ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE BÉRARD

GÉRARD BESSON

Spectres et groupes cristallographiques. II : domaines sphériques

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 3 (1980), p. 237-248

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_237_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 3 (1980), 237-248

SPECTRES ET GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES II : DOMAINES SPHÉRIQUES

par P. BÉRARD et G. BESSON

A. Introduction.

Le but de ce travail est de donner une description du spectre du laplacien pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann dans certains domaines sphériques. Ces domaines sont obtenus comme intersection de $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ avec $C(R) \times \mathbf{R}^{n-\ell}$ où $C(R)$ est une chambre de Weyl d'un système de racines de rang ℓ.

Le paragraphe B est consacré à l'énoncé et à la démonstration des résultats principaux. L'idée de base est celle utilisée dans [1].

Le paragraphe C est consacré à l'exposé d'une méthode pratique de détermination des valeurs propres et de leurs multiplicités pour les domaines considérés.

Le paragraphe D est consacré à l'étude d'un cas particulier, le paragraphe E à des remarques sur une conjecture de Weyl.

Notons que peu d'exemples de domaines pour lesquels le spectre est entièrement calculable, sont connus. En dimension 2, par exemple, seuls les spectres des disques, des rectangles, de l'intérieur d'une ellipse et de trois types de triangles (voir [1]) entrent dans cette catégorie. Le travail qui suit fournit une liste d'exemples simples en toute dimension.

B. Etude du spectre des domaines sphériques.

1. Soit R un système de racines réduit (cela ne diminue pas la généralité) de rang ℓ. Soit $C(R) \subset \mathbf{R}^\ell$ une chambre de R. On

désigne par $D = D(R, n)$ le domaine ouvert de $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ obtenu comme intersection de la sphère canonique S^{n-1} avec $C(R) \times \mathbf{R}^{n-\ell}$. On désigne par $W = W(R, n)$ le groupe $W(R) \times \{\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^{n-\ell}}\}$ qui opère par $W(R)$ sur $\mathbf{R}^\ell$ et trivialement sur $\mathbf{R}^{n-\ell}$.

On considère les deux problèmes suivants :

Problème de Dirichlet :

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta f = \lambda f & \text{dans } D \\ f = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

et

Problème de Neumann :

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta f = \lambda f & \text{dans } D \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial D, \text{ p.p. (i.e. où la normale extérieur } \nu \text{ existe).} \end{cases}$$

4. *Remarque.* – Pour simplifier les notations, nous noterons Δ le laplacien (positif) de S^{n-1} et de $\mathbf{R}^n$, le contexte indiquera toujours clairement quel opérateur est en jeu.

5. Etant donnée une fonction f qui vérifie (2) (resp. (3)), on l'étend en une fonction $\tilde{f}$ sur S^{n-1} telle que $f = \tilde{f}$ sur D et

(6) $\tilde{f}(w(x)) = \epsilon(w)\, \tilde{f}(x)$ pour tout x dans S^{n-1} et tout w dans W.

On a posé $\epsilon(w) = \mathrm{Det}(w)$ (resp. 1) quand f est solution de (2) (resp. (3)).

Un argument facile de réflexion montre que $\tilde{f}$ est C^∞ sauf peut-être sur un sous-ensemble de S^{n-1} de codimension supérieure ou égale à 2.

On montre facilement par l'argument donné dans [1] (cf. [1] Lemme B.8 et le n° 2 du § F) que la fonction $\tilde{f}$ est en fait dans $C^\infty(S^{n-1})$. D'autre part, il est clair que l'on a $\Delta\tilde{f} = \lambda\tilde{f}$.

7. Proposition. – *Soit f une fonction sur D qui vérifie (2) (resp. (3)). Alors la fonction $\tilde{f}$, définie, par (6), et qui étend f est C^∞ sur S^{n-1} et c'est une fonction propre de Δ sur S^{n-1}. Réciproquement, si une fonction propre de S^{n-1} vérifie (6), alors sa restriction à D est une fonction propre de Δ sur D pour l'un des problèmes Dirichlet ou Neumann (selon la valeur de $\epsilon(w)$).*

8. *Remarque.* – On a utilisé implicitement, et de façon essentielle, le fait que le groupe W(R) agit de façon simplement transitive sur l'ensemble des chambres.

