JEAN-PIERRE ROTH

Recollement de semi-groupes de Feller locaux

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 3 (1980), p. 75-89

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_75_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 3 (1980), 75-89

RECOLLEMENT DE SEMI-GROUPES DE FELLER LOCAUX

par Jean-Pierre ROTH

1. Introduction.

Soient E un espace compact et $\mathcal{C}(E)$ l'espace des fonctions réelles continues sur E.

Si Ω est un ouvert de E, $\mathcal{C}_0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions réelles continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini. Tout élément f de $\mathcal{C}_0(\Omega)$, prolongé par 0 en dehors de Ω, donne une fonction $\hat{f}$ de $\mathcal{C}(E)$. Dans tout l'article on identifie f et $\hat{f}$ et on les confond désormais par une même notation.

Soit $(\Omega_i)_i$, $i = 1, \ldots, p$, une famille d'ouverts recouvrant E.

Sur chacun des espaces $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$ est donné un semi-groupe de Feller $(P_{i,t})_{t\geqslant 0}$.

Hypothèse sur les semi-groupes $(P_{i,t})_{t\geqslant 0}$:

$$\forall i, j, \forall f \in \mathcal{C}_0(\Omega_i), \forall g \in \mathcal{C}_0(\Omega_j), \forall K \text{ compact} \subset \Omega_i \cap \Omega_j,$$

$(f = g$ dans un voisinage de $K) \Longrightarrow \|P_{i,t}f - P_{j,t}g\|_K = o(t)$, où $\|h\|_K$ désigne $\operatorname*{Sup}_{x\in K} |h(x)|$.

Remarque. – Pour $i = j$ l'hypothèse traduit le fait que $(P_{i,t})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe local.

Pour $i \neq j$ l'hypothèse assure que les semi-groupes $(P_{i,t})_{t\geqslant 0}$ et $(P_{j,t})_{t\geqslant 0}$ sont compatibles sur $\Omega_i \cap \Omega_j$.

Le but de l'article est de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1. – *Sous l'hypothèse précédente,*

1) *Il existe un unique semi-groupe de Feller* $(P_t)_{t\geqslant 0}$ *sur* $\mathcal{C}(E)$ *tel que*

$$\forall i\,,\quad \forall f\in \mathcal{C}_0(\Omega_i)\,,\quad \forall g\in \mathcal{C}(E)\,,\quad \forall K \textit{ compact} \subset \Omega_i\,,$$

$$(f = g \textit{ dans un voisinage de } K) \Longrightarrow \|P_{i,t}f - P_t g\|_K = o(t)\,.$$

2) *Soit* $(\varphi_i)_i$ *une partition de l'unité sur* E *subordonnée au recouvrement* $(\Omega_i)_i$. *On lui associe la famille d'opérateurs* $(S_t)_{t\geqslant 0}$ *sur* $\mathcal{C}(E)$ *définie par*

$$\forall f\in \mathcal{C}(E)\,,\quad \forall t \geqslant 0\,,\quad S_t(f) = \sum_{i=1}^{p} P_{i,t}(\varphi_i f)\,.$$

Le semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ *est alors donné par la formule suivante*

$$\forall f\in \mathcal{C}(E)\,,\ \forall t \geqslant 0\,,\quad P_t(f) = \lim_{n\to\infty} (S_{t/n})^n (f)\,.$$

De plus la limite est uniforme lorsque t *et* f *parcourent des parties bornées respectivement de* $\mathbf{R}$ *et de* $\mathcal{C}(E)$.

$(P_t)_{t\geqslant 0}$ *est dit le semi-groupe sur* $\mathcal{C}(E)$ *obtenu par recollement des semi-groupes* $(P_{i,t})_{t\geqslant 0}$. *Il est en particulier local.*

Remarque. – Courrège et Priouret ont établi dans [1] des résultats de recollement pour les processus de Markov. Le présent travail s'en distingue en ce qu'il s'affranchit complètement de tout aspect probabiliste. Il s'inscrit dans la lignée de deux articles précédents portant, l'un sur la restriction des générateurs infinitésimaux de semi-groupes de Feller ([2], chap. IV) et l'autre sur les opérateurs elliptiques du second ordre ([3]).

Il faut en particulier noter, comme dans les deux articles cités, l'obtention d'un procédé constructif simple permettant de définir le semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$.

2. Etude préliminaire.

DEFINITION. – *Soit* Ω *un ouvert de* E. $\Lambda(\Omega)$ *désigne l'espace des fonctions* u *de* $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ *dans* $\mathbf{R}$, *continues et vérifiant*

$$\forall i\,,\quad \forall K \textit{ compact} \subset \Omega\cap\Omega_i\,,\quad \forall t\,,s \geqslant 0\,,$$
$$\|u(t+s\,,.) - P_{i,s}h\|_K = o(s)\,,$$

où h *appartient à* $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$ *et* $h = u(t\,,.)$ *dans un voisinage de* K.

