JEAN BROSSARD
LUCIEN CHEVALIER

Calcul stochastique et inégalités de norme pour les martingales bi-browniennes. Application aux fonctions bi-harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 4 (1980), p. 97-120
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_4_97_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 4 (1980), 97-120.

CALCUL STOCHASTIQUE ET INÉGALITÉS DE NORME POUR LES MARTINGALES BI-BROWNIENNES. APPLICATION AUX FONCTIONS BI-HARMONIQUES

par J. BROSSARD et L. CHEVALIER

0. Introduction.

Nous nous proposons de donner ici les démonstrations complètes de résultats, annoncées en partie dans [1], concernant une classe de martingales à deux paramètres en relation naturelle avec les fonctions bi-harmoniques. Pour $i = 1$ et 2, on note

$$(\Omega^i,\mathscr{F}^i,(\mathscr{F}^i_{t_i})_{t_i\in\mathbf{R}^+},\quad (\mathbf{B}^i_{t_i})_{t^i\in\mathbf{R}^+},\quad p^i)$$

le mouvement brownien usuel issu de 0 dans $\mathbf{R}$, et $(\Omega,\mathscr{F},p)$ l'espace produit; pour $t = (t_1,t_2)\in(\mathbf{R}^+)^2$, on pose $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}^1_{t_1}\times\mathscr{F}^2_{t_2}$ et on désigne par B_t le produit tensoriel $\mathrm{B}^1_{t_1}\otimes\mathrm{B}^2_{t_2}$.

A toute martingale M relative à la filtration $(\mathscr{F}_t)$, dite *bi-brownienne*, on associe sa *fonction maximale* $\mathrm{M}^* = \operatorname{Sup}_t |\mathrm{M}_t|$ et, lorsqu'on sait le faire (par exemple, si M est fermée dans L^2), son *processus croissant associé* $\mathrm{S}^2(\mathrm{M})$. Un des objets du présent travail est d'établir, pour tout $p > 0$, l'existence d'une constante C_p telle qu'on ait,

$$\mathrm{E}[\mathrm{S}^p(\mathrm{M})] \leqslant \mathrm{C}_p\mathrm{E}[(\mathrm{M}^*)^p]$$

pour toute martingale M « de classe H^p » (paragraphe 3). L'analogue de ce résultat pour les *martingales discrètes régulières* est contenu dans un récent travail (cf. [2]) du premier auteur, où des résultats plus précis sont obtenus ; la méthode suivie ici est une extension d'un procédé utilisé par le second (cf. [3]) pour les martingales à un indice. Cette extension, rendue possible par la « formule de Itô » du paragraphe 2, nous permet d'obtenir l'estimation cherchée à partir des estimations

$$\operatorname{Sup}_t\ (\mathrm{E}(|\mathrm{M}_t|^r) \leqslant \mathrm{C}_r\mathrm{E}(\mathrm{S}^p(\mathrm{M}))$$

pour $r = p/2$ et $r = p/4$, qui sont connues.

Le paragraphe 1 contient un résultat de base, dont l'idée est due à C. Fefferman (théorème 1), qui nous fournit des inégalités utilisées pour prolonger l'intégrale stochastique et pour démontrer le théorème 2. La même idée intervient aussi dans des questions de localisation (proposition 3).

Enfin, dans le paragraphe 4, on obtient à partir du théorème 3 une démonstration probabiliste du théorème correspondant pour les fonctions bi-harmoniques sur le bi-disque, i.e. la majoration de la norme L^p de leur fonction d'aire par celle de leur fonction maximale. Ce résultat d'analyse est dû à R.F. Gundy et E.M. Stein (cf. [6]).

1. INTÉGRATION STOCHASTIQUE

Pour tout $s \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, on note s_i la i-ième projection de s $(i = 1,2)$. Si s et t sont deux éléments de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, on note $[s,t]$ (resp. $]s,t]$) l'ensemble des $r \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ tels que $s_1 \leqslant r_i \leqslant t_i$ (resp. $s_i < r_i \leqslant t_i$) $(i = 1,2)$.

1.1. Intégrale stochastique de processus simples.

DÉFINITION 1. — On appelle *processus simple* sur $(\Omega,\mathscr{F},p)$ tout processus Φ de la forme

$$(1) \qquad \Phi_s = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i \chi_{]\sigma^i,\tau^i]}(s) \quad (s \in \mathbf{R}^+)^2)$$

où, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, σ^i et τ^i sont des éléments de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ vérifiant $\sigma^i \leqslant \tau^i$ et φ_i une variable aléatoire bornée et $\mathscr{F}_{\sigma_i}$-mesurable. On notera $\mathscr{S}$ l'espace des processus simples.

DÉFINITION 2. — *Étant donné un processus simple* Φ, *admettant l'écriture* (1), *le processus*

$$t \longmapsto \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i (B^1_{\tau^i_1 \wedge t_1} - B^1_{\sigma^i_1 \wedge t_1})(B^2_{\tau^i_2 \wedge t_2} - B^2_{\sigma^i_2 \wedge t_2}),$$

indépendant de l'écriture de Φ, *est une martingale continue relativement à*

$(\mathcal{F}_t)$, *qu'on appelle intégrale stochastique de* Φ *par rapport à* B, *et qu'on note* $\iint \Phi_s \, d\mathrm{B}_s$; *sa valeur au temps* t *se note* $\iint_{[0,t]} \Phi_s \, d\mathrm{B}_s$.

On vérifie immédiatement qu'on a, pour tout $t \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$:

$$(2) \qquad \iint_{[0,t]} \Phi_s \, d\mathrm{B}_s = \int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} \Phi_s \, d\mathrm{B}^2_{s_2} \right) d\mathrm{B}^1_{s_1},$$

où les intégrales stochastiques à temps unidimensionnel du second membre sont définies de manière usuelle.

1.2. Extension de l'intégrale stochastique.

DÉFINITION 3. — *Pour tout* $p > 0$, *on appellera espace* $\mathrm{L}^p(\mathrm{L}^2)$ *l'espace des applications mesurables* $\Phi : \Omega \times (\mathbf{R}^+)^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ *telles que*

$$\|\Phi\|_p = \left(\mathrm{E}\left[\left(\iint_{(\mathbf{R}^+)^2} \Phi_s^2 \, ds \right)^{p/2} \right] \right)^{1/p} < +\infty,$$

et espace Λ^p *l'adhérence de l'espace des processus simples dans* $\mathrm{L}^p(\mathrm{L}^2)$, *pour la topologie définie par la norme* $\Phi \longmapsto \|\Phi\|_p$ *si* $p \geqslant 1$, *ou par la métrique* $(\Phi_1,\Phi_2) \longmapsto \|\Phi_1 - \Phi_2\|_p^p$ *si* $0 < p < 1$.

On vérifie, comme dans la théorie à temps unidimensionnel, que l'intégrale stochastique d'un processus simple vérifie, pour tout $t \in (\bar{\mathbf{R}}^+)^2$, la propriété d'isométrie :

$$(3) \qquad \mathrm{E}\left[\left(\iint_{[0,t]} \Phi_s \, d\mathrm{B}_s \right)^2 \right] = \mathrm{E}\left[\iint_{[0,t]} \Phi_s^2 \, ds \right];$$

de plus, il est bien connu que, pour toute sous-martingale (X_t) de carré intégrable à un indice, on a $\mathrm{E}((\mathrm{X}_t^*)^2) \leqslant 4\,\mathrm{E}(\mathrm{X}_t^2)$; de cette propriété et de l'égalité (3), on déduit facilement l'inégalité :

$$(4) \qquad \mathrm{E}\left[\left(\operatorname*{Sup}_{u \leqslant t} \left| \iint_{[0,u]} \Phi_s \, d\mathrm{B}_s \right| \right)^2 \right] \leqslant \mathrm{CE}\left[\iint_{[0,t]} \Phi_s^2 \, ds \right],$$

où C est une constante universelle ; cette dernière inégalité permet d'étendre aux processus $\Phi \in \Lambda^2$ la définition de l'intégrale stochastique, qui reste une martingale fermée dans L^2 et p.s. continue sur $(\bar{\mathbf{R}}^+)^2$, pour laquelle l'égalité (2) est encore vraie.

