement de la forme Ω_{p+1} sans l'intervention de postulats sur les forces intérieures : elles sont engendrées par une forme Ω_2 de degré deux sur une variété de groupe de Lie de déplacements.

L'intérêt de ce point de vue est de dégager le sens profond des théorèmes classiques de la mécanique, de suggérer des recherches nouvelles. Le seul inconvénient est qu'il faut à peu près tout refaire, c'est pourquoi cet article se borne à fixer le cadre dans lequel on peut opérer avec fruit. Des articles ultérieures préciseront les points nouveaux.

CHAPITRE PREMIER

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES SUR $J^1(V_p, W_n)$

§ 2. — Notions sur les Jets.

M. Ehresmann a montré (Congrès de Taormina 1951 et Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg 1953) qu'à toute r-application d'une variété (V_p) dans une variété (W_n) on peut associer l'ensemble des jets $J^r(V_p, W_n)$ définie de la manière suivante :

Soit φ l'application d'un voisinage de $x \in V(_p)$ dans (W_n), x est la source de l'application, $\xi = \varphi(x) \in (W_n)$ en est le but. Considérons deux cartes locales admissibles g et γ de (V_p) et de (W_n) telles que u et y appartenant respectivement aux espaces numériques R^p et ρ^n on ait :

$$\begin{aligned} u \in R^p, \qquad & x = g(u), \\ y \in \rho^n, \qquad & \xi = \varphi(x) = \gamma(y). \end{aligned}$$

La composition des applications suggérée par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_p & \xrightarrow{\varphi} & W_n \\ {\scriptstyle g}\uparrow & \bar{\varphi} & \uparrow{\scriptstyle \gamma} \\ R^p & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \rho_n \end{array}$$

conduit à envisager la restriction $\underline{g}$ de g à un voisinage U de u tel que l'application composée $\bar{\varphi} = \gamma^{-1} \circ \varphi \circ \bar{g}$ soit définie. On dit que φ est une r-application au point x lorsque l'application $\bar{\varphi}$ de U dans ρ^n admet dans un voisinage du point u des dérivées partielles continues de chaque espèce jusqu'à l'ordre

r par rapport aux coordonnées canoniques dans R^p. Soit $C^r_x(V_p, W_n)$ l'ensemble des applications (φ, x) où φ est une r-application au point x. Deux éléments (φ_1, x), (φ_2, x) de $C^r_x(V_p, W_n)$ seront dits de même r-classe :

1° si $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$,

2° si le couple de cartes locales (g, γ) associe à φ_1 et φ_2 deux applications $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ dont les dérivées partielles de même espèce d'ordre $\leqslant r$ prennent la même valeur au point u.

Ces définitions sont indépendantes du couple de cartes locales (g, γ) puisqu'il suffit de considérer un autre couple (g', γ') recouvrant partiellement le premier.

1. Définition d'un jet. — Un jet infinitésimal d'ordre r ou r-jet de (V_p) dans (W_n) est une r-classe de $C^r_x(V_p, W_n)$ dont x est la source. $j^r_x\xi$ désigne le r-jet déterminé par le couple $(\xi, x) \in C^r_x(V_p, W_n)$. L'ensemble des r-jets de (V_p) dans (W_n) de source x est noté $J^r_x(V_p, W_n)$. La réunion des $J^r_x(V_p, W_n)$ pour x décrivant V_p est appelée variété des jets d'ordre r.

$$\bigcup_{x \in V_p} J^r_x(V_p, W_n) = J^r(V_p, W_n).$$

2. Ensemble des jets d'ordre 1 : $J^1(V_p, W_n)$. — L'ensemble des jets d'ordre 1 $J^1(R^p, \rho^n)$ est homéomorphe à la variété $R^p \times N^1_{pn} \times \rho^n$ à $np + n + p$ dimensions dans laquelle un point a pour coordonnées canoniques :

$(x^1, x^2, \ldots, x^p, u^1_1, \ldots, u^\sigma_i, \ldots, u^n_p, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ les ξ^σ désignant les coordonnées dans ρ^n, les x^i les coordonnées dans R^p, $u^\sigma_i = \dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i}$ la dérivée partielle de ξ^σ par rapport à x^i. Lorsqu'il s'agira de $J^1(V_p, W_n)$ l'ensemble précédent constitue un système de coordonnées locales de cette variété.

3. Noyau des jets d'ordre 1. — Nous appellerons noyau de $J^1(R^p, \rho^n)$ noté N^1_{pn} un élément de source 0 et de but 0, c'est-à-dire ayant pour np coordonnées canoniques $(0, \ldots, 0;$ $\ldots, u^\sigma_i \ldots, 0, \ldots, 0)$.

Pour donner une signification intrinsèque au noyau de l'ensemble des jets $J^1(V_p, W_n)$ nous ferons les remarques suivantes :

a) Les éléments de $J^1(R, W_n)$ de source 0, ayant pour coordonnées $(0, u^1, \ldots, u^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ ne sont autres que les vecteurs tangents à (W_n) dont l'ensemble est noté $T(W_n)$ $T(W_n)$ est un espace fibré de base (W_n), de fibre R^n.

Les éléments de $J^1(R^p, W_n)$ de source 0, de but ξ, ne sont autres que les éléments du produit de p exemplaires de l'espace tangent à (W_n) au point ξ.

$J^1_{x=0}(R^p, W_n)$ est un espace fibré ayant pour base (W_n) pour fibre R^{np}, on note cet espace $T_p(W_n)$. Il existe une projection canonique de $J^1(R^p, W_n)$ sur R^p, ce qui suggère que $J^1(R^p, W_n)$ est une variété fibrée ayant pour base R^p, pour fibre $T_p(W_n)$ pour groupe structural $GL(n)$, groupe linéaire et homogène de R^n.

Si on considère $J^1(V_p, W_n)$ comme il existe une projection canonique A de $J^1(V_p, W_n)$ sur (V_p), relativement à cette projection A, $J^1(V_p, W_n)$ est un espace fibré, ayant pour base (V_p), pour fibre $T_p(W_n)$, pour groupe structural $GL(n)$.

b) Les éléments de $J^1(V_p, \rho)$ de but 0 ne sont autres que les co-vecteurs tangents à (V_p) dont l'ensemble est noté $T^*(V_p)$. C'est un espace fibré de base (V_p), de fibre R^{p*}. Les éléments de $J^1(V_p, \rho^n)$ de but 0, de source x, ne sont autres que les éléments du produit de n exemplaires du dual de l'espace tangent à (V_p) au point x. $J^1_{\xi=0}(V_p, \rho^n)$ est un espace fibré, ayant pour base (V_p) pour fibre R^{pn}, on note cet espace $T^*_n(V_p)$. Il existe une projection canonique de $J^1(V_p, \rho^n)$ sur ρ^n, ce qui suggère que $J^1(V_p, \rho^n)$ est une variété fibrée ayant pour base ρ^n, pour fibre $T^*_n(V_p)$, pour groupe structural $GL(p)$, groupe linéaire et homogène de R^p.

Si on considère $J^1(V_p, W_n)$, comme il existe une projection canonique B de $J^1(V_p, W_n)$ sur (W_n), relativement à cette projection B, $J^1(V_p, W_n)$ est un espace fibré ayant pour base (W_n) pour fibre $T^*_n(V_p)$, pour groupe structural $GL(p)$.

c) Il existe une projection canonique C de $J^1(V_p, W_n)$ sur $(V_p \times W_n)$. Relativement à cette projection canonique C, $J^1(V_p, W_n)$ est une variété fibrée ayant pour base $(V_p \times W_n)$, pour fibre le noyau de $J^1(V_p, W_n)$, pour groupe structural $GL(n) \times GL(p)$. Le noyau de $J^1(V_p, W_n)$ est homéomorphe à l'espace homogène $L(R^p, \rho^n)$ des applications linéaires et homogènes de R^p dans ρ^n.

Remarque. — Ces considérations s'étendent à $J^r(V_p, W_n)$ (Cf. M. Ehresmann [3]).

4. Changement de coordonnées dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$. — Si on considère un changement de coordonnées locales dans (W_n) défini par les formules :

$$\xi^\sigma = \varphi^\sigma(\eta^1, \ldots, \eta^\rho, \ldots, \eta^n).$$

nous poserons

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \eta^\rho} = \alpha^\sigma_\rho.$$

Si on considère un changement de coordonnées dans R^p, coordonnées locales de V_p, défini par les formules

$$x^i = f^i(y^1, y^2, \ldots, y^p)$$

nous poserons

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = a^i_j.$$

Si on considère les changements de coordonnées inverses des précédents nous écrirons en soulignant les dérivées partielles

$$\frac{\partial n^\rho}{\partial \xi^\sigma} = \underline{\alpha}^\rho_\sigma, \qquad \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \underline{a}^j_i.$$

Si on désigne par $V^\rho_j = \frac{\partial \eta^\rho}{\partial y^j}$ les nouvelles coordonnées canoniques du noyau de $J^1(V_p, W_n)$ de la relation

$$u^\sigma_i = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = \frac{\partial \eta^\rho}{\partial \xi^\sigma} \cdot \frac{\partial \eta^\rho}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

résulte

$$u^\sigma_i = \alpha^\sigma_\rho \underline{a}^j_i v^\rho_j \tag{1}$$

formule qui montre que les coordonnées canoniques de $J^1(V_p, W_n)$ peuvent être identifiées aux composantes d'un tenseur construit sur le produit tensoriel des espaces T_ξ et T^*_x, en désignant par T_ξ l'espace tangent à (W_n) au point ξ et par T^*_x le dual de l'espace tangent à (V_p) au point x. $u^\sigma_i \in T_\xi \otimes T^*_x$.

6. Coordonnées hamiltoniennes dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$. — Dans le développement que nous avons en vue, il est très avantageux d'introduire dans le noyau des jets d'ordre 1, un autre système de coordonnées que nous appellerons coordonnées Hamiltoniennes, eu égard au rôle qu'elles jouent dans l'écriture d'un certain système d'équations aux dérivées partielles définissant une famille d'applications de (V_p) dans (W_n).

Nous nous donnons sur (V_p) une forme volume V_p. Considérons les tenseurs $p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}}$ covariants d'ordre p complètement anti-symétriques, construit sur $T^*(W_n)$ et $T^{p-1*}(V_p)$. Au moyen du tenseur volume unité sur la variété (V_p) de composantes contravariantes $\delta^{i_1, \ldots, i_p}$ on définit par contraction un tenseur p^i_σ une fois covariant, une fois contravariant

$$\frac{1}{(p-1)!} p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}} \delta^{i_1, \ldots, i_p} = p^{i_p}_\sigma.$$

Le tenseur p^i_σ est un élément de $T^*_\xi \otimes T_x$. Si on considère la variété $J^1(W_n, V_p)$ les p^i_σ sont les coordonnées canoniques du noyau de l'ensemble des jets de (W_n) dans (V_p) inverses, des jets de (V_p) dans (W_n), comme le montre la règle de changements de coordonnées

$$p^i_\sigma = \underline{\alpha}^\rho_\sigma a^i_j q^j_\rho.$$

Or $J^1(W_p, V_n)$ et $J^1(V_n, W_p)$ sont deux variétés fibrées ayant même base $W_n \times V_p$ même fibre $L(R^p, \rho^n)$ qui est l'espace des applications linéaires et homogènes de R^p dans ρ^n. Pour cette raison on peut prendre pour coordonnées dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$ les p^i_σ. Mais il est essentiel de remarquer que nous n'avons présentement aucun moyen d'exprimer les coordonnées canoniques u^σ_i en fonction des p^i_σ, la structure impliquée par une forme extérieure Ω_{p+1} définie ultérieurement, permettra de lier les p^i_σ aux u^σ_i.

Les p^i_σ pouvant être utilisées comme coordonnées dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$, il en est de même des composantes des tenseurs complètement antisymétriques d'ordre p défini par le produit contracté des p^i_σ avec les composantes covariantes du tenseur volume unité sur (V_p).

$$(2) \qquad p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}} = \frac{1}{p} \delta_{i_1, \ldots, i_p} p^i_\sigma.$$

C'est aux composantes du tenseur complètement antisymétrique p fois covariant $p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}}$ que nous donnons le nom de coordonnées Hamiltoniennes du noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Notation. — Quand on assigne un ordre aux coordonnées dans (V_p) qui est l'ordre naturel, pour signifier que dans $p_{\sigma 12, \dots, p}$ l'indice i est seul omis on écrit :

$$p_{\sigma \check{i}} = \partial_{12, \dots, p} p^i_\sigma.$$

7. Coordonnées pratiques dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$. — Lorsque le système de coordonnées locales a été choisi dans (W_n) et (V_p) et de plus lorsqu'on assigne un ordre aux coordonnées dans (V_p), il est commode d'utiliser dans les calculs comme coordonnées dans le noyau de l'ensemble des jets, les quantités p^i_σ qui peuvent être identifiées aux composantes d'un tenseur mixte construit sur les espaces T^*_ξ et T_x.

