JEAN-CLAUDE TOUGERON

Fonctions composées différentiables : cas algébrique

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 4 (1980), p. 51-74
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_4_51_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 4 (1980), 51-74.

FONCTIONS COMPOSÉES DIFFÉRENTIABLES : CAS ALGÉBRIQUE

par Jean-Claude TOUGERON

G. Claeser considère dans [3] le problème suivant : soit f une application analytique propre d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ dans un ouvert Ω' de $\mathbf{R}^p$; l'image par f^* de $C^\infty(\mathbf{R}^p)$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ est-elle fermée dans $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ muni de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet ? G. Glaeser donne une réponse affirmative lorsque f est une submersion en restriction à un ouvert partout dense de Ω.

Cette hypothèse n'est pas essentielle et nous démontrons [1] la conjecture sans hypothèse de rang sur f, mais lorsque f est polynomiale ou plus généralement lorsque f est de Nash. En fait (cf. 1.6 et 1.7) nous démontrons le résultat dans une situation plus générale, lorsque $f : X \to Y$ est un morphisme, propre et de Nash, entre espaces localement semi-algébriques. L'hypothèse d'algébricité est essentielle dans notre démonstration ; en effet, nous utilisons une stratification assez fine de l'image de f en ensembles semi-algébriques localement fermés, et une description précise du faisceau des germes de fonctions C^∞ dans $\mathbf{R}^n$ qui s'annulent sur un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$. Dans le cas analytique, l'image d'un semi-analytique n'étant que sous-analytique, la stratification serait sous-analytique et une description du faisceau des germes de fonctions C^∞ qui s'annulent sur un ensemble sous-analytique de $\mathbf{R}^n$ n'est pas du tout évidente... D'ailleurs, la conjecture sous sa forme la plus générale est peut-être fausse.

Cependant, les techniques utilisées dans cet article permettent sans doute d'aborder des situations différentes de la situation algébrique, par exemple celle où le graphe de $f : \Omega \ni x \to f(x) = y \in \Omega'$ est l'ensemble des zéros d'un nombre fini de polynômes en x à coefficients analytiques en y (la situation algébro-analytique). Dans ce cas, le théorème de Tarski-Seidenberg est encore vrai ; on peut stratifier l'image en ensembles semi-analytiques et l'on connaît, d'après les travaux de Merrien [7] et [8], une description précise

[1] Cf. [14], où le résultat est annoncé sans démonstration.

du faisceau des germes de fonctions C^∞ qui s'annulent sur un ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^n$.

On retrouve, au moins partiellement, le théorème de G. W. Schwarz [10] (généralisé par D. Luna [6]) sur les fonctions C^∞-invariantes. Signalons aussi deux articles consacrés à la conjecture de Glaeser. Dans [8], J. Merrien démontre la conjecture lorsque $f : \Omega \to \Omega'$ est un morphisme analytique propre et fini (en fait, J. Merrien démontre un résultat plus général sur des modules); dans [1], E. Bierstone et T. Bloom démontrent la conjecture dans le cas analytique, mais sous certaines hypothèses assez restrictives (par exemple, des hypothèses sur le rang de f ou sur la dimension des espaces considérés).

Dans cet article, nous n'utilisons pas les techniques de désingularisation (sauf accessoirement, au paragraphe 5). La démonstration utilise des résultats classiques sur les ensembles semi-algébriques; des propriétés de régularité des morphismes de Nash (cf. § 5); le théorème de J. J. Risler sur la noethérianité de certains anneaux de fonctions de Nash; enfin, surtout, des résultats récents de J. Merrien.

Soient X un espace topologique; A un sous-ensemble de X; $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur X. Nous noterons $\mathscr{F}|A$ la restriction de $\mathscr{F}$ à A; $\mathscr{F}(A)$ l'ensemble des sections de $\mathscr{F}$ sur A. Cependant, si $x \in X$, la fibre de $\mathscr{F}$ en x sera notée $\mathscr{F}_x$.

1. Espaces localement semi-algébriques.

Soient $N_{\mathbf{R}^n}$ le faisceau des germes de fonctions de Nash réelles sur $\mathbf{R}^n$; $C^\infty_{\mathbf{R}^n}$ le faisceau des germes de fonctions C^∞ réelles sur $\mathbf{R}^n$. Soit A un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé de $\mathbf{R}^n$, et notons $I_{\mathbf{R}^n,A}$ (resp. $J_{\mathbf{R}^n,A}$) le sous-faisceau d'idéaux de $N_{\mathbf{R}^n}$ (resp. de $C^\infty_{\mathbf{R}^n}$) formé des germes nuls sur A; $N_A = N_{\mathbf{R}^n}/I_{\mathbf{R}^n,A}$ restreint à A, est le faisceau des germes de fonctions de Nash réelles sur A; $C^\infty_A = C^\infty_{\mathbf{R}^n}/J_{\mathbf{R}^n,A}$ restreint à A, est le faisceau des germes de fonctions C^∞ réelles sur A.

Soit $a \in A$; on note $\hat{N}_{\mathbf{R}^n,a}$, $\hat{N}_{A,a}$, les complétés des anneaux locaux $N_{\mathbf{R}^n,a}$, $N_{A,a}$ pour leur topologie m-adique habituelle. Ainsi,

$$\hat{N}_{\mathbf{R}^n,a} \simeq R[[x_1, \ldots, x_n]] \quad \text{et} \quad \hat{N}_{A,a} = \hat{N}_{\mathbf{R}^n,a}/\hat{I}_{\mathbf{R}^n,A,a}.$$

Si $\varphi \in C^\infty_{\mathbf{R}^n,a}$, on note $\hat{\varphi}_a \in \hat{N}_{\mathbf{R}^n,a}$ sa série de Taylor en a.

LEMME 1.1. — *Soit* $a \in A$ *et soit* $\varphi \in J_{\mathbf{R}^n,A,a}$; *alors* $\hat{\varphi}_a \in \hat{I}_{\mathbf{R}^n,A,a}$. *On a donc, par passage aux quotients, un morphisme canonique :*

$$C^\infty_{A,a} \ni \Psi \to \hat{\Psi}_a \in \hat{N}_{A,a}.$$

Preuve. — Soit $\tilde{A}_a$ le plus petit germe en a d'ensemble de Nash contenant A_a et soient $B_1, \ldots, B_s$ les composantes irréductibles de $\tilde{A}_a$. Soit $\mathrm{Reg}(B_i)$ la partie régulière de B_i formée des points en lesquels la dimension de B_i est égale à celle de B_i en a. Visiblement, A_a contient un germe $B'_i \subset \mathrm{Reg}(B_i)$, non vide et ouvert dans $\mathrm{Reg}(B_i)$. Soit $\mathfrak{p}_i$ l'idéal de $N_{\mathbf{R}^n,a}$ formé des germes nuls sur B_i ; alors $\hat{I}_{\mathbf{R}^n,A,a} = \hat{\mathfrak{p}}_1 \cap \cdots \cap \hat{\mathfrak{p}}_s$.

Si $\hat{\varphi}_a \notin \hat{\mathfrak{p}}_i$, pour tout $b \in B'_i$ on aurait $\hat{\varphi}_b \notin \hat{\mathfrak{p}}_{i,b}$ (par un argument de semi-continuité, cf. [11], page 39), ce qui est absurbe puisque φ s'annule sur B'_i. Donc $\hat{\varphi}_a \in \hat{\mathfrak{p}}_i$, $i = 1, \ldots, s$.

C.Q.F.D.

DÉFINITION 1.2. — *Un espace localement semi-algébrique* (X,N_X) *est la donnée d'un espace topologique séparé* X *et d'un sous-faisceau* N_x *du faisceau des germes de fonctions continues réelles sur* X, *tels que tout* $x \in X$ *admette un voisinage ouvert* U, *le couple* $(U, N_X|U)$ *étant isomorphe par un homéomorphisme* $\xi_U : U \xrightarrow{\sim} A$ *à un couple* (A,N_A) *défini comme précédemment.*

Chaque A étant localement compact, il en est de même de X. On définit de manière évidente le faisceau C_X^∞ des germes de fonctions réelles C^∞ sur X : si V est un ouvert de X, une fonction continue $\varphi : V \to \mathbf{R}$ appartient à $C_X^\infty(V)$ si, et seulement si, pour toute carte U, $\varphi_0\xi_U^{-1}$: $\xi_U(U \cap V) \to \mathbf{R}$ est C^∞. Si $x \in X$, on a un homomorphisme canonique : $C_{X,x}^\infty \ni \Psi \to \hat{\Psi}_x \in \hat{N}_{X,x}$.

Munissons $C_X^\infty(X)$, noté simplement $C^\infty(X)$, d'une topologie. Tout d'abord, soit K un sous-ensemble compact et semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$. Si Ω est un voisinage ouvert de K, le morphisme de restriction : $C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\alpha} C^\infty(K)$ est surjectif. On munit $C^\infty(K)$ de la topologie quotient de $C^\infty(\Omega)$ par $\ker\alpha$; cette topologie est indépendante du voisinage ouvert Ω choisi et $C^\infty(K)$ est un espace de Fréchet.

Si A est semi-algébrique et localement compact, on munit $C^\infty(A)$ de la topologie la moins fine rendant continus les morphismes de restriction : $C^\infty(A) \to C^\infty(K)$, K décrivant l'ensemble des compacts semi-algébriques contenus dans A($C^\infty(A)$ est encore un espace de Fréchet, et une suite φ_j de $C^\infty(A)$ tend vers zéro, si, et seulement si, pour tout K, $\varphi_j|K \to 0$ dans $C^\infty(K)$).

Enfin, si X est localement semi-algébrique quelconque, on munit X de la topologie la moins fine rendant continus les morphismes de restriction $C^\infty(X) \to C^\infty(U)$, U décrivant l'ensemble des cartes de X et $C^\infty(U)$ étant muni de la topologie telle que $\xi_U^*: C^\infty(A) \to C^\infty(U)$ soit un homéomorphisme. Si X est dénombrable à l'infini, $C^\infty(X)$ est un espace de Fréchet.