PROPOSITION 1. — *Pour toute martingale* M *relative à* $(\mathscr{F}_t)$ *fermée dans* L^2, *il existe un processus* $\Phi \in \Lambda^2$ *et un seul tel que*

$$M = \iint \Phi_s \, dB_s .$$

Démonstration. — Notons $\mathfrak{M}^2$ l'espace des martingales relatives à $(\mathscr{F}_t)$ et fermées dans L^2. L'application $\Phi \longmapsto \iint \Phi^s \, dB^s$ est une isométrie de Λ^2 dans $\mathfrak{M}^2$ (prolongement de l'égalité (3)); son image contient, d'après un résultat bien connu pour les martingales à un indice et l'égalité (2), les martingales M de la forme $M_t = M^1_{t_1} \otimes M^2_{t_2}$, où $(M^i_{t_i})$ est une martingale sur $(\Omega^i, \mathscr{F}^i, p^i)$ relativement à la filtration $(\mathscr{F}^i_{t_i}$ $(i = 1,2)$; elle est donc dense, et la prop. 1 est démontrée.

COROLLAIRE 1. — *Toute martingale* $M \in \mathfrak{M}^2$ *admet une version p.s. continue sur* $(\mathbf{R}^+)^2$.

Remarque. — Cette propriété est en général en défaut pour une martingale fermée dans L^1, contrairement à ce qui se passe pour les martingales à un indice. On le voit facilement, à partir d'un contre-exemple de S. Saks (cf. [4]) à propos de la différentiabilité de l'intégrale de Lebesgue.

DÉFINITION 4. — *On appelle tribu prévisible la tribu sur* $\Omega \times (\mathbf{R}^+)^2$ *engendrée par les processus simples, et processus prévisible tout processus* Φ *qui, considéré comme application de* $\Omega \times (\mathbf{R}^+)^2$ *dans* $\mathbf{R}$, *est mesurable par rapport à cette tribu.*

Remarques. — On vérifie sans difficulté que :

— tout processus adapté et p.s. continu est prévisible ;

— un processus Φ appartient à Λ^p si et seulement s'il est prévisible et $\|\Phi\|^p < +\infty$.

On se propose dans ce paragraphe d'étendre la définition de l'intégrale stochastique (par rapport au processus (B_t)) aux éléments de l'espace $\Lambda = \bigcup_{p>0} \Lambda^p$. Cette extension est rendue possible par le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit* $\sigma : \Lambda^2 \longrightarrow L^2$ *une application telle qu'on ait, quels que soient* Φ *et* $\Psi \in \Lambda^2$, *les propriétés suivantes :*

(i) $\sigma(\Phi + \Psi) \leqslant \sigma(\Phi) + \sigma(\Psi)$ *et* $\sigma(-\Phi) = \sigma(\Phi)$;

(ii) $\sigma(\Phi) = 0$ *sur tout événement où* $\Phi_s = 0$ *pour tout* s *;*

(iii) $E[(\sigma(\Phi))^2] \leqslant C\|\Phi\|_2^2$, *où* C *est une constante universelle.*

Alors, pour tout $p \in]0,2]$, *il existe une constante* C_p *telle que, pour tout* $\Phi \in \Lambda^2$, *on ait l'égalité :*

$$E[(\sigma(\Phi))^p] \leqslant C_p\|\Phi\|_p^p. \tag{5}$$

COROLLAIRE 2. — *Pour tout* $p \in]0,2]$, *il existe un nombre* C_p *tel que, pour tout processus* $\Phi \in \Lambda^2$, *on ait*

$$E\left[\left(\int_0^{+\infty}\left(\operatorname{Sup}_{t_2}\left|\int_0^{t_2}\Phi_s\,dB^2_{s_2}\right|\right)^2 dt_1\right)^{p/2}\right] \leqslant C_p\|\Phi\|_p^p$$

et

$$E\left[\operatorname{Sup}_t\left|\iint_{[0,t]}\Phi_s\,dB_s\right|^p\right] \leqslant C_p\|\Phi\|_p^p.$$

La démonstration du théorème repose sur une idée de C. Fefferman pour les séries de Haar à deux indices.

Soit Φ un élément de Λ^2 et soit $S(\Phi) = \left(\iint \Phi_s^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$. Nous allons démontrer, pour tout $\lambda > 0$, l'inégalité :

$$p[\sigma(\Phi)>\lambda] \leqslant K\left(p[S(\Phi)>\lambda] + \frac{1}{\lambda^2}E[(S(\Phi))^2;S(\Phi)\leqslant\lambda]\right), \tag{6}$$

où K est une constante universelle. Le th. 1 s'obtiendra ensuite en multipliant les deux membres de cette inégalité par $p\lambda^{p-1}$ et en les intégrant sur $\mathbf{R}^+$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit E l'ensemble $\{S(\Phi)\leqslant\lambda\}$ et soit (v_t) une version p.s. continue de la martingale $(E[\chi_E/\mathscr{F}_t])$; soit F l'ensemble $\left\{(1-v)^* < \frac{1}{2}\right\}$; comme on a

$$p[\sigma(\Phi)>\lambda] \leqslant p[\sigma(\Phi)>\lambda;\quad F] + p[F^c],$$

et que

$$p[F^c] \leqslant 4E[((1-v)^*)^2] \leqslant 64E[(1-v)^2] = 64p[S(\Phi)>\lambda],$$

il suffit donc de majorer convenablement $p[\sigma(\Phi)>\lambda;F]$ pour obtenir l'inégalité (6). Pour cela, on remplace Φ par le processus « tronqué »

$\tilde{\Phi}_s = \Phi_s \chi_{\{v_s \geq \frac{1}{2}\}}$ qui appartient à Λ^2. Il résulte des hypothèses i) et ii) et de la définition de F que les variables aléatoires $\sigma(\Phi)$ et $\sigma(\tilde{\Phi})$ sont égales sur F. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
p[\sigma(\Phi) > \lambda; F] &= p[\sigma(\tilde{\Phi}) > \lambda; F] \\
&\leqslant (1/\lambda^2) E[(\sigma(\tilde{\Phi}))^2] \\
&\leqslant (C/\lambda^2) E[(S(\tilde{\Phi}))^2] \\
&\leqslant (C/\lambda^2) E\left[\iint_{(\mathbf{R}^+)^2} \Phi_s^2 \chi_{\{v_s \geq \frac{1}{2}\}} ds\right] \\
&\leqslant (C/\lambda^2) \iint_{(\mathbf{R}^+)^2} E[\Phi_s^2 v_s]\, ds \\
&\leqslant (C/\lambda^2) \iint_{(\mathbf{R}^+)^2} E[\Phi_s^2 \chi_E]\, ds .
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$p[\sigma(\Phi) > \lambda; F] \leqslant (C/\lambda^2) E((S(\Phi))^2; S(\Phi) \leqslant \lambda).$$

On a donc obtenu l'inégalité (6), et le théorème est démontré.

Venons-en au but de ce paragraphe. Si on applique le corollaire 2, on voit que l'application $\Phi \longmapsto \iint \Phi_s\, dB_s$, définie au § 1.1 sur l'espace $\mathscr{S}$, s'étend par continuité à l'espace Λ.

DÉFINITION 5. — *On appelle intégrale stochastique d'un processus* $\Phi \in \Lambda^p$, *et on note* $\iint \Phi_s\, dB_s$, *la valeur au point* Φ *du prolongement continu à* Λ^p *de l'intégrale stochastique définie sur* $\mathscr{S}$ *(déf.* 2).