Exemple. – Supposons que le semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ obtenu par recollement existe. Pour une fonction f de $\mathcal{C}(E)$, on pose $u(t, x) = P_t f(x)$. Il est alors immédiat que u est dans $\Lambda(E)$.

DEFINITION. – *Soient* Ω *une partie de* E *et* $T > 0$. *On pose* $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$ *et* $\partial\Omega_T = ([0, T] \times \partial\Omega) \cup (\{0\} \times \overline{\Omega})$, *où* $\partial\Omega$ *désigne la frontière topologique de* Ω.

PROPOSITION 1 (Principe du maximum pour les éléments de $\Lambda(\Omega)$). – *Soient* Ω *un ouvert de* E, $T > 0$ *et* u *une fonction de* $\Lambda(\Omega)$. *On a l'inégalité*

$$\operatorname*{Sup}_{\Omega_T} u \leqslant \operatorname*{Sup}_{(s,y)\in\partial\Omega_T} \ \overline{\lim_{(t,x)\to(s,y)}} \ [u(t, x)]^+ .$$

Nous n'allons pas démontrer ce principe ici puisqu'il est une conséquence immédiate d'un résultat plus général dont nous aurons besoin par la suite et qui est énoncé dans la proposition 2.

COROLLAIRE. – *Si le semi-groupe* $(P_t)_{t\geqslant 0}$ *obtenu par recollement existe, il est unique.*

Démonstration. – On a vu que si $(P_t)_{t\geqslant 0}$ existe, alors la fonction u définie par $u(t, x) = P_t f(x)$, appartient à $\Lambda(E)$ et $u(0, .) = f$.

Or, d'après le principe du maximum, il existe au plus un élément u de $\Lambda(E)$ tel que $u(0, .) = f$.

DEFINITION. – *Soient* a *un réel positif et* Ω *un ouvert de* E. $\Lambda_a^+(\Omega)$ *désigne l'ensemble des fonctions continues* u *de* $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ *dans* $\mathbf{R}$ *telles que*

$$\forall i, \ \forall K \text{ compact} \subset \Omega \cap \Omega_i, \ \forall t, s > 0,$$
$$\| [u(t+s, .) - P_{i,s} h]^+ \|_K \leqslant as + o(s),$$

où h *appartient à* $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$ *et* $h = u(t, .)$ *dans un voisinage de* K.

PROPOSITION 2 (Principe du maximum pour les éléments de $\Lambda_a^+(\Omega)$). – *Soient* Ω *un ouvert de* E, $T > 0$, $a \geqslant 0$ *et* u *une fonction de* $\Lambda_a^+(\Omega)$. *On a*

$$\operatorname*{Sup}_{(t,x)\in\Omega_T} [u(t, x) - at] \leqslant \operatorname*{Sup}_{(s,y)\in\partial\Omega_T} \ \overline{\lim_{(t,x)\to(s,y)}} \ [u(t, x) - at]^+ .$$

Démonstration. – Soient K un compact de Ω et

$$M = \operatorname*{Sup}_{(t,x)\in\partial K_T} [u(t,x) - at]^+ .$$

Pour $b \leqslant T$ et $\epsilon > 0$ on pose

$$B = \{t \in [0,b] / u(t,.) - at \leqslant M + \epsilon + \epsilon t \quad \text{sur} \quad K\}.$$

B contient un intervalle $[0,d]$ avec $d > 0$.

$c = \operatorname{Sup} B$ est donc strictement positif et appartient à B. Supposons $c < b$. On a

$$u(c,.) - ac \leqslant M + \epsilon + \epsilon c \quad \text{sur } K$$

et $$u(c,.) - ac \leqslant M \qquad \text{sur } \partial K.$$

Donc $$u(c,.) - ac \leqslant M + \epsilon + \epsilon c \quad \text{sur un voisinage de } K.$$

K est réunion de p compacts K_i, $i = 1, \ldots, p$, avec $K_i \subset \Omega_i$.

Soit h_i dans $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$ telle que

$$h_i = u(c,.) \text{ dans un voisinage de } K_i$$

et $$h_i \leqslant M + \epsilon + \epsilon c + ac.$$

Il existe $\eta_i > 0$ tel que, pour $s \leqslant \eta_i$, on ait

$$\| [u(c + s,.) - P_{i,s} h_i]^+ \|_{K_i} \leqslant as + \epsilon s .$$

Par suite

$$u(c + s,.) \leqslant P_{i,s} h_i + as + \epsilon s \qquad \text{sur } K_i, \quad \text{pour } s \leqslant \eta_i,$$

d'où

$$u(c + s,.) \leqslant M + \epsilon + \epsilon c + ac + as + \epsilon s \quad \text{sur } K_i, \quad \text{pour } s \leqslant \eta_i .$$

On obtient donc, pour $s \leqslant \operatorname{Min} \{\eta_1, \ldots, \eta_p\}$,

$$u(c + s,.) - a(c + s) \leqslant M + \epsilon + \epsilon(c + s) \text{ sur } K,$$

ce qui contredit le fait que $c = \operatorname{Sup} B$.