Si X et Y sont deux espaces localement semi-algébriques, un morphisme (de Nash) $f: X \to Y$ est une application continue telle que f^* induise un morphisme de faisceaux : $N_Y \to N_X$. Bien entendu, on a un morphisme $f^*: C_Y^\infty \to C_X^\infty$ et $f^*: C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ est continue. En outre, si $x \in X$ et $y = f(x)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty_{Y,y} & \xrightarrow{f_x^*} & C^\infty_{X,x} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{N}_{Y,y} & \xrightarrow{\hat{f}_x^*} & \hat{N}_{X,x} \end{array}$$

Définition 1.3. — *Une application continue* $f: X \to Y$ *entre espaces topologiques localement compacts est semi-propre si* $f(X)$ *est localement fermé dans* Y *et si pour tout compact* L *de* $f(X)$, *il existe un compact* K *de* X *tel que* $f(K) = L$.

Proposition 1.4. — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme semi-propre entre espaces localement semi-algébriques. Alors* $f(X)$ *est un sous-espace localement semi-algébrique de* Y.

Preuve. — Soit $y \in f(X)$ et soit V un voisinage ouvert de y dans Y tel que V admette une carte. L'espace $f(X)$ étant localement compact par hypothèse, il existe un voisinage compact $L \subset V$ de y dans $f(X)$. Par hypothèse, il existe un compact K de X tel que $f(K) = L$. On peut recouvrir K par un nombre fini de compacts $K_1, \ldots, K_s \subset f^{-1}(V)$, tels que chaque K_i soit contenu dans un ouvert U_i de X admettant une carte ξ_{U_i} avec $\xi_{U_i}(K_i)$ semi-algébrique compact de $\mathbf{R}^n$. Il suffit de montrer que $f(K_1) \cup \ldots \cup f(K_s)$ est localement semi-algébrique, i.e. que chaque $f(K_i)$ est localement semi-algébrique.

On peut donc supposer que X est un compact semi-algébrique de $\mathbf{R}^n$ et que $Y = \mathbf{R}^p$. Quitte à découper X en compacts plus petits, on peut aussi supposer que f est induite par une fonction de Nash sur un voisinage ouvert Ω de X dans $\mathbf{R}^n$. Tout revient à montrer que la projection par $\Pi : \Omega \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ de graphe $f = \{x, f(x)\}$, $x \in X$, est semi-algébrique. Or graphe f est compact et semi-Nash dans $\Omega \times \mathbf{R}^p$; d'après [5], graphe f est semi-algébrique. Sa projection l'est aussi, d'après le théorème de Tarski-Seidenberg.

Remarque 1.5. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre espaces localement semi-algébriques. Si Z est sous-espace localement semi-algébrique de Y, $f^{-1}(Z)$ est un sous-espace localement semi-algébrique de X.

PROPOSITION 1.6. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme d'espaces localement semi-algébriques et soit* $\Psi \in C^\infty(X)$, *appartenant à l'adhérence de l'image de* $f^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$. *Alors, pour tout* $y \in Y$, *la condition suivante est satisfaite* :

($\mathscr{C}_y$) *Il existe* $\Phi_y^* \in \hat{N}_{Y,y}$ telle que,

$$\forall x \in f^{-1}(y), \qquad \hat{\Psi}_x = \Phi_y^* \circ \hat{f}_x .$$

Preuve. — Elle est analogue à celle de [12], (3.1). Pour tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$), soit $m_{X,x}$ (resp. $m_{Y,y}$) l'idéal maximal de $N_{X,x}$ (resp. $N_{Y,y}$).

Fixons un entier $p \geqslant 0$ et soit F un sous-ensemble fini quelconque de $f^{-1}(y)$. L'ensemble

$$\Sigma_F^p = \{\varphi \in \hat{N}_{Y,y}/\hat{m}_{Y,y}^{p+1} ; \quad \varphi \circ \hat{f}_x = \hat{\Psi}_x \bmod \hat{m}_{X,x}^{p+1}, \ \forall x \in F\}$$

est par hypothèse un sous-espace affine non vide de $\hat{N}_{Y,y}/\hat{m}_{Y,y}^{p+1}$. Si $F' \supset F$, $\Sigma_F^p \supset \Sigma_{F'}^p$; si $\Sigma^p = \bigcap\limits_{\substack{F \subset X \\ F \text{ fini}}} \Sigma_F^p$, Σ^p est non vide et $\forall x \in f^{-1}(y)$, $\forall \varphi \in \Sigma^p$, $\varphi \circ \hat{f}_x = \hat{\Psi}_x \bmod \hat{m}_{X,x}^{p+1}$. Les Σ^p forment un système projectif d'espaces affines de dimension finie. Si $\Sigma = \varprojlim \Sigma^p$, Σ est non vide et tout $\Phi_y^* \in \Sigma$ vérifie la condition ($\mathscr{C}_y$).

Le but de cet article est la démonstration du résultat suivant :

THÉORÈME 1.7. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme semi-propre entre espaces localement semi-algébriques et supposons que* $f(X)$ *est fermé dans* Y. *Soit* $\Psi \in C^\infty(X)$ *telle que, pour tout* $y \in Y$, *la condition* ($\mathscr{C}_y$) *soit satisfaite. Alors il existe* $\Phi \in C^\infty(Y)$ *telle que* $\Psi = \Phi \circ f$.

2. Propriétés locales d'un ensemble semi-algébrique.

Soit X, Y, $Y \subset X$, deux sous-ensembles semi-algébriques et localement fermés de $\mathbf{R}^n$. Pour simplifier les notations, nous poserons $I_{\mathbf{R}^n,X} = I_X$.

DÉFINITION 2.1. — *L'ensemble X est cohérent le long de Y si le faisceau $N_X|Y$ est cohérent, c'est-à-dire si $I_X|Y$ est de type fini; X est globalement cohérent le long de Y s'il existe un nombre fini de fonctions de Nash sur un voisinage de Y dans $\mathbf{R}^n$ qui engendrent $I_{X,y}$ en tout point $y \in Y$. Enfin, X est cohérent (resp. globalement cohérent) si X est cohérent le long de X (resp. globalement cohérent le long de X).*

DÉFINITION 2.2. — *L'ensemble X vérifie le principe du prolongement analytique le long de Y, si la condition suivante est toujours satisfaite : soit σ un chemin continu dans Y et soit φ une fonction de Nash dans un voisinage de σ dans X, nulle au voisinage d'un point de σ; alors φ est identiquement nulle au voisinage de σ.*

LEMME 2.3. — *Supposons que $I_X|Y$ est l'intersection d'un nombre fini de faisceaux d'idéaux $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ de $N_X|Y$ tels que, $\forall y \in Y$, $\mathfrak{p}_{i,y}$ soit premier de hauteur p_i indépendante de $y \in Y$. Alors X vérifie le principe du prolongement analytique le long de Y.*

Preuve. — Il suffit de vérifier le résultat suivant : si $y_j \in Y$ tend vers $y \in Y$ et si $\varphi \in N_{\mathbf{R}^n,y}$ est telle que $\varphi_{y_j} \in I_{X,y_j}$ pour tout j assez grand, alors $\varphi \in I_{X,y}$. Or, si $\varphi \notin I_{X,y}$, il existe un indice i tel que $\varphi \notin \mathfrak{p}_{i,y}$; donc $\varphi_{y_j} \notin \mathfrak{p}_{i,y_j}$ pour j assez grand, d'après le théorème de semi-continuité, [11], page 39 : mais ceci est absurde.

Le théorème suivant est démontré par J. Merrien [7] dans le cas analytique. Sa démonstration dans le cas algébrique est analogue.

THÉORÈME 2.4. — *Soit X un ensemble semi-algébrique localement fermé de $\mathbf{R}^n$ et soit $x_0 \in X$. Il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X et une partition finie $(X_i)_{i\in I}$ de ce voisinage en ensembles semi-algébriques localement fermés tels que pour tout i les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *X est globalement cohérent le long de chaque X_i.*

(ii) *$I_X|X_i$ est une intersection finie de faisceaux d'idéaux $\mathfrak{p}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,j_i}$; les* *indices i et j étant fixés, il existe un nombre fini de fonctions de Nash au voisinage de X_i qui engendrent $\mathfrak{p}_{i,j}$ en tout point $x \in X_i$; enfin, pour tout $x \in X_i$, chaque $\mathfrak{p}_{i,j,x}$ est un idéal premier de $N_{\mathbf{R}^n,x}$ de hauteur $p_{i,j}$ indépendante de $x \in X_i$, et les $\mathfrak{p}_{i,j,x}$, $1 \leqslant j \leqslant j_i$, sont exactement les idéaux premiers associés à $I_{X,x}$.*

En particulier, d'après 2.3, X vérifie le principe du prolongement analytique le long de chaque X_i.

DÉFINITION 2.5. — *Nous dirons que X est régulier (de dimension p) si X est cohérent et si chaque anneau local $N_{X,x}$, $x \in X$, est régulier (de dimension p). Si X est régulier au sens géométrique habituel, X est régulier au sens de 2.5. (la réciproque est visiblement fausse).*

DÉFINITION 2.6. — *Soit $I_{X,Y}$ le faisceau d'idéaux de N_X formé des germes nuls sur Y ; donc, si $y \in Y$, $N_{Y,y} = N_{X,y}/I_{X,Y,y}$. Supposons Y régulier et X cohérent le long de Y. Nous dirons que X est normalement plat le long de Y si pour tout $y \in Y$ et tout $\nu \in \mathbf{N}$, $I^{\nu}_{X,Y,y}/I^{\nu+1}_{X,Y,y}$ est un module libre sur $N_{Y,y}$.*

PROPOSITION 2.7. — *Soient Y, X, $Y \subset X$, deux sous-ensembles semi-algébriques et localement fermés de $\mathbf{R}^n$; soit $y_0 \in Y$. Il existe un voisinage ouvert V_{y_0} de y_0 dans Y ; un ouvert semi-algébrique $\tilde{Y} \subset V_{y_0}$ de Y et une partition finie de $\tilde{Y}$ en ouverts semi-algébriques Y_i tels que :*

(i) *$\tilde{Y}$ est dense dans V_{y_0}.*

(ii) *Chaque Y_i est globalement cohérent et régulier.*

(iii) *X est globalement cohérent et normalement plat le long de chaque Y_i.*

Preuve. — Soit Reg(Y) l'ensemble des points réguliers de Y (au sens géométrique classique) : Reg(Y) est un ouvert de Y, dense dans Y et semi-algébrique, d'après [5]. D'après 2.4, il existe un voisinage ouvert V_{y_0} de y_0 dans Y et une partition finie Y_i^* de $\mathrm{Reg}(Y) \cap V_{y_0}$ en ensembles semi-algébriques localement fermés tels que X et Y soient globalement cohérents le long de chaque Y_i^*. Quitte à affiner cette partition, on peut supposer que chaque Y_i^* est soit un ouvert connexe de Y (toute composante connexe d'un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique, d'après [5]), soit un ensemble sans points intérieurs dans Y (l'intérieur d'un ensemble semi-algébrique dans un sur-ensemble semi-algébrique est semi-algébrique, d'après [5]). Pour démontrer la proposition, il suffit de trouver dans chaque Y_i^* ouvert connexe de Y, un ouvert Y_i dense dans Y_i^*, le long duquel X est normalement plat. Fixons l'indice i et posons $Y_i^* = Z$.