C'est un processus p.s. continu qui vérifie encore l'inégalité $E[((\iint \Phi_s\, dB_s)^*)^p] \leqslant C_p \|\Phi\|_p^p$. C'est une martingale si $p \geqslant 1$.

DÉFINITION 6. — *On appelle espace* H^p *l'espace des processus qui s'écrivent* $\iint \Phi_s\, dB_s$, *où* $\Phi \in \Lambda^p$, *et martingale (locale) de classe* H^p *tout élément de cet espace (cette terminologie sera justifiée au* § 2.3).

1.3. Intégrales stochastiques simples, doubles et itérées.

Sur chacun des espaces $(\Omega^i, \mathscr{F}^i, p^i)$ muni de la filtration $(\mathscr{F}^i_{t_i})$, on dispose de l'espace $\mathscr{S}_i$ des processus simples (au sens usuel dans la théorie des martingales à temps unidimensionnel). On notera, pour $p > 0$, Λ^p_i l'adhérence de l'espace $\mathscr{S}_i$ dans l'espace $L^p(L^2)$ construit sur $\Omega^i \times \mathbf{R}^+$, pour la topologie associée à la « norme »

$$\Phi \longmapsto \|\Phi\|_{p,i} = \left(E_i[(\int_{\mathbf{R}^+} \Phi^2_{s_i} \, ds_i)^{p/2}]\right)^{1/p},$$

où E_i désigne l'espérance mathématique relative à la probabilité $p^i (i=1,2)$.

Le but de ce paragraphe est l'extension aux processus $\Phi \in \Lambda$ de l'égalité (2).

PROPOSITION 2 (*« propriété de Fubini stochastique »*). — *Pour tout* $p \in]0,2]$, *et tout* $\Phi \in \Lambda^p$, *on a les propriétés suivantes :*

(i) *pour presque tout* $(\omega_2,s_2) \in \Omega^2 \times \mathbf{R}^+$, *le processus* $(\omega_1,s_1) \longmapsto \Phi_s(\omega)$ *appartient à l'espace* Λ^p_1.

(ii) *le processus* $(\omega_2,s_2) \longmapsto \int_{[0,t_1]} \Phi_s \, dB^1_{s_1}$ *(défini pour presque tout* (ω_2,s_2)*) appartient à l'espace* Λ^p_2;

(iii) *pour tout* $t \in (\mathbf{R}^+)^2$, *on a presque sûrement :*

$$\int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1} \Phi_s \, dB^1_{s_2} = \iint_{[0,t]} \Phi_s \, dB_s.\right.$$

Démonstration. — Comme $2p \geqslant 1$, l'inégalité de Minkowski permet d'écrire

$$\left\{\int_0^{+\infty}\left(E_1\left[\left(\int_0^{+\infty} \Phi^2_s \, ds_1\right)^{p/2}\right]\right)^{2/p} ds_2\right\}^{p/2} \leqslant E_1\left[\left(\iint_{(\mathbf{R}^+)^2} \Phi^2_s \, ds\right)^{p/2}\right].$$

d'où le point (i).

Pour établir (ii), on écrit

$$E\left[\left(\int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1} \Phi_s \, dB^1_{s_1}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right] \leqslant E\left[\left(\int_0^{t_2} \sup_{t_1}\left(\int_0^{t_1} \Phi_s \, dB^1_{s_1}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right].$$

En vue de majorer ce dernier terme, on se donne une suite (Φ^n) d'éléments de Λ^2 qui converge vers Φ pour la topologie de Λ^p ; l'inégalité utilisée pour prouver (i) montre que, pour presque tout (ω_2,s_2), la suite (de processus en l'indice s_1) $((\Phi^n_s))$ tend vers (Φ_s) dans l'espace Λ^p_1 ; il résulte de ceci et des inégalités de Burkholder-Gundy que, en remplaçant au besoin la suite (Φ^n) par une sous-suite convenable, on a, pour presque tout (ω,s_2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t_1}\left|\int_0^{t_1}\Phi^n_s\,dB^1_{s_1}\right|\right)^p = \sup_{t_1}\left|\int_0^{t_1}\Phi_s\,dB^1_{s_1}\right|^p.$$

On en déduit, en élevant les deux membres à la puissance $2/p$ et en appliquant le théorème de Fatou :

$$\int_0^{t_2}\sup_{t_1}\left(\int_0^{t_1}\Phi_s\,dB^1_{s_1}\right)^2 ds_2 \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_0^{t_1}\sup_{t_1}\left(\int_0^{t_1}\Phi^n_s\,dB^1_{s_1}\right)^2 ds_2 .$$

On élève les deux membres à la puissance $p/2$ et on applique de nouveau le théorème de Fatou, ce qui donne :

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^{t_1}\sup_{t_1}\left(\int_0^{t_1}\Phi_s\,dB^1_{s_1}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right] \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[\left(\int_0^{t_2}\sup_{t_1}\left(\int_0^{t_1}\Phi^n_s\,dB^1_{s_1}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right],$$

et le corollaire 2 permet d'achever la démonstration de (ii).

Enfin, pour prouver (iii), on observe que, l'égalité étant vraie si $\Phi\in\Lambda^2$, il suffit de montrer que, si une suite (Φ^n) d'éléments de Λ^2 converge vers $\Phi\in\Lambda^p$, alors

$$\mathrm{E}\left[\left|\iint_{[0,t]}(\Phi^n_s-\Phi_s)\,dB_s\right|^p\right]$$

et

$$\mathrm{E}\left[\left|\int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1}(\Phi^n_s-\Phi_s)\,dB^1_{s_1}\right)dB^2_{s_2}\right|^p\right]$$

tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour le premier terme, c'est une conséquence de la définition 5, et on majore le second par

$$\mathrm{E}\left|\left(\int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1}(\Phi^n_s-\Phi_s)\,dB^1_{s_1}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right]$$

(inégalité de Burkholder-Gundy), ce qui permet de conclure grâce au corollaire 2.

2. UNE « FORMULE D'ITÔ » POUR LES MARTINGALES DE CLASSE H^p

2.1. Notations.

Généralisons la notion de classe H^p de la façon suivante : soit M un processus adapté non nécessairement nul sur les axes et posons $\Delta M_t = M_t - M_{t_1,0} - M_{0,t_2} + M_{0,0}$. On dira que M est dans H^p si :

* ΔM est dans H^p au sens de la définition 6;

* les processus $(M_{t_1,0})_{t_1 \in \mathbf{R}^+}$ et $(M_{0,t_2})_{t_2 \in \mathbf{R}^+}$ sont des martingales locales à un indice de classe H^p au sens usuel.

On notera $\dfrac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\, \partial B^2}$ le processus tel que $\Delta M = \displaystyle\iint \frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\, \partial B^2}\, dB_s$. (Ce processus est entièrement déterminé par M, à un ensemble de mesure nulle de $\Omega \times (\mathbf{R}^+)^2$ près, d'après la proposition 2 et des propriétés connues pour les martingales à un indice). On notera $\dfrac{\partial M_{s_1,0}}{\partial B^1}$ le processus tel que $M_{t_1,0} = M_{00} + \displaystyle\int_0^{t_1} \frac{\partial M_{s_1,0}}{\partial B^1}\, dB^1_{s_1}$ et pour tout t_2 et presque tout t_1 :

$$\frac{\partial M_t}{\partial B^1} = \frac{\partial M_{t_1,0}}{\partial B^1} + \int_0^{t_1} \frac{\partial^2 M_{t_1,s_2}}{\partial B^1\, \partial B^2}\, dB^2_{s_2}.$$

