THIERRY FACK

PIERRE DE LA HARPE

Sommes de commutateurs dans les algèbres de von Neumann finies continues

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 3 (1980), p. 49-73

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_49_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
30, 3 (1980), 49-73

SOMMES DE COMMUTATEURS DANS LES ALGÈBRES DE VON NEUMANN FINIES CONTINUES

par Th. FACK et P. de la HARPE

Soit $\mathfrak{M}$ une algèbre de von Neumann. On dit qu'un élément Z de $\mathfrak{M}$ est un *commutateur* s'il existe $X, Y \in \mathfrak{M}$ avec $Z = [X, Y] = XY - YX$, et on note $sl(\mathfrak{M})$ le sous-espace de $\mathfrak{M}$ formé des sommes *finies* de commutateurs ; la notation doit rappeler que $sl(\mathfrak{M})$ possède une structure canonique *d'algèbre de Lie complexe.* Les premiers problèmes de la théorie des commutateurs consistent à caractériser $sl(\mathfrak{M})$, puis, si possible, l'ensemble des commutateurs de $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{M}$ est de dimension finie, la solution du second problème remonte à Shoda [26] ; nous supposerons désormais que $\mathfrak{M}$ est de dimension infinie.

Le présent article est consacré à $sl(\mathfrak{M})$ lorsque $\mathfrak{M}$ est une algèbre de von Neumann finie continue. Avant d'énoncer nos résultats, rappelons quelques faits connus dans d'autre cas.

Si $\mathfrak{M}$ est un *facteur infini,* alors $sl(\mathfrak{M})$ coïncide avec $\mathfrak{M}$; on sait d'ailleurs caractériser les commutateurs eux-mêmes : voir [2] pour le type I_∞, le théorème 3.8 de [10] pour les types II_∞ et [3] pour les types III. Si $\mathfrak{M}$ est une *algèbre proprement infinie,* alors $sl(\mathfrak{M})$ coïncide toujours avec $\mathfrak{M}$ (voir par exemple le lemme 3.1 de [21]) ; on a aussi dans ce cas de nombreux renseignements sur l'ensemble des commutateurs (voir [10] et les travaux plus récents de Halpern, dont [11]). Si $\mathfrak{M}$ est une *algèbre finie discrète,* alors $sl(\mathfrak{M})$ coïncide avec l'ensemble des éléments de trace centrale nulle [22] ; si, de plus, $\mathfrak{M}$ est homogène de type I_n (n fini), on sait aussi caractériser les commutateurs eux-mêmes (voir le théorème 5 de [6]).

Cette abondance de résultats contraste avec la situation présente dans le cas *fini continu.* Soient désormais $\mathcal{M}$ une algèbre de type II_1 et τ sa trace centrale. Il est évident que $sl(\mathcal{M})$ est dans le noyau de τ ; on vérifie que l'inclusion est normiquement dense [27], et on sait qu'il y a égalité dans le cas particulier où $\mathcal{M}$ est un «facteur de Wright» [22]. Mais là s'arrête la liste des résultats à notre connaissance publiés jusqu'ici. La conjecture généralement admise est que tout élément à trace centrale nulle est un commutateur (voir la remarque 3 du § 4 dans [6] et l'introduction de [22]).

Le but essentiel de cet article est de montrer que *l'espace des sommes finies de commutateurs coïncide avec le noyau de la trace centrale dans toute algèbre de von Neumann finie et continue.* La preuve de ce fait dans le cas d'un facteur s'inspire d'une technique élaborée par Broise [1] et rappelle les constructions de [23] pour l'étude de l'algèbre des opérateurs compacts dans un espace de Hilbert. Dans le premier paragraphe, nous définissons et étudions le réarrangement décroissant d'un opérateur hermitien dans une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ munie d'une trace finie. Si $\mathcal{M} = L^\infty([0,1])$ est munie de la trace associée à la mesure de Lebesgue, et si $Z \in \mathcal{M}$ est une fonction étagée, son réarrangement décroissant n'est autre que la fonction dont le graphe figure les «étages» de Z, rangés en «escaliers descendants» [9]. Le second paragraphe établit le résultat principal pour un facteur de type II_1. Le suivant l'étend au cas global par la théorie usuelle de la réduction et grâce à un lemme technique qui nous permet d'éviter toute hypothèse de séparabilité. Le § 4 moissonne les corollaires et pose de nouvelles questions. Notons enfin que le § 2 se termine par une digression sur l'analogue multiplicatif du problème auquel est principalement consacré notre travail ; nous y montrons que *tout élément inversible dans un facteur de type* II_1, *dont le déterminant est 1, peut s'écrire comme un produit de commutateurs multiplicatifs.*

Nous remercions P.L. Aubert, H. Halpern et V. Jones pour d'utiles discussions et remarques. P. de la Harpe remercie aussi le «Fonds national suisse de la recherche scientifique» pour son soutien.

1. Réarrangement décroissant d'un opérateur hermitien.

Si (Ω, μ) est un espace mesuré intégrable, on sait définir en analyse classique la notion de réarrangement d'une fonction réelle mesurable et bornée sur Ω. D'autre part, si $\mathfrak{M}$ est un facteur de type II_1 et τ sa trace canonique, Murray et von Neumann définissent dans [20] la notion de «t-ième valeur propre» ($t \in]0,1]$) d'un opérateur hermitien de $\mathfrak{M}$.

Ces deux notions dérivent en fait d'une même que l'on expose ci-dessous : celle de réarrangement décroissant d'un opérateur hermitien dans une algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$ munie d'une trace normale finie fidèle Tr. Posons $\mathrm{T} = \mathrm{Tr}(1)$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de $\mathfrak{M}$ et, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathcal{P}_t$ l'ensemble des $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$ tels que $\mathrm{Tr}(1 - \mathrm{P}) \leqslant t$. Enfin, on supposera que $\mathfrak{M}$ opère dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$.

Definition 1.1. — *Soit* $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}^* \in \mathfrak{M}$. *On appelle réarrangement décroissant de* Z *la fonction* ρ_{Z} *définie sur* $[0, \mathrm{T}]$ *par :*

$$\rho_{\mathrm{Z}}(t) = \operatorname*{Inf}_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}_t} \Big(\operatorname*{Sup}_{\xi \in \mathrm{P}(\mathfrak{H}), \|\xi\| = 1} (\mathrm{Z}\,\xi \mid \xi) \Big).$$

La fonction ρ_{Z} est clairement décroissante. Pour $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}^* \in \mathfrak{M}$, on posera

$$\mathrm{M}_{\mathrm{Z}} = \operatorname*{Sup}_{\xi \in \mathfrak{H}, \|\xi\| = 1} (\mathrm{Z}\,\xi \mid \xi)$$

$$m_{\mathrm{Z}} = \operatorname*{Inf}_{\xi \in \mathfrak{H}, \|\xi\| = 1} (\mathrm{Z}\,\xi \mid \xi).$$

On a :

Proposition 1.2. — *Soit* $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}^* \in \mathfrak{M}$.

(i) *Soit* $(\mathrm{E}_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ *l'unique résolution de l'identité continue à droite telle que* $\mathrm{Z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\mathrm{E}_\lambda$.