9. On peut aussi donner une preuve «algèbrique» du fait que les fonctions qui vérifient (2) ou (3) sont exactement les fonctions propres de S^{n-1} qui vérifient (6) (comparer avec [1] § B). Il suffit pour cela de montrer que les fonctions propres de D qui proviennent de fonctions propres de S^{n-1} forment un système complet. Soit f_1 une fonction de $C_0^\infty(D)$, et soit f la fonction de S^{n-1} qui étend f_1 via la formule (6). Alors, f est visiblement C^∞, elle admet donc un «bon» développement en harmoniques sphériques

$$f = \Sigma\, a_j(f) h_j\,, \quad \text{avec} \quad a_j(f) = \int_{S^{n-1}} f\,.\,h_j\,.$$

On peut alors écrire (avec $\epsilon(w)$ comme dans (6))

$f = (\text{Card W})^{-1}\, \Sigma\, \epsilon(w)\, f \circ w$ (où Card W est l'ordre de W), d'où

$f = (\text{Card W})^{-1}\, \Sigma\, \epsilon(w)\, \Sigma\, a_j(f)\, h_j \circ w = \Sigma\, a_j(f)\, H_j$, où on a posé

$H_j = (\text{Card W})^{-1}\, \Sigma\, \epsilon(w)\, h_j \circ w$ (les sommations se font sur W(R) et $\mathbf{N}$).

On vérifie alors facilement que

$$f_1 = \Sigma\, a_j(f_1)\, H_j \quad \text{avec} \quad a_j(f_1) = \text{Card W} \int_D f_1\,.\,H_j\,.$$

Si les H_j ne formaient pas un système complet on trouverait une fonction propre de Δ sur D orthogonale à l'espace engendré par les H_j donc à $C_0^\infty(D)$, ce qui n'est pas possible.

10. Il est classique (cf. [2]) que les fonctions propres de la sphère sont les restrictions à la sphère des polynômes homogènes harmoniques de $\mathbf{R}^n$.

Désignons par $H_k^\cdot(n)$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré k dans $\mathbf{R}^n$ qui sont harmoniques et qui vérifient (6). On posera $H_k^\cdot(n) = H_k^a(n)$ (resp. $H_k^i(n)$) quand $\epsilon(w) = \text{Det}(w)$ (resp. 1) i.e. quand on travaillera pour le problème de Dirichlet (resp. Neumann). On désigne par $H_k(n)$ l'ensemble des polynômes harmoniques homogènes de degré k et par $P_k(n)$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré k de $\mathbf{R}^n$. De même on pose $P_k^\cdot(n)$, $P_k^a(n)$ et $P_k^i(n)$.

11. LEMME. — *Soit* $F : P^{\cdot}_k(n) \longrightarrow P^{\cdot}_{k-2}(n)$ *l'application qui à* P *associe* $F(P) = \Delta P$. *Alors,* F *est surjective, et son noyau est* $H^{\cdot}_k(n)$.

Preuve. — Soit Q dans $P^{\cdot}_{k-2}(n)$. On sait, d'après [9], qu'il existe P′ dans $P_k(n)$ tel que $F(P') = Q$. Soit

$$P = (\mathrm{Card}\, W)^{-1} \Sigma\, \epsilon(w) P' \circ w .$$

Alors, on a $F(P) = Q$, donc F est surjective. Il est clair que l'on a $\mathrm{Ker}(F) = H_k(n) \cap P^{\cdot}_k(n) = H^{\cdot}_k(n)$ (car $H_k(n)$ est le noyau de l'application de $P_k(n)$ dans $P_{k-2}(n)$ qui à un polynôme associe son laplacien).