On définit de même $\dfrac{\partial M_t}{\partial B^2}$. Compte tenu de ces notations et de la proposition 2, on a donc pour tout $t \in (\mathbf{R}^+)^2$:

$$\text{(8)}\quad \Delta M_t = \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial M_{s_1,t_2}}{\partial B^1} - \frac{\partial M_{0,t_2}}{\partial B^1} \right) dB^1_{s_1}$$
$$= \int_0^{t_2} \left(\frac{\partial M_{t_1,s_2}}{\partial B^2} - \frac{\partial M_{t_1,0}}{\partial B^2} \right) dB^2_{s_2}$$
$$= \iint_{[0,t]} \frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\, \partial B^2}\, dB_s.$$

De plus, si φ est une application de classe $\mathscr{C}^4$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on définit, pour $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant 4$, le processus $\dfrac{\partial^i \varphi(\mathrm{M})}{(\partial \mathrm{B}^1)^j (\partial \mathrm{B}^2)^{i-j}}$ comme dérivée formelle de la fonction composée $\varphi \circ \mathrm{M}$, en faisant de plus les conventions

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{B}^1 \partial \mathrm{B}^2} = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{B}^2 \partial \mathrm{B}^1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{(\partial \mathrm{B}^1)^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{(\partial \mathrm{B}^2)^2} = 0 .$$

On a, par exemple,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \varphi(\mathrm{M})}{(\partial \mathrm{B}^1)^2 (\partial \mathrm{B}^2)^2} = 2\varphi''(\mathrm{M}) \left(\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \mathrm{B}^1 \partial \mathrm{B}^2} \right)^2 &+ 4\varphi'''(\mathrm{M}) \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial \mathrm{B}^1 \partial \mathrm{B}^2} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{B}^1} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{B}^2} \\ &+ \varphi^{(''''})(\mathrm{M}) \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{B}^1} \right)^2 \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{B}^2} \right)^2 .\end{aligned}$$

2.2. Énoncé et démonstration de la formule.

THÉORÈME 2. — *Soient* φ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^4$, *à support compact, définie et à valeurs dans* $\mathbf{R}$, *et* M *une martingale de classe* H^p, *où* $p > 0$. *On a presque sûrement, pour tout* $t \in (\mathbf{R}^+)^2$:

$$\begin{aligned}(9) \qquad & \varphi(\mathrm{M}_t) - \varphi(\mathrm{M}_{t_1,0}) - \varphi(\mathrm{M}_{0,t_2}) + \varphi(\mathrm{M}_{0,0}) \\ &= \iint_{[0,t]} \frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{M}_s)}{\partial \mathrm{B}^1 \partial \mathrm{B}^2} d\mathrm{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{M}_{s_1,t_2})}{(\partial \mathrm{B}^1)^2} - \frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{M}_{s_1,0})}{(\partial \mathrm{B}^1)^2} \right) ds_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t_2} \left(\frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{M}_{t_1,s_2})}{(\partial \mathrm{B}^2)^2} - \frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{M}_{0,s_2})}{(\partial \mathrm{B}^2)^2} \right) ds_2 - \frac{1}{4} \iint_{[0,t]} \frac{\partial^4 \varphi(\mathrm{M}_s)}{(\partial \mathrm{B}^1)^2 (\partial \mathrm{B}^2)^2} ds .\end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $t \in (\mathbf{R}^+)^2$; on a, d'après la formule d'Itô classique pour les martingales à un indice :

$$\begin{aligned}(10) \qquad & \varphi(\mathrm{M}_t) - \varphi(\mathrm{M}_{t_1,0}) - \varphi(\mathrm{M}_{0,t_2}) + \varphi(\mathrm{M}_{0,0}) \\ &= \int_0^{t_2} \left(\frac{\partial \varphi(\mathrm{M}_{t_1,s_2})}{\partial \mathrm{B}^2} - \frac{\partial \varphi(\mathrm{M}_{0,s_2})}{\partial \mathrm{B}^2} \right) d\mathrm{B}^2_{s_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t} \left(\frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{M}_{t_1,s_2})}{(\partial \mathrm{B}^2)^2} - \frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{M}_{0,s_2})}{(\partial \mathrm{B}^2)^2} \right) ds_2 .\end{aligned}$$

On conserve ce dernier terme, en qui on reconnaît le troisième terme du second membre de l'égalité (9), et on transforme le premier de la manière suivante : on a d'une part, par définition, $\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial B^2} = \varphi'(M)\dfrac{\partial M}{\partial B^2}$, et d'autre part, en vertu de la formule d'Itô :

$$\varphi'(M_{t_1,s_2}) = \varphi'(M_{0,s_2}) + \int_0^{t_1} \frac{\partial\varphi'(M_s)}{\partial B^1}\, dB^1_{s_1} + \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \varphi'''(M_s)\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1 .$$

Par conséquent, si on applique la formule d'intégration par parties aux semi-martingales $t_1 \longmapsto \varphi'(M_{t_1,s_2})$ et $t_1 \longmapsto \dfrac{\partial M_{t_1,s_2}}{\partial B^2}$, on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(M_{t_1,s_2})}{\partial B^2} - \frac{\partial\varphi(M_{0,s_2})}{\partial B^2} &= \int_0^{t_1} \frac{\partial M_s}{\partial B^2}\frac{\partial\varphi'(M_s)}{\partial B^1}\, dB^1_{s_1} \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \frac{\partial M_s}{\partial B^2}\varphi'''(M_s)\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1 + \int_0^{t_1} \varphi'(M_s)\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\partial B^2}\, dB^1_{s_1} \\ &+ \int_0^{t_1} \frac{\partial\varphi'(M_s)}{\partial B^1}\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\partial B^2}\, ds_1 .\end{aligned}$$

Il résulte du fait que $M \in H^p$ que le processus $\varphi'(M)\dfrac{\partial^2 M}{\partial B^1\partial B^2}$ appartient à l'espace Λ^p, et nous allons montrer que le processus $\varphi''(M)\dfrac{\partial M}{\partial B^1}\dfrac{\partial M}{\partial B^2}$ appartient à l'espace $\Lambda^{p/2}$: en effet, $\varphi''(M)$ est borné et p.s. continu, et d'autre part

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial M}{\partial B^1}\frac{\partial M}{\partial B^2}\right\|_{p/2}^{p/2} &\leqslant E\left[\left(\int_0^{+\infty} \sup_{s_1}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2 \int_0^{+\infty} \sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/4}\right] \\ &\leqslant \left(E\left[\left(\int_0^{+\infty} \sup_{s_1}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right]\right)^{1/2} \\ &\qquad \left(E\left[\left(\int_0^{+\infty} \sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/2}\right]\right)^{1/2} \\ &\leqslant C_p\left\|\frac{\partial^2 M}{\partial B^1\partial B^2}\right\|_p^p \qquad \text{(Corollaire 2).}\end{aligned}$$

Il résulte donc de la proposition 2 qu'on a l'égalité :

$$(11)\qquad \int_0^{t_2}\left(\frac{\partial\varphi(M_{t_1,s_2})}{\partial B^2}-\frac{\partial\varphi(M_{0,s_2})}{\partial B^2}\right)dB^2_{s_2}$$
$$=\iint_{[0,t]}\frac{\partial^2\varphi(M_s)}{\partial B^1\partial B^2}\,dB_s$$
$$+\int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1}\frac{1}{2}\,\varphi'''(M_s)\frac{\partial M_s}{\partial B_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B_1}\right)^2\right.$$
$$\left.+\,\varphi'''(M_s)\frac{\partial M_s}{\partial B_1}\left(\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\partial B^2}\right)ds_1\right)dB^2_{s_2}.$$

Admettons un instant qu'on puisse, dans la dernière intégrale itérée écrite, soit A_t, permuter l'intégration stochastique par rapport à B^2 sur $[0,t_2]$ et l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,t_1]$. En appliquant la formule d'intégration par parties aux semi-martingales $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial M}{\partial B^1}\right)^2$ et $\varphi''(M)$ (relativement à l'indice s_2) sur l'intervalle $[0,t_2]$, on obtient sans difficulté l'égalité :

$$(12)\qquad A_t=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial^2\varphi(M_{s_1,t_2})}{(\partial B^1)^2}-\frac{\partial^2\varphi(M_{s_1,0})}{(\partial B^1)^2}\right)ds_1$$
$$-\frac{1}{4}\iint_{[0,t]}\frac{\partial^4\varphi(M_s)}{(\partial B^1)^2(\partial B^2)^2}\,ds,$$