Donc $c = b$, ce qui prouve que b appartient à B. On a alors

$$\forall b \leqslant T, \ \forall \epsilon > 0, \ u(b,.) - ab \leqslant M + \epsilon + \epsilon b \quad \text{sur } K,$$

d'où finalement

$$\operatorname*{Sup}_{(t,x)\in K_T} [u(t,x) - at] \leqslant \operatorname*{Sup}_{(t,x)\in\partial K_T} [u(t,x) - at]^+ .$$

La proposition 2 s'en déduit en faisant tendre K vers Ω.

PROPOSITION 3. – *Soient* f *dans* $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$, K *un compact de* Ω_j *et* h *dans* $\mathcal{C}_0^+(\Omega_j)$ *coïncidant avec* f *sur un voisinage de* K. *Alors* $\|[P_{i,s}f - P_{j,s}h]^+\|_K = o(s)$.

Démonstration. – Il est évident que $P_{i,s}f - P_{j,s}h$ est négatif sur $K\setminus\Omega_i$. Etudions maintenant le comportement de cette fonction sur $K \cap \Omega_i$.

Soit U un ouvert contenant K tel que f et h coïncident dans un voisinage de $\overline{U}$, $\overline{U}$ étant lui-même contenu dans Ω_j.

Soit θ un élément de $\mathcal{C}_0^+(\Omega_j)$ valant 1 sur ∂U et 0 dans un voisinage de K. On pose $w(s,.) = P_{i,s}f - P_{j,s}(h+\theta)$.

La fonction w appartient à $\Lambda(\Omega_i \cap U)$ et vérifie les inégalités suivantes

$$w(0,.) = -\theta \leqslant 0 \qquad \text{sur } \overline{\Omega}_i \cap \overline{U},$$

$$w(s,.) = -P_{j,s}(h+\theta) \leqslant 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i \cap \overline{U},$$

$$w(s,.) \leqslant 0 \qquad \text{sur } \partial U \cap \overline{\Omega}_i \ \text{ si } s \text{ est assez petit.}$$

Les deux derniers points entraînant $w(s,.) \leqslant 0$ sur $\partial(\Omega_i \cap U)$ lorsque s est petit, on en déduit, d'après le principe du maximum pour les éléments de $\Lambda(\Omega_i \cap U)$, que, pour s assez petit,

$$w(s,.) \leqslant 0 \qquad \text{sur } \Omega_i \cap U, \text{ donc sur } K \cap \Omega_i,$$

soit encore

$$P_{i,s}f - P_{j,s}h \leqslant P_{j,s}\theta \quad \text{sur } K \cap \Omega_i.$$

Or

$$\|P_{j,s}\theta\|_K = o(s),$$

donc, en conclusion

$$\|[P_{i,s}f - P_{j,s}h]^+\|_K = o(s).$$

PROPOSITION 4. – *Soit* $(\varphi_i)_i$ *une partition de l'unité sur* E *subordonnée au recouvrement* $(\Omega_i)_i$. *On a l'inégalité suivante*

$$\forall f \in \mathcal{C}(E), \ \forall t \geqslant 0, \ \Big\|\sum_{i=1}^{p} P_{i,t}(\varphi_i f)\Big\| \leqslant \|f\|.$$

Démonstration. – Prenons f dans $\mathcal{C}^+(E)$ et montrons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}_p = \{1,\ldots,p\}$, la propriété suivante :

«Pour toute partie I de $\mathbf{N}_p$ comportant n éléments,

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{P}_{i,t}(\varphi_i f) \leqslant \|f\| \text{.»}$$

Pour $n = 1$ c'est vrai.

Supposons la propriété vraie pour n.

On considère une partie $\mathrm{J} = \{i_1, \ldots, i_{n+1}\}$ de $\mathbf{N}_p$ comportant $(n+1)$ éléments et on pose, pour $j \in \mathbf{N}_{n+1}$, $\mathrm{I}_j = \mathrm{J} \setminus \{i_j\}$.

La fonction v définie par $v(t, .) = \sum_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{P}_{i,t}(\varphi_i f)$, appartient à $\Lambda(\mathrm{E} \setminus \bigcup_{i \in \mathrm{J}} \partial\Omega_i)$.

Or, d'une part $v(0, .) \leqslant \|f\|$, et d'autre part, pour $x \in \bigcup_{i \in \mathrm{J}} \partial\Omega_i$, il existe $i_j \in \mathrm{J}$ tel que $x \in \partial\Omega_{i_j}$, et alors

$$v(t, x) = \sum_{i \in \mathrm{I}_j} \mathrm{P}_{i,t}(\varphi_i f)\,(x) \leqslant \|f\|,$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Par suite, le principe du maximum (prop. 1) montre que $v \leqslant \|f\|$.