12. Posons : $\dim P^{\cdot}_k(n) = p^{\cdot}_k(n)$ et $\dim H^{\cdot}_k(n) = h^{\cdot}_k(n)$, alors on a $h^{\cdot}_k(n) = p^{\cdot}_k(n) - p^{\cdot}_{k-2}(n)$.

Si nous appliquons maintenant les résultats qui précédent nous avons

13. LEMME. — *Le nombre* $v_k = k(k+n-2)$, *valeur propre de* S^{n-1}, *est une valeur propre du laplacien pour le problème (2) (resp. (3)) si* $h^a_k(n) \neq 0$ *(resp.* $h^i_k(n) \neq 0$). *On a alors* $\mathrm{mult}(v_k) = h^a_k(n)$ *(resp.* $h^i_k(n)$).

14. *Remarque.* — On n'a pas toujours, a priori, $h^{\cdot}_k(n) \neq 0$ comme le montrera la suite de l'article.

C. Méthode pratique de détermination du spectre.

1. Dans ce paragraphe nous nous proposons de donner une méthode de détermination du spectre du domaine $D = D(\mathbf{R}, \ell)$.

Soit W le groupe de Weyl d'un système de racines de rang ℓ réduit irréductible. On désigne par P l'algèbre graduée des polynômes sur $\mathbf{R}^\ell$, P^a (resp. P^i) celle des polynômes anti-invariants (resp. invariants).

$$P = \bigoplus_{k \geqslant 0} P_k(\ell)$$

$$P^{\cdot} = \bigoplus_{k \geqslant 0} P^{\cdot}_k(\ell) \quad (\text{avec } \cdot = a, i).$$

Enfin notons S(T) (resp. $S_{\cdot}(T)$) la série de Poincaré de P (resp. $P^{\cdot}$) (cf. [3]) p. 103).

$$S_{\cdot}(T) = \sum_{k \geqslant 0} \dim(P^{\cdot}_k(\ell))\, T^k = \sum_{k \geqslant 0} p^{\cdot}_k(\ell)\, T^k .$$

Problème de Neumann. Nous montrons ici :

2. PROPOSITION. – *Soit* $F_i(T) = \sum_{k \geqslant 0} h^i_k(\ell)\, T^k$, *où* $h^i_k(\ell) = \dim H^i_k(\ell)$ *alors*

$$F_i(T) = \frac{1 - T^2}{\prod_{j=1}^{\ell} (1 - T^{m_j+1})}$$

où les (m_j) *sont les exposants du groupe* W.

Preuve. – D'après le paragraphe B :

$$h^i_k(\ell) = p^i_k(\ell) - p^i_{k-2}(\ell)$$

$$p_{-1}(\ell) = p_{-2}(\ell) = 0 ,$$

d'où

$$F_i(T) = \sum_{k \geqslant 0} h^i_k(\ell)\, T^k = \sum_{k \geqslant 0} p^i_k(\ell)\, T^k - \sum_{k \geqslant 0} p^i_{k-2}(\ell)\, T^k$$

$$F_i(T) = (1 - T^2) \sum_{k \geqslant 0} p^i_k(\ell)\, T^k = (1 - T^2)\, S_i(T) .$$

D'après [3] chap. V, § 5, n° 1 (p. 103) et chap. V § 5, n° 3 (p. 107 th. 3)

$$S_i(T) = \prod_{j=1}^{\ell} (1 - T^{k_j})^{-1}$$

où k_j désigne le degré d'un élément α_j de P^i, tel que le système $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ formé d'éléments homogènes algébriquement indépendants soit minimal dans l'ensemble des systèmes générateurs de P^i.

Enfin la proposition 3 de [3] chap. V, § 6.2, (p. 121) montre que : $k_i = m_i + 1$. Donc d'après le § B, les valeurs propres de D pour le problème de Neumann sont exactement les $k(k + \ell - 2)$ tels que $h^i_k(\ell)$ soit non nul, c'est-à-dire tels que le coefficient de T_k dans le développement en série de $\dfrac{1 - T^2}{\prod_{j=1}^{\ell} (1 - T^{m_j+1})}$ soit non nul, ce nombre étant la multiplicité de la valeur propre ainsi définie.