§2. — Les formes différentielles sur $J^1(V_p, W_n)$

1. Vecteur $\overrightarrow{p_\sigma}$ et forme $\theta(\overrightarrow{p_\sigma})V_p$. — Nous désignerons par $\overrightarrow{p_\sigma}$ le vecteur contravariant de source 0 et de but 0 de composantes $0, 0, \dots, 0;\ p^1_\sigma, \dots p^i_\sigma, \dots p^p_\sigma;\ 0 \dots 0$). L'application canonique A de $J^1(V_p, W_n)$ dans (V_p), déjà envisagée § 1,3, fait correspondre à la forme volume V_p définie sur (V_p) une forme V'_p sur $J^1(V_p, W_n)$. L'opérateur des transformations infinitésimales[1] $\theta(\overrightarrow{p_\sigma})$ fait correspondre à la forme V'_p une forme de degré p sur $J^1(V_p, W_n)$: $\theta(\overrightarrow{p_\sigma})V'_p$.

Ainsi dans le cas particulier où (V_p) est une variété riemannienne, dont le tenseur métrique fondamental est g_{ij}, la forme volume V_p classique a pour expression en désignant par g le déterminant g_{ij}

$$V_p = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p$$

$$(3)\quad \theta(p_\sigma)V'_p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \sqrt{g}\, dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge dx^2 \dots \wedge \check{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p$$

le signe $\vee$ placé au-dessus de dx^i signifiant que ce signe est omis.

Remarque. — Dans l'expression précédente on observera que d désigne le symbole de la différentiation absolue.

(1) Cf M. H. Cartan Colloque Topologie. Bruxelles 1950.

2. Forme $\Phi_{p+1} = \sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^\sigma . \theta(p_\sigma) V'_p$. — Les n formes $d\xi^\sigma$ sur W_n remontent au moyen de l'application B (§ 1,3) sur $J^1(V_p, W_n)$. Elles engendrent par produit extérieur avec les n formes $\theta(p_\sigma)V'_p$ et sommation par rapport à l'indice σ une forme Φ_{p+1} de degré $p+1$ dont le support est $J^1(V_p, W_n)$. Cette forme fermée peut d'après les considérations développées dans le § 1,6 être considérée comme engendrée par un tenseur complètement anti-symétrique $p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}}$ construit sur les espaces T^*_ξ et $(T^*_x)^{p-1}$.

On a alors $\Phi_{p+1} = \dfrac{-1}{(p-1)!} d(p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}}) \wedge d\xi^\sigma \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_{p-1}}$.

Cette expression de Φ_{p+1} est trivialement invariante dans un changement de coordonnées locales de $J^1(V_p, W_n)$ ce qui montre que Φ_{p+1} est une forme intrinsèque sur $J^1(V_p, W_n)$.

3. Forme génératrice Ω_{p+1}. — Nous désignerons par ω une forme de Pfaff sur $J^1(V_p, W_n)$. Dans un système de coordonnées pratiques ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i,\sigma} X^\sigma_i dp^i_\sigma + X_\sigma d\xi^\sigma.$$

Nous appellerons pour des raisons justifiées par le théorème I, forme génératrice Ω_{p+1} la forme de degré $p+1$ définie sur $J^1(V_p, W_n)$

$$(4) \qquad \Omega_{p+1} = \Phi_{p+1} + \omega \wedge V'_p.$$

Donnons l'expression de Ω_{p+1} dans un système de coordonnées Hamiltoniennes. Lorsque tous les indices courent de 1 à p la forme volume s'écrit :

$$V'_p = \frac{1}{p!} \delta_{i_1, \ldots, i_p} dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega \wedge V'_p = X^\sigma_i dp^i_\sigma \frac{1}{p!} \delta_{i_1, \ldots, i_p} dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$
$$= \frac{1}{(p-1)!} X^\sigma_i dp_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}} \wedge dx^{i_1} \ldots \wedge dx^{i_p},$$

en tenant compte de la formule (2) qui définit les coordonnées Hamiltoniennes. D'où l'expression Ω_{p+1}.

$$(5) \qquad \Omega_{p+1} = \frac{1}{(p-1)!} dp_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}} \wedge (-d\xi^\sigma \wedge dx^{i_1} \cdots dx^{i_{p-1}} + X^\sigma_i dx^{i_1} \ldots \wedge dx^{i_p}).$$

Cette expression de Ω_{p+1} est trivialement invariante dans un changement de coordonnées Hamiltoniennes, en entendant par cette expression un changement de coordonnées arbitraires sur (V_p) et (W_n) et un changement de coordonnées Hamiltoniennes sur le noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Remarque. — Dans ω il est inutile d'écrire la partie de cette forme de Pfaff qui est sur (V_p) puisqu'elle disparaît dans la multiplication extérieure par la forme volume.

4. Système des formes extérieures associé à Ω_{p+1}. — $\vec{X}$ étant un champ de vecteurs arbitraires sur $J^1(V_p, W_n)$ on appelle ainsi le système des équations extérieures $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ réductible à $(np + n + p)$ équations, où $i(\vec{X})$ désigne l'antidérivation de M. H. Cartan. Les coordonnées Hamiltoniennes n'étant utiles que dans les questions théoriques, en particulier pour montrer le caractère intrinsèque de certaines formes, lorsqu'il s'agit d'effectuer les calculs il faut utiliser les coordonnées pratiques. Dans ce système de coordonnées Ω_{p+1} s'écrit :

$$\begin{aligned}(6)\quad \Omega_{p+1} = \sqrt{g}(-1)^{i+1}\, d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p \\ + \sqrt{g}(X^i_\sigma\, dp^\sigma_i + X_\sigma\, d\xi^\sigma)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p.\end{aligned}$$

Le système des équations associées $i(X)\Omega_{p+1}$ peut en particulier se mettre sous la forme suivante :

n équations du type

$$\begin{aligned}(7)\quad \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(dp^i_\sigma)} = (-1)^i\, d\xi^\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p \\ + X^\sigma_i\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p = 0\end{aligned}$$

np équations du type

$$\begin{aligned}(8)\quad \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(d\xi^\sigma)} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1}\, dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p \\ + X_\sigma\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p = 0\end{aligned}$$

p équations du type

$$\begin{aligned}(9)\quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(dx^j)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+j+1}\, d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \\ \ldots d\check{x}^j \wedge \ldots dx^p + (-1)^j \omega \wedge dx^1 \ldots dx^j \ldots \wedge dx^p.\end{aligned}$$

Théorème 1. — *Si le jacobien à np éléments* $\dfrac{D(\ldots X^\sigma_i \ldots)}{D(\ldots p^i_\sigma \ldots)}$ *n'est pas nul, les solutions du système* $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ *satisfaisant* *de plus aux n équations* $d\xi^\sigma \wedge V_p = 0$ *sont localement les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires* (H) *équivalent aux solutions d'un système de n équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre* $S_{2,n}(\xi^\sigma)$, *par rapport aux variables* x^i.

Cherchons les solutions du système extérieur $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$, telles que les ξ^σ soient des fonctions des x^i de classe C^r, $r \geqslant 2$.

Les np équations $\dfrac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(dp^i_\sigma)} = 0$ donnent :

$$\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^i} = X^\sigma_i. \tag{10}$$

Les X_i sont des fonctions des coordonnées locales de $J^1(V_p, W_n)$. Si $\dfrac{D(\ldots X^\sigma_i \ldots)}{D(\ldots p^i_\sigma \ldots)} \neq 0$ les équations (10) définissent les p^i_σ en fonction des $\dfrac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^i} = u^\sigma_i$ coordonnées canoniques du noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Localement on a donc

$$p^i_\sigma = \varphi^i_\sigma\left(\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^j}, x^h, \xi^\mu\right) \tag{11}$$

h, j étant des nombres arbitraires de l'ensemble (1 à p) ρ et μ des nombres arbitraires de l'ensemble (1 à n). Les p^i_σ au moyen des équations (10) deviennent ainsi les composantes de n champs de vecteurs $\vec{p}_\sigma$, σ(1 à n) sur (V_p). Par rapport au repère au point x de (V_p) la différentielle de p^i_σ est en désignant par Γ^i_{hj} les coefficients de la connexion infinitésimale sur (V_p)

$$dp^i_\sigma = \frac{\partial p^i_\sigma}{\partial x^j}dx_j + \Gamma^i_{hj}p^h\,dx^j = \frac{D(p^i_\sigma)}{Dx^j}dx^j.$$

Les n équations $\dfrac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(\xi^\sigma)} = 0$ donnent alors en utilisant le symbole D pour indiquer une dérivation absolue :

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{Dp^i_\sigma}{Dx^i} + X_\sigma = 0. \tag{12}$$

Le système (12) lorsqu'on tient compte de la solution (11) des équations (10) donne naissance à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre $S_{n,2}(\xi^\sigma)$.

Montrons maintenant que les p dernières équations du système associé sont vérifiées comme conséquence de (11) et (12). Quand on considère les p^i_σ comme des fonctions des x^i par l'intermédiaire des fonctions ξ^σ et de leurs dérivées partielles du premier ordre, une équation $\frac{\partial \Omega_{p+1}}{\partial (dx^j)} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Omega_{p+1}}{\partial (dx^j)} = -\sum_{i\sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} & \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^j} \\ \frac{Dp^i_\sigma}{Dx^i} & \frac{Dp^i_\sigma}{Dx^j} \end{vmatrix} + \sum_{\sigma=1}^{n} X_\sigma \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^j} + \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} X^\sigma_i \frac{Dp^i_\sigma}{Dx^j}$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{Dp^i_\sigma}{Dx^i} + X_\sigma \right] - \sum_{\sigma, i} \frac{Dp^i_\sigma}{Dx^j} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} - X^\sigma_i \right).$$

Le second membre est donc nul comme conséquence des équations (10) et (12).

Remarques — 1) Il est bien évident que ce n'est que localement que les solutions des équations $i(\overrightarrow{X})\Omega_{p+1} = 0$, $d\xi^\sigma \wedge V_p = 0$ sont représentées par les solutions du système $S_{2,n}(\xi^\sigma)$.

2) C'est le système des équations (10) qui définit le système des coordonnées pratiques p^i_σ en fonction des coordonnées sur le noyau de $J^1(V_p, W_n)$. On voit que ce système s'obtient en égalant à la coordonnée canonique u^σ_i le coefficient X^σ_i de la forme de Pfaff ω.

$$X^\sigma_i(p^j_\rho, x^h, \xi^u) = u^\sigma_i. \tag{13}$$

Les indices latins prennent toutes les valeurs de 1 à p, les indices grecques toutes les valeurs de 1 à n.

3) Si la forme de Pfaff ω est homologue à 0, $\omega = dE$, la forme Ω_{p+1} est alors fermée $d\Omega_{p+1} = 0$. On peut écrire puisque $d[\theta(\overrightarrow{p_\sigma})V_p] = 0$

$$\Omega_{p+1} = d\left[\sum_{\sigma=1}^{n} \xi^\sigma \theta(\overrightarrow{p_\sigma}) V_p + EV_p \right].$$

Le système des équations (10) et (12) prend la forme :

$$(14) \qquad \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = \frac{\partial E}{\partial p^i_\sigma} \qquad \sum_{i=1}^{p} \frac{Dp^i_\sigma}{Dx^i} = -\frac{\partial E}{\partial \xi^\sigma}.$$

Cette forme (14) est la généralisation des équations d'Hamilton qu'on obtient pour $p = 1$. Géométriquement si on considère les applications de la droite numérique t dans (W_n), il leur est associé la variété des jets $J^1(t, W_n)$ qui est un espace fibré ayant pour base la droite numérique t pour fibre l'espace tangent à (W_n) : $T(W_n)$. Les éléments $p_1, p_2, ..., p_n$ sont identifiés aux composantes de la co-vitesse dans (W_n). C'est pour cette raison que nous appellerons système d'Hamilton généralisé le système des équations (14).

4) Si l'espace numérique à p dimensions R^p est rapporté à un système de coordonnées cartésiennes et si la fonction E est une forme quadratique à coefficients constants sur

$$J^1(R^p, W_n),$$

le système $S_{2,n}$ (ξ^σ) est à coefficients constants. Ω_{p+1} est la forme génératrice de ce système d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants.

5) Les np fonctions p^i_σ sur (V_p) sont également solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles qui s'obtient en écrivant que les n formes $\sum_{i=1}^{p} X^\sigma_i\, dx^i$ sont fermées.

6) Si $\dfrac{D(\ldots X^\sigma_i \ldots)}{D(\ldots p^i_\sigma \ldots)} = 0$, il se présente des circonstances très variées. Le système $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ peut n'avoir pas de solutions, ou bien il en admet construites au moyen des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre [les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre sont des sous-variétés de $J^1(V_p, W_n)$] ou encore il n'admet de solutions que pour les jets relatifs aux applications partielles d'une partie de (V_p) dans (W_n).