Alors, pour $t \in [0, \mathrm{T}]$, *on a :*

$$\rho_{\mathrm{Z}}(t) = \mathrm{Min}\, \{\lambda \in [m_{\mathrm{Z}}, \mathrm{M}_{\mathrm{Z}}],\ \mathrm{Tr}(1 - \mathrm{E}_\lambda) \leqslant t\}$$

(ii) $\mathrm{Tr}(\mathrm{Z}) = \int_0^{\mathrm{T}} \rho_{\mathrm{Z}}(t)\, dt.$

i) est une adaptation facile du lemme 15.2.1, p. 213 de [20], alors que ii) se démontre comme le lemme 15.2.2, p. 214 de [20].

Remarques 1.3.

1.3.1. – D'après 1.2, i), on a $\rho_Z(0) = M_Z$ et $\rho_Z(T) = m_Z$.

1.3.2. – Il résulte facilement de 1.2 d'une part que ρ_Z est continue à droite, d'autre part que ρ_Z ne dépend pas de la représentation de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{H}$.

1.3.3. – Soient $\mathfrak{M} = L^\infty(\Omega, \mu)$ et $\mathrm{Tr}(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\, d\mu(\omega)$.

Soit $Z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{\Omega_i}$ une fonction en escaliers, où $(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n)$ forme une partition mesurable de Ω.

Alors $\rho_Z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\sigma(i)} \chi_i$ où $\lambda_{\sigma(1)} \geqslant \lambda_{\sigma(2)} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{\sigma(n)}$ est le réarrangement décroissant de la suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et où χ_i est la fonction caractéristique du sous-intervalle $[0, \mu(\Omega_{\sigma(1)})[$ de $[0, \mu(\Omega)]$ si $i = 1$, de

$$[\mu(\Omega_{\sigma(1)} \cup \ldots \cup \Omega_{\sigma(i-1)}), \mu(\Omega_{\sigma(1)} \cup \ldots \cup \Omega_{\sigma(i)})[\quad \text{si} \quad 1 \leqslant i < n$$

et de $[\mu(\Omega_{\sigma(1)} \cup \ldots \cup \Omega_{\sigma(n-1)}), \mu(\Omega)]$ si $i = n$.

Par contre, si $\mathfrak{M}$ est un facteur de type II_1 et Tr sa trace canonique, $\rho_Z(t)$ est la «1-t-ième valeur propre de Z» au sens de [20]. Il nous a paru utile de donner une définition du réarrangement décroissant d'un opérateur permettant de concevoir celui-ci comme l'«analogue non commutatif» de la notion usuelle de réarrangement décroissant.

1.3.4. – Soit $Z = Z^* \in \mathfrak{M}$. Si $\mathrm{Tr}(Z) = 0$, la proposition 1.2 (ii) implique $M_Z = \rho_Z(0) \geqslant 0$ et $m_Z = \rho_Z(T) \leqslant 0$. Posons $V(Z) = \rho_Z(0) - \rho_Z(T)$. On a, en notant $\|Z\|$ la norme *uniforme* de Z : $\|Z\| = \mathrm{Max}\,\{|M_Z|, |m_Z|\} \leqslant V(Z) \leqslant 2\,\|Z\|$. Malgré sa banalité, cette dernière inégalité se trouve être cruciale pour la suite.

Le lemme ci-dessous contient le lemme 4 de [1] :

LEMME 1.4. – *Supposons que $\mathfrak{M}$ n'ait pas de projecteurs minimaux. Soit $Z = Z^* \in \mathfrak{M}$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, il existe un projecteur $P \in \mathfrak{M}$, commutant à Z, et vérifiant :*

(i) $\mathrm{Tr}(1 - P) = t$,

(ii) $(Z\xi \mid \xi) \leqslant \rho_Z(t)\, \|\xi\|^2$ *pour* $\xi \in P(\mathfrak{H})$,

(iii) $(Z\xi \mid \xi) \geqslant \rho_Z(t)\, \|\xi\|^2$ *pour* $\xi \in (1 - P)(\mathfrak{H})$.

Preuve. – Soit $Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda$ la décomposition spectrale de Z. Posons $\lambda_0 = \rho_Z(t)$. On a $\mathrm{Tr}(1 - E_{\lambda_0}) \leqslant t$. Soit λ un réel vérifiant $\lambda < \lambda_0$. Comme

$$\mathrm{Tr}(1 - E_\lambda) \geqslant t,$$

il s'ensuit que $\mathrm{Tr}(1 - E_{\lambda_0^-}) = \lim\limits_{\substack{\lambda < \lambda_0 \\ \lambda \to \lambda_0}} \mathrm{Tr}(1 - E_\lambda) \geqslant t$. Comme $\mathcal{M}$ ne possède pas de projecteurs minimaux, il existe un projecteur $P \in \mathcal{M}$ tel que $1 - E_{\lambda_0} \leqslant 1 - P \leqslant 1 - E_{\lambda_0^-}$ et $\mathrm{Tr}(1 - P) = t$. Les inégalités $E_{\lambda_0^-} \leqslant P \leqslant E_{\lambda_0}$ impliquent que P commute à Z ainsi que (ii) et (iii). Q.E.D.

2. Noyau de la trace d'un facteur de type II_1.

Dans tout ce n°, $\mathcal{M}$ désigne un facteur fini continu, τ sa trace canonique et $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs.

Nous voulons montrer que tout élément à trace nulle $Z \in \mathcal{M}$ est une somme finie de commutateurs. Le premier pas consiste à réduire le problème au cas où Z est hermitien et porté par un projecteur suffisamment petit au sens suivant :

LEMME 2.1. – *Pour tout* $Z \in \mathcal{M}$ *avec* $\tau(Z) = 0$, *il existe des projecteurs* P_j *et des hermitiens* Z_j *dans* $\mathcal{M}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ *vérifiant*

$$Z_j = P_j Z_j P_j\,, \quad \tau(Z_j) = 0\,, \quad \tau(P_j) = \frac{1}{2}\,, \quad \|Z_j\| \leqslant 2\,\|Z\|$$

pour $j = 1, 2, 3, 4$ *et tels que* $Z - (Z_1 + Z_2) - i(Z_3 + Z_4)$ *soit une somme de deux commutateurs de la forme* $[X, Y]$ *avec* $\|X\| \leqslant \|Z\|$ *et* $\|Y\| \leqslant 1$.

Preuve. – Supposons d'abord Z hermitien et soient P_1, P_2 deux projecteurs de $\mathcal{M}$ commutant à Z et vérifiant $\tau(P_1) = \tau(P_2) = \frac{1}{2}$ (cf. lemme 1.4). Posons

$$Z_1 = P_1(Z - 2\tau(P_1 Z)) \quad \text{et} \quad Z_2 = P_2(Z - 2\tau(P_2 Z))$$

de sorte que $Z - (Z_1 + Z_2) = m(P_1 - P_2)$ avec $m = 2\tau(P_1 Z)$. Soit W une isométrie partielle de $\mathfrak{M}$ de projecteur initial P_2 et de projecteur final P_1. Alors, $P_1 - P_2 = [W, W^*]$ est un commutateur, d'où le résultat puisque $|m| \leqslant 2\,\|Z\|\,\tau(P_1) = \|Z\|$.