Finalement la propriété est vraie pour $n = p$.

PROPOSITION 5. – *Soit* $\varphi_i \in \mathcal{K}^+(\Omega_i)$. *Il existe* $\mathrm{G}_i \in \mathcal{C}_0^+(\Omega_i)$ *tel que*

1) $\exists \mathrm{C}_i > 0$, $\forall s \geqslant 0$, $\|\mathrm{P}_{i,s}\mathrm{G}_i - \mathrm{G}_i\| \leqslant \mathrm{C}_i s$,

2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha_i > 0$, $\forall s \in [0, \alpha_i]$, $\mathrm{P}_{i,s}\varphi_i \leqslant \epsilon \mathrm{G}_i$ *sur* $\Omega_i \setminus \mathrm{K}_i$, *où* K_i *désigne le support de* φ_i

Démonstration. – Soit $\psi_i \in \mathcal{K}^+(\Omega_i)$, $\varphi_i \leqslant \psi_i$ et $\psi_i > 0$ sur Supp φ_i.

Soit $\theta_i \in \mathcal{K}^+(\Omega_i)$, $\theta_i > 0$ sur Supp ψ_i.

La fonction $\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{P}_{i,t}\theta_i\,dt$ est un élément de $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$. Elle est strictement positive sur $\{x/\theta_i(x) > 0\}$ donc sur Supp ψ_i.

Il existe donc λ_i, réel strictement positif, tel que la fonction $\mathrm{G}_i = \lambda_i \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{P}_{i,t}\theta_i\,dt$ soit supérieure à ψ_i.

• On a

$$P_{i,s} G_i = \lambda_i \int_0^{\infty} e^{-t} P_{i,t+s}\, \theta_i \, dt = \lambda_i \int_s^{\infty} e^{-(t-s)} P_{i,t}\, \theta_i \, dt$$

$$P_{i,s} G_i = e^s (G_i - \lambda_i \int_0^s e^{-t} P_{i,t} \theta_i \, dt),$$

d'où l'on tire en particulier $P_{i,s} G_i \leqslant e^s G_i$.

• On a $\frac{d}{ds} (P_{i,s} G_i) = P_{i,s}(G_i - \lambda_i \theta_i)$.

En notant $C_i = \|G_i - \lambda_i \theta_i\|$, on obtient

$$\forall s \geqslant 0 \,, \quad \|P_{i,s} G_i - G_i\| \leqslant C_i s \,.$$

• Soient $\epsilon > 0$ et $K_i = \operatorname{Supp} \varphi_i$.

φ_i étant nul et ψ_i strictement positif sur ∂K_i, il existe α_i dans $[0,1]$ tel que $\forall s \in [0, \alpha_i]$, $P_{i,s} \varphi_i \leqslant \frac{\epsilon}{e} P_{i,s} \psi_i$ sur ∂K_i.

La fonction v, définie par $v(t, .) = P_{i,s}\left(\varphi_i - \frac{\epsilon}{e} \psi_i\right)$, appartient à $\Lambda(\Omega_i \backslash K_i)$.

On a aussi

$$v(s, .) \leqslant 0 \quad \text{sur } \partial(\Omega_i \backslash K_i) \quad \text{pour } s \in [0, \alpha_i]$$

et

$$v(0, .) \leqslant 0 \quad \text{sur } \Omega_i \backslash K_i \,.$$

D'après le principe du maximum il s'ensuit

$$v(s, .) \leqslant 0 \quad \text{sur } \Omega_i \backslash K_i \quad \text{pour } s \in [0, \alpha_i] \,.$$

Donc, pour $s \in [0, \alpha_i]$, on a

$$P_{i,s} \varphi_i \leqslant \frac{\epsilon}{e} P_{i,s} \psi_i \leqslant \frac{\epsilon}{e} P_{i,s} G_i \leqslant \epsilon G_i \quad \text{sur } \Omega_i \backslash K_i \,.$$

3. Démonstration du théorème 1.

Il s'agit essentiellement de résoudre le problème suivant : $f \in \mathcal{C}(E)$ étant donné, trouver $u \in \Lambda(E)$ tel que $u(0, .) = f$.

1. *Construction de solutions approchées*

Soient $(\varphi_i)_i$ une partition de l'unité sur E subordonnée au recouvrement $(\Omega_i)_i$ et f un élément de $\mathcal{C}^+(E)$.

$\eta > 0$ étant donné, on construit la fonction u_η de la manière suivante :

- $u_\eta(0\,,.) = f$,
- si $u_\eta(k\eta\,,.)$ est connue et vaut g, on pose, pour $t \in [0,\eta]$,

$$u_\eta(k\eta + t\,,.) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}_{i,t}(\varphi_i g)\,.$$

u_η ainsi définie est continue et positive sur $\mathbf{R}^+ \times \mathrm{E}$.