5° Pour familiariser le lecteur avec les notions précédentes nous traitons quelques exemples qui pour simplifier sont relatifs à la détermination d'une fonction numérique sur une variété (V_p). Aux applications de (V_p) dans la droite numérique ρ est associé la variété $J^1(V_p, \rho)$.

a) $p = 2$, $V_2 = R^2$. Les applications de R^2 dans ρ sont définies par une fonction numérique de deux variables x^1, x^2, coordonnées rectangulaires d'un point de R^2. En utilisant des coordonnées pratiques sur $J^1(R^2, \rho)$ p^1, p^2, soit la forme de Pfaff donnée :

$$\omega = p^1 dp^1 + kp^2 dp^2 + g(x^1, x^2, p^1, p^2, \xi) d\xi$$

dans laquelle k désigne une constante. La forme génératrice Ω_3 est :

$$\Omega_3 = d\xi \wedge dp^1 \wedge dx^2 + d\xi \wedge dx^1 \wedge dp^2 + (p^1 dp^1 + kp^2 dp^2 + g d\xi) \wedge dx^1 \wedge dx^2.$$

Le système associé $i(\vec{X})\Omega_3 = 0$ peut en particulier se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial (dp^1)} = - d\xi \wedge dx^2 + p^1 dx^1 \wedge dx^2 = 0$$
$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial (dp^2)} = d\xi \wedge dx^1 + kp^2 dx^1 \wedge dx^2 = 0$$
$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial (d\xi)} = dp^1 \wedge dx^2 + dx^1 \wedge dp^2 + g\, dx^1 \wedge dx^2 = 0.$$

Le théorème 1 nous dispense d'écrire les autres équations. Les solutions de ce système extérieur telles que ξ soit une fonction sur R^2 sont pour les deux premières :

$$\frac{\partial \xi}{dx^1} = p^1 \qquad \frac{\partial \xi}{dx^2} = kp^2.$$

Le jacobien $\dfrac{D(X_1, X_2)}{D(p_1, p_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k.$

Si $k \neq 0$, p^1 et p^2 étant des fonctions de x^1 et x^2, $p^1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial x^1}$, $p^2 = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial \xi}{\partial x^2}$ la troisième équation extérieure donne alors :

$$\frac{\partial p^1}{\partial x^1} + \frac{\partial p^2}{\partial x^2} + g = 0$$

d'où l'équation aux dérivées partielles du second ordre équivalente aux 3 équations précédentes :

$$S_{2,1}(\xi) \quad \frac{\partial^2 \xi}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{k}\frac{\partial^2 \xi}{(\partial x^2)^2} + g\left(x^1, x^2, \frac{\partial \xi}{\partial x^1}, \frac{1}{k}\frac{\partial \xi}{\partial x^2}, \xi\right) = 0$$

du type elliptique si $k > 0$, hyperbolique si $k < 0$.

Si $k = 0$, le jacobien $\dfrac{D(X_1, X_2)}{D(p^1, p^2)} = 0$, on ne peut plus dire que p^2 est une fonction de x^1, x^2. Une solution possible du système $i(X)\Omega_3 = 0$ est constituée par $dp^2 = 0$. On peut envisager la forme $\tilde{\Omega}_3$ induite par Ω_3 sur les sous-variétés $p^2 = \text{const.}$ Elle permet de déterminer ξ comme appartenant à la classe des applications de la droite numérique x^1 dans la droite numérique ρ. Dans ce cas $\tilde{\Omega}_3 = \Omega_2 \wedge dx^2$, x^2 étant considéré comme constant. ξ est déterminé comme solution du système caractéristique de Ω_2.

b) Prenons encore $p = 2$, $V_2 = R^2$ et pour ω la forme

$$\omega = -p^2\,dp^1 + (p^1 + p^2)\,dp^2 + g\,d\xi$$

dans laquelle g désigne une fonction arbitraire de x^1, x^2, p^1, p^2, ξ. Un calcul analogue au précédent montre que les solutions des équations $i(X)\,\Omega_3 = 0$ telles que ξ soit une fonction sur R^2 sont localement les solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique :

$$S_{2,1}(\xi) \quad \frac{\partial^2\xi}{(\partial x^1)^2} + g\left(x^1,\ x^2,\ \frac{\partial\xi}{\partial x^1} + \frac{\partial\xi}{\partial x^2},\ -\frac{\partial\xi}{\partial x^1},\ \xi\right) = 0.$$

c) Pour p quelconque, $V_p = R^p$ rapporté à des coordonnées cartésiennes proposons-nous de trouver la forme Ω_{p+1} génératrice des fonctions harmoniques sur R^p. Tout revient à déterminer ω. Observons d'une part que $\Delta\xi = \mathrm{div}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\xi$ d'autre part que le système des équations (10) et (12) s'écrit :

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^i} = X_i(p^1,\ \ldots,\ p^p,\ x^1,\ \ldots,\ x^p,\ \xi)$$
$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial p^i}{\partial x^i} = -X.$$

Si on considère le vecteur $\vec{p}(p^i)$ la dernière équation signifie que $\mathrm{div}\,\vec{p} = -X$. On a donc une solution en prenant $X = 0$, $X_i = p^i$, c'est-à-dire $\omega = p^i\,dp^i$ ou

$$\omega = \frac{1}{2}\,d(\text{Norme } \vec{p}).$$

Il résulte de là un moyen fort simple d'obtenir le Laplacien d'une fonction en coordonnées curvilignes que nous désignons par $q^1, \ldots q^p$. Le tenseur métrique étant g_{ij}, $\vec{p}$ désignant un vecteur de R^p, Norme $(\vec{p}) = g_{ij}p^ip^j$, considérons la forme

$$\Omega_{p+1} = d\xi \wedge \theta(\vec{p})V_p + [d \text{ Norme } (\vec{p}) + X\,d\xi] \wedge V_p$$

qui s'écrit au moyen des coordonnées curvilignes

$$\Omega_{p+1} = \Sigma(-1)^{i+1}\sqrt{g}\,d\xi \wedge dp^i \wedge dq^1 \dots d\check{q}^i . \wedge dq^p$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{g}\; d(g_{ij}p^ip^j) + X\,d\xi \wedge \sqrt{g}\,dq^1 \wedge \dots \wedge dq^p.$$

Du système associé résulte :

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^i} = g_{ij}p^j \qquad X = \frac{-1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial(p^i\sqrt{g})}{\partial q^i}$$

soit

$$\Delta\xi = -X = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\xi}{\partial x^j}\right)}{\partial q^i}.$$

Il suffit en effet d'écrire l'équation $\dfrac{\partial\Omega_{p-1}}{\partial(d\xi)} = 0$ sous la forme :

$$\Sigma(-1)^{i+1}\left[d(p^i\sqrt{g}) - p^i d\sqrt{g}\right] \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge d\check{q}^i, \dots \wedge dq^p$$
$$+ X\sqrt{g}\,dq^1 \wedge \dots \wedge dq^p = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{D(p^i\sqrt{g})}{Dq^{ii}} - \sum_{i=1}^{p}p^i\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^i} + X\sqrt{g} = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial(p^i\sqrt{g})}{\partial q^i} + \Gamma^i_{ji}p^j\sqrt{g} - \sum_{i=1}^{p}p^i\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^i} + X\sqrt{g} = 0$$

ce qui donne le résultat cherché en remarquant que

$$\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^j}.$$

Si maintenant on considère une variété riemannienne (V_p), un vecteur $\vec{p}$ tangent à (V_p) est un élément de $J^1(V_p, \rho)$ de but 0, au moyen de la forme Ω_{p+1} et de son système associé on engendre une classe de fonctions qui dans le cas où la norme est toujours positive sont des fonctions harmoniques sur des ouverts de (V_p).

Ainsi sur la sphère S_2 rapportée aux coordonnées longitude θ, colatitude φ la forme $V_2 = R^2 \sin\varphi\, d\theta \wedge d\varphi$, le vecteur $\vec{p}$ a par rapport au repère naturel pour coordonneés p^1, p^2 pour norme $N(\vec{p}) = R^2[\sin^2\varphi(p^1)^2 + (p^2)^2]$. La forme

$$\Omega_3 = R^2 \sin\varphi\, d\xi \wedge (dp^1 \wedge d\varphi - dp^2 \wedge d\theta) \\ + (p^1\, dp^1 \sin^2\varphi + p^2\, dp^2)\, R^4 \sin\varphi\, d\varphi \wedge d\varphi$$

donne pour équations associées :

$$\frac{d\xi}{\partial\theta} = p^1 \sin^2\varphi\, R^2, \qquad \frac{d\xi}{\partial\varphi} = p^2 R^2, \qquad \frac{Dp^1}{D\theta} + \frac{Dp^2}{D\varphi} = 0,$$

d'après une remarque précédente on peut remplacer cette dernière équation par l'équation $\dfrac{\partial(p^1\sqrt{g})}{\partial\theta} + \dfrac{\partial(p^2\sqrt{g})}{\partial\varphi} = 0$ ce qui donne l'équation du second ordre

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2} + \operatorname{cotg}\varphi \frac{\partial\xi}{\partial\varphi} = 0.$$

THÉORÈME 2. — *Si la forme de Pfaff* ω *sur* $J^1(R^p, \rho^n)$ *est à coefficients constants sur le noyau, les solutions du système associé* $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ *qui sont des fonctions sur* R^p *définissent une application linéaire de* R^p *dans* ρ^n.

Les C_i^σ étant des constantes, si $\omega = \sum C_i^\sigma\, dp_\sigma^i$, les np premières équations (10) donnent

$$\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^i} = C_i^\sigma$$

d'où $\xi^\sigma = C_i^\sigma x^i + C^\sigma$. Cette solution satisfait aux autres équations du système $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$. Cette solution constitue le représentant polynomial de $J^1(V_p, W_n)$, si les C^σ sont nuls.

Conséquence. — On peut par addition de cette solution toujours supposer que la forme de Pfaff est à coefficients non constants sur le noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

THÉORÈME 3. — *A toute forme de Pfaff* ω *sur* $J^1(V_p, W_n)$ *correspond un système d'équations aux dérivées partielles* (H) *et réciproquement.*

En effet à $\omega = X_i^\sigma dp_\sigma^i + X_\sigma d\xi^\sigma$ correspond d'après le théorème I le système

$$(\mathrm{H}) \begin{cases} \dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = X_i^\sigma, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\mathrm{D}p_\sigma^i}{\mathrm{D}x^i} = -X_\sigma \quad \sigma(1 \text{ à } n). \end{cases}$$

Réciproquement à tout système (H) donné, les seconds membres X_i^σ, X_σ sont des fonctions données sur $J^1(V_p, W_n)$ et par conséquent correspond une forme $\omega = X_i^\sigma dp_\sigma^i + X_\sigma d\xi^\sigma$ sur $J^1(V_p, W_n)$.

Théorème 4. — *Si la forme de Pfaff ω est la somme de deux formes de Pfaff ω_1 et ω_2, les solutions f_1^σ et f_2^σ du système $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ dans le sens du théorème 1 étant supposées exister pour ω_1 et ω_2, la solution relative à ω est $f_1 + f_2$.*

Cette proposition est évidente, elle correspond à la linéarité du système d'équations aux dérivées partielles $S_{2,n}(\xi^\sigma)$. En particulier si les X_σ sont des fonctions définies sur V_p seulement, la solution s'obtient comme somme de la solution relative à la forme $\omega_1 = X_i^\sigma dp_\sigma^i$ et d'une solution particulière du système (H).

6° *Formes* Ω_{p+r+1}. — Il peut se faire que la forme de Pfaff ω définie sur $J^1(V_p, W_n)$ dépende de certaines fonctions numériques Φ^1, ... Φ^r définies sur $J^1(V_p, W_n)$ ou de certains opérateurs portant sur ces fonctions. On envisagera alors la forme $\Omega_{p+r+1} = d\Phi^1 \wedge \dots d\Phi^r \wedge \Omega_{p+1}$ définie sur $D^r \times J^1(V_p, W_n)$, D^r étant le produit de r droites numériques où les fonctions Φ^j prennent leur valeur. Les raisonnements faits dans la démonstration du théorème 1 subsistent en remplaçant l'opérateur $i(X)$ par l'opérateur $i(\Phi^1) \wedge i(\Phi^2), \dots, i(\Phi^r) \wedge i(\vec{X})$. Pour déterminer l'ensemble des fonctions ξ^σ et les fonctions Φ^j on adjoint au système associé les équations de définition des fonctions Φ^j. Un exemple de ce cas est constitué par le mouvement d'un fluide parfait, quand on tient compte de la densité, de la pression, de l'échauffement.