Le cas général s'obtient en considérant la décomposition $Z = Z' + iZ''$ avec Z' et Z'' hermitiens. Q.E.D.

Soient désormais P_1 un projecteur de $\mathfrak{M}$ avec $\tau(P_1) = \frac{1}{2}$ et Z_1 un hermitien de $\mathfrak{M}$ vérifiant $\tau(Z_1) = 0$ et $Z_1 = P_1 Z_1 P_1$. Nous voulons montrer que Z_1 est une somme de deux commutateurs. L'essentiel de notre argument, inspiré de [1], consiste à compléter Z_1 par une suite $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ad hoc où chaque Z_n est un hermitien à trace nulle dans une réduite convenable de $\mathfrak{M}$. Rappelons que la *réduite* de $\mathfrak{M}$ par un projecteur P de $\mathfrak{M}$ est la sous-algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}_P = \{X \in \mathfrak{M},\ X = PXP\}$ de $\mathfrak{M}$ (nous ne suivons donc pas la convention de Dixmier pour les sous-algèbres, mais celle de Sakai : l'unité de l'algèbre $\mathfrak{M}_P$, qui est P, est en général distincte de $1 \in \mathfrak{M}$).

Considérons d'abord P_1 comme terme initial d'une suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de projecteurs de $\mathfrak{M}$, deux à deux orthogonaux, avec $\tau(P_n) = 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, de sorte que $\sum_{n \in \mathbf{N}} P_n = 1$ (la somme converge fortement). Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous noterons $\mathfrak{M}_n$ (resp. $\mathfrak{M}_{n,n+1}$) la réduite de $\mathfrak{M}$ par P_n (resp. $P_n + P_{n+1}$).

Soient P_1' et P_1'' deux projecteurs orthogonaux équivalents de $\mathfrak{M}_1$, de somme P_1, et commutant à Z_1 (cf. lemme 1.4). Soient W_1' et W_1'' des isométries partielles dans $\mathfrak{M}_{1,2}$ avec

$$W_1'^* W_1' = P_1' \ , \quad W_1''^* W_1'' = P_1''$$

$$W_1' W_1'^* = P_2 = W_1'' W_1''^*$$

et posons

$$Z_2 = W_1' Z_1 W_1'^* + W_1'' Z_1 W_1''^* .$$

Il est clair que Z_2 est un hermitien à trace nulle de $\mathfrak{M}_2$; montrons que $Z_1 - Z_2$ est un commutateur dans $\mathfrak{M}_{1,2}$.

Considérons l'isométrie partielle $W_1 = W_1'^* W_1''$ de P_1'' vers P_1' et posons

$$X_1 = Z_1 W_1 + W_1^* Z_1 W_1'^* + Z_1 W_1''^*$$

$$Y_1 = W_1^* + W_1'' .$$

Alors,

$$\begin{aligned}
X_1 Y_1 &= Z_1(W_1 W_1^*) + W_1^* Z_1 (W_1'^* W_1^*) + Z_1 (W_1''^* W_1^*) \\
&\qquad + Z_1(W_1 W_1'') + W_1^* Z_1 (W_1'^* W_1'') + Z_1 (W_1''^* W_1'') \\
&= Z_1 P_1' + 0 + 0 + 0 + W_1^* Z_1 W_1 + Z_1 P_1'' \\
&= Z_1 + W_1^* Z_1 W_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 X_1 &= W_1^* Z_1 W_1 + (W_1^* W_1^*) Z_1 W_1'^* + W_1^* Z_1 W_1''^* \\
&\qquad + W_1'' Z_1 W_1 + (W_1'' W_1^*) Z_1 W_1'^* + W_1'' Z_1 W_1''^* \\
&= W_1^* Z_1 W_1 + 0 + W_1^* (P_1' Z_1 P_1'') W_1'^* + W_1'' (P_1'' Z_1 P_1') W_1 \\
&\qquad + W_1' Z_1 W_1'^* + W_1'' Z_1 W_1''^* \\
&= W_1^* Z_1 W_1 + 0 + 0 + 0 + W_1' Z_1 W_1'^* + W_1'' Z_1 W_1''^* \\
&= W_1^* Z_1 W_1 + Z_2
\end{aligned}$$

et on a bien $[X_1, Y_1] = Z_1 - Z_2$.

On notera que les calculs ci-dessus s'interprètent matriciellement comme suit relativement aux projecteurs P_1', P_1'' et P_2 et aux isométries partielles introduites : si

$$Z_1 P_1' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z_1 P_1'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$X_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad X_1Y_1 - Y_1X_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b) \end{pmatrix}$$

On recommence alors : soient P_2' et P_2'' deux projecteurs orthogonaux équivalents de $\mathfrak{M}_2$, de somme P_2 et commutant à Z_2. Soient $W_2' \in \mathfrak{M}_{2,3}$ une isométrie partielle de P_2' vers P_3 et de même W_2'' de P_2'' vers P_3. On pose :

$$Z_3 = W_2'Z_2W_2'^* + W_2''Z_2W_2''^*$$

qui est évidemment un hermitien à trace nulle dans $\mathfrak{M}_3$ et on construit comme ci-dessus X_2 et Y_2 dans $\mathfrak{M}_{2,3}$ avec $[X_2, Y_2] = Z_2 - Z_3$. On obtient pas à pas des suites $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{M}$ satisfaisant :

$$Z_n \in \mathfrak{M}_n \ ; \ X_n, Y_n \in \mathfrak{M}_{n,n+1},$$

$$\tau(Z_n) = 0 \ ; \ [X_n, Y_n] = Z_n - Z_{n+1}.$$

Notons d'une part que la suite $(\|Z_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas nécessairement bornée et, d'autre part, que les projecteurs $P_1', P_1'', P_2', P_2'', \ldots$ ne sont pas uniquement définis par les conditions qui précèdent. Nous allons maintenant préciser leur choix grâce au lemme ci-dessous qui utilise les notions introduites au § 1. Si $Z = Z^* \in \mathfrak{M}_P$, on notera ρ_Z^P le réarrangement décroissant de Z relatif à la restriction de τ à $\mathfrak{M}_P$; c'est une fonction définie sur $[0, \tau(P)]$.

LEMME 2.2. – *Soient* Q, R *deux projecteurs orthogonaux de* $\mathfrak{M}$ *tels que* $\tau(Q) = 2\tau(R)$. *Soit* $Z \in \mathfrak{M}_Q$ *un hermitien à trace nulle.*

Alors, il existe deux projecteurs orthogonaux équivalents Q' *et* Q'' *dans* $\mathfrak{M}$, *de somme* Q, *commutant à* Z, *et une isométrie partielle* W' (resp. W'') *de projecteur initial* Q' (resp. Q'') *et de projecteur final* R, *tels que* $S = W'ZW'^* + W''ZW''^*$ *soit un hermitien à trace nulle vérifiant* $V(S) \leqslant V(Z)$.

Preuve. – On peut supposer, sans perte de généralité que $Q + R = 1$, d'où $\tau(Q) = \frac{2}{3}$ et $\tau(R) = \frac{1}{3}\cdot$ D'après 1.4, il existe un projecteur $Q' \in \mathfrak{M}_Q$ qui commute à Z et vérifie :

(i) $\tau(Q - Q') = \frac{1}{3}$;

(ii) $(Z\xi|\xi) \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) \|\xi\|^2$ pour $\xi \in Q'(\mathfrak{H})$;

(iii) $(Z\xi|\xi) \geqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) \|\xi\|^2$ pour $\xi \in (Q - Q')(\mathfrak{H})$.