L'anneau $N_{\mathbf{R}^n}(Z)$ des germes de fonctions de Nash réelles au voisinage de Z est un anneau noethérien (ceci est démontré par J. J. Risler [9], lorsque Z est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, mais la démonstration dans le cas général est exactement la même). Si $z \in Z$, soit $N_{\mathbf{R}^n}(Z)_z$ le localisé de $N_{\mathbf{R}^n}(Z)$ par rapport à l'idéal maximal de $N_{\mathbf{R}^n}(Z)$ formé des germes nuls en z. On a des morphismes canoniques :

$$N_{\mathbf{R}^n}(Z) \to N_{\mathbf{R}^n}(Z)_z \to N_{\mathbf{R}^n,z}.$$

Le premier, morphisme de localisation, est plat ; le second, morphisme d'anneaux locaux noethériens, est fidèlement plat.

Par hypothèse, il existe des idéaux $\mathscr{I}_Z$, $\mathscr{I}_X$ de $N_{\mathbf{R}^n}(Z)$ ($\mathscr{I}_Z \supset \mathscr{I}_X$) tels que, $\forall z \in Z$, $\mathscr{I}_Z$ (resp. $\mathscr{I}_X$) engendre $I_{\mathbf{R}^n,Z,z}$ (resp. $I_{\mathbf{R}^n,X,z}$). Posons :

$$M = \bigoplus_{\nu \geqslant 0} (\mathscr{I}_Z^\nu + \mathscr{I}_X)/(\mathscr{I}_Z^{\nu+1} + \mathscr{I}_X).$$

D'après le théorème de Krull-Seidenberg-Grothendieck, l'ensemble des $z \in Z$ tels que le localisé $M_z = M \bigotimes_{N_{\mathbf{R}^n}(Z)} N_{\mathbf{R}^n}(Z)_z$ soit un module libre sur $N_{\mathbf{R}^n}(Z)_z$ est un ouvert $\tilde{Z}$ de Z, dense dans Z, complémentaire de l'ensemble des zéros d'une fonction de Nash $\varphi \in N_{\mathbf{R}^n}(Z)$; $\tilde{Z}$ est donc semi-algébrique (le graphe d'une fonction de Nash et donc l'ensemble de ses zéros sont semi-algébriques). Tensorisant par $N_{\mathbf{R}^n,z}$, on en déduit que X est normalement plat le long de $\tilde{Z}$.

C.Q.F.D.

3. Dévissage local d'un morphisme d'espaces localement semi-algébriques.

Le lecteur trouvera dans [5] la démonstration du lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Soit* X *un sous-ensemble semi-algébrique de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ *et soit* $\Pi : X \to \mathbf{R}^n$ *la restriction à* X *de la projection évidente :* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$. *Alors il existe une partition finie* $(Y_i)_{i \in I}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *en ensembles semi-algébriques connexes localement fermés et pour tout* i, *une suite croissante de fonctions* *de Nash au voisinage de* Y_i : $\alpha_{i,1} < \cdots < \alpha_{i,j_i}$, *telles que pour tout* i, $\Pi^{-1}(Y_i)$ *soit une réunion finie d'ensembles :*

$$A_j = \{(y,t) \mid y \in Y_i \text{ et } \alpha_{i,j}(y) < t < \alpha_{i,j+1}(y)\}$$

ou

$$B_j = \{(y,t) \mid y \in Y_i \text{ et } t = \alpha_{i,j}(y)\}.$$

(On pose $\alpha_{i,0}(y) = -\infty$, $\alpha_{i,j_i+1}(y) = +\infty$, *pour tout* $y \in Y_i$).

La démonstration du lemme suivant m'a été suggérée par J. Merrien.

LEMME 3.2. — *Soit* X *un sous-ensemble semi-algébrique de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ *et soit* $\Pi : X \to \mathbf{R}^n$ *la restriction à* X *de la projection évidente* : $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$. *Alors il existe une partition finie* $(Y_i)_{i\in I}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *en ensembles semi-algébriques localement fermés et pour tout* i, *une suite de fonctions de Nash au voisinage de* Y_i : $\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,j_i}$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}^p$, *telles que :*

(i) *Pour tout* $y \in Y_i$ *et tout* j, $(y,\xi_{i,j}(y)) \in \Pi^{-1}(y)$.

(ii) *Pour tout* $y \in Y_i$ *et toute composante connexe de la fibre* $\Pi^{-1}(y)$, *il existe un indice* j *tel que* $(y,\xi_{i,j}(y))$ *appartienne à cette composante connexe.*

Preuve. — On procède par récurrence sur p. Le cas $p = 1$ résulte du lemme 3.1. Supposons le lemme démontré à l'ordre p, et démontrons-le à l'ordre $p + 1$.

Soit X semi-algébrique dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{p+1}$ et soient Π_1 la projection $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{p+1} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ restreinte à X ; Π_2 la projection $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^n$; $\Pi = \Pi_2 \circ \Pi_1$.

Le lemme 3.1 associe à (X, Π_1) une partition de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ en ensembles semi-algébriques connexes localement fermés Z_j et des fonctions de Nash réelles $\alpha_{j,\ell}$ définies au voisinage de Z_j. L'hypothèse de récurrence permet d'associer à $(Z_j,\Pi_2|Z_j)$ une partition $\mathscr{P}_j$ de $\mathbf{R}^n$ en ensembles semi-algébriques localement fermés $W_{j,\nu}$ et des fonctions de Nash $\beta_{j,\nu,\mu}$ définies au voisinage de $W_{j,\nu}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^p$. Soit $\mathscr{P} = (Y_i)_{i\in I}$ une partition de $\mathbf{R}^n$ en ensembles semi-algébriques localement fermés, plus fine que chaque partition $\mathscr{P}_j$. Pour tout i, j, il existe donc un nombre fini de fonctions de Nash $\gamma_{i,j,k}$ définies au voisinage de Y_i et à valeurs dans $\mathbf{R}^p$, telles que :

a) $\forall y \in Y_i$, $(y,\gamma_{i,j,k}(y)) \in Z_j$.

b) Pour tout $y \in Y_i$ et toute composante connexe $\mathscr{C}'$ de la fibre

$\Pi_2^{-1}(y) \cap Z_j$, il existe un indice k avec $(y,\gamma_{i,j,k}(y)) \in \mathscr{C}'$. D'après le lemme 3.1, on a $\Pi_1^{-1}(Z_j) = \left(\bigcup_{\ell \in L_1} A_{j,\ell}\right) \cup \left(\bigcup_{\ell \in L_2} B_{j,\ell}\right)$ avec :

$$A_{j,\ell} = \{(z,t) \mid z \in Z_j, \alpha_{j,\ell}(z) < t < \alpha_{j,\ell+1}(z)\}.$$
$$B_{j,\ell} = \{(z,t) \mid z \in Z_j, t = \alpha_{j,\ell}(z)\}.$$

Soit $\xi_{i,j,k,\ell}$ la fonction de Nash à valeurs dans $\mathbf{R}^{p+1}$ et définie au voisinage de Y_i, par :

$$\xi_{i,j,k,\ell} = (\gamma_{i,j,k}, \frac{1}{2}(\alpha_{j,\ell} + \alpha_{j,\ell+1}) \circ (id, \gamma_{i,j,k})) \quad \text{si} \quad \ell \in L_1$$

et :

$$\xi_{i,j,k,\ell} = (\gamma_{i,j,k}, \alpha_{j,\ell} \circ (id, \gamma_{i,j,k})) \quad \text{si} \quad \ell \in L_2.$$

Vérifions que les Y_i et les $\xi_{i,j,k,\ell}$ (j est remplacé par (j,k,ℓ)) remplissent les conditions (i) et (ii). Pour (i), c'est évident. Pour (ii), soit $y \in Y_i$ et soit $\mathscr{C}$ une composante connexe de $\Pi^{-1}(y)$. Alors $\Pi_1(\mathscr{C})$ rencontre un Z_j, par exemple Z_1, donc aussi une composante connexe $\mathscr{C}'$ de $Z_1 \cap \Pi_2^{-1}(y)$. Chacun des $A_{1,\ell} \cap \Pi_1^{-1}(\mathscr{C}')$, $\ell \in L_1$, et $B_{1,\ell} \cap \Pi_1^{-1}(\mathscr{C}')$, $\ell \in L_2$, est connexe. Donc $\mathscr{C}$ qui rencontre l'un d'eux le contient. On a donc $\Pi_1(\mathscr{C}) \supset \mathscr{C}'$.

D'après *b*), il existe un indice k tel que $(y,\gamma_{i,1,k}(y)) \in \mathscr{C}'$. On a donc un $\xi_{i,1,k,\ell}$ tel que $(y,\xi_{i,1,k,\ell}(y)) \in \mathscr{C}$.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 3.3. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme propre et surjectif d'espaces localement semi-algébriques et soit* $y_0 \in Y$. *Il existe un voisinage ouvert* U *de* y_0 *dans* Y, *identifiable à un sous-ensemble localement fermé semi-algébrique d'un espace* $\mathbf{R}^n$; *un recouvrement de* $f^{-1}(U)$ *par un nombre fini d'ouverts* V_k *de* $f^{-1}(U)$, *chaque* V_k *étant identifiable à un sous-ensemble localement fermé semi-algébrique d'un espace* $\mathbf{R}^p$; *une partition finie* $(Y_i)_{i \in I}$ *d'un voisinage compact de* y_0 *dans* U *en ensembles semi-algébriques localement fermés; enfin, pour tout* i, *une suite de fonctions de Nash* $\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,j_i} : Y_i \to X$, *tels que :*

(i) $\forall i, j, f \circ \varphi_{i,j} = 1_{Y_i}$.