Problème de Dirichlet

Rappelons qu'un élément Q de P est dit anti-invariant sous l'action de W si pour tout w dans W, on a :

$$w.Q = \epsilon(w)\, Q \ (\text{où} \ \ \epsilon(w) = \mathrm{Det}(w), \ \text{ et } \ w.Q = Q \circ w^{-1}).$$

Nous montrons :

3. PROPOSITION. – *Soit* s_a *la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à la racine* $a \in R$. *Soit* g_a *une équation de cet hyperplan, fixée une fois pour toutes. Posons* $e = \Pi\, g_a$ *(produit sur toutes les équations d'hyperplans orthogonaux à une racine* a *de* R). *Alors, on a* $e \in P^a(\ell)$, *où* $d = \dfrac{\mathrm{card}\,(R)}{2}$. *Etant donné un polynôme de* P^a, *on peut trouver un unique* Q_1 *de* P^i *tel que* $Q = e\, Q_1$.

Preuve. – Nous nous inspirons du chapitre 4 de [8] (qui traite un cas plus général).

Remarquons en premier lieu, qu'il suffit d'étudier le comportement de Q sous l'action de l'ensemble $\{s_a : a \text{ dans } R\}$ qui engendre W. Rappelons aussi, que les seules réflexions de W sont les s_a pour a dans R (voir [3]). On vérifie facilement que e est anti-invariant, en effet pour tout a dans R on a $s_a e = -e$. Soit donc Q un élément anti-invariant de S : on a $s_a.Q = -Q$, pour tout a dans R. Remarquons que $(s_a.Q - Q)(x) = 0$ pour tout x tel que $s_a(x) = x$. On en déduit alors que g_a divise $s_a Q - Q$ (e.g. en faisant une division euclidienne par rapport à une variable privilégiée). On a alors : $s_a Q = Q + g_a G$ et comme $s_a Q = -Q$, on en déduit que g_a divise Q. Comme W est transitif sur R on en déduit que e divise Q, d'où l'écriture $Q = e\, Q_1$, où l'on a visiblement Q_1 dans P^i.

Remarque. – Dans [8] chap. 4, on trouvera un résultat plus général concernant des groupes engendrés par des réflexions. Notre proposition 3 est un cas particulier du théorème 4.3.4. p. 85 de [8].

Nous montrons alors :

4. PROPOSITION. – *Soit* $F_a(T) = \sum_{k \geq 0} h_k^a(\ell)\, T^k$, *où* $h_k^a(\ell) = \dim H_k^a(\ell)$ *alors*

$$F_a(T) = \frac{(1 - T^2)\, T^d}{\prod_{j=1}^{\ell} (1 - T)^{m_j + 1}} \quad \text{où } d = \frac{1}{2}\, \mathrm{Card}(R).$$

Preuve. – D'après la proposition précédente $p_k^a(\ell) = p_{k-d}^i(\ell)$ où $p_k^{\cdot}(\ell) = 0$ si $k < 0$, d'où

$$F_a(T) = \sum_{k \geq 0} h_k^a(\ell)\, T^k = (1 - T^2) \sum_{k \geq 0} p_k^a(\ell)\, T^k$$

$$F_a(T) = (1 - T^2)\, T^d \sum_{k \geq 0} p_k^i(\ell)\, T^k \; ;$$

d'où le résultat annoncé.

5. *Remarque.* – Si R n'est pas irréductible, il est alors réunion d'une famille $(R_j)_{j \in I}$ de systèmes de racines irréductibles (cf. [3] p. 146, Prop. 6 ch. VI, § 1, n° 2). De plus : $W(R) = \prod_{j \in I} W(R_j)$.