à condition de prouver que, presque sûrement,

$$\iint_{[0,t]}\left|\frac{\partial^4\varphi(M_s)}{(\partial B^1)^2(\partial B^2)^2}\right|ds<+\infty$$

pour tout t, ce qui résultera des inégalités :

$$E\left[\left(\sup_t\iint_{[0,t]}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds\right)^{p/4}\right]\leqslant C_p\left\|\frac{\partial^2 M}{\partial B^1\partial B^2}\right\|_p^p;$$
$$E\left[\left(\sup_t\iint_{[0,t]}\left(\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\partial B^2}\right)^2 ds\right)^{p/2}\right]\leqslant C_p\left\|\frac{\partial^2 M}{\partial B^1\partial B^2}\right\|_p^p$$
$$E\left[\left(\sup_t\iint_{[0,t]}\left|\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\partial B^2}\right|ds\right)^{p/3}\right]\leqslant C_p\left\|\frac{\partial^2 M}{\partial B^1\partial B^2}\right\|_p^p.$$

La seconde est triviale, et la troisième résulte des deux autres et de l'inégalité de Hölder ; prouvons donc la première : son premier membre se majore par

$$E\left[\left(\int_0^{+\infty} \sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/4}\left(\int_0^{+\infty} \sup_{s_1}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{p/4}\right]$$

$$\leqslant \left(E\left[\left(\int_0^{+\infty} \sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/2}\right]\right)^{1/2} \left(E\left[\left(\int_0^{+\infty} \sup_{s_1}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right]\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C_p \left\|\frac{\partial^2 M}{\partial B^1 \partial B^2}\right\|_p^p \qquad \text{(Corollaire 2).}$$

L'égalité (9) étant bien évidemment conséquence des égalités (10), (11) et (12), il nous reste à montrer que, dans l'intégrale itérée A_t, la permutation envisagée est possible ; en fait, nous nous bornerons à établir l'égalité suivante, l'autre partie du travail se faisant de manière analogue :

$$(13) \qquad \int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1} \varphi'''(M_s)\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right) dB^2_{s_2} = \int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2} \varphi'''(M_s)\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 dB^2_{s_2}\right) ds_1 .$$

Pour cela, nous montrerons que :

(*a*) Le premier membre de l'égalité (13) est limite dans $L^{p/3}$, quand le pas de la subdivision S_2 de $[0,t_2]$ tend vers 0, de la quantité

$$U_t = \int_0^{t_1}\left(\sum_{]\sigma_2,\sigma_2'] \in S_2} \varphi'''(M_{s_1,\sigma_2})\left(\frac{\partial M_{s_1,\sigma_2}}{\partial B^1}\right)^2 (M_{s_1,\sigma_2'} - M_{s_1,\sigma_2})\right) ds_1$$

et que

(*b*) Le second membre de l'égalité (13) est limite dans $L^{p/3}$, dans les mêmes conditions, de la quantité

$$V_t = \sum_{]\sigma_2,\sigma_2'] \in S_2}\left(\int_0^{t_1} \varphi'''(M_{s_1,\sigma_2})\left(\frac{\partial M_{s_1,\sigma_2}}{\partial B^1}\right)^2 (M_{s_1,\sigma_2'} - M_{s_1,\sigma_2})\, ds_1\right);$$

comme $U_t = V_t$, le résultat cherché s'ensuivra ; posons

$$\psi_s = \varphi'''(M_s)\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 - \sum_{[\sigma_2,\sigma_2'] \in S_2} \varphi'''(M_{s_1,\sigma_2})\left(\frac{\partial M_{s_1,\sigma_2}}{\partial B^1}\right)^2 \chi_{]\sigma_2,\sigma_2']}(s_2)$$

la propriété (*a*) sera conséquence du fait que

$$E\left[\sup_{t_2}\left|\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2}\psi_s\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\,dB^2_{s_2}\right)ds_1\right|^{p/3}\right]$$

tend vers 0 quand le pas de la subdivision S_2 tend vers 0. Observons alors que, pour tout s_1, le processus $t_2 \longmapsto \int_0^{t_2}\psi_s\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)dB^2_{s_2}$ est une martingale X^{s_1} dont le processus croissant vaut, à l'instant t_2, $\int_0^{t_2}\psi_s^2\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2$; l'application $X \longmapsto S(X)$ étant sous-additive, le processus croissant de la martingale $\int_0^{t_1} X^{s_1}\,ds_1$ est majoré, à l'instant t_2, par

$$\left(\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2}\psi_s^2\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{1/2} ds_1\right)^2.$$

Par suite, en utilisant les inégalités de Burkholder-Gundy pour les martingales à un indice, on peut écrire :

$$E\left[\sup_{t_2}\left|\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2}\psi_s\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\,dB^2_{s_2}\right)ds_1\right|^{p/3}\right] \leqslant CE\left[\left(\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2}\psi_s^2\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{1/2} ds_1\right)^{p/3}\right].$$

Comme, pour presque tout (ω, s_1), ψ_s tend vers 0 ponctuellement $\left(\text{continuité p.s. en } s_2 \text{ de } \frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)$, en restant majoré par $C\sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2$, on voit que, si on prouve que

$$E\left[\left(\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2}\left(\sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^4\right)\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{1/2} ds_1\right)^{p/3}\right] < +\infty,$$

le théorème de la convergence dominée permettra d'achever la démonstration de (*a*). Mais cette dernière quantité se majore par

$$E\left[\left(\int_0^{t_1}\sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/3}\left(\int_0^{t_2}\sup_{s_1}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{p/6}\right]$$
$$\leqslant \left(E\left[\left(\int_0^{t_1}\sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/2}\right]\right)^{2/3}\left(E\left[\left(\int_0^{t_2}\sup_{s_1}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right]\right)^{1/3}$$
$$\leqslant C_pE[S(M)^p]$$

(conséquence de l'inégalité de Hölder et du Cor. 2). La propriété (*a*) est donc établie.

Pour démontrer (*b*), on observe que, grâce aux inégalités de Burkholder-Gundy pour les martingales à un indice, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\sup_{t_2}\left|\int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1}\psi_s\frac{\partial \mathrm{M}_s}{\partial \mathrm{B}^2}\,ds_1\right)d\mathrm{B}^2_{s_2}\right|^{p/3}\right] &\\ \leqslant \mathrm{CE}\left[\left(\int_0^{t_2}\left(\int_0^{t_1}\psi_s\frac{\partial \mathrm{M}_s}{\partial \mathrm{B}^2}\,ds_1\right)^2 ds_2\right)^{p/6}\right] &\\ \leqslant \mathrm{CE}\left[\left(\int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_2}\psi_s^2\left(\frac{\partial \mathrm{M}_s}{\partial \mathrm{B}^2}\right)^2 ds_2\right)^{1/2} ds_1\right)^{p/3}\right] & \end{aligned}$$

(inégalité de Minkowski), et on termine comme précédemment.