§ 3. — Propriétés du noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Dans ce paragraphe où il est surtout question du noyau de $J^1(V_p, W_n)$, nous notons ce dernier $NJ^1(V_p, W_n)$. Il existe certaines propriétés évidentes du noyau de $J^1(V_p, W_n)$ utiles dans les applications. Elles résultent du fait déjà signalé § 1, 3 que $J^1(V_p, W_n)$ peut être considérée comme une variété fibrée ayant pour base $V_p \times W_n$ et de fibres isomorphes à l'espace $L(R^p, \rho^n)$ des applications linéaires et homogènes de R^p dans ρ^n.

PROPOSITION 1. — *Si* $W_n = W_\alpha + W_\beta$, $NJ^1(V_p, W_n)$ *est isomorphe au produit de* $NJ^1(V_p, W_\alpha)$ *par* $NJ^1(V_p, W_\beta)$.

Cela résulte que la propriété est vraie pour $L(R^p, \rho^{\alpha+\beta})$.

REMARQUE. — Cette proposition est vraie pour $NJ^r(V_p, W_\alpha \times W_\beta)$. Il suffit de revenir à la définition des r-jets de source x : $J^r_x(V_p, W_n)$.

Conséquence. — La forme Ω_{p+1} est la somme de deux formes Ω^α_{p+1} sur $J^1(V_p, W)$ et Ω^β_{p+1} sur $J^1(V_p, W_\beta)$

$$\xi \in W_\alpha \quad \Omega^\alpha_{p+1} = (-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots dx^p + \omega^\alpha \wedge V_p$$
$$\eta \in W_\beta \quad \Omega^\beta_{p+1} = (-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dq^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots dx^p + \omega^\beta \wedge V_p.$$

REMARQUE. — Si ω^α et ω^β sont des formes basiques sur $J^1(V_p, W_\alpha)$ et $J^1(V_p, W_\beta)$ le système des équations Hamiltoniennes généralisées se décompose en deux systèmes distincts.

PROPOSITION 2. — *Si* $V_p = V_h \times V_k$, $NJ^1(V_p, W_n)$ *est isomorphe au produit de* $NJ^1(V_h, W_n)$ *par* $NJ^1(V_k, W_n)$.

Même raison que pour 1.

REMARQUE. — Cette proposition est inexacte pour $NJ^r(V_h \times V_k, W_n)$ si $r > 1$. En effet si on envisage la source (x, y) dans le noyau de $J^r(V_h \times V_k, W_n)$ on a des éléments composés tels que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i . \partial y^j}$ avec $i + j = r$.

Conséquence. — La forme Ω_{h+k+1} peut s'écrire :

$$\Omega_{h+k+1} = \Phi_{h+1} \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge \Phi_{k+1} + \omega \wedge V_h \wedge V_k$$

expression dans laquelle V_h et V_k désignent les deux formes volumes sur les variétés respectives (V_h) et (V_k), ω une forme de Pfaff sur $J^1(V_h \times V_k, W_n)$, Φ_{h+1} une forme de degré $h+1$ sur $J^1(V_h, W_n)$, Φ_{k+1} une forme de degré $k+1$ sur $J^1(V_k, W_n)$.

En effet un vecteur $\vec{p}_\sigma$ dans $NJ^1(V_h \times V_k, W_n)$ est la somme de deux vecteurs $\vec{u}_\sigma$ dans $NJ^1(V_h, W_n)$, $\vec{v}_\sigma$ dans $NJ^1(V_k, W_n)$. $\vec{p}_\sigma = \vec{u}_\sigma + \vec{v}_\sigma$

$$\begin{aligned} \theta(\vec{p}_\sigma)\, V_h \wedge V_k &= [\theta(\vec{p}_\sigma)\, V_h] \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge [\theta(\vec{p}_\sigma)\, V_k] \\ &= [\theta(\vec{u}_\sigma)\, V_h] \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge [\theta(\vec{v}_\sigma)\, V_k] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Omega_{h+k+1} = \Big[\sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^\sigma \wedge \theta(\vec{u}_\sigma)\, V_h\Big] \wedge V_k \\ + (-1)^h V_h \wedge \Big[\sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^\sigma \wedge \theta(\vec{v}_\sigma)\, V_k\Big] + \omega \wedge V_h \wedge V_k, \end{aligned}$$

$$\Omega_{h+k+1} = \Phi_{h+1} \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge \Phi_{k+1} + \omega \wedge V_h \wedge V_k. \tag{18}$$

Proposition 3. — *Soient* V_p, V_q, W_n, *trois variétés, toute application* f *de* (V_q) *dans* (W_n) *se prolonge en une application de* $J^1(V_p, V_q)$ *dans* $J^1(V_p, W_n)$.

Nous avons vu que $J^1(V_p, W_n)$ peut être considérée comme un espace fibré ayant pour base (V_p) pour fibre $T_p(W_n)$. Comme l'application de (V_q) dans W_n se prolonge aux espaces tangents $T(V_q)$ dans $T(W_n)$ la proposition est évidente. Dans un domaine de coordonnées au point η de (V_q), l'application f fait correspondre le point ξ de (W_n) au moyen des formules $\xi^\sigma = f^\sigma(\eta^\rho)$. Cette application se prolonge en une application de l'espace des vecteurs tangents à (V_q) noté $T(V_q)$ dans l'espace $T(W_n)$ des vecteurs tangents à (W_n) au moyen des formules

$$\xi^\sigma = f^\sigma(\eta^1, \ldots, \eta^\sigma, \ldots, \eta^q) \qquad u^\sigma = \frac{\partial f^\sigma}{\partial \eta^\rho} v^\rho.$$

Les formules

$$x^i = x^i \qquad \xi^\sigma = f^\sigma(\eta^1, \ldots, \eta^\rho, \ldots, \eta^n) \qquad u_i^\sigma = \frac{\partial f^\sigma}{\partial \eta^\rho} v_i^\rho$$

traduisent une application de $J^1(V_p, V_q)$ dans $J^1(V_p, W_n)$ que nous appelons prolongement de f aux variétés des jets.

REMARQUE. — Si on utilise les coordonnées pratiques dans le noyau des jets, il faut considérer l'application inverse f^{-1} et remplacer les dernières formules par

$$p_\sigma^i = \frac{\partial \eta^\rho}{\partial \xi^\sigma} \pi_\rho^i.$$

COROLLAIRE. — *La forme* Ω_{p+1} *définie sur* $J^1(V_p, W_n)$ *remonte alors sur la variété* $J^1(V_p, W_q)$. *Explicitons les calculs de ce transport :*

$$d\xi^\sigma = \alpha_\rho^\sigma d\eta^\rho \qquad p_\sigma^i = \alpha_\sigma^\rho \pi_\rho^i$$
$$\Phi_{p+1} = \Sigma(-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^i \wedge dx^1 \wedge \dots \check{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p$$

devient :

$$\overline{\Phi}_{p+1} = \Sigma(-1)^{i+1} d\eta^\rho \wedge d\pi_\rho^i \wedge dx^1 \wedge \dots \check{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^p$$
$$\omega = X_i^\sigma dp_\sigma^i + X_\sigma d\xi^\sigma \qquad \textit{devient} \qquad \overline{\omega} = Y_i^\rho d\pi_\rho^i + Y_\rho d\eta^\rho$$

d'où la forme

$$\overline{\Omega}_{p+1} \qquad \textit{sur} \qquad J^1(V_p,\ V_q).$$
$$\overline{\Omega}_{p+1} = (-1)^{i+1} d\eta^\rho \wedge d\pi_\rho^i \wedge dx^1 \wedge \dots \check{dx^i} \wedge \dots dx^p + \overline{\omega} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p.$$

APPLICATION. — Soit $J^1(V_h \times V_k, W_n)$ la variété des jets associée aux applications de $V_h \times V_k$ dans (W_n), φ une application de $V_h \times V$ dans W_n. Par l'application la forme Ω_{h+k+1} sur $J^1(V_h \times V_k, W_n)$ devient une forme sur $J^1(V_h \times V_k, V_h \times V)$. Si les applications de $V_h \times V_k$ dans $V_h \times V$ se réduisent aux applicationsde (V_k) dans (V) la forme Ω_{h+k+1} est une forme sur $V_h \times J^1$ (V_k, V). La formule (18) dans laquelle Φ_{h+1} est nulle donne :

$$\overline{\Omega}_{h+k+1} = V_h \wedge [(-1)^h \Phi_{k+1} + (-1)^h \omega \wedge V_k].$$

Par sommation sur une chaîne de (V_h) cette forme devient une forme Ω_{k+1} de degré $k+1$ sur $J^1(V_k, V)$.

$$\Omega_{k+1} = (-1)^{hk} \int_{C(V_h)} (\Phi_{k+1} + \omega \wedge V_k) \wedge V_k.$$

Nous verrons l'application de ce résultat à la génération des équations de la mécanique des systèmes rigides à partir des équations de la mécanique des milieux continus.

CHAPITRE II

LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS GALILÉENS

§ 1. — La forme génératrice des milieux continus galiléens.

Nous allons montrer que 3 des postulats classiques de la mécanique Galiléenne conduisent à l'existence d'une forme génératrice des équations du mouvement au sens du théorème fondamental du chapitre I.

Postulat 1. — Il existe un temps universel, indépendant des milieux considérés, défini à une constante additive près :

$$t = \tau + t_0.$$

Conséquence. — Les mouvements d'un milieu continu à n dimensions seront définis par des applications de l'espace numérique $R_n \times t$ dans un espace numérique à n dimensions ρ^n.

Postulat 2. — L'espace R^n à n dimensions est proprement Euclidien.

Conséquence. — Il existe sur R^n un tenseur covariant du second ordre fondamental g_{ij}, permettant de définir la norme d'un vecteur de R^n au moyen d'une forme quadratique définie positive de ses composantes contravariantes. L'espace image de R^n par une application est également proprement Euclidien. Nous désignerons son tenseur fondamental par $\gamma_{\sigma\rho}$. La structure d'espace proprement Euclidien de R^n et de ρ^n s'étend au noyau de l'ensemble des jets d'ordre 1 $J^1(R^n, \rho^n)$. Un élément de ce noyau de l'ensemble des jets, ayant pour coordonnées p^i_σ, étant identifié à un tenseur construit sur l'espace tangent T_x

au point x de R^n et sur le dual T^*_ξ de l'espace tangent au point ξ de ρ^n, le tenseur métrique sur le noyau de $J^1(R^n, \rho^n)$ est $\gamma^{\sigma\rho} g_{ij}$ pour le système des coordonnées utilisées dans le noyau.

Remarque. — Lorsqu'il s'agira du noyau de $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ on considèrera sur la droite numérique t un tenseur métrique $g_{n+1,n+1}$ et on prendra pour tenseur métrique sur le noyau des jets le tenseur ayant pour composante $\gamma^{\sigma\rho} g_{ij}$, $\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1}$.

Ainsi le vecteur p^{n+1} de composantes $(0, 0, \ldots, 0, p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, \ldots p_n^{n+1})$ a pour norme $\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p_\sigma^{n+1} p_\rho^{n+1}$.

Postulat 3. — Dans les milieux à n dimensions, tous les repères formées par les systèmes de n vecteurs orthogonaux, animés d'un mouvement de translation uniforme sont équivalents.

Conséquence. — Si par rapport à un premier repère, un point M de R^n, source de l'application a pour coordonnées $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ le point μ but de l'application dans ρ^n a pour coordonnées $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ et si par rapport à un deuxième repère M et μ ont respectivement pour coordonnées $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ et $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ les formules

$$(19)\qquad \begin{cases} \xi^\sigma = a_\rho^\sigma n^\rho + v^\sigma \tau, \\ t = \tau + t_0, \\ x^i = a_j^i y^j \end{cases}$$

définissant le passage du deuxième repère au premier dans lesquelles la matrice $||a_\rho^\sigma|| = ||a_j^i||$ est une matrice orthogonale, constituent une représentation d'un groupe G, appelé groupe Galiléen, caractéristique de la mécanique Galiléenne.

D'après le théorème fondamental du chapitre I, à l'ensemble des applications de $R^n \times t$ dans ρ^n est associée une forme génératrice de degré $n + 2$ sur $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ qui dans le premier repère a pour expression en coordonnées pratiques :

$$\Omega_{n+2} = \Sigma(-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots dx^n \wedge dt \\ + \omega \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dt.$$

Le postulat 3 indiquant que dans un milieu à n dimensions il n'existe aucun repère privilégié, implique que la forme Ω_{n+2} doit être invariante par G. Comme dans Ω_{n+2} le seul élément qui n'est pas déterminé est ω. les conditions d'invariance de Ω_{n+2} par G vont nous permettre de préciser ω.