(ii) *L'adhérence* $\bar{X}_{i,j}$ *dans* X *de l'image* $X_{i,j}$ *de chaque* $\varphi_{i,j}$ *est contenue dans une carte* V_k; *en outre,* $\varphi_{i,j}$ *se prolonge en un morphisme de Nash* $\tilde{\varphi}_{i,j}$ *d'un voisinage ouvert semi-algébrique* U_i *de* Y_i *dans* $\mathbf{R}^n$, *dans l'espace euclidien* $\mathbf{R}^p$.

(iii) *Pour tout* i *et tout* $y \in Y_i$, *le morphisme :*

$$f_y^* : N_{Y,y} \to \prod_{j=1}^{j_i} N_{X,\varphi_{i,j}(y)} \quad \textit{est injectif.}$$

(iv) X *est globalement cohérent le long de chaque* $X_{i,j}$ *(cela a un sens, d'après* (ii)).

(v) *Chaque* Y_i *est globalement cohérent et régulier.*

(vi) Y *est globalement cohérent le long de chaque* Y_i *et* Y *est normalement plat le long de chaque* Y_i.

(vii) *On peut ordonner totalement l'ensemble d'indices* I *de telle sorte que pour tout* i, $Z_i = \bigcup_{\ell \leqslant i} Y_\ell$ *soit compact.*

Preuve. — D'après le théorème 2.4 et la propreté du morphisme f, il existe un voisinage ouvert U de y dans Y, un voisinage compact $K \subset U$ de y dans Y, tels que :

a) U est isomorphe à un sous-ensemble semi-algébrique et localement fermé d'un espace euclidien $\mathbf{R}^n$; cet isomorphisme transforme K en un compact semi-algébrique.

b) $f^{-1}(U)$ est la réunion d'un nombre fini d'ouverts V_k, chaque V_k étant isomorphe à un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé d'un espace euclidien $\mathbf{R}^p$.

c) $f^{-1}(K)$ est la réunion d'un nombre fini de compacts $W_k \subset V_k$, chaque W_k étant isomorphe (par l'isomorphisme de *b*)) à un compact semi-algébrique de $\mathbf{R}^p$.

d) Chaque W_k admet une partition finie en ensembles semi-algébriques localement fermés $W_{k,\ell}$, tels que X soit globalement cohérent et vérifie le principe du prolongement analytique le long de chaque $W_{k,\ell}$.

D'après le lemme 3.2, appliqué à graphe $(f|W_{k,\ell}) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, il existe une partition $\mathscr{P}_{k,\ell}$ de K en ensembles semi-algébriques localement fermés $Y_{k,\ell,\alpha}$ et des fonctions de Nash $\Psi_{k,\ell,\alpha,\beta} : Y_{k,\ell,\alpha} \to W_{k,\ell}$ telles que : $f \circ \Psi_{k,\ell,\alpha,\beta} =$ identité; si $y \in Y_{k,\ell,\alpha}$, pour toute composante connexe de $f^{-1}(y) \cap W_{k,\ell}$, il existe un indice β tel que $\Psi_{k,\ell,\alpha,\beta}(y)$ appartienne à cette composante connexe. Soit $\mathscr{P} = (Y_i)_{i \in I}$ une partition de K en ensembles semi-algébriques localement fermés, plus fine que toutes les partitions $\mathscr{P}_{k,\ell}$. Il existe donc des fonctions de Nash $\varphi_{i,k,\ell,\gamma} : Y_i \to W_{k,\ell}$

telles que :

e) $f \circ \varphi_{i,k,\ell,\gamma} = 1_{Y_i}$.

f) Si $y \in Y_i$, pour toute composante connexe de $f^{-1}(y) \cap W_{k,\ell}$, il existe un indice γ tel que $\varphi_{i,k,\ell,\gamma}(y)$ appartienne à cette composante connexe.

Pour i fixé, désignons par $\varphi_{i,j}$ la famille des $\varphi_{i,k,\ell,\gamma}$. Les conditions (i), (ii) et (iv) sont visiblement satisfaites (d'après 2.4, chaque $\varphi_{i,j}$ se prolonge en un morphisme de Nash $\tilde{\varphi}_{i,j}$ d'un voisinage ouvert U_i de Y_i dans $\mathbf{R}^n$, dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^p$, et d'après 4.2, on peut choisir U_i semi-algébrique). Vérifions (iii).

Soit $y \in Y_i$ et soit $\theta \in N_{Y,y}$ telle que $\theta \circ f$ soit nulle au voisinage de chaque point $\varphi_{i,j}(y)$ dans X. Soit $x \in f^{-1}(y)$; alors, $x \in W_{k,\ell}$ pour au moins un couple (k,ℓ), donc x appartient à une composante connexe $\mathscr{C}$ de $f^{-1}(y) \cap W_{k,\ell}$. Il existe alors un indice j et un chemin continu σ dans $\mathscr{C}$ joignant x à $\varphi_{i,j}(y)$ (d'après *f)*). X vérifiant le principe du prolongement analytique le long de $W_{k,\ell}$ (d'après *d)*), $\theta \circ f$ est donc nulle au voisinage de x. Ainsi $\theta \circ f = 0$, i.e. $\theta = 0$, puisque f est surjective.

Enfin, d'après la proposition 2.7, en affinant la partition $(Y_i)_{i \in I}$, on peut supposer que cette partition vérifie (v), (vi) et (vii).

3.4. *Conservons les hypothèses et notations du théorème* 3.3. — Tout morphisme de Nash vérifiant la condition de Gabrielov (cf. § 5), on a d'après (iii) :

(viii) *Le morphisme* $\hat{f}_y^* : \hat{N}_{Y,y} \to \prod_{j=1}^{j_i} \hat{N}_{X,\varphi_{i,j}(y)}$ *est injectif.*

On a aussi besoin d'un résultat assez voisin du précédent. Soit $I_{X,X_{i,j}}$ le faisceau d'idéaux de N_X formé des germes nuls sur $X_{i,j}$, et posons :

$$N^{(\mu)}_{X,\varphi_{i,j}(y)} = N_{X,\varphi_{i,j}(y)} / I^{\mu+1}_{X,X_{i,j},\varphi_{i,j}(y)}.$$

Soit $f_y^{*\mu} : N_{Y,y} \to \prod_{j=1}^{j_i} N^{(\mu)}_{X,\varphi_{i,j}(y)}$ le morphisme fini obtenu en composant f_y^* avec la projection canonique

$$\prod_{j=1}^{j_i} N_{X,\varphi_{i,j}(y)} \to \prod_{j=1}^{j_i} N^{(\mu)}_{X,\varphi_{i,j}(y)}.$$

Enfin, soit I_{Y,Y_i} le faisceau d'idéaux de N_Y formé des germes nuls sur Y_i.

Alors :

(ix) *Il existe une fonction* $\mu \to e(\mu)$ *de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{N}$ *telle que,* $\forall i \in \mathrm{I}$ *et* $\forall y \in \mathrm{Y}_i$, *on ait l'inclusion :* $\ker f_y^{*e(\mu)} \subset \mathrm{I}^{\mu+1}_{\mathrm{Y},\mathrm{Y}_i,y}$.

3.5. — Avant de démontrer (ix), nous allons décrire la situation en introduisant le graphe de f. Cette description sera utile au paragraphe 4.

Fixons les indices i et j. Soit k un indice tel que $\mathrm{V}_k \supset \mathrm{X}_{i,j}$ et considérons la restriction de f à V_k : $\mathbf{R}^p \supset \mathrm{V}_k \to \mathrm{U} \subset \mathbf{R}^n$. Identifiant V_k à l'image de graphe $f \mid \mathrm{V}_k$, image contenue dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, V_k s'identifie à à un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ et $f \mid \mathrm{V}_k$ s'identifie à $\Pi \mid \mathrm{V}_k$, Π projection de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ sur $\mathbf{R}^n$.

D'après (vi), il existe un idéal de type fini, soit $\mathscr{I}_i$, de $\mathrm{N}_{\mathbf{R}^n}(\mathrm{Y}_i)$ qui engendre $\mathrm{I}_{\mathbf{R}^n,\mathrm{Y},y}$ en tout point $y \in \mathrm{Y}_i$; d'après (v), il existe un idéal de type fini, soit $\mathscr{I}'_i$, de $\mathrm{N}_{\mathbf{R}^n}(\mathrm{Y}_i)$ qui engendre $\mathrm{I}_{\mathbf{R}^n,\mathrm{Y}_i,\mathrm{Y}}$ en tout point $y \in \mathrm{Y}_i$. De même, d'après (iv), il existe un idéal de type fini $\mathscr{I}_{i,j}$ de $\mathrm{N}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p}(\mathrm{X}_{i,j})$ qui engendre $\mathrm{I}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p,\mathrm{V}_\mathrm{K},(y,x)}$ en tout point $(y,x) \in \mathrm{X}_{i,j}$. Posons $\tilde{\varphi}_{i,j}(y) = (y,x_{i,j}(y))$ avec $x_{i,j} = (x^1_{i,j},\dots,x^p_{i,j})$: $\mathrm{X}_{i,j}$ est donc l'ensemble des couples $(y,x_{i,j}(y))$ avec $y \in \mathrm{Y}_i$.

Soit $\mathscr{I}'_{i,j}$ l'idéal de $\mathrm{N}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p}(\mathrm{X}_{i,j})$ engendré par

$$x_1 - x^1_{i,j}(y),\ \dots, x_p - x^p_{i,j}(y),$$

et les germes qui appartiennent à $\mathscr{I}'_i$; visiblement, pour tout $(y,x_{i,j}(y)) \in \mathrm{X}_{i,j}$, l'idéal $\mathrm{I}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p,\mathrm{X}_{i,j},(y,x_{i,j})}$ est engendré par $\mathscr{I}'_{i,j}$. On a un homomorphisme :

$$f^{*\mu} :\ \frac{\mathrm{N}_{\mathbf{R}^n}(\mathrm{Y}_i)}{\mathscr{I}_i} \to \prod_{j=1}^{j_i} \frac{\mathrm{N}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p}(\mathrm{X}_{i,j})}{\mathscr{I}_{i,j} + \mathscr{I}'^{\mu+1}_{i,j}}.$$

Ce morphisme est visiblement fini et induit en chaque point $y \in \mathrm{Y}_i$ par localisation le morphisme $f_y^{*\mu}$. D'après l'exactitude du foncteur localisation, $\ker f^{*\mu}$ induit en chaque point $y \in \mathrm{Y}_i$, $\ker f_y^{*\mu}$.