Posons $Q'' = Q - Q'$. Alors Q', Q'' sont des projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{M}$, de somme Q, et de trace $\frac{1}{3}$, donc équivalents à R dans $\mathfrak{M}$. Il existe alors des isométries partielles $W', W'' \in \mathfrak{M}$ telles que :

$$W'^*W' = Q' \; ; \; W''^*W'' = Q''$$
$$W'W'^* = W''W''^* = R .$$

Posons $Z' = W'ZW'^*$ et $Z'' = W''ZW''^*$. Alors $S = Z' + Z''$ est un hermitien à trace nulle, et nous voulons montrer que $V(S) \leqslant V(Z)$.

Remarquons tout d'abord que l'application $X \longmapsto W'XW'^*$ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_{Q'}$ sur $\mathfrak{M}_R$ qui échange les traces induites, de sorte que $\rho_{Z'}^R = \rho_{W'(Q'ZQ')W'^*}^R = \rho_{Q'ZQ'}^{Q'}$. De même, $\rho_{Z''}^R = \rho_{Q''ZQ''}^{Q''}$. Comparons $\rho_S^R(0)$ et $\rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)$. On a :

$$\begin{aligned}\rho_S^R(0) &\leqslant \rho_{Z'}^R(0) + \rho_{Z''}^R(0) = \rho_{Q'ZQ'}^{Q'}(0) + \rho_{Q''ZQ''}^{Q''}(0)\\ &\leqslant \rho_{Q'ZQ'}^{Q'}(0) + M_Z \qquad (\text{car } Q''ZQ'' \leqslant M_Z).\end{aligned}$$

Or $Q'ZQ' \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)Q'$ d'après ii), d'où $\rho_{Q'ZQ'}^{Q'}(0) \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)$ et, finalement :

$$\rho_S^R(0) \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) + M_Z . \tag{1}$$

Comparons maintenant $\rho_S^R\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)$. A cet effet, posons pour tout $\xi \in R(\mathfrak{H})$ de norme 1 : $\xi' = W'^*\xi$, $\xi'' = W''^*\xi$. On a $\|\xi'\| = 1$, $\xi' \in Q'(\mathfrak{H})$ et $(Z\xi'|\xi') \geqslant m_Z$. Comme $\|\xi''\| = 1$ et $\xi'' \in Q''(\mathfrak{H})$, on a $(Z\xi''|\xi'') \geqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)$ en vertu de ii). Alors, il vient :

$$(S\xi|\xi) = (W' Z W'^* \xi|\xi) + (W'' Z W''^* \xi|\xi)$$
$$= (Z\xi'|\xi') + (Z\xi''|\xi'') \geqslant m_Z + \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)$$

d'où finalement :

$$\rho_S^R\left(\frac{1}{3}\right) = \operatorname{Inf}\{(S\xi|\xi)\,,\ \xi \in R(\mathfrak{H})\,,\ \|\xi\| = 1\} \geqslant m_Z + \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right). \quad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) impliquent à leur tour :

$$V(S) = \rho_S^R(0) - \rho_S^R\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) + M_Z - \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) - m_Z$$

soit $V(S) \leqslant V(Z)$, ce qui achève de prouver le lemme. Q.E.D.

Revenons à la construction précédant le lemme 2.2. En choisissant les suites $(P'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(P''_n)_{n\in\mathbf{N}}$ conformément à ce lemme, on peut maintenant supposer que la suite $(V(Z_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée par $V(Z_1)$. La suite $(\|Z_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est alors bornée par $2\|Z_1\|$ en vertu de la remarque 1.3.4, et les constructions opérées impliquent que $\|X_n\| \leqslant 6\,\|Z_1\|$ et $\|Y_n\| \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Les termes de la suite $(X_{2k})_{k\in\mathbf{N}}$ sont dans des réduites de $\mathfrak{M}$ par les projecteurs deux à deux orthogonaux de la suite $(P_{2k} + P_{2k+1})_{k\in\mathbf{N}}$; comme ils sont uniformément bornés, la série $\sum_{k=1}^{\infty} X_{2k}$ converge commutativement pour la topologie forte vers un élément de norme uniforme égale à $\operatorname{Sup}_k \|X_{2k}\| \leqslant 6\,\|Z_1\|$. On peut donc poser

$$X_{\text{pair}} = \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k} \quad ; \quad Y_{\text{pair}} = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{2k}$$
$$X_{\text{imp}} = \sum_{k=1}^{\infty} X_{2k-1} \quad ; \quad Y_{\text{imp}} = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{2k-1}\,.$$

Alors, on a :

$$Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n - Z_{n+1}) = [X_{\text{pair}}, Y_{\text{pair}}] + [X_{\text{imp}}, Y_{\text{imp}}]$$

avec $\|X_{\text{pair}}\|$, $\|X_{\text{imp}}\| \leqslant 6\,\|Z_1\|$ et $\|Y_{\text{pair}}\|$, $\|Y_{\text{imp}}\| \leqslant 2$. Nous avons donc montré le résultat fondamental de ce travail qui s'énonce, compte tenu du lemme 2.1 :

THEOREME 2.3. – *Soient* $\mathfrak{M}$ *un facteur de type* II_1 *et* Z *un élément de* $\mathfrak{M}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\tau(Z) = 0$

(ii) Z *est somme de 10 commutateurs de la forme* $[X, Y]$ *avec* $\|X\| \leqslant 12\,\|Z\|$ et $\|Y\| \leqslant 2$.

Offrons-nous, pour la fin de ce paragraphe, une *digression.*

Un premier analogue multiplicatif du résultat que nous avons montré est un théorème de Broise : tout opérateur unitaire U_1 de $\mathfrak{M}$ est un produit de commutateurs multiplicatifs $S_j T_j S_j^* T_j^*$ où les S_j et les T_j sont des unitaires de $\mathfrak{M}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Rappelons sommairement la preuve de Broise. L'analogue du lemme 1.4 permet de supposer qu'il existe un projecteur P_1 de $\mathfrak{M}$ avec $U_1 - P_1 U_1 P_1 = 1 - P_1$ et $\tau(P_1) = 1/2$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite comme ci-dessus. Soient P_1' et P_1'' des projecteurs orthogonaux équivalents, commutant à U_1, et de somme P_1. On définit U_2 comme un produit de conjugués ad hoc de $U_1 P_1' + 1 - P_1'$ et $U_1 P_1'' + 1 - P_1''$, avec $U_2 - (1 - P_2) \in \mathfrak{M}_2$, et de telle sorte que $U_1 U_2^* - (1 - P_1 - P_2)$ s'interprète matriciellement (relativement à P_1', P_1'', P_2 et des isométries partielles convenables) comme un commutateur du type

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}^*$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^* \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^* \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,2}\,.$$

On définit par induction une suite d'unitaires $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $\mathfrak{M}$ avec $U_n - (1 - P_n) \in \mathfrak{M}_n$ et de telle sorte que $U_n U_{n+1}^* - (1 - P_n - P_{n+1})$ soit un commutateur dans le groupe unitaire de $\mathfrak{M}_{n,n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On montre enfin facilement que U_1, qui s'écrit comme le produit infini des $U_n U_{n+1}^*$, est un produit de deux commutateurs (ou, comme chez Broise, de quatre commutateurs du type STST avec $S = S^* = S^{-1}$ et $T = T^* = T^{-1}$). En résumé, tout élément du groupe unitaire de $\mathfrak{M}$ est un produit de 4 commutateurs : il n'y a ici aucun *problème de convergence,* puisque la norme de tout unitaire est 1.