Les formules (19) définissent une application de $R^n \times t \times \rho \times G$ dans $R^n \times t \times \rho^n$. L'ensemble des jets $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ est contenu dans $J^1(R^n \times t, R^n \times t \times \rho^n)$. La forme Ω_{n+2} définie sur la partie de $J^1(R^n \times t, R^n \times \rho^n)$ dont le but est ρ^n, remonte par l'application $R^n \times t \times \rho^n \times G$ dans $R^n \times t \times \rho^n$ sur $J^1(R^n \times t, R^n \times t \times \rho^n \times G)$. Pour $\gamma \in G$ fixé la restriction de Ω_{n+2} à $J^1(R^n \times t, R^n \times t \times \rho^n \times \{\gamma\})$ est une forme $\Omega_{n+2,\gamma}$. L'invariance se traduit par l'égalité

$$\Omega_{n+2,\gamma} = \Omega_{n+2}.$$

Le groupe G opère sur $R^n \times t$, ρ^n, et par prolongement sur le noyau des jets sur l'ensemble $J^1(R^n \times t, \rho^n)$. Les formules traduisant le prolongement de G sur le noyau sont en coordonnées canoniques

$$\begin{aligned} u_i^\sigma &= a_\rho^\sigma \underline{a}_i^j v_j^\rho \\ u_{n+1}^\sigma &= a_\rho^\sigma v_{n+1}^\rho + v^\sigma \end{aligned}$$

et en coordonnées pratiques :

$$\begin{aligned} p_\sigma^i &= \underline{a}_\sigma^\rho a_j^i \pi_\rho^j \\ p_\sigma^{n+1} &= \underline{a}_\sigma^\rho \pi_\rho^{n+1} + v^\sigma. \end{aligned}$$

Invariants du groupe G. — Il est important de remarquer que le groupe Galiléen G est un sous-groupe d'un groupe G', en désignant par G' le groupe linéaire correspondant à une matrice $\|a_j^i\|$ quelconque. Le groupe G' laisse invariant les n fonctions algébriques suivantes des p_σ^i

$$\begin{aligned} J'_1 &= \Sigma p_i^i && (\Sigma \text{ comprend } n \text{ termes}) \\ J'_2 &= \Sigma p_j^i p_k^j && (\Sigma \text{ comprend } n^2 \text{ termes}) \\ J'_3 &= \Sigma p_j^i p_k^j p_i^k && (\Sigma \text{ comprend } n^3 \text{ termes}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ J'_r &= \Sigma p_{i_2}^{i_1} p_{i_3}^{i_2} p_{i_4}^{i_3}, \ldots, p_{i_1}^{i_r} && (\Sigma \text{ comprend } n^r \text{ termes}) \\ J'_n &= \Sigma p_{i_2}^{i_1} p_{i_3}^{i_2} p_{i_4}^{i_3}, \ldots, p_{i_1}^{i_n} && (\Sigma \text{ comprend } n^n \text{ termes}) \end{aligned}$$

Nous désignerons par J' l'ensemble de ces invariants. Si on prend le groupe Galiléen G, G laisse non seulement invariant l'ensemble J' mais les normes des vecteurs $\vec{p^i}(p_1^i, p_2^i, \ldots, p_n^i)$ et plus généralement les normes des r-vecteurs construits sur les vecteurs p^i. Nous désignerons par J l'ensemble des invariants du groupe Galiléen G.

Détermination de la forme de Pfaff ω pour que Ω_{n+2} soit invariante par G. — Partageons la somme des termes constituant ω en trois :

1° $\omega_c = \sum_{\sigma=1}^{n} X_{n+1}^{\sigma}\, dp_{\sigma}^{n+1}$. Nous verrons qu'ils correspondent à la partie cinétique du mouvement d'un point de R^n.

2° $\omega_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\sigma}\, dp_{\sigma}^{i}$. Nous verrons que si les X_i^{σ} sont des fonctions des p_{σ}^{i} ils correspondent à la déformation du milieu.

3° $\omega_\sigma = -\, H_\rho\, d\xi^{\sigma}$. Ils correspondent au travail élémentaire d'un champ de forces H_σ appliquée en un point μ du milieu, et ne comprenant aucune action superficielle telle qu'on l'entend habtiuellement. Le signe — qui précède H_ρ provient du fait que Ω_{n+2} n'étant définie qu'à une constante multiplicative près, il faut le choisir ainsi pour retrouver les équations de la mécanique classique.

Pour effectuer le calcul de $\Omega_{n+2,g}$ partageons les termes de Ω_{n+2} en deux catégories :

a) ceux de la forme

$$\varphi_c = \sum_{\sigma=1}^{n} (-1)^{n+2} d\xi^{\sigma} \wedge dp_{\sigma}^{n+1} \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + \omega_c \wedge dx^1 \wedge \ldots dx^n \wedge dt.$$

b) ceux de la forme :

$$\varphi_d = \sum_{\sigma=1}^{n} (-1)^{i+1} d\xi^{\sigma} \wedge dp_i^{\sigma} \wedge dx^1 \wedge \ldots d\check{x}^i \wedge \ldots dx^n \wedge dt$$
$$+ \omega_d \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dt.$$

Étudions la manière dont se transforme les termes φ_c

$$\varphi_c = [(-1)^{n+2} d\xi^{\sigma} \wedge dp^{n+1} + (-1)^n \omega_c \wedge dt] \wedge dx^1 \wedge \ldots dx^n,$$
$$\varphi_c = (-1)^n [d\xi^{\sigma} \wedge dp_{\sigma}^{n+1} + \omega_c \wedge dt] \wedge (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n).$$

Comme dans un changement de variables orthogonales $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ occupons nous uniquement des termes :

$$\varphi_2 = \sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^{\sigma} \wedge dp_{\sigma}^{n+1} + \omega_c \wedge dt.$$

D'après les formules de changement de repère :

$$d\xi^{\sigma} = a_{\rho}^{\sigma}\, d\eta^{\rho} + v^{\sigma} d\tau, \qquad dp_{\sigma}^{n+1} = \underline{a}_{\sigma}^{\rho}\, d\pi_{\sigma}^{n+1}, \qquad \omega_c = X_{n+1}^{\sigma}\, dp_{\sigma}^{n+1}.$$
$$\varphi_2 = \underline{a}_{\sigma}^{\rho}(a_{\rho}^{\sigma}\, d\eta^{\rho} + v^{\sigma}\, d\tau) \wedge d\pi_{\rho}^{n+1} + X_{n+1}^{\sigma} \underline{a}_{\sigma}^{\rho}\, d\pi_{\rho}^{n+1} \wedge d\tau,$$
$$\varphi_2 = d\eta^{\rho} \wedge d\pi_{\rho}^{n+1} + (X_{n+1}^{\sigma} - v^{\sigma})\, \underline{a}_{\sigma}^{\rho} . d\pi_{\rho}^{n+1} \wedge d\tau.$$

Or dans un changement de repère $X^\sigma_{n+1} = a^\sigma_\rho . Y^\rho_{n+1}$; X^σ_{n+1} peut donc être identifié aux composantes d'un vecteur contravariant. Il en résulte

$$X^\sigma_{n+1} = u^\sigma_{n+1} F$$

où F désigne une fonction des invariants de l'ensemble J. Dans le changement de repère

$$X^\sigma_{n+1} = F(a^\sigma_\rho v^\rho_{n+1} + v^\sigma).$$

Pour que φ_2 soit invariante, F ne peut être qu'une constante égale à l'unité. Il en résulte $\omega_c = u^\sigma_{n+1} . dp^{n+1}_\sigma$. Comme le groupe G laisse invariant la norme du vecteur $\vec{p}^{n+1}$, ω_c ne peut être que proportionnelle à la différentielle de cet invariant qui a pour expression en coordonnées rectangulaires $\sum_{\sigma=1}^{n} (p^{n+1}_\sigma)^2$. En désignant par δ une constante par rapport à G, mais qui peut très bien être une fonction des coordonnées du point μ et d'autres paramètres (température, pression)

$$\omega_c = \frac{1}{2\delta} d[\Sigma(p^{n+1}_\sigma)^2].$$

De $\omega_c = u^\sigma_{n+1}\, dp^{n+1}_\sigma$ résulte $p^{n+1}_\sigma = \delta u^\sigma_{n+1}$, par suite en coordonnées canoniques

$$\omega_c = \frac{\delta}{2} d(u^\sigma_{n+1})^2 = \frac{\delta}{2} d\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial t}\right)^2.$$

Au point de vue mécanique il est intéressant de remarquer que le nombre δ n'est autre que la densité et que le vecteur $\vec{p}^{n+1}(p^{n+1}_\sigma)$ n'est autre que le vecteur quantité de mouvement du point μ.

De ce qui précède résulte le théorème :

Théorème 1. — *En mécanique galiléenne, la partie cinétique ω_c de la forme de Pfaff ω est la demi-différentielle de la force vive δv^2, δ densité de la matière au point μ.*

Remarque. — Quand on utilise des coordonnées pratiques, l'expression générale de φ_2 est en coordonnées orthogonales

$$\varphi_2 = d\xi^\sigma \wedge dp^{n+1}_\sigma + \frac{1}{2\delta} d\left[\sum_{\sigma=1}^{n} (p^{n+1}_\sigma)^2\right]$$

si les axes ne sont pas rectangulaires à

$$\varphi_2 = d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^{n+1} + \frac{1}{2\delta} d(\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p_\sigma^{n+1} p_\rho^{n+1}).$$

Étudions maintenant la transformation de φ_d :

$$\varphi_d = \Sigma(-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dt$$
$$+ \omega_d \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dt.$$

La présence du facteur $dt = d\tau$ dans les produits extérieurs constituant les termes de φ_d, conduit à ne conserver dans l'expression de $d\xi^\sigma$ que $a_\rho^\sigma d\eta^\rho$. Si on désigne par A_j^i, le mineur du déterminant de la matrice a_j^i relatif à l'élément a_j^i,

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^n = (-1)^{i+j'} A_{j'}^i \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{j'} \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

Si on désigne par $\alpha_i^{j'}$ l'élément de la matrice inverse de $\|a_j^i\|$, $A_{j'}^i = \det|a| . \alpha_i^{j'}$. Comme la matrice a_j^i est une matrice orthogonale $\det|a| = +1$, et $\alpha_i^{j'} = a_j^i$. Dans le changement de repère $dp_\sigma^i = \underline{a}_\sigma^\mu a_j^i \, d\pi_\mu^j$, d'où la transformation des termes de φ_d ne comprenant pas ω_d :

$$((-1)^{i+1} a_\rho^\sigma d\eta^\rho (-1)^{i+j'}) \, (\underline{a}_\sigma^\mu a_j^i \, d\pi_\mu^j) a_{j'}^i \, (dy^1 \wedge \ldots d\check{y}^{j'} \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge d\tau.$$

Des propriétés des matrices orthogonales résultent :

$$a_j^i . a_{j'}^i = 0 \quad \text{si} \quad j' \neq j, \qquad a_j^i . a_{j'}^i = 1 \quad \text{si} \quad j' = j.$$

Il en résulte

$$\varphi_d = \Sigma(-1)^{j+1} d\eta^\rho \wedge d\pi_\rho^j \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge d\check{y}^j \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge d\tau$$
$$\omega_d \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge d\tau.$$

Envisageons maintenant la partie ω_d de ω. Dans $\omega_d = X_i^\sigma dp_\sigma^i$ les X_i^σ sont des fonctions des p_σ^i. Dans un changement de variables $\omega_d = X_i^\sigma \, dp_\sigma^i = Y_j^\rho \, d\pi_\rho^j$, l'égalité tensorielle

$$X_i^\sigma = a_\rho^\sigma \underline{a}_i^j Y_j^\rho$$

montre que les X_i^σ peuvent être identifiées aux composantes d'un tenseur mixte construit sur l'espace tangent à R^n et à son dual. Si M_i^σ désigne un tenseur mixte construit sur R^n et son dual on a pour $\sigma \neq i$ $X_i^\sigma = M_i^\sigma . f$ où f est une fonction des invariants du groupe galiléen, pour G $\sigma = i$ $X_i^i = M_i^i . f + g$ où f et g désignent deux fonctions des invariants du groupe galiléen G. La présence de l'invariant g dans l'expression de X_i^i provient du fait que dans ω_d on peut avoir des termes de la forme $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} dp_i^i\right)$ dont chaque terme du produit $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^i\right)$, $\left(\sum_{i=1}^{n} dp_i^i\right)$ est un invariant.

En particulier des expressions possibles des X_i sont:

1° pour $\sigma \neq i$ $X_i^\sigma = \gamma^{\sigma\rho} g_{ii} p_\sigma^i f$, pour $\sigma = i$ $X_i^i = p_i^i f + g$.

2° Si on considère le produit contracté $C_i^\sigma = \sum_{j=1}^{n} p_j^\sigma p_i^j$ et plus généralement les produits contractés à r indices $C_i^\sigma = \Sigma\, p_{j_1}^\sigma p_{j_2}^{j_1} p_{j_3}^{j_2}, \ldots, p_i^{j_r}$, une expression très générale possible des X_i^σ consiste en une fonction linéaire des C_i^ρ, dont les coefficients sont des fonctions quelconques du groupe G.