3.6. *Preuve de* (ix). — La démonstration, pour l'essentiel, a été reportée au paragraphe 5. Fixons un indice i et un entier $\mu \in \mathbf{N}$. D'après le paragraphe 5, pour tout $y \in \mathrm{Y}_i$, il existe un entier $e(\mu,y) \in \mathbf{N}$ tel que $\ker f_\mathrm{Y}^{*\,e(\mu,y)} \subset \mathrm{I}^{\mu+1}_{\mathrm{Y},\mathrm{Y}_i,y}$. Si $\nu \in \mathbf{N}$, d'après la remarque finale 3.5, l'ensemble $\mathrm{Z}_\nu = \{y \in \mathrm{Y}_i \mid \ker f_y^{*\nu} \not\subset \mathrm{I}^{\mu+1}_{\mathrm{Y},\mathrm{Y}_i,y}\}$ est un fermé de Zariski du spectre maximal, identifié à Y_i, de l'anneau noethérien $N_{\mathbf{R}^n}(Y_i)$; $Z_\nu \supset Z_{\nu+1} \supset \dots$ et $\bigcap_\nu Z_\nu = \emptyset$; donc il existe un entier $e(\mu)$ tel que $Z_{e(\mu)} = \emptyset$.

C.Q.F.D.

4. Démonstration du théorème 1.7.

Avant d'aborder la démonstration du théorème, rappelons quelques résultats démontrés par J. Merrien (cf. [7] et [8]) dans le cadre plus général des ensembles semi-analytiques et des fonctions Nash-analytiques.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$ *admettant un nombre fini de composantes connexes et soit* $\varphi \in N_{\mathbf{R}^n}(\Omega)$. *Alors il existe des constantes* $C > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que,* $\forall x \in \Omega$:

$$|\varphi(x)| \leqslant C\, d(x,\partial\Omega)^{-\alpha} \quad (\partial\Omega = \bar{\Omega}\backslash\Omega).$$

PROPOSITION 4.2. — *Soit* X *un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé de* $\mathbf{R}^n$ *et soit* $\varphi \in N_{\mathbf{R}^n}(X)$. *Alors il existe un voisinage ouvert semi-algébrique* Ω *de* X *et* $\dot{\varphi} \in N_{\mathbf{R}^n}(\Omega)$ *induisant* φ *sur* X.

Soit Y un sous-espace localement semi-algébrique d'un espace localement semi-algébrique X. On note $J_{X,Y}$ (resp. $J^\infty_{X,Y}$) le sous-faisceau d'idéaux de C^∞_X formé des germes nuls sur Y (resp. le sous-faisceau d'idéaux de C^∞_X formé des germes Ψ plats sur Y, i.e. $\hat{\Psi}_y = 0$ pour tout $y \in Y$).

THÉORÈME 4.3. — *Soit* X *un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé de* $\mathbf{R}^n$ *et soient* $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in N_{\mathbf{R}^n}(X)^s$. *Soit* $\Psi \in J^\infty_{\mathbf{R}^n,\partial X}(\mathbf{R}^n)^s$ *telle que* Ψ *appartienne ponctuellement sur* X *au module engendré par* $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ *(cela signifie qu'en tout point* $x \in X$, $\hat{\Psi}_x$ *appartient au module engendré par* $\varphi_{1,x}, \dots, \varphi_{r,x}$ *sur* $\hat{N}_{\mathbf{R}^n,x}$). *Alors :*

(i) *Il existe un voisinage ouvert semi-algébrique* Ω *de* X *dans* $\mathbf{R}^n\backslash\partial X$ *et* $\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_r \in N_{\mathbf{R}^n}(\Omega)^s$ *induisant* $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ *respectivement sur* X.

(ii) *Il existe* $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in J^\infty_{\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\backslash\Omega}(\mathbf{R}^n)$ *tels que* $\alpha_1\dot{\varphi}_1, \dots, \alpha_r\dot{\varphi}_r$ *définis sur* Ω *se prolongent en des fonctions* $\beta_1, \dots, \beta_r$ *respectivement, appartenant à* $J^\infty_{\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\backslash\Omega}(\mathbf{R}^n)^s$ *et vérifiant :*

$$\Psi - (\beta_1 + \cdots + \beta_r) \in J^\infty_{\mathbf{R}^n,X}(\mathbf{R}^n)^s.$$

On déduit facilement de 4.3 et de 2.4 le résultat suivant :

PROPOSITION 4.4. — *Soient* X, Y, $Y \subset X$, *deux sous-espaces fermés et localement semi-algébriques d'un espace localement semi-algébrique* Z. *Alors le morphisme de restriction :* $J^{\infty}_{Z,Y}(Z) \to J^{\infty}_{X,Y}(X)$ *est surjectif.*

Preuve. — Le résultat étant de nature locale, on se ramène immédiatement au cas où $Z = \mathbf{R}^n$ et X, Y sont deux ensembles semi-algébriques fermés de $\mathbf{R}^n$. Soit $y_0 \in Y$; d'après le théorème 2.4, il existe un voisinage compact V_{y_0} de y_0 dans $\mathbf{R}^n$ et une partition finie $(Y_i)_{i \in I}$ de $V_{y_0} \cap Y$ en ensembles semi-algébriques localement fermés tels que X soit globalement cohérent le long de chaque Y_i. Quitte à stratifier davantage, on peut ordonner totalement I de telle sorte que pour tout i, $Z_i = \bigcup_{j \leqslant i} Y_j$ soit fermé dans $\mathbf{R}^n$.

Soit $\Psi \in J^{\infty}_{X,Y}(X)$; montrons, par récurrence sur i, qu'il existe $\tilde{\Psi}_i \in J^{\infty}_{\mathbf{R}^n,Z_i}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\tilde{\Psi}_i$ induise Ψ sur X. Supposons-le démontré à l'ordre i et démontrons-le à l'ordre $i+1$. Appliquons le théorème 4.3 à l'ensemble semi-algébrique Y_{i+1} ; à $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in N_{\mathbf{R}^n}(Y_{i+1})$ qui engendrent en chaque point $y \in Y_{i+1}$, l'idéal $I_{\mathbf{R}^n,X,y}$; à $\tilde{\Psi}_i \in J^{\infty}_{\mathbf{R}^n,Z_i}(\mathbf{R}^n)$. Avec les notations de 4.3, on peut choisir Ω assez petit pour que $\Omega \cap Z_i = \varnothing$ et pour qu'en tout point $x \in \Omega$ et pour tout i, $\dot{\varphi}_{i,x} \in I_{\mathbf{R}^n,X,x}$. Visiblement, la fonction $\tilde{\Psi}_{i+1} = \tilde{\Psi}_i - (\beta_1 + \cdots + \beta_r)$ fournie par le théorème 4.3, appartient à $J^{\infty}_{\mathbf{R}^n,Z_{i+1}}(\mathbf{R}^n)$ et induit Ψ sur X. Ainsi, il existe $\tilde{\Psi} \in J^{\infty}_{\mathbf{R}^n,V_{y_0} \cap Y}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\tilde{\Psi} | X = \Psi$; d'où le résultat par partition de l'unité.

Preuve de 1.7. — Supposons le théorème démontré lorsque f est propre et surjectif et démontrons le théorème sous les hypothèses de 1.7. Soit Φ' : $f(X) \to \mathbf{R}$ l'unique fonction telle que $\varphi' \circ f = \Psi$. D'après la proposition 1.4, $f(X)$ est un sous-espace localement semi-algébrique de Y ; $f(X)$ étant fermé dans Y, le morphisme de restriction $C^{\infty}(Y) \to C^{\infty}(f(X))$ est surjectif (évident par partition de l'unité). Il suffit donc de montrer que $\Phi' \in C^{\infty}(f(X))$. Or soit $y \in f(X)$; le morphisme f étant semi-propre, il existe un compact K localement semi-algébrique de X tel que $f(K)$ soit un voisinage localement semi-algébrique de y dans $f(X)$. Ainsi $\Phi' | f(K) \in C^{\infty}(f(K))$, donc $\Phi' \in C^{\infty}(f(X))$. *Nous supposerons donc désormais que* f *est propre et surjectif et nous utiliserons les notations du théorème* 3.3 *et celles de* 3.5.

Avec les notations de 3.3, il suffit de trouver $\Phi \in C^{\infty}(Y)$ telle que

$\Psi = \Phi \circ f$ au voisinage de la fibre $f^{-1}(y_0)$: le théorème en résultera immédiatement par partition de l'unité sur Y. En fait, raisonnant par induction sur i, il suffit de montrer le résultat suivant :

4.5. — *Supposons que* Ψ *vérifie les hypothèses du théorème* 1.7 *et que* Ψ *est plate sur* $f^{-1}(Z_{i-1})$, *alors il existe* $\Phi \in C^\infty(U)$ *telle que* $\Psi - \Phi \circ f$ *soit plate sur* $f^{-1}(Z_i)$.

L'indice i est donc fixé dans tout ce qui suit. Fixons un indice j et soit V_k une carte contenant $\bar{X}_{i,j}$: V_k est plongé dans $\mathbf{R}^p$ et donc dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, en identifiant V_k au graphe $f|V_k$ (cf. 3.5). D'après la proposition 4.4, il existe $\Psi_j \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p)$ telle que Ψ_j soit plate sur $Z_{i-1} \times \mathbf{R}^p$ et $\Psi_j = \Psi$ au voisinage de $X_{i,j}$ dans X.

LEMME 4.6. — *Avec les notations précédentes, pour tout* $\omega \in \mathbf{N}^p$, *il existe une fonction* $\Psi_j^\omega \in J^\infty_{\mathbf{R}^n, Z_{i-1}}(\mathbf{R}^n)$ *telle que* $\Psi_j^\omega(y) = \dfrac{\partial^\omega \Psi_j}{\partial x^\omega}(y, x_{ij}(y))$ *au voisinage de* Y_i *dans* $\mathbf{R}^n$.