On a donc prouvé que, pour tout $t \in (\bar{\mathbf{R}}^+)^2$, on a presque sûrement l'égalité (9). Pour obtenir le th. 2, il nous suffit par conséquent de montrer que les quatre termes du second membre de cette égalité sont p.s. continus. Le premier est une intégrale stochastique, donc il est continu par construction (déf. 6); la continuité du dernier résulte de la propriété

$$\iint_{[0,t]}\left|\frac{\partial^4\varphi(\mathrm{M}_s)}{(\partial\mathrm{B}^1)^2(\partial\mathrm{B}^2)^2}\right| ds < +\infty \qquad \text{pour tout} \qquad t \in (\bar{\mathbf{R}}^+)^2,$$

que nous avons établie pour justifier l'égalité (12). Enfin, la continuité p.s. des deux intégrales simples résulte d'un théorème classique grâce à la continuité p.s. des martingales à un indice $s_2 \longmapsto \dfrac{\partial \mathrm{M}_s}{\partial \mathrm{B}^1}$ et $s_1 \longmapsto \dfrac{\partial \mathrm{M}_s}{\partial \mathrm{B}^2}$, à l'inégalité

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^{+\infty}\sup_{t_2}\left(\frac{\partial \mathrm{M}_{s_1,t_2}}{\partial \mathrm{B}^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/2}\right] \leqslant \mathrm{C}_p\left\|\frac{\partial^2\mathrm{M}}{\partial\mathrm{B}^1\partial\mathrm{B}^2}\right\|_p^p \qquad \text{(Corollaire 2)},$$

et à l'inégalité analogue obtenue en permutant les indices 1 et 2.

Le théorème 2 est donc démontré.

2.3. Extension de la formule aux martingales locales sur un domaine d'arrêt.

DÉFINITION 7. — *On appelle domaine d'arrêt une partie aléatoire* T *de* $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, *telle que le processus* $(\chi_{\{s\in \mathrm{T}\}})$ *soit prévisible et que* $s \leqslant t$ *et* $t \in \mathrm{T}$ *impliquent* $s \in \mathrm{T}$.

DÉFINITION 8. — *On dira qu'un processus* (M_t) *est une martingale locale sur un domaine d'arrêt* T *s'il existe une suite* (T_n) *croissante de domaines d'arrêt, telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n \underset{\text{p.s.}}{=} T$, *et une suite* (M^n) *de martingales fermées dans* L^2, *telles que, pour tout* n, *on ait* $M_t = M_t^n$ *si* $t \in T_n$. *Un tel couple* $((T_n),(M^n))$ *sera dit réduire* M. *On notera* $\mathscr{L}(T)$ *l'espace des martingales locales sur le domaine d'arrêt* T.

DÉFINITION 9. — *Soit* T *un domaine d'arrêt. On dira qu'un « processus »* (Φ_t), *défini pour presque tout* (t,ω), *appartient à l'espace* $\Lambda_{\text{loc}}(T)$ *s'il existe une suite croissante* (T_n) *de domaines d'arrêt, de limite* T, *telle que, pour tout* n, $\iint_{T_n} \Phi_s^2\, ds$ *soit fini presque sûrement.*

Un processus presque sûrement continu appartient, pour tout domaine d'arrêt T, à l'espace $\Lambda_{\text{loc}}(T)$.

PROPOSITION 3. — *Pour qu'un processus prévisible* Φ *appartienne à l'espace* $\Lambda_{\text{loc}}(T)$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite croissante* (T_n) *de domaines d'arrêt, de limite presque sûrement égale à* T *et telle que, pour tout entier* n, *le processus* $(\Phi_s \chi_{\{s\in T_n\}})$ *appartienne à l'espace* Λ^2.

Démonstration. — Soient T un domaine d'arrêt et $\Phi \in \Lambda_{\text{loc}}(T)$. On va construire une suite (T_n) de domaines d'arrêt telle que

(i) $\bigcup_n T_n = T$ presque sûrement.

(ii) $E\left[\iint_{T_n} \Phi_s^2\, ds\right] < +\infty$ pour tout n.

Ceci terminera la démonstration car, si la suite (T_n) ainsi construite n'est pas croissante, on la remplacera par la suite de terme général $\bar{T}_n = \bigcup_{p=1}^{p=n} T_p$ qui est croissante, vérifie évidemment (i), et vérifie encore (ii) car

$$\iint_{\bar{T}_n} \Phi_s^2\, ds \leqslant \sum_{p=1}^{p=n} \iint_{T_p} \Phi_s^2\, ds.$$

Soit (T'_n) une suite croissante de domaines d'arrêt vérifiant (i), et pour laquelle $\iint_{T'_n} \Phi_s^2\, ds$ est fini presque sûrement, pour tout entier n. Pour tout entier n

et tout entier k, on désigne par $G_{n,k}$ l'ensemble $\left\{\iint_{T'_n} \Phi_s^2\, ds \leqslant k\right\}$, par $g^{n,k}$ une version continue de la martingale $(E[\chi_{G_{n,k}}/\mathscr{F}_s])$, et par $D_{n,k}$ l'ensemble des $s \in (\mathbf{R}^+)^2$ tels que $(1-g^{n,k})_s^* \leqslant \frac{1}{2}$. Les ensembles aléatoires $D_{n,k}$ sont des domaines d'arrêt qui vérifient, pour tout n et tout k

$$P[D_{n,k} \neq (\mathbf{R}^+)^2] = P\left[(1-g^{n,k})_s^* > \frac{1}{2}\right] \leqslant 64\,P[(G_{n,k})^c],$$

quantité qui, pour tout n, tend vers 0 quand k tend vers l'infini. On peut donc, pour tout n, trouver un entier k_n tel que $P[D_{n,k_n} \neq (\mathbf{R}^+)^2] \leqslant 2^{-n}$. Si on pose, pour tout n, $T_n = T'_n \cap D_{n,k_n}$, on a $P[T_n \neq T'_n] \leqslant 2^{-n}$. D'après le premier lemme de Borel-Cantelli, on a donc, presque sûrement $T_n = T'_n$ pour tous les indices n sauf peut-être un nombre fini, et, par conséquent, la suite (T_n) vérifie (i). La condition (ii) est aussi réalisée car, si $s \in T_n$, alors $g_s^{n,k_n} \geqslant \frac{1}{2}$, et donc

$$\iint_{T_n} \Phi_s^2\, ds \leqslant 2 \iint_{T_n} \Phi_s^2\, g_s^{n,k_n}\, ds,$$

d'où

$$E\left[\iint_{T_n} \Phi_s^2\, ds\right] \leqslant 2E\left[\iint_{T_n} \Phi_s^2\, ds\,;\, G_{n,k_n}\right] \leqslant 2k_n,$$

d'après la définition de G_{n,k_n}. Ceci achève la démonstration.

DÉFINITION 10. — *Étant donné $\Phi \in \Lambda_{loc}(T)$, et une suite (T_n) de domaines d'arrêt tels que, par exemple, $(\Phi_s \chi_{\{s \in T_n\}}) \in \Lambda^2_\cdot$, il existe pour tout $t \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ un indice n_0 à partir duquel $t \in T_n$; on pose alors*

$$\iint_{[0,t]} \Phi_s\, dB_s = \iint_{[0,t]} \Phi_s \chi_{\{s \in T_n\}}\, dB_s.$$

On vérifie immédiatement qu'on définit ainsi un objet indépendant de la suite (T_n), qu'on appelle *intégrale stochastique de Φ par rapport à* B *sur* $[0,t]$. Le processus obtenu est p.s. continu sur T, et c'est un élément de $\mathscr{L}(T)$.

Avant d'énoncer le théorème, on étend aux martingales locales les notations introduites au § 2.1 : étant donné $M \in \mathscr{L}(T)$, et une suite réduisante $((T_n), (M^n))$ on définit $\dfrac{\partial^2 M}{\partial B^1\, \partial B^2}$ en posant, pour presque tout t et tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{\partial^2 M_t}{\partial B^1\, \partial B^2}\, \chi_{\{t \in T_n\}} = \frac{\partial^2 M_t^n}{\partial B^1\, \partial B^2}\, \chi_{\{t \in T_n\}}\,;$$

c'est un élément de l'espace $\Lambda_{\text{loc}}(T)$. On définit de même les dérivées premières $\dfrac{\partial M}{\partial B^1}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial B^2}$. On peut ainsi énoncer le

THÉORÈME 2 *bis.* — *Pour tout domaine d'arrêt* T, *toute martingale locale* M *sur* T, *et toute application* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^4$, *on a presque sûrement, pour tout* $t \in T$, *l'égalité* (9).