Remarquons enfin que l'application du théorème fondamental du chapitre I donne les équations d'Hamilton généralisées:

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = X_i^\sigma, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_\sigma^i}{\partial x^i} - X_\sigma = 0.$$

Pour $i \leqslant n$ les n^2 premières équations par la nature de leur second membre X_i^σ permet d'étudier l'application de R^n dans ρ^n et par suite la déformation du milieu. C'est pourquoi $\omega d = X_i^\sigma X_i^\sigma dp_\sigma^i$ correspond aux déformations.

De là résulte le théorème:

Théorème 2. — *En mécanique Galiléenne la partie ω_d de la forme de Pfaff, ω qui correspond aux déformations du milieu a pour coefficient X_i^σ une fonction linéaire des composantes d'un tenseur mixte M_i^σ construit sur R^n et son dual*

$$X_i^\sigma = M_i^\sigma f + \delta_i^\sigma g$$

δ_i^σ désignant le symbole de Kronecker, f et g des fonctions des invariants du groupe Galiléen.

Nous avons ainsi construit une forme Ω_{n+2} invariante par le groupe Galiléen G, dont le support est la variété des jets $J^1(R^n \times t, \rho^n)$. D'après le théorème fondamental I du chapitre I, le système associé à Ω_{n+2} conduit à des équations aux dérivées partielles du second ordre. Ces équations présentent les caractères voulus par les axiomes de la mécanique Galiléenne. Nous proposons alors d'axiomatiser cette dernière de la manière suivante:

Axiome. — Les équations de la mécanique Galiléenne des milieux continus à n dimensions sont engendrées par le système des équations extérieures associées à la forme extérieure Ω_{n+1} de degré $n+2$, ayant pour support la variété des jets $J^1(R^n \times t, \rho^n)$,invariante par le groupe Galiléen G, système dont on prend les solutions qui sont des fonctions sur $R^n \times t$ de classe $C^r (r \geqslant 2)$.

Remarques. — 1. L'axiome précédent entraîne comme il se doit les postulats classiques I, II, III.

2) Les applications montrent qu'on retrouve ainsi les équations classiques et de plus qu'on peut en former d'autres dans un cadre d'hypothèses très larges concernant les déformations du milieu. Notons que c'est le vecteur d'impulsion-énergie qui s'introduit naturellement dans les équations aux dérivées partielles du second ordre.

3) On observera qu'il n'y a pas lieu d'introduire les notions d'énergie de tenseur de déformations, de tenseur de contraintes pour parvenir à ces résultats.

4) Un moyen général d'engendrer une mécanique de milieux continus à n dimensions (le temps étant une des coordonnées locales dans le milieu) est de considérer sur une vairété V_n admettant un groupe ou un pseudo-groupe de transformations G, une forme Ω_{n+1} ayant pour support l'ensemble des jets de V_n dans V_n et invariante par G.

5) Dans un système de coordonnées pratiques quelconques, l'expression de la forme génératrice des mouvements des milieux continus à n dimensions, galiléens est :

$$(20) \quad \Omega_{n+2} = \Big[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \dots d\check{x}^i \wedge \dots dx^n \wedge dt + \omega \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dt \Big] \sqrt{g}$$

avec

$$\omega = X^\sigma_i \, dp^i_\sigma + d\left(\frac{1}{2\delta} \gamma^{\sigma\rho} g_{n+1, n+1} p^{n+1}_\sigma \cdot p^{n+1}_\rho \right) - H_\sigma \, d\xi^\sigma,$$

$$g = \det gij.$$

Les fonctions X^σ_i seront déterminées dans chaque cas pour les applications que l'on désire traitées.

§ 2. — Mécanique des fils.

On adapte la théorie précédente à la dimension du milieu considéré. Un fil est un milieu dont deux dimensions sont négligeables vis-à-vis de la troisième. Les points du fil sont donc définis au moyen d'une variable s_0, longueur du fil non soumis à une traction.

A. STATIQUE. — L'équilibre des fils est l'étude des applications de la droite numérique s_0, dans l'espace numérique à 3 dimensions ρ^3. D'après la théorie générale nous savons que la forme génératrice des équations de la statique des fils est une forme de degré deux sur la variété des jets $J^1(s_0, \rho^3)$

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma + \omega \wedge ds_0.$$

Ω_2 devant être invariante par les transformations du groupe galiléen, la partie ω_d de ω doit être invariante et par suite ne peut être que la différentielle d'une fonction du seul invariant I existant dans ce cas, invariant qui est la norme du vecteur $\vec{p}$ (p_1, p_2, p_3). Soit $f(\mathrm{I})$ cette fonction de I

$$\mathrm{I} = \sum_{\sigma=1}^{3} (p_\sigma)^2,$$

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}} 2 . p_\sigma dp_\sigma - \mathrm{H}_\sigma d\xi^\sigma$$

(H_σ composantes d'un champ de forces dans ρ^3).

Les équations caractéristiques de Ω s'écrivent :

$$-\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial s_0} + 2 \frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}} p_\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial p_\sigma}{\partial s_0} - \mathrm{H}_\sigma = 0.$$

Pour déterminer la fonction $f(\mathrm{I})$ il est nécessaire de faire une hypothèse sur la manière dont se comporte le fil.

a) ***Fil inextensible.*** — Désignons par s la longueur de l'arc du profil du fil dans sa position d'équilibre sous l'action des forces appliquées. L'hypothèse de la non extensibilité se traduit par $ds^2 = ds_0^2$, d'où $\sum_{\sigma=1}^{3} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial s_0}\right)^2 = 1$; des 3 premières équations d'Hamilton résultent alors

$$\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2 = \frac{1}{4I}$$

le signe de ω_d devant être le même que celui de ω_h, $f = -\sqrt{I}$.

La forme génératrice des équations de la statique des fils est donc :

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - d\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\right) \wedge ds_0 - H_\sigma d\xi^\sigma \wedge ds_0.$$

Tension. — Si δ_0 désigne la densité linéaire du fil, on appelle tension T en un point le produit $\delta_0\sqrt{I}$. En remplaçant $\sqrt{I}$ par $\frac{T}{\delta_0}$ on obtient :

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - \left(\frac{\delta_0}{T} \sum_{\sigma=1}^{3} p_\sigma dp_\sigma + H_\sigma d\xi^\sigma\right) \wedge ds_0 \tag{21}$$

dont les équations caractéristiques

$$\frac{d\xi^\sigma}{ds_0} + p_\sigma \frac{\delta_0}{T} = 0, \qquad \frac{dp_\sigma}{ds_0} - H_\sigma = 0$$

conduisent à la forme classique en posant $\frac{d\xi^\sigma}{ds_0} = u^\sigma$

$$\frac{d(Tu^\sigma)}{ds_0} + \delta_0 H_\sigma = 0.$$

b) *Fil extensible.* — Si on admet une loi d'allongement proportionnelle à la tension

$$ds = ds_0 (1 + kT)$$

des équations d'Hamilton résultent alors

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 = (1 + kT)^2 = 4I\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2.$$

Comme par définition $T = \delta_0\sqrt{I}$

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{I}}(1 + k\delta_0\sqrt{I})$$

d'où

$$f = \sqrt{\mathrm{I}} + \frac{k\delta_0}{2}\,\mathrm{I}.$$

La forme génératrice Ω_2 revêt donc la forme initiale

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - df \wedge ds_0 - \mathrm{H}_\sigma\, d\xi^\sigma \wedge ds_0.$$

Comme

$$df = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{I}}}(1 + k\mathrm{T})\, d\mathrm{I}, \quad df \wedge ds_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{I}}}\, d\mathrm{I} \wedge (1 + k\mathrm{T})\, ds_0.$$

En tenant compte de $ds = (1 + k\mathrm{T})\, ds_0$

$$df \wedge ds_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{I}}}\, d\mathrm{I} \wedge ds = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{I}}} \sum_{\sigma=1}^{3} p_\sigma\, dp_\sigma \wedge ds$$

d'où la nouvelle expression de Ω_2 en fonction de la différentielle ds de l'arc du profil de la courbe d'équilibre.

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{I}}} \Sigma p_\sigma\, dp_\sigma \wedge ds - \mathrm{H}_\sigma \frac{1}{1 + k\mathrm{T}}\, d\xi^\sigma \wedge ds$$

qui engendre les équations classiques.

B. Dynamique. — La dynamique Galiléenne des fils est l'étude des applications de $\mathrm{R}^2 = s_0 \times t$ (s_0 droite numérique où le paramètre fixant la longueur du fil au repos prend sa valeur, t droite numérique temporelle) dans ρ^3. D'après l'étude théorique, la forme génératrice des équations du mouvement est une forme de degré 3 sur $\mathrm{J}(s_0 \times t,\ \rho^3)$

$$\text{(22)}\quad \begin{aligned} \Omega_3 = {} & \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp^1_\sigma \wedge dt - \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp^2_\sigma \wedge ds_0 \\ & - d\sqrt{(p^1_1)^2 + (p^1_2)^2 + (p^1_3)^2}\, ds_0 \wedge dt \\ & + d\,\frac{(p^2_1)^2 + (p^2_2)^2 + (p^2_3)^2}{2}\, ds_0 \wedge dt - \mathrm{H}_\sigma\, d\xi^\sigma \wedge ds_0 \wedge dt. \end{aligned}$$

Exemple. Vibrations transversales des cordes tendues. — La corde est supposée tendue suivant Ox, la tension imposée suivant cette direction est T_0. On admet qu'il n'y a pas de déplacement longitudinal $\xi^1 = x$, la vibration a lieu suivant l'axe des y, il n'y a qu'une seule fonction inconnue ξ^2 engendrée par les équations associées à la forme :

$$\Omega_3 = d\xi^2 \wedge dp_2^1 \wedge dt - d\xi^2 \wedge dp_2^2 \wedge dx - d\sqrt{\left(\frac{T_0}{\delta_0}\right)^2 + (p_2^1)^2} \wedge dx \wedge dt + p_2^2\, dp_2^2 \wedge dx \wedge dt - H_2\, d\xi^2 \wedge dx \wedge dt.$$

Les équations associées donnent :

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x} + \frac{p_2^1}{\sqrt{\left(\frac{T_0}{\delta_0}\right)^2 + (p_2^1)^2}} = 0, \qquad -\frac{\partial \xi^2}{\partial t} + p_2^2 = 0,$$

$$\frac{\partial p_2^1}{\partial x} + \frac{\partial p_2^2}{\partial t} - H_2 = 0.$$

Si on suppose $\frac{T_0}{\delta_0}$ très grand devant p_2^1, on peut écrire $p_2^1 = -\frac{T_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial \xi^2}{\partial x}$ ce qui donne l'équation classique du second ordre

$$\frac{T_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial^2 \xi^2}{(\partial x)^2} - \frac{\partial^2 \xi^2}{(\partial t)^2} = H_2.$$

Remarque. — Nous avons supposé dans l'étude qui précède l'espace ρ^3 rapporté à des axes rectangulaires. En prenant un système de coordonnées quelconques dans ρ^3, $\gamma^{\sigma\rho}$ désignant le tenseur métrique sous forme contravariante, il suffit de prendre pour expression de l'invariant I, $I = \gamma^{\sigma\rho}\, p_\sigma p_\rho$.

Fluide parfait. — Un milieu continu sera dit du type fluide parfait si la partie ω_d de la forme de Pfaff ω est identiquement nulle et si en outre il existe une fonction F du point μ telle que dans ω_h figure la forme $\frac{1}{\delta}\, dF$ (δ densité du milieu au point μ).

La forme génératrice des équations sera de degré 5 sur la variété des jets $J^1(R^3 \times t, \rho^3)$.

$$\Omega_5 = (-1)^5 \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^4 \wedge V_3 + \frac{1}{2}\, d[(p_1^4)^2 + (p_2^4)^2 + (p_3^4)^2] \wedge V_4 + \left(\frac{1}{\delta}\frac{\partial(P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma} - H_\sigma\right) d\xi^\sigma \wedge V_4$$

dans laquelle P désigne la pression, τ la température, H_σ les composantes du champ de forces au point μ du milieu, β le coefficient de dilatation à pression constante, $V_3 = dx \wedge dy \wedge dz$, $V_4 = V_3 \wedge dt$.