Ce lemme résulte du lemme suivant bien connu :

LEMME 4.7. — *Soient* A, B *deux compacts de* $\mathbf{R}^n$, $A \subset B$, *et soit* V *un voisinage ouvert de* $B\backslash A$ *tel que* $\mathbf{R}^n\backslash V$ *et* B *soient régulièrement situés. Soit* $\varphi \in C^\infty(V)$ *telle que*, $\forall \omega' \in \mathbf{N}^n$ *et* $\forall q \in \mathbf{N}$, $|D^{\omega'}\varphi(x)| . d(x, A)^{-q} \to 0$ *quand* $x \to A$, $x \in B\backslash A$. *Alors il existe* $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *telle que* $\tilde{\varphi} = \varphi$ *au voisinage de* $B\backslash A$ *et* $\tilde{\varphi}$ *soit plate sur* A.

Pour démontrer 4.6, appliquons 4.7 à $A = Z_{i-1}$, $B\backslash A = Y_i$, $V = U_i$ [cf. (ii) de 3.3] et $\varphi = \dfrac{\partial^\omega \Psi_j}{\partial x^\omega}(y, x_{i,j}(y))$ qui est C^∞ dans U_i. Deux fermés semi-algébriques étant toujours régulièrement situés (cf. [5]), il suffit de montrer que $|D^{\omega'}\varphi(y)| . d(y, Z_{i-1})^{-q} \to 0$ quand $y \in Y_i$, $y \to Z_{i-1}$. Or, $D^{\omega'}\varphi(y)$ est une combinaison linéaire à coefficients fonctions de Nash dans U_i de dérivées de Ψ_j prises au point $(y, x_{i,j}(y))$. Toutes ces dérivées étant plates sur $Z_{i-1} \times \mathbf{R}^p$, le lemme est une conséquence de la proposition 4.1 (avec $\Omega = U_i$).

Considérons alors l'homomorphisme $\tilde{f}^{*\mu}$:

$$\frac{C^\infty_{\mathbf{R}^n}(Y_i)}{\mathscr{I}_i . C^\infty_{\mathbf{R}^n}(Y_i)} \to \prod_{j=1}^{j_i} \frac{C^\infty_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p}(X_{i,j})}{(\mathscr{I}_{i,j} + \mathscr{I}'^{\,\mu+1}_{i,j}) . C^\infty_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p}(X_{i,j})},$$

déduit de $f^{*\mu}$ (cf. 3.5) par extension aux germes de fonctions C^∞. Ce morphisme est visiblement fini. Plus précisément, si $(\theta_j) \in \prod_{j=1}^{j_i} C^\infty_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p}(X_{i,j})$, cet élément est congru modulo $\prod_{j=1}^{j_i} \mathscr{I}'^{\mu+1}_{i,j} \cdot C^\infty_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p}(X_{i,j})$ à (θ'_j) avec

$$\theta'_j = \sum_{|\omega| \leqslant \mu} \frac{\partial^\omega \theta_j}{\partial x^\omega}(y, x_{i,j}(y))\,(x - x_{i,j}(y))^\omega$$

(formule de Taylor). L'application qui à (θ_j) associe la famille des $\dfrac{\partial^\omega \theta_j}{\partial x^\omega}(y, x_{i,j}(y))$, $|\omega| \leqslant \mu$ et $1 \leqslant j \leqslant j_i$, permet donc d'identifier le but de $\tilde{f}^{*\mu}$ à un quotient d'un module libre de type fini sur $C^\infty_{\mathbf{R}^n}(Y_i)$ par un sous-module engendré par un nombre fini de fonctions de Nash au voisinage de Y_i. Dans cette identification, la classe de (Ψ_j) s'identifie à la classe de (Ψ^ω_j), $1 \leqslant j \leqslant j_i$, $|\omega| \leqslant \mu$, et d'après 4.6, les Ψ^ω_j appartiennent à $J^\infty_{\mathbf{R}^n, Z_{i-1}}(\mathbf{R}^n)$. Les conditions $(\mathscr{C}_y)$ vérifiées par Ψ entraînent a fortiori les conditions d'appartenance ponctuelle de (Ψ^ω_j) à l'image de $\tilde{f}^{*\mu}$. D'après le théorème 4.3, il existe $\Gamma_\mu \in J^\infty_{\mathbf{R}^n, Z_{i-1}}(\mathbf{R}^n)$ telle que, si $\bar{\Gamma}_\mu$ désigne la classe de Γ_μ modulo $\mathscr{I}_i . C^\infty_{\mathbf{R}^n}(Y_i)$ et si Ψ_μ désigne la classe de (Ψ_j) dans l'image de $\tilde{f}^{*\mu}$, on ait l'égalité :

$$\tilde{f}^{*\mu}(\bar{\Gamma}_\mu) = \Psi_\mu .$$

Construisons par récurrence sur μ une suite $\Phi_\mu \in J^\infty_{\mathbf{R}^n, Z_{i-1}}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\tilde{f}^{*e(\mu)}(\bar{\Phi}_\mu) = \Psi_{e(\mu)}$ et $\Phi_\mu - \Phi_{\mu-1}$ soit $(\mu - 1)$-plate sur Y_i (la fonction $\mu \to e(\mu)$ est celle de (ix) 3.4). Supposons construites $\Phi_1, \ldots, \Phi_\mu$ vérifiant ces conditions et construisons $\Phi_{\mu+1}$. On a $\tilde{f}^{*e(\mu+1)}(\bar{\Gamma}_{e(\mu+1)}) = \Psi_{e(\mu+1)}$; donc

$$\tilde{f}^{*e(\mu)}(\bar{\Gamma}_{e(\mu+1)}) = \Psi_{e(\mu)} = \tilde{f}^{*e(\mu)}(\bar{\Phi}_\mu) ;$$

d'après 3.4 (ix), $\Gamma_{e(\mu+1)} - \Phi_\mu$ appartient ponctuellement sur Y_i à l'idéal engendré par $\mathscr{I}_i + \mathscr{I}'^{\mu+1}_i$. D'après le théorème 4.3,

$$\Gamma_{e(\mu+1)} - \Phi_\mu = P + Q$$

avec $P, Q \in J^\infty_{\mathbf{R}^n, Z_{i-1}}(\mathbf{R}^n)$, $P \in \mathscr{I}_i . C^\infty_{\mathbf{R}^n}(Y_i)$, $Q \in \mathscr{I}'^{\mu+1}_i . C^\infty_{\mathbf{R}^n}(Y_i)$. Il suffit de poser $\Phi_{\mu+1} = \Gamma_{e(\mu+1)} - P$.

Soit $\tilde{\Phi} \in J^\infty_{\mathbf{R}^n, Z_{i-1}}(\mathbf{R}^n)$ telle que pour tout μ, $\tilde{\Phi} - \Phi_\mu$ soit μ-plate sur Y_i et soit $\Phi \in C^\infty(U)$ la fonction induite par Φ. Alors

$\Psi' = \Psi - \Phi \circ f$ est plate sur $f^{-1}(Z_{i-1}) \cup \left(\bigcup_j X_{i,j}\right)$ et vérifie comme Ψ les conditions ponctuelles $(\mathscr{C}_y)$, $y \in Y_i$. Il existe donc $\Phi_y^* \in \hat{N}_{Y,y}$ telle que, $\forall x \in f^{-1}(y)$, $\hat{\Psi}'_x = \Phi_y^* \circ \hat{f}_x$; d'après (viii), cela implique $\Phi_y^* = 0$ et donc $\hat{\Psi}'_x = 0$ pour tout $x \in f^{-1}(y)$. Ainsi Ψ' est plate sur $f^{-1}(Z_i)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Appendice : fonctions ν-plates sur un sous-espace d'un espace analytique.

Par espace analytique (resp. germe d'espace analytique) nous entendrons toujours un espace analytique complexe *réduit* (resp. un germe analytique complexe *réduit*). Soit X un espace analytique et soit $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. Si Y est un sous-espace analytique de X, on note $\mathscr{I}_{X,Y}$ le faisceau d'idéaux sur X formé des germes de fonctions holomorphes nuls sur Y. Si Y est régulier, rappelons que X *est normalement plat le long de* Y si $\forall \nu \in \mathbf{N}$, le faisceau $(\mathscr{I}_{X,Y}^{\nu}/\mathscr{I}_{X,Y}^{\nu+1})\,|\,Y$ est localement libre sur $\mathcal{O}_Y(\mathcal{O}_X/\mathscr{I}_{X,Y})|Y$.

Soit U un ouvert de X et soit $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Nous dirons que f est ν-*plate sur* Y si, $\forall y \in U - Y, f_y \in m_{X,y}^{\nu+1}$ ($m_{X,y}$: idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,y}$). Les fonctions ν-plates forment un idéal $\mathscr{I}_{X,Y}^{(\nu+1)}(U)$ de $\mathcal{O}_X(U)$; soit $\mathscr{I}_{X,Y}^{(\nu+1)}$ le faisceau d'idéaux sur X ainsi associé.

LEMME 5.1. — *Supposons* Y *régulier et* X *normalement plat le long de* Y. *Alors*, $\forall \nu \in \mathbf{N}$,

$$\mathscr{I}_{X,Y}^{(\nu)}\,|\,Y = \mathscr{I}_{X,Y}^{\nu}\,|\,Y .$$

Preuve. — Visiblement, $\mathscr{I}_{X,Y}^{(\nu)}\,|\,Y \supset \mathscr{I}_{X,Y}^{\nu}\,|\,Y$. Démontrons l'inclusion inverse par récurrence sur ν. Posons pour simplifier

$$\mathscr{I}_{X,Y}^{(\nu)} = \mathscr{I}^{(\nu)} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{I}_{X,Y}^{\nu} = \mathscr{I}^{\nu}.$$

Supposons qu'au voisinage d'un point $y_0 \in Y$, on ait $\mathscr{I}^{(\nu)} = \mathscr{I}^{\nu}$ et soit $f \in \mathscr{I}_{y_0}^{(\nu+1)}$. Alors en tout point $y \in Y$ assez voisin de y_0, on a $\tilde{f}_y \in m_{X,y}^{\nu+1} \cap \mathscr{I}_y^{\nu} = m_{X,y}.\ \mathscr{I}_y^{\nu}$ (conséquence de la normale platitude, cf. par exemple [4]; on désigne par $\tilde{f}$ un représentant de f). Le faisceau $(\mathscr{I}^{\nu}/\mathscr{I}^{\nu+1})\,|\,Y$ étant localement libre sur Y, cela entraîne que $f \in \mathscr{I}_{y_0}^{\nu+1}$.

