Annales de l'institut Fourier

Jean-Pierre Kahane

Sur la totalité des suites d'exponentielles imaginaires

Annales de l'institut Fourier, tome 8 (1958), p. 273-275
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1958__8__273_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA TOTALITÉ DES SUITES D'EXPONENTIELLES IMAGINAIRES

par Jean-Pierre KAHANE.

Cet article rectifie un énoncé antérieur erroné ([1], p. 56-57, théorèmes 4 et 5), et infirme une hypothèse de M. Laurent Schwartz relative au « rayon de totalité » d'une suite d'exponentielles imaginaires ([2], p. 130).

Étant donné une suite réelle $\{\lambda_n\}$, on note $L\{\lambda_n\}$, et on appelle moyenne-période associée à $\{\lambda_n\}$, ou diamètre de totalité de la suite $\{e^{i\lambda_n x}\}$, la borne supérieure des longueurs des intervalles I tels que $\{e^{i\lambda_n x}\}$ forme un système total dans $C(I)$ (espace des fonctions continues sur I, muni de la topologie de la convergence uniforme); on peut (sans changer $L\{\lambda_n\}$) remplacer dans cette définition $C(I)$ par d'autres espaces de fonctions définies sur I (p. ex. $L^2(I)$, $\mathfrak{D}(I)$, $\mathfrak{D}'(I)$, respectivement espaces des fonctions de carré sommable, des fonctions indéfiniment dérivables, des distributions, à supports dans I, avec les topologies classiques). $L\{\lambda_n\}$ est également la borne inférieure des longueurs des intervalles I tels que $\{e^{i\lambda_n x}\}$ soit un système libre dans $C(I)$, et $\frac{1}{2}\, L\{\lambda_n\}$ est la borne inférieure des types des fonctions entières de type exponentiel, bornées sur l'axe réel, s'annulant sur $\{\lambda_n\}$ et $\not\equiv 0$.

L'hypothèse de M. L. Schwartz est que, si $\{\lambda_n\}$ $(n = \cdots -2, -1, 1, 2, \ldots)$ est une suite symétrique $(\lambda_{-n} = -\lambda_n)$ de densité $D\left(D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}\right)$ on a $L\{\lambda_n\} = 2\pi D$. Or, nous allons montrer qu'on peut avoir $D = 0$ et $L\{\lambda_n\} = \infty$.

Construction d'une suite symétrique de densité nulle $\{\lambda_n\}$, *telle telle que* $\{e^{i\lambda_n x}\}$ *forme un système total sur tout segment.*

Nous allons construire $\{\lambda_n\}$ de façon que les deux propositions suivantes soient incompatibles : *a*) $F(w)$ est une fonction entière de type exponentiel, bornée sur l'axe réel, $\not\equiv 0$. *b*) $F(w)$ s'annule sur $\{\lambda_n\}$. Nous utiliserons le fait suivant, qui résulte facilement de la formule de Carleman (cf. p. ex. [3] p. 26) : si $F(w)$ satisfait *a*)

$$\int_1^R \log|F(u)\,F(-u)|\,u^{-2}\,du \tag{1}$$

tend vers une limite finie quand $R \to \infty$.

Soit $\{\mu_k\}$ une suite positive croissante, $\{\nu_k\}$ une suite d'entiers naturels croissants ($k = 1, 2, \ldots$), tels que

$$\nu_k = \varepsilon_k \mu_k = o(\mu_k)$$

(ici comme dans la suite, la notation o est relative à la condition $k \to \infty$). Nous prendrons pour $\{\lambda_n\}$ la suite des $\pm\mu_k$, où chaque $\pm\mu_k$ est compté ν_k fois. Si $F(w)$ satisfaisait *a*) et *b*), il en serait de même de l'une au moins des fonctions $F(w) + F(-w)$ et $w^{-1}F(w)$; donc, moyennant un changement de fonction trivial, on peut supposer

$$F(w) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{w^2}{\mu_j^2}\right)^{\nu_j} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{w^2}{w_j^2}\right).$$

Quel que soit k, on a

$$\left|\left(1 - \frac{w^2}{\mu_k^2}\right)^{-\nu_k} F(w)\right| \leqslant \prod_1^\infty \left(1 + \frac{|w|^2}{\mu_j^2}\right) \prod_1^\infty \left(1 + \left|\frac{w}{w_j}\right|^2\right)$$

et le second membre, pour B assez grand (indépendant de k), est inférieur à $e^{B|w|}$ (cf. p. ex. [4], p. 57). Ainsi

$$\log|F(\mu_k + t)| < B|\mu_k + t| + \nu_k \log \frac{|2\mu_k t + t^2|}{\mu_k^2}.$$

Posons $t_k = \dfrac{1}{2}\mu_k \exp\left(-\dfrac{2B}{\varepsilon_k}\right) = o(\mu_k)$ $(k \to \infty)$. Si $0 < t < t_k$, on a

$$\nu_k \log \frac{2\mu_k t + t^2}{\mu_k^2} = \nu_k\left(\log \frac{2t}{\mu_k} + o(1)\right) < -\mu_k(2B + o(1))$$

$$\log|F(\mu_k + t)| < -\mu_k(B + o(1))$$

$$\int_0^{t_k} \log|F(\mu_k + t)|\,(\mu_k + t)^{-2}\,dt < -\left(\frac{B}{2} + o(1)\right)\exp\left(-\frac{2B}{\varepsilon_k}\right).$$

La dernière inégalité montre que, par un choix convenable des ε_k (par exemple, $\varepsilon_k = (\log\log k)^{-1}$), on a

$$\int_1^\infty \log^- |F(u)|\, u^{-2}\, du = -\infty.$$

D'après la condition a), $\log^+ |F(u)|$ est borné, donc (1) tend vers $-\infty$ quand $R \to \infty$, et l'existence de F conduit à une contradiction.

On peut choisir $\{\mu_k\}$ assez rapidement croissante pour que $\{\lambda_n\}$ soit de densité nulle, c'est-à-dire $\sum_1^k \nu_j = o(\mu_k)$; il suffit, par exemple, de prendre $\mu_k = 2^k$. Alors $\{\lambda_n\}$ a pour densité zéro, et $L\{\lambda_n\} = \infty$.

La suite $\{\lambda_n\}$ construite est une suite de points multiples. Quitte à remplacer $\pm \mu_k$, compté ν_k fois, par ν_k points distincts assez voisins de $\pm \mu_k$, on peut construire une suite $\{\lambda_n\}$ strictement croissante, de densité nulle, avec $L\{\lambda_n\} = \infty$.

L'exemple construit laisse sans réponse l'hypothèse de Schwartz, restreinte aux suites $\{\lambda_n\}$ régulières (c'est-à-dire $\lambda_{n+1} - \lambda_n > h > 0$) ; en particulier, aux suites $\{\lambda_n\}$ d'entiers distincts.

L'erreur commise en [1], p. 56-57, tient à une transcription incorrecte du théorème 2, p. 96.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Kahane, sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles *Ann. Inst. Fourier* V (1953-1954), p. 39-130.

[2] L. Schwartz, Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* VI (1942), p. 111-174.

[3] N. Levinson, *Gap and density theorems*, Colloquium, New-York (1940).

[4] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, Régularisation des suites, Gauthier-Villars (1952).