2. *Propriétés des solutions approchées*

- $\|u_\eta\| \leqslant \|f\|$.

Il suffit d'appliquer la proposition 4 à chaque pas de la construction de u_η.

- u_η appartient à $\Lambda_0^+(\mathrm{E})$. C'est une conséquence facile de la proposition 3.

- Posons $\mathrm{C} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{C}_i$ et $\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{G}_i$ (cf. proposition 5).

Pour $\epsilon > 0$ donné, soit α le minimum des α_i associés à ϵ par cette même proposition.

Alors, si $\eta < \alpha$, la fonction $-u_\eta + \epsilon\|f\|\mathrm{G}$ appartient à $\Lambda^+_{\epsilon\|f\|\mathrm{C}}(\mathrm{E})$. Montrons cette dernière propriété.

Soient $\eta \in \,]0,\alpha[$ et $t \geqslant 0$ fixés.

Pour s assez petit $u_\eta(t+s\,,.)$ s'exprime sous la forme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}_{i,s} g_i$, où $g_i \in \mathcal{C}_0^+(\Omega_i)$ et $g_i \leqslant \epsilon\|f\|\mathrm{G}_i$ sur $\Omega_i \backslash \mathrm{K}_i$. Ceci provient de la proposition 5, compte-tenu du choix de η et du fait que $\|u_\eta\| \leqslant \|f\|$.

Soient $j \in \mathbf{N}_p$ et K un compact de Ω_j tels que $\forall i \neq j$, $\mathrm{K} \subset \Omega_i$ ou $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}\backslash \mathrm{K}_i$.

On montre facilement que tout compact de Ω_j est réunion d'un nombre fini de tels compacts.

Soient $\mathrm{J}_1 = \{i \in \mathbf{N}_p / \mathrm{K} \subset \Omega_i\}$ et $\mathrm{J}_2 = \mathbf{N}_p \backslash \mathrm{J}_1$.

Pour tout $i \in \mathbf{N}_p$ on introduit une fonction $h_i \in \mathcal{C}_0(\Omega_j)$ coïncidant avec $\epsilon\|f\|\mathrm{G}_i - g_i$ sur un voisinage de K et vérifiant la condition supplémentaire $h_i \geqslant 0$ si $i \in \mathrm{J}_2$.

La fonction $h = \sum_{i=1}^{p} h_i$ appartient à $\mathcal{C}_0(\Omega_j)$ et coïncide avec $\epsilon \|f\| G - u_\eta(t,.)$ sur un voisinage de K.

$$\epsilon \|f\| G - u_\eta(t+s,.) - P_{j,s} h = \epsilon \|f\| \sum_{i=1}^{p} (G_i - P_{i,s} G_i)$$
$$+ \sum_{i \in J_1} [P_{i,s}(\epsilon \|f\| G_i - g_i) - P_{j,s} h_i]$$
$$+ \sum_{i \in J_2} [P_{i,s}(\epsilon \|f\| G_i - g_i) - P_{j,s} h_i].$$

Or, la norme du premier terme est majorée par $\epsilon \|f\| Cs$, d'après la proposition 5, la norme indice K du second est un $o(s)$, d'après la compatibilité des $(P_{i,t})_{t \geqslant 0}$, et celle de la partie positive du troisième est aussi un $o(s)$, d'après la proposition 3.

Finalement on obtient

$$\|[\epsilon \|f\| G - u_\eta(t+s,.) - P_{j,s} h]^+\|_K \leqslant \epsilon \|f\| Cs + o(s).$$

Cette inégalité est encore vraie en remplaçant K par une réunion finie de tels compacts ; elle subsiste donc pour tout compact K de Ω_j.

On en conclut que $\epsilon \|f\| G - u_\eta$ appartient à $\Lambda^+_{\epsilon \|f\| C}(E)$.

3. *Convergence des solutions approchées*

$\epsilon > 0$ étant donné, soit $\alpha > 0$ qui lui est associé par 3.2.

Soient η_1 et $\eta_2 \in]0, \alpha[$ et $v = u_{\eta_1} - u_{\eta_2}$.

D'après 3.2, la fonction $v + \epsilon \|f\| G$ appartient à $\Lambda^+_{\epsilon \|f\| C}(E)$.

L'application à cette fonction du principe du maximum (prop. 2) donne, compte-tenu du fait que $\partial E_T = \{0\} \times E$,

$$\operatorname*{Sup}_{(t,x) \in E_T} [v(t,x) + \epsilon \|f\| G(x) - \epsilon \|f\| Ct] \leqslant \epsilon \|f\| \, \|G\|,$$

donc

$$\|v\|_{E_T} \leqslant 2\epsilon \|f\| \, \|G\| + \epsilon \|f\| CT.$$

Par suite, lorsque η tend vers 0, u_η converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{R}^+ \times E$ vers une fonction continue u.