C.Q.F.D.

LEMME 5.2. — *Soit* Z *un sous-espace analytique fermé de* X *et soit* $\mathscr{I}$ *un faisceau d'idéaux analytique cohérent sur* X. *Si* $x \in X$, *notons* $\mathscr{J}_x$ *l'idéal de* $\mathcal{O}_{X,x}$ *formé des germes* f *tels que* $\tilde{f}_y \in \mathscr{I}_y$ *pour tout* $y \in X \backslash Z$ *assez voisin de* x. *Alors les* $\mathscr{J}_x$ *engendrent un faisceau cohérent d'idéaux* $\mathscr{J}$ *sur* X.

Preuve. — Il suffit de vérifier la cohérence de $\mathscr{J}$ en un point $z \in Z$. Soit U un voisinage ouvert de z dans X tel que $Z \cap U$ soit défini par des équations : $\delta_1 = 0, \ldots, \delta_s = 0$, $\delta_i \in \mathcal{O}_X(U)$. Pour tout $\mu \in \mathbf{N}$, soit $\mathscr{J}_\mu$ le faisceau d'idéaux sur U noyau de l'homomorphisme φ : $\mathcal{O}_U \to (\mathcal{O}_U/(\mathscr{I}\,|\,U))^s$ tel que si V est un ouvert de U et si $f \in \mathcal{O}_X(V)$:

$$\varphi_V(f) = (\delta_1^\mu . f \bmod \mathscr{I}(V), \ldots, \delta_s^\mu . f \bmod \mathscr{I}(V)).$$

La suite $\mathscr{J}_\mu$ est croissante et donc localement stationnaire. Visiblement, $\bigcup_{\mu=0}^{\infty} \mathscr{J}_\mu = \mathscr{J}\,|\,U$, donc $\mathscr{J}|U$ est cohérent.

PROPOSITION 5.3. — *Soit* Y *un sous-espace analytique de* X. *Alors pour tout* $\nu \in \mathbf{N}$, *le faisceau* $\mathscr{I}^{(\nu)}_{X,Y}$ *est cohérent au voisinage de* Y *dans* X.

Preuve. — Soit $y_0 \in Y$. Il existe un voisinage ouvert U de y_0 dans X et une suite de sous-espaces analytiques fermés de U : $\varnothing = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_s = U \cap Y$, telle que pour tout $i = 1, \ldots, s$, $X_i \backslash X_{i-1} = Y_i$ soit régulier et X soit normalement plat le long de Y_i (cf. [4]). Visiblement :

$$\mathscr{I}^{(\nu)}_{X,Y}|U = \bigcap_{i=1}^{s} \mathscr{I}^{(\nu)}_{X,Y_i}|U.$$

D'autre part, le faisceau $\mathscr{I}^{(\nu)}_{X,Y_i}\,|\,U$ est, d'après 5.1, le faisceau $\mathscr{J}$ associé par le lemme 5.2 au fermé $Z = X_{i-1}$ de U et au faisceau analytique cohérent dans U : $\mathscr{I} = \mathscr{I}^{\nu}_{X,X_i}|U$. D'après 5.2, $\mathscr{I}^{(\nu)}_{X,Y_i}|U$ est cohérent ; il en sera de même de $\mathscr{I}^{(\nu)}_{X,Y}|U$.

Soit A un sous-ensemble quelconque de X et soit $\nu \in \mathbf{N}$. Si U est un ouvert de X et si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, nous dirons que f *est* ν-*plate sur* A si, $\forall z \in A \cap U$, $f_z \in m^{\nu+1}$. Soit $\mathscr{I}^{(\nu+1)}_{X,A}$ le faisceau d'idéaux sur X formé des germes de fonctions ν-plates sur A.

Par la suite, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 5.4. — *Supposons que* X *est la réunion de sous-espaces analytiques fermés* $X_1, \ldots, X_s$. *Soit* A *un sous-ensemble de* X *et posons* $A_i = X_i \cap A$, $i = 1, \ldots, s$. *Enfin, soit* K *un compact de* X. *Alors il existe* $\nu_0 \in \mathbf{N}$ *tel que, si* U *est un ouvert de* X *contenu dans* K, *si* $\nu \in \mathbf{N}$ *et si* $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$ *est telle que pour* $i = 1, \ldots, s$, $\varphi | U \cap X_i$ *soit* $\nu + \nu_0$-*plate sur* $A_i \cap U$, *la fonction* φ *soit* ν-*plate sur* $A \cap U$.

Preuve. — Considérons l'injection canonique : $\mathcal{O}_X \to \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{X_i} = M$. D'après le théorème d'Artin-Rees pour les faisceaux analytiques cohérents, il existe un entier ν_0 tel que pour tout $x \in K$ et tout $\nu \in \mathbf{N}$:

$$m_{X,x}^{\nu} \supset (m_{X,x}^{\nu+\nu_0} . M_x) \cap \mathcal{O}_{X,x}$$

le lemme en résulte immédiatement.

Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques; soit $x \in X$ et soit $y = \varphi(x)$. Nous dirons que φ *est régulier en* x si le morphisme $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ vérifie la condition introduite par Gabrielov (cf. [2]). Si X est irréductible en x, cela signifie que la dimension de Krull de $\mathcal{O}_{Y,y}/\ker \varphi^*$ est égale au rang de φ en x (rang au point générique de l'application linéaire tangente à l'application composée $\operatorname{Reg} X_x \hookrightarrow X_x \xrightarrow{\varphi} Y_y \hookrightarrow (\mathbf{C}^p, 0))$. Si $X_1, \ldots, X_s$ sont les composantes irréductibles de X en x, φ sera dit régulier en x si $\varphi | X_i$, $i = 1, \ldots, s$, est régulier en x. Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 5.5. — *Soit* $\varphi : X \to Y$ *un morphisme d'espaces analytiques, soit* $y \in Y$ *et soient* $x_1, \ldots, x_q$ *des points distincts de la fibre* $\varphi^{-1}(y)$. *Soient* $A_1, \ldots, A_q$ *des fermés de* X *contenant* $x_1, \ldots, x_q$ *respectivement, tels que* $f | A_i$ *soit injective pour* $i = 1, \ldots, q$ *et tels que* $f(A_1) = \cdots = f(A_q) = B$. *Supposons* φ *régulier en chaque point* x_i *et supposons que l'homomorphisme* $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \prod_{i=1}^{q} \mathcal{O}_{X,x_i}$ *est injectif. Alors il existe une fonction* $\mathbf{N} \ni \nu \to e(\nu) \in \mathbf{N}$ *telle que la condition suivante soit satisfaite : si* $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ *est telle que* $f \circ \varphi$ *soit* $e(\nu)$-*plate sur chaque* A_i, *alors* f *est* ν-*plate sur* B.

Preuve. — Soit Y_i le germe d'espace analytique en $y \in Y$ associé à $\ker \varphi_i^*$, $\varphi_i^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x_i}$. Alors $Y_y = \bigcup_{i=1}^{q} Y_i$ et $B_y \subset Y_i$,

$i = 1, \ldots, q$. D'après 5.4, il suffit de démontrer le théorème pour $\varphi_i : X_{x_i} \to Y_i$ et A_i. On peut donc supposer $q = 1$; on posera $x_1 = x$, $A_1 = A$. Toujours d'après 5.4, on peut supposer X irréductible en x, Y irréductible en y. Enfin, soit $\tilde{B}$ le plus petit germe d'espace analytique en $y \in Y$ contenant B_y : on se ramène trivialement au cas où $\tilde{B}$ est irréductible. Nous démontrerons donc le théorème 5.5 sous ces hypothèses supplémentaires. Démontrons d'abord deux lemmes préliminaires :

LEMME 5.6. — *Le théorème est vrai lorsque* X_x *et* Y_y *sont réguliers.*

Preuve. — On peut supposer que X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, Y un ouvert de $\mathbf{C}^p$, et que $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ admet un jacobien, par exemple $\dfrac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)}{D(z_1,\ldots,z_p)}$ qui n'est pas ν_0-plat en tout point de X. Soit f analytique au voisinage de $b = \varphi(a) \in Y$ telle que $f \circ \varphi$ soit $1 + \nu_0 + \nu$-plate en $a \in X$. Résolvant le système :

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_i} \circ \varphi\right).\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j}(f \circ \varphi), \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

on voit que les $\dfrac{\partial f}{\partial \omega_i} \circ \varphi$ sont ν-plates en a. Par itération, on en déduit le résultat (la fonction $\nu \to e(\nu)$ est alors linéaire en ν; *je ne sais pas si cela est vrai en général*).

LEMME 5.7. — *Soit* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* $\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{A}$ *(supposé intègre). Alors il existe une fonction* $\mathbf{N} \ni \nu \to \beta(\nu) \in \mathbf{N}$ *vérifiant la condition suivante :*

Soient $f, g \in \mathcal{A}$ *tels qu'il existe* $\delta \in \mathcal{A}\backslash\mathfrak{q}$ *avec* $\delta.f.g \in \mathfrak{q}^{\beta(\nu)}$. *Alors il existe* $\delta' \in \mathcal{A}\backslash\mathfrak{q}$ *tel que* $\delta'.f \in \mathfrak{q}^{\nu+1}$ *ou* $\delta'' \in \mathcal{A}\backslash\mathfrak{q}$ *tel que* $\delta''.g \in \mathfrak{q}^{\nu+1}$.

Preuve. — Soit $\mathcal{F}_q = k[[X_1,\ldots,X_q]]$ un anneau de séries formelles à coefficients dans un corps commutatif k de caractéristique zéro, et soit π un idéal premier de $\mathcal{F}_q$. D'après le théorème de M. Artin sur les solutions d'un système d'équations analytiques, il existe une fonction $\mathbf{N} \ni \nu \to \beta(\nu) \in \mathbf{N}$ telle que, si $f, g \in \mathcal{F}_q$ et $f.g \in \pi \bmod m^{\beta(\nu)}$ (m : idéal maximal de $\mathcal{F}_q$), alors f ou g appartient à $\pi \bmod m^{\nu+1}$.