Un second analogue multiplicatif est le suivant : soient $GL(\mathcal{M})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}$ et $DGL(\mathcal{M})$ son groupe dérivé ; soit $SL(\mathcal{M})$ le noyau du déterminant de Fuglede-Kadison Δ : $GL(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ (cf. [8], chap. I, § 6, n° 11); on a $SL(\mathcal{M}) = DGL(\mathcal{M})$ et le quotient de $SL(\mathcal{M})$ par son centre est donc un groupe simple en vertu de [16] (corollaire 6.6, p. 123). Montrons que $SL(\mathcal{M}) \subset DGL(\mathcal{M})$ l'inclusion opposée étant banale. Grâce au résultat de Broise et à une réduction facile analogue à celle du lemme 2.1, il suffit de prouver qu'un élément $G_1 \in GL(\mathcal{M})$ est un produit de commutateurs multiplicatifs lorsqu'on suppose que G_1 est positif, vérifie

$$\Delta(G_1) = \exp \tau(\operatorname{Log} G_1) = 1 ,$$

et qu'il existe un projecteur P_1 de dimension 1/2 tel que

$$G_1 - P_1 G_1 P_1 = 1 - P_1 .$$

Apportons tout d'abord une précision au lemme 2.2.

LEMME 2.4. — *Avec les notations du lemme 2.2, l'élément*

$$T = \operatorname{Log} \left\{ \exp \left(\frac{1}{2}\ W' Z W'^*\right) \exp(W'' Z W''^*)\ \exp \left(\frac{1}{2}\ W' Z W'^*\right)\right\}$$

vérifie $V(T) \leqslant V(Z)$.

Preuve. — Reprenons les notations du lemme 2.2. Un calcul simple montre que l'on a :

$$\exp \left(\frac{1}{2}\ W' Z W'^*\right) = Q + W'\ \exp \left(\frac{1}{2}\ Z\right) W'^*$$

et
$$\exp \left(\frac{1}{2}\ W'' Z W''^*\right) = Q + W''\exp \left(\frac{1}{2}\ Z\right) W''^* .$$

Posons $A = W' \exp \left(\frac{1}{2}\ Z\right) W'^*$ et $B = W'' \exp \left(\frac{1}{2}\ Z\right) W''^*$; on a : $T = \operatorname{Log}(AB^2 A)$.

Minorons tout d'abord m_T. On a $Q'' Z Q'' \geqslant \rho_Z^Q \left(\frac{1}{3}\right) Q''$ de de sorte que l'exponentielle du membre de gauche, calculée dans $\mathcal{M}_{Q''}$, est supérieure ou égale à $\exp\left(\rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)\right) Q''$, ce qui s'écrit encore $Q'' \exp Z\, Q'' \geqslant \exp\left(\rho_Z^Q\ \left(\frac{1}{3}\right)\right) Q''$. On en déduit

$$\mathrm{AW''(Q''\exp(Z)\,Q'')\,W''^*A} \geqslant \exp\left(\rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)\right) \mathrm{AW''Q''W''^*A}, \text{ i.e.}$$

$$\mathrm{AB^2A} \geqslant \exp\left(\rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)\right) \mathrm{W'\exp(Z)\,W'^*}.$$

Comme la fonction logarithme est croissante sur l'ensemble des hermitiens positifs et inversibles de $\mathfrak{M}_R$ (cf. [24], prop. 2.5.8, p. 28), on en déduit :

$$\mathrm{Log\,AB^2A} \geqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{R} + \mathrm{Log(W'\exp(Z)\,W'^*)},$$

soit
$$\mathrm{T} \geqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{R} + \mathrm{W'ZW'^*}.$$

Alors, $\quad m_T \geqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) + \rho^R_{W'ZW'^*}\left(\frac{1}{3}\right) \geqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) + m_Z .$

On a donc prouvé

$$m_T \geqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) + m_Z . \tag{1}$$

Majorons maintenant M_T . A cet effet, remarquons tout d'abord que l'on a, pour tout réel $t \in [0, 1]$:

$$\rho_{\mathrm{Log\,AB^2A}}(t) = \mathrm{Log}\,\mu_t(\mathrm{AB^2A}),$$

où μ_t désigne la fonction «t-ième valeur caractéristique» au sens de [9]

$$\begin{aligned} &= \mathrm{Log}\,\mu_t(|\mathrm{BA}|^2) \\ &= \mathrm{Log}\,[\mu_t(\mathrm{AB})]^2 \\ &= \mathrm{Log}\,[\mu_t(\mathrm{BA})]^2 \quad \text{(cf. [9], prop. 1.6)} \end{aligned}$$

de sorte que $\rho_{\mathrm{Log\,AB^2A}}(t) = \rho_{\mathrm{Log\,BA^2B}}(t)$ et, en particulier, $M_T = M_{\mathrm{Log\,BA^2B}}$. De l'inégalité $\mathrm{Q'ZQ'} \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{Q'}$, on déduit par un calcul analogue à celui qui a permis d'établir (1) que :

$$\mathrm{Log\,BA^2B} \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{R} + \mathrm{W''ZW''^*}$$

d'où
$$M_T = M_{\mathrm{Log\,BA^2B}} \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) + M_Z .$$

On a donc établi

$$M_T \leqslant \rho_Z^Q\left(\frac{1}{3}\right) + M_Z . \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) entraînent à leur tour : $V(T) \leqslant V(Z)$. Q.E.D.

Soient à nouveau G_1 et P_1 comme ci-dessus. On complète P_1 en une suite de projecteurs orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où chaque P_n est de dimension 2^{-n}. Posons $Z_1 = \operatorname{Log} G_1$, puis introduisons comme dans la preuve du théorème 2.3 des isométries partielles W'_1 et W''_1, de projecteurs initiaux orthogonaux, de somme P_1, et de projecteur final P_2. Posons

$$G_2 = \exp\left(\frac{1}{2} W'_1 Z_1 W'^*_1\right) \exp(W''_1 Z_1 W''^*_1) \exp\left(\frac{1}{2} W'_1 Z_1 W'^*_1\right).$$

Alors G_2 est un élément positif inversible qui vérifie $\Delta(G_2) = 1$ et $V(\operatorname{Log} G_2) \leqslant V(Z_1)$ (cf. lemme 2.4). De plus, $G_1 G_2^{-1} - (1 - P_1 - P_2)$ est un commutateur multiplicatif d'éléments de $\mathfrak{M}_{1,2}$; cela résulte du calcul schématisé matriciellement comme suit, où a et b sont respectivement écrits pour $\exp\left(\frac{1}{2} W'_1 Z_1 W'^*_1\right)$ et $\exp\left(\frac{1}{2} W''_1 Z_1 W''^*_1\right)$:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ab^2a \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1}b^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b^{-1}a^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ ba & 0 & 0 \\ 0 & ba & 0 \end{pmatrix}$$

On pose alors $Z_2 = \operatorname{Log} G_2$ et on recommence ; on construit ainsi une suite $(G_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments positifs inversibles vérifiant $\Delta(G_n) = 1$, $V(\operatorname{Log} G_n) \leqslant V(Z_1)$ et tels que

$$G_n G_{n+1}^{-1} - (1 - P_n - P_{n+1}) = X_n Y_n X_n^{-1} Y_n^{-1}$$

avec $X_n, Y_n \in \mathfrak{M}_{n,n+1}$.