4. *La limite u est une solution du problème*

Soient $i \in \mathbf{N}_p$, K un compact de Ω_i et $t \geqslant 0$.

Soit $h \in \mathcal{C}_0(\Omega_i)$ coïncidant avec $u(t,.)$ dans un voisinage ouvert V de K, tel que $\overline{V} \subset \Omega_i$.

Soit $\theta \in \mathcal{K}^+(\Omega_i)$, θ valant 0 dans un voisinage de K et 1 sur ∂V.

$\epsilon > 0$ étant donné, la fonction v définie par

$$v(s,.) = P_{i,s}(h - \theta) - u_\eta(t + s,.) + \epsilon \|f\| G,$$

appartient à $\Lambda^+_{\epsilon\|f\|C}(V)$ pour un certain $\eta = \eta(\epsilon)$ choisi assez petit selon (3.2).

Or

$$v(0,.) \leqslant \|u(t,.) - u_{\eta(\epsilon)}(t,.)\| + \epsilon \|f\| \, \|G\| \quad \text{sur } \overline{V}$$

et

$$v(s,.) \leqslant 0 \quad \text{sur } \partial V \text{ pour } s \text{ et } \epsilon \text{ suffisamment petits.}$$

D'après la proposition 2 on en déduit, pour s et ϵ petits,

$$v(s,.) - \epsilon\|f\|Cs \leqslant \|u(t,.) - u_{\eta(\epsilon)}(t,.)\| + \epsilon\|f\| \, \|G\| \text{ sur } V,$$

donc

$$P_{i,s}h - u_{\eta(\epsilon)}(t + s,.) \leqslant \|u(t,.) - u_{\eta(\epsilon)}(t,.)\| + \epsilon\|f\| \, \|G\| \\ + \epsilon\|f\|Cs + P_{i,s}\theta \text{ sur } V.$$

Par passage à la limite lorsque ϵ tend vers 0 on obtient $P_{i,s}h - u(t+s,.) \leqslant P_{i,s}\theta$ sur V pour s petit.

En étudiant de manière analogue la fonction w définie par $w(s,.) = u_\eta(t + s,.) - P_{i,s}(h + \theta)$, on aboutit à

$$u(t + s,.) - P_{i,s}h \leqslant P_{i,s}\theta \text{ sur V pour } s \text{ petit.}$$

Or $\|P_{i,s}\theta\|_K = o(s)$, par suite $\|u(t + s,.) - P_{i,s}h\|_K = o(s)$.

La fonction u appartient donc bien à $\Lambda(E)$ et d'autre part $u(0,.) = f$.

5. *Définition de* $(P_t)_{t>0}$

Il est immédiat de voir que, si pour $f \in \mathcal{C}(E)$ on pose $P_t f = u(t,.)$, où $u \in \Lambda(E)$ et $u(0,.) = f$, on définit ainsi un semi-groupe de Feller $(P_t)_{t \geqslant 0}$ qui satisfait aux exigences de la première partie du théorème 1.

La seconde partie provient de la construction de u par les solutions approchées u_η. En effet, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall t \geqslant 0, \quad (S_{t/n})^n(f) = u_{t/n}(t,.).$$

4. Recollement de générateurs infinitésimaux.

Soit A un opérateur de domaine D(A) dense dans $\mathcal{C}(E)$ tel que $\forall K_1, K_2$ compacts disjoints, $\exists \varphi \in D(A)^+$, $\varphi = 0$ sur K_1 et $\varphi > 0$ sur K_2.

On suppose que A vérifie le principe du maximum local positif, c'est-à-dire (cf. [2] chap. IV),

$\forall f \in D(A)$, $\forall x \in E$, $\forall V$ ouvert $\ni x$,

$$(f(x) = \sup_V f \geqslant 0) \Longrightarrow (Af(x) \leqslant 0).$$

PROPOSITION 6. – *Soient* U *un ouvert de* E *et* $(f_n)_n \subset D(A)$ *tels que* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *et* $\lim_{n\to\infty} Af_n = g$ *uniformément sur* U. *Si* f *admet un maximum positif sur* U *au point* x, *alors* $g(x) \leqslant 0$.

Démonstration. – Soient K un voisinage compact de x contenu dans U et φ un élément de D(A) nul hors de K et valant 1 en x.

On peut supposer les inégalités suivantes

$$\|f_n - f\|_U \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|Af_n - g\|_U \leqslant \frac{1}{n}.$$

On a alors

$$f_n + \frac{2}{n}\varphi \leqslant f(x) + \frac{1}{n} \quad \text{sur } U\backslash K,$$

et

$$\left(f_n + \frac{2}{n}\varphi\right)(x) \geqslant f(x) + \frac{1}{n}.$$

La fonction $f_n + \frac{2}{n}\varphi$ admet donc un maximum positif sur U en un point x_n de K.

On a donc $Af_n(x_n) + \frac{2}{n} A\varphi(x_n) \leqslant 0$.