Si V_j désigne l'espace vectoriel engendré par R_j et $P(V_j)$ l'algèbre de polynômes sur V_j, alors :

$$\mathbf{R}^\ell = V = \bigoplus_{j \in I} V_j \qquad P(V) = \bigotimes_{j \in I} P(V_j)\,.$$

Enfin il est clair que $P^i(V) = \bigotimes_{j \in I} P^i(V_j)$ (avec des notations évidentes). D'après [3] p. 103 chap. V § 5, n° 1 : $S_i(T) = \prod_{j \in I} S_{i(R_j)}(T)$. D'où :

6. PROPOSITION. – *Avec les notations précédentes*

$$F_i(T) = (1 - T^2) \prod_{j \in I} S_{i(R_j)}(T)$$

$$F_a(T) = T^d\, F_i(T)\,.$$

la preuve de cette proposition est claire.

D. Etude d'un cas particulier : la demi-sphère H_2.

On considère $S^2 \subset \mathbf{R}^3$. On désigne par H_2 l'hémisphère $\{Z > 0\}$. Ce domaine correspond à $A_1 \times \mathbf{R}^2$.

1. PROPOSITION. –

i) *le spectre du problème de Dirichlet dans* H_2 *est formé des valeurs propres* $\lambda_k = k(k+1)$, k *dans* N *et on a* $\mathrm{mult}(\lambda_k) = k$.

ii) *le spectre du problème de Neumann dans* H_2 *est formé des valeurs propres* $\mu_k = k(k+1)$, k *dans* N *et on a* $\mathrm{mult}(\mu_k) = k + 1$.

Preuve. – Le système de racines est ici A_1 correspondant à la direction Z, et on prend $A_1 \times \mathbf{R}^2$. Les exposants du groupe cristallographique correspondant sont donnés par [3] p. 251, planche I. On a par conséquent :

$$F_i(T) = \frac{(1 - T^2)}{(1 - T^2)} \times \frac{1}{(1 - T)} \times \frac{1}{(1 - T)} = \frac{1}{(1 - T)^2} = \sum_{k \geqslant 0} (1 + k)T^k$$

$$F_a(T) = T\, F_i(T) = \sum_{k \geqslant 0} k\, T^k .$$

2. *Remarque.* – On peut traiter de même le cas du quart de sphère (correspondant à $A_1 \times A_1 \times \mathbf{R}$) et du huitième de sphère (correspondant à $A_1 \times A_1 \times A_1$). Une méthode analogue permet d'étudier le cas des domaines de S^{n-1} obtenus à partir d'un système de racines qui n'est pas de rang n.

E. Sur la conjecture de Weyl.

1. Etant donné un domaine D de S^n on définit des fonctions de comptage par

$$N_D(\lambda) = \text{Card}\,\{j / \sqrt{\lambda_j} \leqslant \lambda\} \quad \text{et} \quad N_N(\lambda) = \text{Card}\,\{j / \sqrt{\mu_j} \leqslant \lambda\}$$

où λ_j (resp. μ_j) sont les valeurs propres du laplacien pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann dans D. H. Weyl a conjecturé (cf. [4] p. 635) que

$$(*) \quad \begin{aligned} N_D(\lambda) &= N_{as}(\lambda) - C\, \text{Vol}(\partial D)\, \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}) \\ N_N(\lambda) &= N_{as}(\lambda) + C\, \text{Vol}(\partial D)\, \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}) \end{aligned}$$

où C est une constante positive, et $N_{as}(\lambda) = (2\pi)^{-n}\, \text{Vol}(B^n)\, \text{Vol}(D)\, \lambda^n$, où B^n désigne la boule unité de $\mathbf{R}^n$.

En particulier, quand $(*)$ est vérifiée on a, asymptotiquement, l'inégalité de Weyl-Polya (cf. [7]). $(**)$ $N_D(\lambda) \leqslant N_{as}(\lambda) \leqslant N_N(\lambda)$ pour λ assez grand.

On désigne par H_2, H_4 et H_8 respectivement l'hémisphère $\{Z > 0\}$, le quart de sphère $\{X > 0\} \cap \{Z > 0\}$, et le huitième de sphère $\{X > 0\} \cap \{Y > 0\} \cap \{Z > 0\}$. Ces domaines correspondent aux systèmes de racines A_1, $A_1 \times A_1$ et $A_1 \times A_1 \times A_1$ (voir 3D).