En utilisant une suite réduisante pour la martingale M, et en tronquant la fonction φ, on se ramène sans difficulté au théorème 2.

2.4. Extension de la formule en dimension supérieure.

Supposons maintenant que, pour $i = 1$ et 2, n_i soit un entier $\geqslant 1$ et B^i un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^{n_i}$. L'égalité (9) est encore valable, à condition de considérer les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial B^i}$ comme des gradients et l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial B^1\, \partial B^2}$ comme un bi-gradient ; de même, les opérateurs $\dfrac{\partial^2}{(\partial B^i)^2}$ seront des laplaciens et $\dfrac{\partial^4}{(\partial B^1)^2\, (\partial B^2)^2}$ un bi-laplacien. Enfin, l'expression $\dfrac{\partial^2 \varphi(M)}{\partial B^1\, \partial B^2}\, dB^1\, dB^2$ sera considérée comme « bi-produit scalaire » (ou, si on préfère, produit contracté de tenseurs d'ordre 2) de $\dfrac{{}^2\varphi(M)}{\partial B^1\, \partial B^2}$ par $dB^1 \otimes dB^2$.

Dans le même contexte, si on suppose que $M^1, M^2, \ldots, M^n$ sont n martingales locales, et que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ définie dans $\mathbf{R}^n$, les idées que nous avons utilisées précédemment permettent de montrer que l'égalité (9) est toujours valable, à condition de remplacer partout M par $(M^1, M^2, \ldots, M^n)$ et d'utiliser le même formalisme pour effectuer les dérivations. Si, dans la démonstration de la formule, on ne transforme pas les intégrales « mixtes » que les intégrations par parties font apparaître, on retrouve, dans le cas particulier où les n_1 premières M^i sont les composantes de B^1 et les n_2 suivantes celles de B^2, une formule utilisée par P. Malliavin dans [5].

3. EXTENSION DES INÉGALITÉS DE BURKHOLDER ET GUNDY AUX MARTINGALES (LOCALES) BI-BROWNIENNES DE CLASSE H^p

DÉFINITION 7. — *Soit* $p > 0$. *Pour tout* $M \in H^p$, *et tout* $t \in (\mathbf{R}^+)^2$, *on pose :*

$$S(M)_t = \left(\iint_{[0,t]} \left(\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\, \partial B^2}\right)^2 ds\right)^{1/2};\ S(M) = \sup_t (S(M)_t);$$

$$T(M)_t = \left(\iint_{[0,t]} \left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds\right)^{1/4};\ T(M) = \sup_t (T(M)_t).$$

Le but de ce paragraphe est la démonstration du

THÉORÈME 3. — *Pour tout* $p > 0$, *il existe une constante* C_p *telle que, pour toute martingale* $M \in H^p$, *on ait :* $E[(S(M))^p] \leqslant C_p E[(M^*)^p]$.

Démonstration. — Soit $0 < p \leqslant 2$, et soit $M \in H^p$. Il existe, d'après la proposition 3 (par exemple), une suite (M^n) de martingales fermées dans L^2 qui converge vers M pour la « norme » $M \longmapsto (E[(S(M))^p])^{1/p}$, donc aussi pour la « norme » $M \to (E[(M^*)^p])^{1/p}$. Comme $H^2 = L^2$ et que L^∞ est dense dans L^2 pour chacune des topologies associées à ces « normes », on ne perd rien à supposer, dans la démonstration du théorème, que M est une martingale bornée, auquel cas le résultat se déduit, par un argument standard, des deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Pour tout* $p > 0$, *il existe une constante* C_p *telle que, pour toute martingale* M *bornée, on ait :*

$$E[(S(M))^p] \leqslant C_p([E[(M^*)^p] + E[(T(M))^p]).$$

LEMME 2. — *Pour tout* $p > 0$, *il existe une constante* C_p *telle que, pour toute martingale* M *bornée, on ait*

$$E[(T(M))^p] \leqslant C_p(E[(M^*)^p] + (E[(M^*)^p]E[(S(M))^p])^{1/2}).$$

Dans les démonstrations qui suivent, on notera C_p toutes les constantes ne dépendant que de p.

Démonstration du lemme 1. — Puisque la martingale M est bornée, il existe une application $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^4$, à support compact, valant 1 dans un voisinage de l'adhérence de $M^*(\Omega)$. On applique alors le théorème 2 à la martingale M et à la fonction $u \to u^2\chi(u)$; on obtient, presque sûrement, pour tout $t \in (\mathbf{R}^+)^2$ (pour alléger l'écriture, on suppose M nulle sur les axes) :

$$M_t^2 = N_t + \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial M_{s_1,t_2}}{\partial B^1}\right)^2 ds_1 + \int_0^{t_2} \left(\frac{\partial M_{t_1,s_2}}{\partial B^2}\right)^2 ds_2 - (S(M)_t)^2,$$

où

$$N_t = 2\iint_{[0,t]} \left(M_s \frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\,\partial B^2} + \frac{\partial M_s}{\partial B^1}\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right) dB_s.$$

On en déduit l'inégalité :

$$(14)\quad (S(M)_t)^p \leqslant C_p\left[|N_t|^{p/2} + \left(\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial M_{s_1,t_2}}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/2} + \left(\int_0^{t_2}\left(\frac{\partial M_{t_1,s_2}}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{p/2}\right];$$

en vue de majorer l'espérance du premier membre, on observe que $E[|N_t|^{p/2}]$ se majore par $C_pE[(S(N)_t)^{p/2}]$ (c'est une conséquence du théorème 1, et peut aussi s'obtenir par d'autres procédés), et on a par suite :

$$(15)\quad E[|N_t|^{p/2}] \leqslant C_p((E[(M^*)^p]E[(S(M))^p])^{1/2} + E[(T(M))^p]).$$

D'autre part, comme $\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial M_{s_1,t_2}}{\partial B^1}\right)^2 ds_1$ représente la valeur au temps t_1 du processus croissant associé à la martingale à un indice $t_1 \to M_t$ (égalité (8)), les inégalités de Burkholder-Gundy permettent d'écrire

$$(16)\quad E\left[\left(\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial M_{s_1,t_2}}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/2}\right] \leqslant C_pE\left[\sup_{s_1 \leqslant t_1} |M_{s_1,t_2}|^p\right] \leqslant C_pE[(M^*)^p],$$

et l'inégalité analogue relative à l'indice t_2. L'inégalité à démontrer se déduit, grace à un argument standard, des inégalités (14), (15) et (16).

Démonstration du lemme 2. — Conservant les notations précédentes, on applique le théorème 2 à la martingale M et à la fonction $u \longmapsto u^4\chi(u)$, ce qui donne l'égalité :

$$M_t^4 = N_t + 6\left(\int_0^{t_1} M_{s_1,t_2}^2 \left(\frac{\partial M_{s_1,t_2}}{\partial B^1}\right)^2 ds_1 + \int_0^{t_2} M_{t_1,s_2}^2 \left(\frac{\partial M_{t_1,s_2}}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)$$
$$- 6 \iint_{[0,t]} \left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds - 24 \iint_{[0,t]} M_s \frac{\partial M_s}{\partial B^1}\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\,\partial B^2}\,ds$$
$$- 12 \iint_{[0,t]} M_s^2 \left(\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\,\partial B^2}\right)^2 ds$$

où, cette fois,

$$N_t = \iint_{[0,t]} \left(4M_s^3 \frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\,\partial B^2} + 12\, M_s^2 \frac{\partial M_s}{\partial B^1}\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right) dB_s .$$