Soit x_K une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ quand n tend vers l'infini. Par passage à la limite on obtient $g(x_K) \leqslant 0$.

Pour tout voisinage compact K de x il existe un tel point x_K, par suite $g(x) \leqslant 0$. C.Q.F.D.

Soit $(\Omega_i)_i$ $(i = 1, \dots, p)$ un recouvrement de E par des ouverts.

DEFINITION. – *Soit* Ω *un ouvert de* E. *On note* $\Gamma(\Omega)$ *l'ensemble des couples* (f, g) *de fonctions continues sur* Ω *tels que*

$$\forall i\,,\ \forall \mathrm{K}\ \textit{compact} \subset \Omega \cap \Omega_i\,,\ \exists (f_n)_n \subset \mathrm{D(A)}\,,$$

$(f_n)_n$ *(resp.* $(\mathrm{A}f_n)_n$*) converge uniformément sur* K *vers* f *(resp.* g*) quand* n *tend vers l'infini.*

La proposition 6 montre que $\Gamma(\Omega)$ est le graphe d'un opérateur, noté B_Ω, qui vérifie le principe du maximum local positif.

PROPOSITION 7 (Principe du maximum). – *Soient* Ω *un ouvert de* E *et* u *une fonction continue de* $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ *dans* $\mathbf{R}$ *telle que*

$\forall t > 0\,,\ u(t\,,.) \in \mathrm{D}(\mathrm{B}_\Omega)\,,$

$\forall x \in \Omega\,,\ u(.\,,x)$ *est dérivable sur* $\mathbf{R}^{+*}$,

$$\forall (t\,,x) \in \mathbf{R}^{+*} \times \Omega\,,\ \frac{du}{dt}(t\,,x) = \mathrm{B}_\Omega(u(t\,,.))(x)\,.$$

Si $\sup\limits_{\Omega_\mathrm{T}} u \geqslant 0$, *alors on a* $\sup\limits_{\Omega_\mathrm{T}} u = \sup\limits_{(s,y)\in\partial\Omega_\mathrm{T}}\ \overline{\lim\limits_{(t,x)\to(s,y)}}\ u(t\,,x)\,.$

Démonstration. – Soient $\mathrm{T} > 0$ et K un compact de Ω tels que $\sup\limits_{\Omega_\mathrm{T}} u \geqslant 0$.

Soit $\varphi \in \mathrm{D(A)}$ positive sur E et strictement positive sur K.

Soit k un réel strictement supérieur à $\left\| \dfrac{\mathrm{A}\varphi}{\varphi} \right\|_\mathrm{K}$.

On pose $h(t\,,x) = e^{-kt}\varphi(x)$.

Soient $\epsilon > 0$ et $\mathrm{T} > 0$.

Supposons que la fonction $(u + \epsilon h)_{/\mathrm{K_T}}$ atteigne son maximum en un point $(t\,,x)$ de $]0,\mathrm{T}] \times \mathring{\mathrm{K}}$.

La fonction $(u + \epsilon h)(t\,,.)$ appartient à $\mathrm{D}(\mathrm{B}_\Omega)$ et admet en x un maximum local positif, donc

$$\mathrm{B}_\Omega(u(t\,,.))(x) + \epsilon \mathrm{A}(h(t\,,.))(x) \leqslant 0\,,$$

$$\frac{du}{dt}(t\,,x) + \epsilon e^{-kt}\mathrm{A}\varphi(x) \leqslant 0\,,$$

$$\frac{du}{dt}(t\,,x) - \epsilon k e^{-kt}\varphi(x) < 0 \quad \text{car} \quad -k\varphi(x) < \mathrm{A}\varphi(x)\,,$$

d'où $\frac{d}{dt}(u + \epsilon h)(t, x) < 0$, ce qui contredit le fait que $(u + \epsilon h)$ admet un maximum sur $]0, T] \times \overset{\circ}{K}$ au point (t, x).

$(u + \epsilon h)_{/K_T}$ n'atteint donc son maximum que sur ∂K_T, donc

$$\operatorname{Sup}_{K_T}(u + \epsilon h) = \operatorname{Sup}_{\partial K_T}(u + \epsilon h).$$

Le résultat s'obtient finalement en faisant tendre ϵ vers 0, puis K vers Ω.

DEFINITIONS. – *On note* $\overline{A}$ *l'opérateur* B_E.

Pour tout i *de* $\mathbf{N}_p$, *on note* $\overline{A}_i$ *l'opérateur dans* $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$ *dont le graphe est* $\Gamma(\Omega_i) \cap [\mathcal{C}_0(\Omega_i)]^2$.

THEOREME 2. – *Supposons que, pour tout* $i \in \mathbf{N}_p$, $\overline{A}_i$ *soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $(P_{i,t})_{t \geq 0}$.