On achève alors comme pour le groupe unitaire : G_1 s'écrit comme produit infini des $G_n G_{n+1}^{-1}$ et, comme $(\|X_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\|Y_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\|X_n^{-1}\|)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\|Y_n^{-1}\|)_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites bornées grâce à la condition $V(\operatorname{Log} G_n) \leqslant V(Z_1)$, la méthode de Broise permet d'écrire G_1 comme un produit de deux commutateurs multiplicatifs. Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION 2.5. – *Dans un facteur de type* II_1, *tout élément inversible de déterminant 1 est un produit de commutateurs multiplicatifs.*

Nous remercions G. Elliott et D. Handelmann qui nous ont suggéré de joindre la proposition 2.5 au présent travail.

Cette digression étant terminée, nous ne considérerons plus aucun commutateur multiplicatif ci-dessous.

3. Noyau de la trace centrale d'une algèbre de von Neumann finie.

Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann finie et notons $\mathfrak{Z}$ son centre. On désigne par τ la $\mathfrak{Z}$-trace canonique de $\mathcal{M}$ (cf. [8], chap. III, § 4, déf. 2). Nous allons démontrer, en utilisant la théorie usuelle de la réduction, que tout élément de trace centrale nulle est une somme finie de commutateurs.

Le premier pas consiste à se ramener au cas où $\mathcal{M}$ opère dans un espace de Hilbert séparable, grâce au lemme suivant :

LEMME 3.1. – *Supposons que* $\mathcal{M}$ *soit de genre dénombrable. Soit* $Z \in \mathcal{M}$ *tel que* $\tau(Z) = 0$. *Alors, il existe une sous-algèbre de von Neumann finie* $\mathcal{M}_1$ *de* $\mathcal{M}$, *contenant* Z, *pouvant agir dans un espace de Hilbert séparable, et dont la trace centrale* τ_1 *vérifie encore* $\tau_1(Z) = 0$.

Preuve. – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe (cf. [8], chap. III, § 5, corollaire du théorème 1) un ensemble fini I_n d'indices, et, pour tout $i \in I_n$, un réel positif $\lambda_{i,n}$ et un unitaire $U_{i,n} \in \mathcal{M}$ tels que :

$$\sum_{i \in I_n} \lambda_{i,n} = 1 \ ; \ \Big\| \sum_{i \in I_n} \lambda_{i,n} U_{i,n} Z U_{i,n}^* \Big\| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \qquad (1)$$

Soit $\mathcal{M}_1$ l'algèbre de von Neumann engendrée par Z et les $U_{i,n}$ ($i \in I_n$, $n \in \mathbf{N}$). C'est une sous-algèbre de von Neumann de $\mathcal{M}$; elle est donc finie et son centre est a fortiori de genre dénombrable. Comme $\mathcal{M}_1$ est engendrée par une famille dénombrable d'éléments, il résulte de [8] (chap. I, § 7, ex. 3) qu'elle peut agir dans un espace de Hilbert séparable. Montrons que $\tau_1(Z) = 0$ où τ_1 désigne la trace centrale de $\mathcal{M}_1$. Les relations (1) et la définition de $\mathcal{M}_1$ impliquent que 0 appartient à la fermeture normique de l'enveloppe convexe des UZU^*, où U parcourt le groupe des unitaires de $\mathcal{M}_1$; d'autre part, 0 est un élément central de $\mathcal{M}_1$; d'après [8] (chap. III, § 5, corollaire du théorème 1), on a nécessairement $\tau_1(Z) = 0$. Q.E.D.

On pourrait, dans le lemme ci-dessus, imposer à $\mathcal{M}_1$ d'être continue. En effet, soit E le plus grand projecteur discret du centre de $\mathcal{M}_1$; il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de projecteurs abéliens non nuls de $\mathcal{M}_1$, deux à deux orthogonaux, et de somme E. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe deux projecteurs orthogonaux E_n' et E_n'' de somme E_n et une isométrie partielle $W_n \in \mathcal{M}_E$, de support initial E_n' et de support final E_n''. Alors, l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathcal{M}_1$ et les W_n $(n \in \mathbf{N})$ vérifie les mêmes propriétés que $\mathcal{M}_1$ et est continue. Nous n'aurons pas besoin de cette remarque dans la suite.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal de ce travail :

THEOREME 3.2. – *Soient* $\mathcal{M}$ *une algèbre de von Neumann finie,* $\mathcal{Z}$ *son centre et* τ *sa* $\mathcal{Z}$*-trace canonique. Soit* $Z \in \mathcal{M}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\tau(Z) = 0$,

(ii) Z *est somme de 10 commutateurs de la forme* $[X,Y]$ *avec* $\|X\| \leqslant 12\,\|Z\|$ et $\|Y\| \leqslant 12$.

Preuve. – Il est clair que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Prouvons que (i) $\Longrightarrow$ (ii). Quitte à décomposer $\mathcal{M}$ en produit d'algèbres de von Neumann finies de genre dénombrable (cf. [8], chap. I, § 6, prop. 9 (iii)) et à appliquer le lemme 3.1, on peut supposer que $\mathcal{M}$ opère dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ séparable. D'après [8] (chap. II, § 6, corollaire du théorème 2) on peut enfin supposer qu'il existe un espace Ω métrisable compact, une mesure positive μ sur Ω, de support Ω, un champ μ-mesurable $\omega \longmapsto \mathfrak{H}(\omega)$ d'espaces hilbertiens non nuls sur Ω et un champ μ-mesurable $\omega \longmapsto \mathcal{M}(\omega)$ de facteurs dans les $\mathfrak{H}(\omega)$ tels que :

$$\mathfrak{H} = \int_\Omega^\oplus \mathfrak{H}(\omega)\, d\mu(\omega)$$

$$\mathcal{M} = \int_\Omega^\oplus \mathcal{M}(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Alors, $\mathfrak{Z}$ est l'algèbre des opérateurs diagonalisables. Comme $\mathcal{M}$ est finie, on peut supposer que $\mathcal{M}(\omega)$ est un facteur fini pour tout $\omega \in \Omega$, dont on notera τ_ω la trace canonique.