On en déduit sans difficulté l'inégalité :

$$(T(M)_t)^p \leqslant C_p\left(|N_t|^{p/4} + (M_t^*)^{p/2}\left(\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial M_{s_1,t_2}}{\partial B^1}\right)^2 ds_1\right)^{p/4}\right.$$
$$+ (M_t^*)^{p/2}\left(\int_0^{t_2}\left(\frac{\partial M_{t_1,s_2}}{\partial B^2}\right)^2 ds_2\right)^{p/4}$$
$$\left. + (M_t^*)^{p/4}(S(M)_t)^{p/4}(T(M)_t)^{p/2} + (M_t^*)^{p/2}(S(M)_t)^{p/2}\right).$$

On prend les espérances des deux membres; on majore $E[|N_t|^{p/4}]$ par $C_p E[(S(N))^{p/4}]$ (th. 1), et les espérances des produits au moyen de l'inégalité de Schwarz ; en utilisant les inégalités de Burkholder-Gundy pour majorer les termes à temps unidimensionnel, on obtient l'inégalité :

$$E[(T(M))^p] \leqslant C_p(E[(M^*)^p] + E[(S(N))^{p/4}]$$
$$+ (E[(M^*)^p]\,E[(S(M))^p])^{1/4}(E[(T(M))^p])^{1/2}$$
$$+ (E[(M^*)^p]\,E[(S(M))^p])^{1/2}).$$

D'où par un argument standard

$$(17)\quad E[(T(M))^p] \leqslant C_p(E[(M^*)^p] + E[(S(N))^{p/4}] + (E[(M^*)^p]\,E[(S(M))^p])^{1/2}).$$

(Le fait que $E[(T(M))^p]$ soit fini si $M \in H^p$ résulte de l'inégalité

$$T(M) \leqslant \int_0^{+\infty} \sup_{s_2}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\right)^2 ds_1 \int_0^{+\infty} \sup_{s_1}\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2 ds_2$$

et du corollaire 2).

D'autre part,

$$(S(N))^{p/4} \leqslant C_p\left(\iint_{(\mathbf{R}^+)^2}\left(M_s^6\left(\frac{\partial^2 M_s}{\partial B^1\,\partial B^2}\right)^2 + M_s^4\left(\frac{\partial M_s}{\partial B^1}\frac{\partial M_s}{\partial B^2}\right)^2\right) ds\right)^{p/4},$$

$$(18)\quad (S(N))^{p/4} \leqslant C_p((M^*)^p + ((M^*)^p(S(M))^p)^{1/2} + ((M^*)^p(T(M))^p)^{1/2}).$$

Des inégalités (17) et (18) découle facilement l'inégalité

$$E[(T(M))^p] \leqslant C_p(E[(M^*)^p] + (E[(M^*)^p]E[(S(M))^p])^{1/2} + (E[(M^*)^p]E[(T(M))^p])^{1/2})$$

dont on déduit, par un argument standard, l'inégalité cherchée.

4. APPLICATION A L'ÉTUDE DES FONCTIONS BI-HARMONIQUES

Pour $i = 1$ et 2, soient n_i un entier $\geqslant 1$, O^i un ouvert de $\mathbf{R}^{n_i+1}$, B^i un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^{n_i+1}$, T_i son temps de sortie de l'ouvert O^i. Soit T l'ensemble des $t \in (\mathbf{R}^+)^2$ tels que $t_i < T_i$ pour $i = 1$ et 2. A toute fonction bi-harmonique $f : O^1 \times O^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, on associe les variables aléatoires ($\nabla_1\nabla_2 f$ désigne le bi-gradient de f) :

$$S(f) = \left(\iint_T |\nabla_1\nabla_2 f(B_s)|^2\, ds\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad f^* = \operatorname*{Sup}_{s\in T} |f(B_s)|.$$

On a ainsi le

THÉORÈME 4. — *Pour tout $p > 0$, il existe une constante C_p telle que, pour toute fonction bi-harmonique f, on ait*

$$E[(S(f))^p] \leqslant C_p E[(f^*)^p].$$

Démonstration. — On se donne, pour $i = 1$ et 2, une suite croissante (K_n^i) de compacts tels que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n^i = O^i$, et on note T_n^i le temps de sortie de K_n^i pour B^i. Pour tout entier n, le processus $t \longmapsto f(B^1_{t_1 \wedge T_1}, B^2_{t_2 \wedge T_2})$ est une martingale bornée, à laquelle on peut appliquer le théorème 3. On conclut ensuite au moyen du théorème de la convergence monotone.

On suppose dans ce qui suit que $n_1 = n_2 = 2$, et que, pour $i = 1$ et 2, O^i est le disque unité ouvert D^i du plan complexe. On note D le bi-disque $D^1 \times D^2$. Pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, on désigne par Γ_θ le bi-cône $\Gamma_{\theta_1} \times \Gamma_{\theta_2}$, où Γ_{θ_j} désigne un cône de sommet le point $\exp(i\theta_j)$, d'ouverture constante et d'axe passant par le centre de D^j $(j=1,2)$. Pour toute fonction f bi-harmonique sur D, on pose, pour tout $\theta \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$,

$$A(f)(\theta) = \left(\iint_{\Gamma_\theta} |\nabla_1 \nabla_2 f(x,y)|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}$$

et

$$N(f)(\theta) = \operatorname*{Sup}_{(x,y) \in \Gamma_\theta} |f(x,y).$$

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 5 (R.F. Gundy et E.M. Stein [6]). — *Pour tout* $p > 0$, *il existe une constante* C_p *telle que, pour toute fonction* f *bi-harmonique sur* D, *on ait*

$$\int_{\partial D} (A(f)(\theta))^p \, dm(\theta) \leqslant C_p \int_{\partial D} (N(f)(\theta))^p \, dm(\theta)$$

où m *désigne la mesure de Lebesgue sur la «frontière distinguée»* $\partial D = \partial D^1 \times \partial D^2$ *du bi-disque.*

Démonstration. — On se donne, pour $i = 1$ et 2, un mouvement brownien B^i issu de O dans $\mathbf{R}^2$ et on associe à f, comme on l'a fait plus haut, les fonctions « browniennes » $S(f)$ et f^*. Le théorème 5 est une conséquence immédiate du théorème 4 et du résultat suivant : Il existe un nombre C tel que, pour tout $\lambda > 0$, et toute fonction bi-harmonique f sur D, on ait

$$m(A(f) > \lambda) \leqslant CP(S(f) > \lambda)$$

et

$$P(f^* > \lambda) \leqslant Cm(N(f) > \lambda).$$

La démonstration de ces inégalités utilise essentiellement les mêmes idées que dans le cas unidimensionnel ; nous renvoyons à [7] pour les détails.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Brossard et L. Chevalier, Espaces H^p de martingales bi-browniennes, *C.R.A.S.*, Paris, t. 289, Série A (1979), 233-236.

[2] J. Brossard, Généralisation des inégalités de Burkholder et Gundy aux martingales régulières à deux indices, *C.R.A.S.*, Paris, t. 288, Série A (1979), 267-270.

[3] L. Chevalier, Démonstration « atomique » des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, École d'été de Probabilités de Saint-Flour VIII (1978), *Ann. Scient. Univ. Clermont*, 67 (1979), 19-24.

[4] S. Saks, Remarks on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral, *Fund. Math.*, 22 (1934), 257-261.

[5] P. Malliavin, Processus à temps bi-dimensionnel et intégrales d'aire dans le bi-disque, *C.R.A.S.*, Paris, t. 285, Série A (1977), 221-224.

[6] R.F. Gundy and E.M. Stein, H^p theory for the poly-disc, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 76, N° 3 (1979), 1026-1029.

[7] R.F. Gundy, Inégalités pour martingales à un et deux indices : l'espace H^p, École d'été de Probabilités de Saint-Flour VIII (1978), *Lecture Notes in Math.*, N° 774, Springer Verlag (1980).

Manuscrit reçu le 14 mai 1980.

J. Brossard et L. Chevalier,
Institut Fourier
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS
B.P. 116
38402 St-Martin-d'Hères Cedex.