Nous montrons ici

2. PROPOSITION. – *Sur* S^2, *quand* D *est l'un des domaines* H_j, $j = 2, 4, 8$ *on a :* $N_D(\lambda) \leqslant N_{as}(\lambda) \leqslant N_N(\lambda)$.

Preuve. – Pour S^2 on a $N_{as}(\lambda) = \lambda^2$, d'où les valeurs de N_{as} pour les domaines considérés. Désignons par $k_0(\lambda)$ la plus grande racine de l'équation $k^2 + k - \lambda^2 = 0$. Elle vérifie $\lambda - 1 \leqslant k_0(\lambda) \leqslant \lambda$. On désigne par $k_1(\lambda)$ la partie entière de $k_0(\lambda)$. Cas du domaine H_2 :

$$N_D(\lambda) = \sum_{0}^{k_1(\lambda)} k = k_1(\lambda)\,(k_1(\lambda) + 1)/2 .$$

D'où, en reportant dans l'équation qui définit $k_0(\lambda)$:

$$N_D(\lambda) \leqslant \lambda^2/2 = N_{as}(\lambda) .$$

De même, on a $N_N(\lambda) = \Sigma\,(k+1) = k_1(\lambda) + 1 + N_D(\lambda) \geqslant N_{as}(\lambda)$. On traite de la même manière les domaines H_4 et H_8. On peut aussi donner une preuve de ce résultat au moyen des séries de Poincaré.

3. PROPOSITION. – *Quand* D *est l'un des domaines* $C(R) \cap S^{\ell-1}$, *on a :* $N_D(\lambda) \leqslant N_N(\lambda)$.

Remarque. – Dans [1] on trouvera d'autres exemples de domaines pour lesquels la conjecture de Weyl-Polya est satisfaite. Dans [6] on trouvera l'étude de certaines variétés à bord.

Preuve. – Il suffit de montrer l'inégalité pour $\lambda^2 = k(k + \ell - 2)$. Posons :

$$N_k^a = N_D(\sqrt{k(k+\ell-2)})$$

$$N_k^i = N_N(\sqrt{k(k+\ell-2)})$$

$$N^i(T) = \sum_{k \geqslant 0} N_k^i T^k \qquad N^a(T) = \sum_{k \geqslant 0} N_k^a T^k .$$

On a alors :

$$N_k^i = \sum_{j=0}^{k} h_j^i = p_k^i + p_{k-1}^i$$

$$N_k^a = p_k^a + p_{k-1}^a = N_{k-d}^i .$$

D'où
$$N^i(T) = \frac{(1+T)}{\prod_{j=1}^{\ell}(1-T^{m_j+1})} \quad \text{et} \quad N^a(T) = T^d\, N^i(T).$$
Enfin il vient :

$$N^i(T) - N^a(T)$$
$$= \frac{(1+T)(1-T^d)}{\prod_{j=1}^{\ell}(1-T^{m_j+1})} = \frac{(1-T^2)}{\prod_{j=1}^{\ell}(1-T^{m_j+1})}(1+T+\ldots+T^{d-1}).$$
Rappelons qu'il existe un système $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ générateur minimal de l'algèbre P^i tel que le degré k_j de α_j soit $m_j + 1$.

Or P^i contient le polynôme $(x^1)^2 + \ldots + (x^\ell)^2$ (où (x^i) désigne un système de coordonnées de $\mathbf{R}^\ell$, il y a donc nécessairement un j pour lequel $k_j = 1$ ou $k_j = 2$. Supposons que $j = 1$ convienne :

si $k_1 = m_1 + 1 = 1$
$$N^i(T) - N^a(T) = \frac{(1+T)(1+T+\ldots+T^{d-1})}{\prod_{j=2}^{\ell}(1-T^{m_j+1})}$$
si $k_1 = m_1 + 1 = 2$
$$N^i(T) - N^a(T) = \frac{(1+T+\ldots+T^{d-1})}{\prod_{j=2}^{\ell}(1-T^{m_j+1})}.$$
Dans tous les cas il apparaît clairement que le coefficient de T^k dans le développement en série de $N^i(T) - N^a(T)$, à savoir $N^i_k - N^a_k$, est positif, ce qui prouve l'inégalité annoncée.