Décrivons τ au moyen des τ_ω. Tout d'abord, $\omega \longmapsto \tau_\omega$ est un champ mesurable de traces car, si φ est une trace normale finie fidèle sur $\mathcal{M}$, elle admet (cf. [8], chap. II, § 5, théorème 2) une décomposition mesurable $\varphi = \int_\Omega^\oplus \varphi_\omega\, d\mu(\omega)$ avec $\varphi_\omega \neq 0$ pour presque tout $\omega \in \Omega$, et on a : $\tau_\omega = \dfrac{1}{\varphi_\omega(1)} \varphi_\omega$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Pour $Z = \int_\Omega^\oplus Z(\omega)\, d\mu(\omega) \in \mathcal{M}$, $\tau(Z)$ est alors la fonction mesurable $\omega \longmapsto \tau_\omega(Z(\omega))$ (cf. [8], chap. III, § 4, exercice 4).

Soit $Z = \int_\Omega^\oplus Z(\omega)\, d\mu(\omega) \in \mathcal{M}$ un élément de norme $\leqslant 1$ tel que $\tau(Z) = 0$, et montrons que Z est une somme finie de commutateurs de la forme $[X,Y]$ avec $\|X\|, \|Y\| \leqslant 12$. Pour tout $p = 1, 2, \dots, \aleph_0$, la partie $\Omega_p = \{\omega \in \Omega, \dim \mathfrak{H}(\omega) = p\}$ est μ-mesurable (cf. [8], chap II, § 1, prop. 3).

Soit $P_p = \int_{\Omega_p}^\oplus d\mu(\omega) \in \mathfrak{Z}$; on a $\mathcal{M} = \bigoplus_{p \in \{1,2,\dots,\aleph_0\}} \mathcal{M}_{P_p}$ et on peut supposer, comme d'habitude, que $\omega \longmapsto \mathfrak{H}(\omega)$ est le champ constant correspondant à un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_0$ séparable. D'après [8] (chap. II, § 3, lemme 1) il existe des applications μ-mesurables $\omega \longmapsto T_i(\omega)$ $(i = 1, 2, \dots)$ de Ω dans la boule unité de $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ munie de la topologie forte telles que, pour tout $\omega \in \Omega$, les $T_i(\omega)$ engendrent $\mathcal{M}'(\omega)$. D'après un théorème d'Egoroff, l'espace Ω est, à un ensemble négligeable près, réunion d'une suite de parties compactes Ω_j telles que les restrictions à chaque Ω_j des applications $\omega \longmapsto T_i(\omega)$ soient continues. On peut donc supposer qu'il existe des applications continues $\omega \longmapsto T_i(\omega)$ $(i = 1, 2, \dots)$ de Ω dans la boule unité de $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ munie de la topologie forte telles que, pour tout $\omega \in \Omega$, les $T_i(\omega)$ engendrent $\mathcal{M}'(\omega)$. De manière analogue, on peut également supposer que $\omega \longmapsto Z(\omega)$ est continue pour la topologie forte de $\mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$.

Posons $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)\ ,\ \ \|X\| \leqslant 12\}$

et $\mathcal{C} = \Omega \times \underbrace{\mathcal{B} \times \ldots \times \mathcal{B}}_{20 \text{ termes}}.$

Munissons $\mathcal{B}$ de la topologie forte et $\mathcal{C}$ de la topologie produit ; alors $\mathcal{C}$ est un espace polonais.

Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser un théorème de sélection mesurable pour conclure. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments $(\omega, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_{10}, Y_{10}) \in \mathcal{C}$ qui vérifient :

(i) $X_i T_j(\omega) = T_j(\omega) X_i$ et $Y_i T_j(\omega) = T_j(\omega) Y_i$ pour $j \in \mathbf{N}$ et $i = 1, 2, \ldots, 10$;

(ii) $Z(\omega) = \sum_{i=1}^{10} [X_i, Y_i]$.

Les conditions (i) et (ii) définissent des sous-ensembles fermés de $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{E}$ est borélien. Comme $\tau(Z) = 0$, il existe un sous-ensemble μ-négligeable N de Ω tel que $\tau_\omega(Z(\omega)) = 0$ pour $\omega \in \Omega - N$. D'après le théorème 2.3 si $\mathfrak{M}(\omega)$ est de type II_1 et le lemme 2.3 de [22] si $\mathfrak{M}(\omega)$ est de type I, $Z(\omega)$ est somme de 10 commutateurs de la forme $[X, Y]$ avec $\|X\|, \|Y\| \leqslant 12$, pour $\omega \in \Omega - N$. Donc, pour $\omega \in \Omega - N$, l'ensemble des 20-uples

$$(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_{10}, Y_{10})$$

tels que $(\omega, X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_{10}, Y_{10}) \in \mathcal{E}$ est non vide.

D'après un théorème de sélection mesurable (cf. [8], appendice V) il existe une application μ-mesurable

$$\omega \longmapsto (X_1(\omega), Y_1(\omega), X_2(\omega), Y_2(\omega), \ldots, X_{10}(\omega), Y_{10}(\omega))$$

définie sur une partie μ-mesurable Λ de Ω, contenant $\Omega - N$, telle que

$$(\omega, X_1(\omega), Y_1(\omega), X_2(\omega), Y_2(\omega), \ldots, X_{10}(\omega), Y_{10}(\omega)) \in \mathcal{E}$$

pour $\omega \in \Lambda$. Posons $X_i(\omega) = 0$ (resp. $Y_i(\omega) = 0$) pour $\omega \in \Omega - \Lambda$. Alors $X_i = \int_\Omega^\oplus X_i(\omega)\, d\mu(\omega)$ et $Y_i = \int_\Omega^\oplus Y_i(\omega)\, d\mu(\omega)$ sont des éléments de $\mathfrak{M}$, et on a clairement $Z = \sum_{i=1}^{10} [X_i, Y_i]$ avec $\|X_i\|, \|Y_i\| \leqslant 12$. Q.E.D.

4. Corollaires.

Le théorème 3.2 s'écrit plus brièvement $sl(\mathfrak{M}) = \operatorname{Ker} \tau$. Si $\mathfrak{M}$ est un facteur, toute application linéaire $\sigma : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant $\sigma(XY) = \sigma(YX)$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{M}$ est donc égale à $\sigma(1)\tau$; en particulier, σ est continue. Plus généralement, on a :

COROLLAIRE 4.1. – *Soient* $\mathfrak{M}$ *une algèbre de von Neumann et* $\mathfrak{Z}$ *son centre. Soit* $\sigma : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ *une application linéaire vérifiant :*

(i) $\sigma(XY) = \sigma(YX)$ *pour tout* $X, Y \in \mathfrak{M}$,

(ii) $\sigma(Z) = Z$ *pour tout* $Z \in \mathfrak{Z}$.

Alors, σ est nécessairement ultrafaiblement et ultrafortement continue.

Preuve. – D'après [8] (chap. III, § 8, corollaire 3), $\mathfrak{M}$ est nécessairement finie. Soit τ sa trace centrale. Alors $\sigma, \tau : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ sont des applications linéaires vérifiant $\operatorname{Ker} \tau \subset \operatorname{Ker} \sigma$. Comme τ est surjective, il existe une application linéaire $\theta : \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ telle que $\sigma = \theta \circ \tau$. Pour $Z \in \mathfrak{Z}$, on a $Z = \sigma(Z) = \theta(\tau(Z)) = \theta(Z)$, d'où $\sigma = \tau$. Il s'ensuit que σ est ultrafaiblement et ultrafortement continue. Q.E.D.