On déduit alors de Ω_5 :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial t} = p^4_\sigma \qquad \delta \frac{\partial p^4_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial(P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma} - \delta H_\sigma = 0$$

d'où les équations classiques :

$$\delta \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial t^2} = -\frac{\partial(P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma} + \delta H_\sigma.$$

Les fonctions P, τ, δ, étant des fonctions inconnues auxiliaires, on doit adjoindre aux équations précédentes trois autres, en particulier l'équation caractéristique du fluide (P, ,τ δ) $= 0$ et la condition de conservation de la masse. Cette dernière condition se traduit de la manière suivante : soit $\vec{p}^4$ le vecteur de composantes $(p^4_1,\ p^4_2,\ p^4_3,\ p^4_4 = \delta)$, $\theta(\vec{p}^4)$ désignant l'opérateur des transformations infinitésimales, relativement au champ $\vec{p}^4$

$$\theta(\vec{p}^4) V_4 = 0.$$

Ceci suggère de considérer le milieu comme ayant quatre dimensions et les applications de R^4 dans ρ^4. Comme la densité est variable on envisagera la forme

$$\begin{aligned}\Omega_5 = \sum_{\sigma=1}^{4} (-1)^5 d\xi^\sigma \wedge dp^4_\sigma \wedge V_3 \\ + \frac{1}{2\delta} d[(p^4_1)^2 + (p^4_2)^2 + (p^4_3)^2 + (p^4_4)^2] \wedge V_4 \\ + \sum_{\sigma=1}^{3} \left(\frac{\partial(P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma} - H_\sigma\right) d\xi^\sigma \wedge V_4 + \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial p^4_\sigma}{\partial x^\sigma} - d\xi^4 \wedge V_4.\end{aligned}$$

Les équations d'Hamilton généralisées qu'on en déduit sont :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial t} = \frac{p^4_\sigma}{\delta} \frac{\partial p^4_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial(P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma_4} - \delta H_\sigma = 0 \quad \sigma(1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial p^4_4}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{3} \left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial x^\sigma}\right) = 0.$$

La dernière traduit la conservation de la masse, la condition imposée $p_4^4 = \delta$ entraîne $\frac{\partial \xi^4}{\partial t} = 1$, d'où $\xi^4 = t +$ cste en accord avec le postulat concernant le temps dans le cas de la mécanique Galiléenne.

REMARQUE. — La théorie des mouvements permanents est une conséquence immédiate du cas où Ω_5 admet la transformation infinitésimale associée au champ de vecteurs $(0,0 \ldots, 0; t)$ ce qui se traduit par :

$$\theta(t)\Omega_5 = 0.$$

§ 4. — Milieux isotropes à n dimensions : équations de Navier-Stokes.

La partie ω_d de la forme de Pfaff ω peut être une forme fermée homologue à 0. Dans ce cas il existe pour un milieu isotrope une fonction E des invariants de l'ensemble J du groupe G. On ne sait généralement pas déterminer la fonction E correspondant à certaines propriétés du milieu telles que volume invariable. C'est pourquoi on se borne à en chercher un développement limité. D'après le théorème 2 du chapitre I les termes intéressants sont au moins de degré deux. En se bornant à ces termes du deuxième degré, il n'y en a que deux possibles $(J_1)^2$ et J_2 en désignant par J_1 l'invariant $\sum_{i=1}^{n} p_i^i$ et par J_2 la forme quadratique des p_σ^i sur le noyau $J^1(R^n, \rho^n)$. En désignant par α et β deux coefficients pouvant dépendre de la température on a donc

$$E = + \frac{1}{2}\left[\alpha(J_1)^2 + \beta J_2)\right].$$

Ainsi dans le cadre de cette approximation qui est la forme que prend l'approximation linéaire classique dans cette théorie, les milieux isotropes à n dimensions $(n \geqslant 2)$ ne dépendent en dehors de la densité δ que de deux coefficients physiques.

Dans un système de coordonnées quelconques, la forme génératrice s'écrit :

$$(23)\quad \Omega_{n+2} = \Big\{ \Sigma(-1)^{i+1} d\xi^{\sigma} \wedge dp^{i}_{\sigma} \wedge dx^{1} \wedge \ldots d\check{x}^{i} \wedge \ldots dx^{n+1} + \frac{1}{2\delta} d[(\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p^{n+1}_{\sigma} p^{n+1}_{\rho}) + dE - X_{\sigma} d\xi^{\sigma}] \wedge V_{n+1} \Big\} \sqrt{g}$$

où l'on écrit $x^{n+1} = t$, $g = \det g_{ij}$.

La première série d'équations d'Hamilton généralisées s'écrit :

$$\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial E}{\partial p^{i}_{\sigma}}, \qquad \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{n+1}} = \frac{1}{\delta} \gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p^{n+1}_{\rho}.$$

Explicitons les calculs. En coordonnées quelconques

$$E = \frac{\alpha}{2} [\Sigma(p^{i}_{i})]^{2} + \frac{\beta}{2} \gamma^{\sigma\rho} g_{ij} p^{i}_{\sigma} p^{j}_{\rho}.$$

Posons $\dfrac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{i}} = u^{\sigma}_{i}$.

Pour $\sigma \neq i$ $\qquad u^{\sigma}_{i} = \beta \gamma^{\sigma\rho} g_{ij} p^{j}_{\rho}$

Pour $\sigma = i$ $\qquad u^{i}_{i} = \beta \gamma^{i\rho} g_{ij} p^{j}_{\rho} + \alpha \sum_{i=1}^{n} p^{i}_{i}$.

On a d'une manière générale en désignant par δ^{σ}_{i} le symbole de Kronecker

$$u^{\sigma}_{i} = \beta \gamma^{\sigma\rho} g_{ij} p^{j}_{\rho} + \alpha \delta^{\sigma}_{i} J_{1}.$$

En résolvant $p^{j}_{\rho} = \dfrac{1}{\beta} \gamma_{\sigma\rho} g^{ij} (u^{\sigma}_{i} - \delta^{\sigma}_{j} \alpha J_{1})$ on détermine $J_{1} = \sum_{j=1}^{n} p^{j}_{j}$ en faisant dans la formule précédente $\rho = j$

$$\Sigma p^{j}_{j} = \frac{1}{\beta} \gamma_{\sigma\rho} g^{ij} (u^{\sigma}_{i} - \alpha \delta^{\sigma}_{i} J_{1}).$$

En posant $\pi^{i}_{\sigma} = \gamma_{\sigma j} g^{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n} p^{j}_{j} = \frac{1}{\beta} \pi^{i}_{\sigma} (u^{\sigma}_{i} - \alpha \delta^{\sigma}_{i} J_{1}) = \frac{1}{\beta} \pi^{i}_{\sigma} u^{\sigma}_{i} - \frac{\alpha}{\beta} J_{1} \times \Sigma \pi^{i}_{i}$$

donc

$$J_{1} \Big(\beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} \pi^{i}_{i} \Big) = \Sigma \pi^{i}_{\sigma} u^{\sigma}_{i}.$$

Si on pose $I_{1} = \sum_{i,\sigma} \pi^{i}_{\sigma} u^{\sigma}_{i}$

$$J_{1} = \frac{I_{1}}{\beta + \alpha \Sigma \pi^{i}_{i}}.$$

Si on prend même système de coordonnées dans R^n et $\rho^n \Sigma \pi_i^i = n$, $J_1 = \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1$

$$p_\rho^j = \frac{1}{\beta} g_{\sigma\rho} g^{ij} \left(u_i^\sigma - \alpha \delta_i^\sigma \frac{I_1}{\beta + n\alpha} \right).$$

Les équations d'Hamilton généralisées

$$\frac{\partial p_\rho^{n+1}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_\rho^j}{\partial x^j} - X_\rho = 0$$

deviennent en utilisant la dérivation absolue :

$$(24) \quad g_{\sigma\rho} g^{n+1,\, n+1} \frac{D(\delta u^\sigma_{n+1})}{Dt} + \frac{1}{\beta} g_{\sigma\rho} g^{ij} \frac{Du_i^\sigma}{Dx^j} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} \frac{DI_1}{Dx^\rho} - X_\rho = 0.$$

En particulier en axes rectangulaires $g_{\sigma\rho} = 0$ si $\sigma \neq \rho$, $g_{\rho\rho} g^{ij} = 1$

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta\, \partial \xi^\rho}{\partial t}\right) + \frac{1}{\beta} \Delta \xi^\rho - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} \frac{\partial I_1}{\partial x^\rho} - X_\rho = 0.$$

Ce sont les équations de Navier-Stokes dans lesquelles Δ désigne le Laplacien pour un milieu à n dimensions. En introduisant les coefficients de Lamé λ, μ

$$(26) \qquad \alpha = \frac{1}{\mu} \frac{1}{n + \frac{u}{\lambda + \mu}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\mu},$$

on les met sous la forme vectorielle classique :

$$\mu \Delta \vec{\xi} + (\lambda + \mu)\, \overrightarrow{\text{grad}}\, (\text{div}\, \vec{\xi}) + \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta \vec{v}).$$

Remarque. — L'expression de E en coordonnées canoniques est :

$$E = \frac{1}{2\beta} \gamma_{\sigma\rho} g^{ij} u_i^\sigma u_j^\rho - \frac{\alpha}{\beta + n\alpha} \frac{1}{2\beta} (\gamma_{\sigma i} g^{ij} u_i^\sigma)^2,$$

ce qui donne en utilisant les coefficients de Lamé et des axes rectangulaires

$$E = -\frac{\mu}{2} \sum_{i,\sigma} (u_i^\sigma)^2 - \frac{1}{2} (\lambda + \mu) (\Sigma u_i^i)^2.$$

§ 5. — Forme génératrice des équations de la mécanique des systèmes rigides.

Les mouvements des systèmes rigides d'un milieu à n dimensions sont des applications de $R^n \times t$ dans ρ^n conservant les longueurs et le sens des figures. On a donc localement

$$d\sigma^2 = \sum_{\sigma=1}^{n} (d\xi^\sigma)^2 = ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2.$$

Il en résulte en posant $\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = u_i^\sigma$ le système d'équations

$$\sum_{\sigma=1}^{n} (u_i^\sigma)^2 = 1, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} u_i^\sigma u_i^\sigma = 0.$$

Pour résoudre ces équations interprétons les géométriquement. En un point μ de coordonnées (ξ^σ) considérons le repère naturel $(\mu, \vec{e_i})$ formé du point μ et des n vecteurs $\vec{e_i}$ de coordonnées (u_i^σ), σ variant de 1 à n. Ce repère est orthonormé, le tenseur métrique correspondant est $\gamma_{\sigma\rho} = 0$ si $\sigma \neq \rho$, $\gamma_{\sigma\sigma} = 1$ si $\rho = \sigma$. Il en résulte que les symboles de Christoffel sont nuls; les n vecteurs $\vec{e_i}$ ont donc des directions fixes, les u_i sont des constantes,

$$u_i^\sigma = m_i^\sigma.$$

Les n^2 éléments m_i^σ sont les éléments d'une matrice orthogonale.

Pour caractériser la partie $\omega_d = X_i^\sigma \, dp_\sigma^i$ de la forme de Pfaff ω sur le noyau $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ correspondant à un mouvement du milieu continu au cours duquel les distances restent invariables, remarquons que des équations d'Hamilton généralisées résultent $\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = u_i^\sigma = X_i^\sigma$; d'où $\omega d = m_i^\sigma dp_\sigma^i$. Ce qui donne le théorème.

THÉORÈME 3. — *Si le mouvement d'un milieu continu est tel que les distances mutuelles de ces points restent invariables la partie ω_d de la forme de Pfaff se réduit à une forme à coefficients constants m_i^σ dont l'ensemble sont les éléments d'une matrice orthogonale.*

Remarque. — En vertu du théorème 2 du chapitre I on peut encore dire que $\omega_d = 0$ modulo une forme de Pfaff à coefficients constants.

Si V_D désigne la variété de groupe des déplacements de l'espace à n dimensions la famille des applications considérées est donc constituée par des applications de $R^n \times V_D$ dans ρ^n définies par les formules

$$\xi^\sigma = m_i^\sigma x^i + \eta^\sigma$$

dans lesquelles $\|m_i^\sigma\|$ désigne une matrice orthogonale.

Dans l'application de $R^n \times V_D$ dans ρ^n la forme générale Ω_{n+2} définie sur $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ remonte sur $J^1(R^n \times t, R^n \times V_D)$. Comme les applications de R^n dans R^n se réduisent à l'identité, la forme Ω_{n+2} devient une forme sur $R^n \times J^1(t, V_D)$. Cette forme sommée sur un domaine de R^n engendre une forme Ω_2 de degré deux dont le support est $J^1(t, V_D)$. Or en désignant par $T(V_D)$ l'espace tangent à V_D, $J^1(t, V_D)$ est homéomorphe à $t \times T(V_D)$; on peut donc énoncer le résultat précédent ainsi :

Théorème 4. — *Pour un système rigide la forme génératrice des équations du mouvement est une forme de degré deux dont le support est le produit de la droite numérique t par l'espace tangent à la variété de groupe de déplacement* $V_D = R^n \times (SO_n)$, SO_n *désignant le groupe des rotations dans* R^n.

