ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARIE-NICOLE GRAS

Note à propos d'une conjecture de H.J. Godwin sur les unités des corps cubiques

Annales de l'institut Fourier, tome 30, n° 4 (1980), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_4_1_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 4 (1980), 1-6.

NOTE A PROPOS D'UNE CONJECTURE DE H. J. GODWIN SUR LES UNITÉS DES CORPS CUBIQUES

par Marie-Nicole GRAS

Nous démontrons, dans le cas particulier où le corps est cyclique, une conjecture sur les unités des corps cubiques totalement réels que H. J. Godwin a énoncée dans [2]. La démonstration repose sur les résultats de H. Brunotte et F. Halter-Koch ([1]) sur ce problème.

1. Énoncé de la conjecture et résultats connus.

Soit $K/\mathbf{Q}$ un corps cubique totalement réel. Soit $\alpha \in K^*$ et soient α' et α'' les conjugués de α; on pose

$$\mathscr{S}(\alpha) = \frac{1}{2}[(\alpha-\alpha')^2 + (\alpha'-\alpha'')^2 + (\alpha''-\alpha)^2].$$

Soit E le groupe des unités de norme 1 de K.

Dans [2], H. J. Godwin a énoncé la conjecture suivante :

Conjecture 1. — Soit $\varepsilon_1 \in E$, $\varepsilon_1 \neq 1$, telle que $\mathscr{S}(\varepsilon_1)$ soit minimum, soit $\varepsilon_2 \in E\backslash\{\varepsilon_1^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$ telle que $\mathscr{S}(\varepsilon_2)$ soit minimum; alors si $\mathscr{S}(\varepsilon_1) > 9$, ε_1 et ε_2 forment un système d'unités fondamentales de K.

Lorsque $K/\mathbf{Q}$ est cyclique de groupe de Galois G engendré par σ, la conjecture s'énonce :

Conjecture 2. — Soit $\varepsilon \in E$, $\varepsilon \neq 1$, telle que $\mathscr{S}(\varepsilon)$ soit minimum; alors si $\mathscr{S}(\varepsilon) > 9$, ε est un générateur du $\mathbf{Z}[G]$-module E (i.e. ε et ε^σ forment une $\mathbf{Z}$-base de E).

Dans [2], H. J. Godwin a partiellement démontré sa conjecture, et dans [1], H. Brunotte et F. Halter-Koch ont obtenu des résultats plus précis. Ils ont en particulier montré, dans le cas cyclique, le résultat suivant :

THEORÈME 1. — *Soit* $K/\mathbf{Q}$ *un corps cyclique de conducteur* m. *Soit* $\varepsilon \in E$, $\varepsilon \neq 1$, *telle que* $\mathcal{S}(\varepsilon)$ *soit minimum; soit* r *l'indice* $(E : \langle \varepsilon, \varepsilon^\sigma \rangle)$; *alors :*

a) *si* $m > 9$, *on a* $r = 1$ *ou* 3 ;

b) *on a* $r = 3$ *si et seulement s'il existe* $\eta \in E$ *telle que* $\varepsilon = \eta^{1-\sigma}$ (*auquel cas on peut choisir* η *telle que* $\mathcal{S}(\eta) < 3\mathcal{S}(\varepsilon)$) ;

c) *si* $m = 7$, *il existe une unité* ε *telle que*

$$\mathcal{S}(\varepsilon) = \mathcal{S}(\varepsilon^{-1}) = \mathcal{S}(\varepsilon^2) = \mathcal{S}(\varepsilon^{1-\sigma}) = 7 ;$$

d) *si* $m = 9$, *il existe une unité* ε *telle que*

$$\mathcal{S}(\varepsilon) = \mathcal{S}(\varepsilon^{-1}) = \mathcal{S}(\varepsilon^2) = 9 .$$

2. Démonstration de la conjecture de H. J. Godwin dans le cas des corps cubiques cycliques.

Nous démontrons le résultat suivant :

THEORÈME 2. — *Soit* $K/\mathbf{Q}$ *un corps cubique cyclique de conducteur* m, $m \neq 7, 9$; *soit* $\varepsilon \in E$, $\varepsilon \neq 1$, *telle que* $\mathcal{S}(\varepsilon)$ *soit minimum; alors* ε *est un générateur de* E.