Remarque. – Pour $S^n \cap C(B_{n+1})$ on peut démontrer une variante de (**).

Nous montrons en appendice que (*) est fausse pour H_2 car on a
$$N_D(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda(1+\theta(\lambda)) + o(\lambda) \quad \text{avec} \quad -1 \leqslant \theta(\lambda) < 1$$
$$N_N(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda(1-\theta(\lambda)) + o(\lambda)$$
et θ atteint toutes les valeurs de l'intervalle $[-1, 1]$ (voir aussi [5] pour un résultat plus général).

Remarques finales

i) Pour chacun des types de systèmes de racines, un système de générateurs de l'algèbre $P^i(\mathbf{R}^\ell)$ est connu (cf. [3]), il est donc possible, par un calcul élémentaire, de donner l'expression générale d'un élément de $P^\cdot(\mathbf{R}^\ell)$.

ii) On peut maintenant déterminer les spectres des variétés à bord de la forme $D \times M$, où D est un domaine du type précédent, et M une variété sans bord, dont le spectre est connu explicitement.

iii) Les domaines précédents déterminent certains pavages de la sphère, mais pas tous (comparer avec [1] qui ne permet pas de traiter le cas de l'hexagone régulier).

Appendice.

Considérons le domaine H_2. Ses valeurs propres sont les $k(k+1)$, $k > 0$ et leur multiplicité k.

Soit $k_0(\lambda)$ la plus grande solution de l'équation $k^2 + k - \lambda^2 = 0$, et $k_1(\lambda) = E(k_0(\lambda))$

$$k_0(\lambda) = 1/2\,(-1 + \sqrt{1+4\lambda^2}) = -\frac{1}{2} + \lambda + o(1)$$

et
$$N_D(\lambda) = \sum_{0}^{k_1(\lambda)} k = k_1(\lambda)\,(k_1(\lambda)+1)/2$$
$$= 1/2(\lambda - \frac{1}{2} - F(\lambda) + o(1))\left(\lambda + \frac{1}{2} - F(\lambda) + o(1)\right)$$

où $F(\lambda)$ désigne la partie fractionnaire de $k_0(\lambda)$.

$$N_D(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda(2F(\lambda)) + o(\lambda)$$
$$= \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda(1+\theta(\lambda)) + o(\lambda) \quad \text{où} \quad \theta(\lambda) = 2F(\lambda) - 1$$

de même :

$$N_N(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda(1-\theta(\lambda)) + o(\lambda)$$

θ prenant toutes les valeurs possibles entre -1 et 1, la conjecture de H. Weyl est donc fausse pour H_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Berard, Spectres et groupes cristallographiques I : Le cas euclidien, *Inventiones Math.*, 58 (1980), 179-199.

[2] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lecture Notes in Mathematics,* n° 194, Springer.

[3] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4 à 6, Hermann.

[4] C. Clark, The asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions for elliptic boundary value problems, *Siam Review,* 9 (1967), 627-646.

[5] D. Gromes, Uber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte des Laplace-Operators für Gebeite auf der Kugeloberfläche, *Math. Z.,* 94 (1966), 110-121.

[6] R. Melrose, Weyl's conjecture on manifolds with concave boundary, *Proc. Symp. Pure Math.,* Vol. 36, AMS, Providence 1980.

[7] G. Polya, On the eigenvalues of vibrating membranes, *Proc. London Math. Soc.,* 11 (1961), 419-433.

[8] T.A. Springer, Invariant theory, *Lecture Notes in Math.,* n° 585, Berlin-Herdelberg-New York, Springer, 1977.

[9] E. Stein and G. Weiss, Fourier analysis on euclidian spaces, Princeton University Press.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1980.

P. Berard et G. Besson,
Laboratoire associé
au CNRS n° 212
Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
75221 Paris Cedex 05.