Alors les semi-groupes $(P_{i,t})_{t \geq 0}$ *sont de Feller, locaux, deux à deux compatibles et* $\overline{A}$ *est le générateur infinitésimal du semi-groupe* $(P_t)_{t \geq 0}$ *obtenu par recollement des* $(P_{i,t})_{t \geq 0}$.

Démonstration.

1) *Localité et compatibilité des* $(P_{i,t})_{t \geq 0}$.

Soient i, j et K un compact de $\Omega_i \cap \Omega_j$.

Soient f dans $\mathcal{C}_0(\Omega_i)$ et g dans $\mathcal{C}_0(\Omega_j)$ coïncidant dans un voisinage V de K, $\overline{V}$ étant inclus dans $\Omega_i \cap \Omega_j$.

Soient $(f_n)_n \subset D(\overline{A}_i)$ tel que $\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}$

et $(g_n)_n \subset D(\overline{A}_j)$ tel que $\|g - g_n\| \leq \frac{1}{n}$.

Soit φ dans $D(A) \cap \mathcal{K}^+(\Omega_i)$, supérieur à 1 sur ∂V et nul dans un voisinage de K.

On considère la fonction v_n, définie par

$$v_n(t, .) = P_{i,t}(f_n - \varphi) - P_{j,t}g_n.$$

On a

$$v_n(0, .) \leq \frac{2}{n} \quad \text{sur } \overline{V}$$

et $$v_n(t, .) \leq 0 \quad \text{sur } \partial V \text{ pour } t \leq T \text{ et } n \geq N.$$

Or v_n restreinte à $\mathbf{R}^+ \times V$ satisfait aux conditions de la proposition 7, par suite il vient $v_n \leqslant \frac{2}{n}$ sur V_T.

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini on obtient :

$$\forall t \in [0,T], \quad P_{i,t}(f-\varphi) - P_{j,t}\, g \leqslant 0 \quad \text{sur } V,$$

donc $$\forall t \in [0,T], \quad \| [P_{i,t} f - P_{j,t}\, g]^+ \|_K \leqslant \| P_{i,t} \varphi \|_K = o(t),$$

car $$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t} (P_{i,t} \varphi - \varphi) - A\varphi \right\| = 0$$

et $$\varphi = A\varphi = 0 \quad \text{sur } K.$$

On montre de même que $\| [P_{j,t}\, g - P_{i,t} f]^+ \|_K = o(t)$, ce qui prouve la compatibilité de $(P_{i,t})_{t \geqslant 0}$ et de $(P_{j,t})_{t \geqslant 0}$ (où la localité de $(P_{i,t})_{t \geqslant 0}$ si $i = j$).

2) $\overline{A}$ *est un générateur infinitésimal*

D'après le théorème 1 on peut recoller les $(P_{i,t})_{t \geqslant 0}$ en un semi-groupe $(P_t)_{t \geqslant 0}$. On note C son générateur infinitésimal.

Soit f un élément de D(C) et K un compact de Ω_i.

Soit $h \in \mathcal{C}_0(\Omega_i)$, $h = f$ dans un voisinage de K.

Pour $s > 0$, la fonction $h_s = \frac{1}{s} \int_0^s P_{i,t}\, h\, dt$ appartient à $D(\overline{A}_i)$ et on a

$$\overline{A}_i h_s = \frac{1}{s} (P_{i,s} h - h),$$

$$\overline{A}_i h_s = \frac{1}{s} (P_s f - f) + \frac{1}{s} (P_{i,s} h - P_s f) \quad \text{sur K}.$$

$\epsilon > 0$ étant donné, il existe $s > 0$ tel que

$$\| h_s - f \|_K \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

et $$\| A_i h_s - Cf \|_K \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Il existe g dans D(A) tel que

$$\| g - h_s \|_K \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

et $$\| Ag - \overline{A}_i h_s \|_K \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalement on a

$$\forall \epsilon > 0\,,\quad \exists g \in \mathrm{D(A)}\,,\quad \|g - f\|_{\mathrm{K}} \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \|\mathrm{A}g - \mathrm{C}f\|_{\mathrm{K}} \leqslant \epsilon\,,$$

ce qui prouve la relation $\mathrm{C} \subset \overline{\mathrm{A}}$.

Or $\overline{\mathrm{A}}$ vérifie le principe du maximum local positif et C est maximal parmi de tels opérateurs, donc $\mathrm{C} = \overline{\mathrm{A}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ph. COURREGE et P. PRIOURET, Recollement de processus de Markov, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris,* 14 (1965), 275-377.

[2] J.P. ROTH, Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, t. 26, Fasc. 1 (1976), 1-97.

[3] J.P. ROTH, Opérateurs elliptiques comme générateurs infinitésimaux de semi-groupes de Feller, Sém. Th. du Potentiel de Paris, N° 3, *Lecture Notes* 681, Springer (1978), 234-251.

Manuscrit reçu le 14 janvier 1980.

Jean Pierre ROTH,
I.S.E.A.
4, rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse Cedex.