Démonstration :

LEMME. — *Soit* $\eta \neq 1$ *une unité de norme* 1 *telle que*

$$|\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(\eta)| \leqslant |\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(\eta^{-1})| ;$$

alors si $m \neq 7$, *on a*

$$\mathcal{S}(\eta^{1-\sigma}) > \mathcal{S}(\eta) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\eta^{\sigma-1}) > \mathcal{S}(\eta) .$$

Le lemme entraîne le théorème : si ε n'est pas un générateur de E, d'après le théorème 1, *a*) et *b*), c'est qu'il existe $\eta \in E$, $\eta \neq 1$, telle que $\varepsilon = \eta^{1-\sigma}$; puisque $\mathcal{S}(\varepsilon)$ est minimum, on a $\mathcal{S}(\eta) \geqslant \mathcal{S}(\varepsilon)$, soit

$\mathscr{S}(\eta) \geqslant \mathscr{S}(\eta^{1-\sigma})$, et d'après le lemme, on a donc nécessairement $|\mathrm{Tr}_{K/Q}(\eta)| > |\mathrm{Tr}_{K/Q}(\eta^{-1})|$; en remplaçant η par η^{-1} qui vérifie les hypothèses du lemme, on obtient $\mathscr{S}((\eta^{-1})^{\sigma-1}) > \mathscr{S}(\eta^{-1})$, soit $\mathscr{S}(\varepsilon) > \mathscr{S}(\eta^{-1})$, et $\mathscr{S}(\varepsilon)$ n'est pas minimum ; il en résulte que ε est un générateur de E.

Démonstration du lemme. — On pose $\mathrm{Irr}(\eta,\mathbf{Q}) = X^3 - tX^2 + sX - 1$; on a alors $\mathscr{S}(\eta) = t^2 - 3s = m\gamma$, $\gamma \in \mathbf{N}^*$ (voir [5], p. 15). Soit Δ le discriminant de $X^3 - tX^2 + sX - 1$; on a

$$\Delta = s^2t^2 - 4t^3 - 4s^3 + 18\,st - 27\,;$$

on sait que $\Delta = (m\beta)^2$, $\beta \in \mathbf{Z}$, $\beta \neq 0$.

Soit $\psi = \eta^{1-\sigma}$ ou $\eta^{\sigma-1}$, de telle sorte que $\mathscr{S}(\psi) \leqslant \mathscr{S}(\psi^{-1})$; soit $\mathrm{Irr}(\psi,\mathbf{Q}) = X^3 - TX^2 + SX - 1$; alors $\mathscr{S}(\psi) = T^2 - 3S = m\Gamma$ et $\mathscr{S}(\psi^{-1}) = S^2 - 3T = m\Gamma'$, Γ, $\Gamma' \in \mathbf{N}^*$.

Des égalités $T + S = st - 3$ et $T - S = \pm\, m\beta$, on déduit que :

$$\begin{aligned} 2m\Gamma &= s^2t^2 - 2t^3 - 2s^3 + 3st - m\beta st,\\ 2m\Gamma' &= s^2t^2 - 2t^3 - 2s^3 + 3st + m\beta st, \end{aligned}$$

en choisissant le signe de β de telle sorte que $\beta st \geqslant 0$.

On a alors, en posant

$$h = s^2t^2 - 2t^3 - 2s^3 + 3st - 2t^2 + 6s\ :$$

$$2m(\Gamma - \gamma) = h - m\beta st$$

et

$$2m(\Gamma' - \gamma) = h + m\beta st.$$

Mais on a $h > 0$; en effet

$$h = \frac{1}{3}[s^2(t^2-3s)+t^2(s^2-3t)+(t^2-3s)(s^2-3t-6)]$$

et puisque $K/\mathbf{Q}$ est cyclique $t^2 - 3s \geqslant 7$ et $s^2 - 3t \geqslant 7$.