Posons $\mathcal{A} = \mathcal{O}_N|\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_N$ anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^N$, $\mathfrak{p}$ idéal premier de $\mathcal{O}_N$; alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}'|\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ idéal premier de hauteur q de $\mathcal{O}_N$. Soit $\mathcal{O}_{N,\mathfrak{p}'}$ le localisé de $\mathcal{O}_N$ par rapport à $\mathfrak{p}'$; alors son complété $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{N},\mathfrak{p}'}$ est isomorphe à $\mathscr{F}_q$ avec $k =$ corps des fractions de $\mathcal{O}_{\mathrm{N}}|\mathfrak{p}'$. Il suffit alors d'appliquer la remarque préliminaire à $\mathscr{F}_q$ et à l'idéal π de $\mathscr{F}_q$ engendré par $\mathfrak{p}$, pour obtenir le lemme.

Revenons à la démonstration du théorème 5.5, sous les hypothèses supplémentaires déjà signalées. Soit $\tilde{\mathrm{B}}$ le plus petit germe d'espace analytique en $y \in \mathrm{Y}$ contenant B_y (on suppose donc $\tilde{\mathrm{B}}$ irréductible) et soit $\mathfrak{q}$ l'idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ formé des germes nuls sur $\tilde{\mathrm{B}}$ (ou sur B). Il suffit de démontrer le résultat suivant :

5.8. — *Il existe une fonction* $\mathbf{N} \ni \nu \to e(\nu) \in \mathbf{N}$ *telle que la condition suivante soit satisfaite : si* $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ *est telle que* $f \circ \varphi$ *est* $e(\nu)$*-plate sur* A, *alors il existe* $\delta \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}\backslash\mathfrak{q}$ *telle que* $\delta . f \in \mathfrak{q}^{\nu+1}$.

En effet, cela entraînera l'existence d'un germe d'espace analytique $\mathrm{X}_\nu \subsetneq \tilde{\mathrm{B}}$, tel que f soit ν-plate sur $\tilde{\mathrm{B}}\backslash\mathrm{X}_\nu$. Le théorème en résultera, en raisonnant par récurrence sur la dimension du germe $\tilde{\mathrm{B}}$. Soit $\rho : \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ une désingularisation de X. Le morphisme $(\tilde{\mathrm{X}},\rho^{-1}(x)) \to (\mathrm{X},x)$ est surjectif. D'après le théorème de normalisation pour un germe d'espace analytique irréductible (on remplace Y par un voisinage convenable de y dans Y), on a un morphisme fini $\pi : (\mathrm{Y},y) \to (\mathbf{C}^p,0)$ (p étant la dimension de Y en y) vérifiant des conditions bien connues, entre autres : le morphisme $\pi^* : \mathcal{O}_p \to \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ est injectif et le corps des fractions de $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ est une extension algébrique finie r du corps des fractions de $\mathcal{O}_p$; enfin, tout $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ vérifie une équation de dépendance intégrale :

$$f^r + (a_{r-1} \circ \pi)f^{r-1} + \cdots + (a_0 \circ \pi) = 0, \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathcal{O}_p.$$

Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ telle que $f \circ \varphi$ soit μ-plate sur A et telle que f vérifie une relation :

$$\delta(f^s+(a_{s-1} \circ \pi)f^{s-1} + \cdots + (a_0 \circ \pi)) = h$$

avec $\delta \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}\backslash\mathfrak{q}$, $h \in \mathfrak{q}^{\mu+1}$ et $a_i \in \mathcal{O}_p$. Soit $\mathrm{V}(\delta)$ le germe des zéros de δ. Alors $(\delta \circ \varphi)(a_0 \circ \pi \circ \varphi)$ est μ-plate sur A et donc $(\delta \circ \varphi \circ \rho)(\pi \circ \varphi \circ \rho)^* a_0$ est μ-plat sur $\rho^{-1}(\mathrm{A})$. Le morphisme composé

$$\pi \circ \varphi \circ \rho : (\tilde{\mathrm{X}},\rho^{-1}(x)) \to (\mathbf{C}^p,0)$$

étant génériquement une submersion, a_0 est $\alpha(\mu)$-plat sur $\pi(\mathrm{B}\backslash\mathrm{V}(\delta))$, d'après 5.6 ($\alpha(\mu) \leqslant \mu$ et $\alpha(\mu) \to \infty$ quand $\mu \to \infty$); donc a_0 est $\alpha(\mu)$-plat sur $\pi(\widetilde{\mathrm{B}\backslash\mathrm{V}(\delta)})$, plus petit germe d'espace analytique à l'origine de $\mathbf{C}^p$ contenant $\pi(\mathrm{B}\backslash\mathrm{V}(\delta))$, et $a_0 \circ \pi$ est $\alpha(\mu)$-plat sur

$\pi^{-1}(\pi(\widetilde{\mathrm{B}\backslash\mathrm{V}(\delta)})) \supset \widetilde{\mathrm{B}\backslash\mathrm{V}(\delta)} = \tilde{\mathrm{B}}$. D'après 5.1 et le fait que l'ensemble des points de $\tilde{\mathrm{B}}$ en lesquels Y est normalement plat le long de $\tilde{\mathrm{B}}$ est un ouvert dense de $\tilde{\mathrm{B}}$, il existe $\delta' \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}\backslash\mathfrak{q}$ tel que $\delta'.(a_0 \circ \pi) \in \mathfrak{q}^{\alpha(\mu)+1}$. Ainsi :

$$\delta\delta' f(f^{s-1} + (a_{s-1} \circ \pi) f^{s-2} + \cdots + a_1 \circ \pi) \in \mathfrak{q}^{\alpha(\mu)+1}.$$

D'après le lemme 5.7, il existe $\delta'' \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}\backslash\mathfrak{q}$ tel que $\delta''.f \in \mathfrak{q}^{\beta(\alpha(\mu))+1}$ ou $\delta''' \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}\backslash\mathfrak{q}$ tel que

$$\delta'''(f^{s-1} + (a_{s-1} \circ \pi) f^{s-2} + \cdots + a_1 \circ \pi) \in \mathfrak{q}^{\beta(\alpha(\mu))+1}$$

$(\beta(\alpha(\mu)) \to \infty$ quand $\mu \to \infty)$. Dans la seconde alternative, on itère le procédé. Après r itérations au plus, l'affirmation 5.8 est démontrée.

COROLLAIRE 5.9. — *Avec les notations et hypothèses du théorème 5.5, supposons que le plus petit germe d'espace analytique* $\tilde{\mathrm{B}}$ *en* $y \in \mathrm{Y}$ *contenant* B *soit régulier et que* Y *soit normalement plat en* y *le long de* $\tilde{\mathrm{B}}$. *Soit* $\mathcal{I}_{\mathrm{Y,B},y}$ *l'idéal de* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ *formé des germes nuls sur* B. *Alors, si* $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ *est telle que* $f \circ \varphi$ *soit* $e(\nu)$*-plate sur chaque* A_i, $f \in \mathcal{I}_{\mathrm{Y,B},y}^{\nu+1}$.

Preuve. — D'après 5.5, f est ν-plate sur B ; ceci entraîne (procéder comme dans 5.1) que $f \in \mathcal{I}_{\mathrm{Y,B},y}^{\nu+1}$.

COROLLAIRE 5.10. — *Soit* $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme d'espaces analytiques; soit* $y \in \mathrm{Y}$ *et soient* $x_1, \ldots, x_q$ *des points distincts de la fibre* $\varphi^{-1}(y)$. *Supposons* φ *régulier en chaque point* x_i *et supposons que l'homomorphisme* $\varphi^* : \mathcal{O}_{\mathrm{Y},y} \to \prod_{i=1}^{q} \mathcal{O}_{\mathrm{X},x_i}$ *est injectif. Alors* $\varphi^* : \hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Y},y} \to \prod_{i=1}^{q} \hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{X},x_i}$ *est injectif.*

Preuve. — On applique 5.5 en choisissant : $\mathrm{A}_i = \{x_i\}$ et $\mathrm{B} = \{y\}$.

Remarques 5.11. — Tous les résultats de ce paragraphe sont encore vrais en analytique réel ou en localement algébrique réel. Rappelons enfin que tout morphisme de Nash est régulier, i.e. vérifie la condition de Gabrielov (cf. par exemple [13]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BIERSTONE et T. BLOMM, On the composition of C^{∞} functions with an analytic mapping, preprint.

[2] A. M. Gabrielov, Formal relations between analytic functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat., Tome 37, n° 5 (1973).
[3] G. Glaeser, Fonctions composées différentiables, *Ann. of Math.*, 77 (1963), 193-209.
[4] H. Hironaka, Résolution of singularities of an algebraic variety, I-II, *Ann. of Math* (1964), 109-326.
[5] S. Łojasiewicz, Ensembles semi-analytiques, n° A 66765, École Polytechnique, Paris (1965).
[6] D. Luna, Fonctions différentiables invariantes sous l'opération d'un groupe réductif, *Ann. Inst. Fourier*, 26, 1 (1976), 33-49.
[7] J. Merrien, Faisceaux analytiques semi-cohérents, *C.R.A.S.*, Paris, t 289 (1979), 791.
[8] J. Merrien, Applications des faisceaux analytiques semi-cohérents aux fonctions différentiables, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t 290 (1980).
[9] J. J. Risler, Sur l'anneau des fonctions de Nash globales, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 276 (1973), 1513.
[10] G. W. Schwarz, Smooth functions invariant under the action of compact lie group, *Topology*, 14 (1975), 63-68.
[11] J.-Cl. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables, Springer, Berlin (1972).
[12] J.-Cl. Tougeron, An extension of Whitney's spectral theorem, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, n° 40 (1971), 139-148.
[13] J.-Cl. Tougeron, Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications, *Ann. Inst. Fourier*, 26, 2 (1976), 117-131.
[14] J.-Cl. Tougeron, Fonctions composées différentiables : cas algébrique, *C.R.A.S.*, Paris, t. 230 (1980), 171.

Manuscrit reçu le 19 mai 1980.

J.-Cl. Tougeron,
Institut de Recherche Mathématique de Rennes,
Laboratoire Associé n° 305
Campus de Beaulieu
35042-Rennes Cedex.