Corollaire. — *Dans l'espace à 3 dimensions pour un système de solides, la forme génératrice des équations du mouvement sera une forme de degré deux sur le produit de la droite numérique t par des espaces tangents à des variétés de groupes de déplacement.*

Remarque. — Le cas du point matériel est un cas particulier du précédent : Si le système rigide est animé d'un mouvement de translation V_D se réduit à R^3. Le mouvement du système se réduit à celui d'un point matériel dont les équations du mouvement sont engendrées par une forme de degré deux sur la variété de dimension 7 : $t \times T(R^3)$.

Conséquence. — Il est très important de remarquer que les équations de la mécanique du point matériel, et les équations de la mécanique des systèmes rigides se déduisent naturellement des équations de la mécanique des milieux continus, tandis que la déduction inverse nécessite de faire appel à un postulat concernant des forces dites « intérieures » qui sont complètement inconnues.

§ 6. — Rôle des tenseurs symétriques.

On peut être assez surpris que pour traiter la théorie des mouvements des milieux continus, nous n'ayons eu nullement besoin d'introduire la notion de contraintes. Examinons les conséquences de l'introduction d'un tenseur symétrique T^{ij} deux fois contravariants pour rendre compte des mouvements d'un milieu continu à n dimensions. Soit $\vec{\alpha}$ un champ de vecteurs covariants sur R^n de composantes α_i. Le produit contracté $T^{ij}\alpha_j = f^i$ est un vecteur contravariant $\vec{f}$. D étant un domaine quelconque de R^n, le flux de $\vec{f}$ à travers la frontière de D notée ∂D est :

$$\int_{\partial D} i(\vec{f})V_n$$

en désignant par V_n la forme volume sur R^n.

Pour tout champ $\vec{\alpha}$ laissant invariant le ds^2 du milieu, c'est-à-dire vérifiant les équations de Killing, on écrit que la somme des puissances des forces en action dans le volume fermée D et sur sa frontière est nulle. Si $\vec{X}$ désigne le champ de forces existant en tout point du milieu on a donc :

$$\int_{\partial D} i(\vec{f})V_n + \int_D (\vec{X}\,.\,\vec{\alpha})V_n = 0$$

condition qui s'écrit encore :

$$\int_D \theta(\vec{f})V_n + \int_D (\vec{X}\,.\,\vec{\alpha})V_n = 0$$

ce qui donne en utilisant des coordonnées cartésiennes :

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{ij}\alpha_j}{\partial x^i} + X^j\alpha_j\right) V_n = 0.$$

L'intégrale précédente étant nulle en particulier pour des champs $\vec{\alpha}$ uniformes

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} + X^j = 0.$$

Un rapprochement s'impose entre cette équation et l'équation homologue du système Hamiltonnien généralisé

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^i_\sigma}{\partial x^i} - X_\sigma = 0.$$

Comme cette dernière n'a pas le même caractère tensoriel, utilisons le tenseur métrique deux fois contravariant $\gamma^{\sigma\rho}$ pour mettre sous forme contravariante p^i_σ et X_σ.

$$p^{i\rho} = \gamma^{\sigma\rho} p^i_\sigma \qquad X^\rho = \gamma^{\sigma\rho} X_\sigma.$$

En utilisant des axes rectangulaires on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^{i\rho}}{\partial x^i} - X^\rho = 0.$$

En égalant l'indice j à ρ on en déduit que les composantes T^{ij} du tenseur symétrique sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^{ij}}{\partial x_i} \tag{27}$$

où les p^{ij} figurant au second membre sont des fonctions des x^h, $\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i}$ déduites des équations d'Hamilton généralisé

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x_i} = X^\sigma_i(\ldots, x^h, \ldots, p^i_\rho, \ldots), \quad p^{ij} = \gamma^{j\rho} p^i_\rho.$$

Le système (27) étant linéaire on obtient la solution générale en ajoutant à la solution particulière du système avec second membre, la solution du système sans second membre

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i} = 0 \quad j(1 \text{ à } n).$$

On résoud ce dernier système de la manière suivante : donnons-nous n constantes arbitraires β_j, en multipliant l'équation de rang j par β_j et sommant par rapport à j, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i} = 0.$$

En posant $||S^{ij}|| \times ||\beta_j|| = \varphi^i$ on a l'équation $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi^i} = 0$ qui exprime que la forme $(-1)^{i+1} \varphi^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \check{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n$ est fermée. Comme dans R^n elle est homologue à 0, il existe une forme de degré $n-2$ telle que l'on ait :

$$(-1)^{i+1}\varphi^i dx^1 \wedge \dots \wedge d\check{x}^i \wedge \dots \wedge dx^n$$
$$= d[(-1)^{i+j}\psi^{ij} dx^1 \dots \wedge d\check{x}^i \wedge \dots d\check{x}^j \wedge \dots \wedge dx^n]$$

d'où
$$\varphi^i = (-1)^{j+1}\frac{\partial \psi^{ij}}{\partial x^j},$$
$$S^{ii} = \frac{1}{\beta_i}(\varphi^i - \beta_j S^{ij}).$$

La solution du système sans second membre s'exprime donc au moyen de $n(n-1)$ fonctions arbitraires. Les contraintes exprimées au moyen d'un tenseur symétrique du second ordre sont donc complètement inconnues puisqu'on a aucun moyen de déterminer les fonctions s^{ij}. C'est pour cette raison qu'il ne faut pas introduire le tenseur des contraintes dans les équations de la théorie des milieux continus.

Pour parer à l'indétermination du tenseur des contraintes on fait classiquement l'hypothèse de l'état neutre, ce qui revient à convenir que l'on prend pour solution générale la solution nulle et l'on se contente de la solution particulière.

Détermination d'une solution particulière du système (27). — Le tenseur p^i_ρ étant un tenseur mixte quelconque, il en est de même du tenseur contravariant $p^{ij} = \gamma^{j\rho}p^i_\rho$. Comme par hypothèse T^{ij} est symétrique on obtient un tenseur symétrique en considérant le tenseur $(\gamma^{\sigma j}p^i_\sigma + \gamma^{\sigma i}p^j_\sigma)$.

Pour $i \neq j$ posons $T^{ij} = -\gamma^{j\sigma}p^i_\sigma - \gamma^{i\sigma}p^j_\sigma = -p^{ij} - p^{ji}$.

Pour $i = j$ de l'équation $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i}$ valable en axes rectangulaires (en axes quelconques il suffit d'introduire les dérivations absolues) on déduit

$$\frac{\partial T^{jj}}{\partial x^j} = -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i}.$$

En tenant compte des valeurs des T^{ij} pour $i \neq j$

$$\frac{\partial T^{jj}}{\partial x^j} = +\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i},$$
$$= -\frac{\partial p^{jj}}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i} = -2\frac{\partial p^{jj}}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i}.$$

Par une intégration par rapport à x^j on en déduit :

$$T^{ij} = -2p^{ij} + \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i} dx^j + \text{cste}.$$

Remarque. — Si on désire exprimer le tenseur des contraintes en fonction des dérivées partielles du premier ordre de l'application de R^n dans ρ^n $u_i^\sigma = \dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i}$ des équations d'Hamilton généralisées on déduit

$$u_i^\sigma = X_i^\sigma (\ldots p_\rho^j \ldots \xi^\sigma, \ldots x^h \ldots), \qquad p_\rho^j = \varphi_\rho^j(u_i^\sigma \ldots, \xi^\sigma, \ldots, x^h \ldots).$$

Ce n'est qu'après cette résolution que l'on peut obtenir l'expression des T^{ij} en fonction des u_i^σ, ξ^σ, x^h.

Cas particulier. — Effectuons les calculs dans le cas de l'approximation de Navier-Stokes.

En axes rectangulaires d'après les formules du § 4 :

pour $j \neq i$

$$p^{ij} = \frac{1}{\beta} g^{ii} u_i^j \qquad \text{d'où} \qquad T^{ij} = \frac{-1}{\beta}(g^{ii}u_i^j + g^{jj}u_j^i),$$

pour $j = i$

$$p_i^i = \frac{1}{\beta} u_i^i - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1, \qquad \text{avec} \qquad I_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i^i,$$

$$T^{jj} = \frac{-2}{\beta} g^{jj} u_j^j + \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1 + \frac{1}{\beta} \int \sum_{i=1}^{n=1} \frac{\partial (g^{jj} u_j^i)}{\partial x^i} dx^i$$
$$+ \frac{1}{\beta} \int \frac{\partial}{dx^j}\left(g^{jj}u_j^j - \frac{\alpha}{\alpha + n\beta} I_1\right) dx^j$$

d'où $$T^{jj} = \frac{-2}{\beta} g^{jj} u_j^j + \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1 + \frac{1}{\beta} \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (g^{jj} u_j^i)}{\partial x^i} dx^j$$

or $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^{jj} u_j^i}{\partial x^i} = g^{jj} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (g^{jj} u_j^i)}{\partial x^i} dx^j = g^{jj} \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^i \partial x^j} dx^j = g^{jj}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + C\right) = g^{jj}(I_1 + C)$$

en désignant par C une constante.

Finalement $$T^{jj} = -\left[\frac{2}{\beta} g^{jj} u_j^j + \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1 + \frac{1}{\beta}(I_1 + C)\right] g^{jj}.$$

En introduisant les coefficients de Lamé ces formules s'écrivent :

pour $i \neq j$

$$T^{ij} = + \mu(g^{ii}u_i^j + g^{jj}u_j^i)$$

pour $i = j$

$$T^{jj} = 2\mu g^{jj}u_j^j + g^{jj}[(\lambda + \mu) - \mu]I_1 - \mu C = 2\mu g^{jj}u_j^j + g^{jj}(\lambda I_1 - \mu C).$$

Si on introduit le vecteur déplacement $\vec{v}$ dans R^n $\vec{\xi} = \vec{x} + \vec{v}$ pour $i \neq j$ $u_i^j = v_i^j$, pour $j = i$ $u_j^j = v_j^j + 1$, les formules précédentes donnent

$$T^{ij} = \mu\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right),$$

$$T^{jj} = 2\mu\frac{\partial v^j}{\partial x^j} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 2\mu + 3\lambda - \mu C.$$

Ce sont les formules classiques si on prend la constante $C = \dfrac{2\mu + 3\lambda}{\mu}$.

Rôle du tenseur des déformations. — Achevons l'étude du rôle des tenseurs symétriques par celui du tenseur des déformations. Si dans ρ^n le tenseur métrique est $\gamma_{\sigma\rho}$, $d\sigma^2 = \gamma_{\sigma\rho}\, d\xi^\sigma\, d\xi^\rho$ et si dans R^n le tenseur métrique est g_{ij}, $ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$, on appelle tenseur de déformation le tenseur e_{ij} tel que $d\sigma^2 - ds^2 = e_{ij}dx^i dx^j$, d'où l'expression du tenseur des déformations en fonction des coordonnées canoniques sur $J^1(R^n, \rho^n)$

$$e_{ij} = \gamma_{\sigma\rho}u_i^\sigma u_j^\rho - g_{ij}.$$

Au moyen des équations d'Hamilton généralisées :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = X_i^\sigma\, (\ldots\, p_\rho^j, \ldots, \xi^\sigma, \ldots, x^h, \ldots)$$

on obtient l'expression du tenseur des déformations en fonction des coordonnées pratiques

$$e_{ij} = \gamma_{\sigma\rho}\, X_i^\sigma X_j^\rho - g_{ij}.$$

Donc quand la forme ω_d est connue on a immédiatement le tenseur des déformations en fonction des coordonnées sur $J^1(R^n, \rho^n)$. Mais inversement si on connait le tenseur des déformations sur R^n c'est-à-dire son expression en fonction des variables x^i, il est important de remarquer que cela ne suffit pas pour reconstituer la partie ω_d de la forme de Pfaff sur l'ensemble des jets $J^1(R^n, \rho^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, *Colloque de Topologie sur les Espaces Fibrés Bruxelles*, 1950, Masson § C° Paris, 1951, p. 15 à 27.

[2] C. Ehresmann, Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets. *C. R. Acad. Paris*, 233, 1951, P 598. II. L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m. *C. R. Acad. Paris*, 233, 1951, P 777.

[3] C. Ehresmann, Les prolongements d'une variété différentiable. *Atti IV Cogresso Unione mat. Italiana*, Taormina Ott., 1951.

[4] C. Ehresmann, Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie (*Colloque intern. Géométrie différentielle C.N.R.S.*, 1953, p. 97-110).

[5] F. Gallissot, Les formes extérieures et la mécanique des milieux conti nus *C.R. Acad. Paris*, 244, 1957, p. 2347.

[6] P. Libermann, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. *Thèse Ann. di Matematica*, XXXVI, 1954. Sur les Pseudo-groupes de Lie. *Colloque de Topologie de Strasbourg* (avril 1954).

[7] A. Lichnerowicz, Théorie Globale des Connexions et des groupes d'holonomie. *Consiglio Nazionale delle Ricerche*, Paris, Dunod, 1956.