On a donc, d'une part, $\Gamma' > \gamma$, et, d'autre part, on a $\Gamma > \gamma$ si et seulement si $f = h^2 - s^2t^2\,\Delta > 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f = t^6 + s^6 - s^3t^3 - s^2t^4 + 2t^5 + 5s^3t^2 - 3st^4 - 3s^4t + t^4 &\\ + 9s^2t^2 - 9st^3 - 6s^4 + 9s^2t - 6st^2 + 9s^2 &> 0. \end{aligned}$$

Pour démontrer le lemme, on étudie le signe de f lorsque $|t| \leqslant |s|$.

Lorsque $st \geqslant 0$, on fait le changement de variable $s = t + x$ (x est entier); on obtient :

$$f = (x+1)t^5 + (11x^2-5)t^4 + (19x^3-3x^2-15x+3)t^3 \\ + (15x^4-7x^3-27x^2+12x+9)t^2 + (6x^5-3x^4-24x^3+9x^2+18x)t \\ + (x^6-6x^4+9x^2).$$

Si $x = 0$, alors $s = t$ et on a $f = (t+1)t^2(t-3)^2$, d'où le signe de f.

Si $x \geqslant 1$, alors $t \geqslant 0$ et $s > 0$; on vérifie que les coefficients des t^i sont tous positifs.

Si $x \leqslant -1$, alors $t \leqslant 0$ et $s < 0$:

(i) si $x = -1$, alors

$$f = 6t^4 - 4t^3 - 8t^2 + 6t + 4 = 2(t+1)(3t^3-5t^2+t+2);$$

on en déduit que $f(0) > 0$, $f(-1) = 0$ et que $f(t) > 0$ si $t \leqslant -2$.

(ii) si $x \leqslant -2$, on vérifie que les coefficients des $(-t)^i$ sont tous positifs.

Lorsque $st < 0$, on fait le changement de variable $s = -t+y$ (y est entier); on obtient :

$$f = 2t^6 - (7y+3)t^5 + (17y^2+24y+13)t^4 - (21y^3+33y^2+3y-15)t^3 \\ + (15y^4+17y^3-27y^2-24y+9)t^2 - (6y^5+3y^4-24y^3-9y^2+18y)t \\ + (y^6-6y^4+9y^2).$$

Si $y = 0$, alors $s = -t$, on a $f = t^2(2t^4-3t^3+13t^2+15t+9)$; alors $f(1) > 0$ et $f(t) > 0$ si $t \geqslant 2$ ou $t \leqslant -1$.

Si $y \geqslant 1$, alors $t < 0$ et $s > 0$:

(i) si $y = 1$, alors $f = 2t^6 - 10t^5 + 54t^4 - 42t^3 - 10t^2 + 6t+4$; on a $f > 0$ si $t \leqslant -1$.

(ii) Si $y \geqslant 2$, on vérifie que les coefficients des $(-t)^i$ sont tous positifs.

Si $y \leqslant -1$, alors $t > 0$ et $s < 0$; on vérifie que les coefficients des t^i sont tous positifs.

Nous avons donc montré que, si $|t| \leqslant |s|$, et si t et s sont entiers, on a :

$f < 0$ si et seulement si $t = s$, $t \leqslant -2$;

$f = 0$ si et seulement si $(t,s) \in \{(-1,-1), (0,0), (3,3), (-1,-2)\}$.

On vérifie que ces ensembles de valeurs de s et t, Δ n'est pas un carré, (si $s=t$, alors $\Delta=(t+1)(t-3)^3$) sauf pour $t=-1$, $s=-2$ qui donne le corps cyclique de conducteur $m=7$. Le lemme est donc démontré.

3. Remarques et exemples.

Remarque 1. — Le lemme peut être faux si $|\mathrm{Tr}_{K/Q}(\eta)| > |\mathrm{Tr}_{K/Q}(\eta^{-1})|$:

Exemple 1. — Soit $K = \mathbf{Q}(\varepsilon_0)$, où

$$\mathrm{Irr}\,(\varepsilon_0,\mathbf{Q}) = X^3 - t_0X - (t_0+3)X - 1,$$

$t_0 \in \mathbf{Z}$, $t_0 \geqslant -1$; K est une extension cubique cyclique de $\mathbf{Q}$, et ce procédé permet d'en obtenir une infinité, ([4]); on a alors

$$\mathscr{S}(\varepsilon_0) = t_0^2 + 3t_0 + 9 = m\gamma_0.$$

Considérons l'unité $\eta = \varepsilon_0^{-2}$; alors

$$t = t_0^2 + 4t_0 + 9 = m\gamma_0 + t_0,\quad s = t_0^2 + 2t_0 + 6 = m\gamma_0 - t_0 - 3,$$
$$T = 2m\gamma_0 + 3,\qquad S = (m\gamma_0)^2 - 6m\gamma_0 + 3;$$

d'où

$$t^2 - 3s = m\gamma_0(t_0^2+5t_0+7) \qquad \text{et} \qquad T^2 - 3S = m\gamma_0(t_0^2+3t_0+39);$$

si $t_0 \geqslant 16$, on a donc $\mathscr{S}(\eta^{1-\sigma}) \leqslant \mathscr{S}(\eta)$.

Exemple 2. — Soit $K = \mathbf{Q}(\eta)$, où $\mathrm{Irr}\,(\eta,\mathbf{Q}) = X^3 - tX^2 + sX - 1$, avec $t = -3\,748\,429\,729$ et $s = -3\,446\,597\,729$; alors (cf [3]), K est une extension cyclique de $\mathbf{Q}$, de conducteur $m = 1\,351$ et η est un générateur de E. On a

$$\begin{aligned}\Delta &= (9\,562\,790\,085\,698\,752m)^2,\\ T &= -7\,245\,764\,257,\\ S &= 12\,919\,329\,398\,533\,249\,695,\\ t^2 - 3s &= 10\,400\,240\,890\,888\,828m,\\ T^2 - 3S &= 10\,172\,547\,351\,901\,564m,\end{aligned}$$

alors que $s^2 - 3t = 8\,792\,772\,699\,328\,828m$.

Remarque 2. — Dans [5], H. Hasse a démontré le résultat suivant : soit $K/\mathbf{Q}$ un corps cubique cyclique de conducteur m; soit E le groupe des unités de norme 1 de K. Un générateur ε de E est une unité ε, $\varepsilon \neq 1$, telle que $\mathrm{Tr}_{K/Q}(\varepsilon^2)$ soit minimum. Or si $\mathrm{Irr}(\varepsilon,\mathbf{Q}) = X^3 - tX^2 + sX - 1$, et si $t^2 - 3s = m\gamma$, on a $\mathrm{Tr}_{K/Q}(\varepsilon^2) = \dfrac{t^2 + 2m\gamma}{3}$. Pour déterminer un générateur de E, l'algorithme de H. Hasse ([5]) est le suivant :

1re *étape :* trouver une unité ε_0

$$(\mathrm{Irr}(\varepsilon_0,\mathbf{Q}) = X^3 - t_0X^2 + s_0X - 1,\ t_0^2 - 3s_0 = m\gamma_0)$$

telle que γ_0 (puis $|t_0|$) soit minimum.

2^e *étape :* chercher s'il existe une unité ε telle que $\gamma > \gamma_0$ et $t^2 + 2m\gamma < t_0^2 + 2m\gamma_0$.

Le théorème 2 montre que l'algorithme de H. Hasse se réduit à la seule première étape.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Brunotte, F. Halter-Koch, Zur Einheitenberechnung in totalreellen kubischen Zahlkörpern nach Godwin, *Journal of Number Theory*, 11, fasc. 4(1979), 552-559.

[2] H. J. Godwin, The determination of units in totally real cubic fields, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 56 (1960), 318-321.

[3] M. N. Gras, Méthodes et algorithmes pour le calcul numérique du nombre de classes et des unités des extensions cubiques cycliques de $\mathbf{Q}$, *J. Reine Angew. Math.*, 277 (1975), 89-116.

[4] M. N. Gras, Sur les corps cubiques dont l'anneau des entiers est monogène, *Ann. Scient. Univ. Besançon*, fasc. 6 (1973), 1-26.

[5] H. Hasse, Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörpern, *Abhandlungen der Deutscher Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, n° 2 (1948), 1-95.

Manuscrit reçu le 9 mai 1980.

Marie-Nicole Gras,

(Equipe de Recherche
associée au C.N.R.S. n° 070654)
Faculté des Sciences
Mathématiques
25030 Besançon cedex.