Il y a donc *continuité automatique* des applications linéaires $\sigma : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{Z}$ vérifiant (i) et (ii) pour toute algèbre de von Neumann $\mathfrak{M}$; on pourrait ajouter ce résultat à la liste du § 11 dans le récent panorama de Dales [5].

Citons deux conséquences quant aux manières d'écrire l'élément générique d'une algèbre de von Neumann finie continue :

COROLLAIRE 4.2. – *Soit* $\mathfrak{M}$ *une algèbre de type* II_1

(i) *Tout élément de trace centrale nulle de* $\mathfrak{M}$ *peut s'écrire comme somme finie d'opérateurs de carrés nuls ;*

(ii) *Tout élément de* $\mathfrak{M}$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire (finie), à coefficients dans le centre de* $\mathfrak{M}$, *de projecteurs* P_i *tels que* $P_i \sim 1 - P_i$.

Preuve. – Voir [22] (théorème 3, p. 76). Si $\mathfrak{M}$ est un facteur, la seconde partie du corollaire répond alors par l'affirmative à la dernière question du § 3 de [21] (quand $\mathfrak{M}$ n'est pas un facteur, la réponse est toujours négative d'après [22], p. 78, remarque finale n° 4).

Notons $gl(\mathfrak{M})$ l'algèbre de Lie complexe définie par l'algèbre associative $\mathfrak{M}$; d'après 3.2, $gl(\mathfrak{M})$ est produit direct de son centre $\mathfrak{Z}$ avec l'algèbre dérivée $sl(\mathfrak{M})$. Quelles sont les dérivations de $gl(\mathfrak{M})$ et $sl(\mathfrak{M})$?

COROLLAIRE 4.3.

(i) *Toute dérivation de* $sl(\mathfrak{M})$ *est intérieure (et en particulier continue relativement à toute topologie raisonnable) ;*

(ii) *Toute dérivation de* $gl(\mathfrak{M})$ *est de la forme*

$$X \longmapsto [D, X] + \theta(\tau(X))$$

avec $D \in \mathfrak{M}$, θ *étant un endomorphisme de* $\mathfrak{Z}$ *et* τ *la* $\mathfrak{Z}$*-trace canonique de* $\mathfrak{M}$.

Cela résulte immédiatement de [18] et du théorème 3.2.

La première partie de ce corollaire est de même valable pour la forme réelle $su(\mathfrak{M})$ de $sl(\mathfrak{M})$ définie par $su(\mathfrak{M}) = [u(\mathfrak{M}), u(\mathfrak{M})]$ où $u(\mathfrak{M})$ désigne l'algèbre de Lie réelle : $\{X \in gl(\mathfrak{M}), X^* = -X\}$.

Quels sont les isomorphismes des algèbres de Lie introduites ? D'après [19] (théorème 3, p. 1267) on sait que, si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux algèbres de von Neumann de type II_1 et si $\phi : sl(\mathfrak{M}) \longrightarrow sl(\mathfrak{N})$ est un *-isomorphismė de Lie il existe un projecteur central E de $\mathfrak{M}$ [resp. F de $\mathfrak{N}$], un *-isomorphisme $\sigma : \mathfrak{M}_E \longrightarrow \mathfrak{N}_F$ et un *-anti-isomorphisme $\sigma' : \mathfrak{M}_{1-E} \longrightarrow \mathfrak{N}_{1-F}$ tels que $\sigma - \sigma'$ prolonge ϕ. On en déduit, en utilisant le théorème 3.2 et le corollaire p. 1267 de [19] :

COROLLAIRE 4.4. – *Pour tout *-isomorphisme de Lie*

$$\phi : gl(\mathfrak{M}) \longrightarrow gl(\mathfrak{N}),$$

il existe un projecteur central E *de* $\mathfrak{M}$ (resp. F de $\mathfrak{N}$), *un *-isomorphisme* $\sigma : \mathfrak{M}_E \longrightarrow \mathfrak{N}_F$, *un *-anti-isomorphisme*

$$\sigma' : \mathfrak{M}_{1-E} \longrightarrow \mathfrak{N}_{1-F}$$

*et une application *-linéaire* θ *du centre* $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{M}}$ *de* $\mathfrak{M}$ *dans le centre* $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{N}}$ *de* $\mathfrak{N}$ *tels que :* $\phi = \sigma - \sigma' + \theta \circ \tau$.

Les énoncés pour su et u sont laissés au lecteur.

Soient g une algèbre de Lie involutive complexe et $\mathrm{Aut}(g)$ le groupe des *-automorphismes de g. Une *forme réelle* de g est une algèbre de Lie involutive réelle dont la complexifiée est *-isomorphe à g. A tout élément $\alpha \in \mathrm{Aut}(g)$ de période deux, on peut associer la forme réelle $\{X \in g \mid \alpha(-X^*) = X\}$ de g, ce qui établit une bijection entre les classes de conjugaison d'éléments de période deux dans $\mathrm{Aut}(g)$ et les classes d'isomorphisme de formes réelles de g. Soit en particulier $g = gl(\mathfrak{M})$ avec $\mathfrak{M}$ un facteur de type II_1. Il résulte du corollaire 4.4 que, pour classer les formes réelles de g, il suffit de classer à conjugaison près d'abord les *-automorphismes de période deux de $\mathfrak{M}$ puis les *-antiautomorphismes de période deux de $\mathfrak{M}$. Lorsque $\mathfrak{M}$ est hyperfini, la solution du premier problème est due à Connes [4] ; le second a été résolu indépendamment par T. Giordano et V. Jones d'une part, par E. Störmer d'autre part (en cours de publication). On obtient en fin de compte le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.5. – *Soient* $\mathfrak{M}$ *le facteur hyperfini de type* II_1 *et* $r = s \oplus \mathbf{R}$ *une forme réelle de* $gl(\mathfrak{M})$. *Alors* s *est *-isomorphe à l'une des algèbres de la liste suivante :*

(i) $su(\mathfrak{M}\,; d, 1-d) = \{X \in sl(\mathfrak{M}) \mid (1-2P)X^*(1-2P) + X = 0\}$ *où* P *est un projecteur de dimension* $d \in [0, 1/2]$ *de* $\mathfrak{M}$;

(ii) $s' = \{X \in sl(\mathfrak{M}) \mid \alpha(X^*) + X = 0\}$ *où* α *est l'unique (à conjugaison près) *-automorphisme extérieur de période deux de* $\mathfrak{M}$;

(iii) $s'' = \{X \in sl(\mathfrak{M}) \mid \beta(X^*) - X = 0\}$ *où* β *est l'unique (à conjugaison près) *-antiautomorphisme de période deux de* $\mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{M}$ est un facteur de type II_1, $\mathfrak{M}$ est simple en tant qu'algèbre associative (voir [8], chap. III, § 5, n° 2) donc $sl(\mathfrak{M})$ est une algèbre de Lie complexe simple (cf. [14], théorème 1.3) et $su(\mathfrak{M})$ est une algèbre de Lie réelle simple [ce dernier point résulte banalement de la simplicité de $sl(\mathfrak{M}) \approx su(\mathfrak{M}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ car $\mathfrak{M}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre associative ; il n'y a donc pas besoin ici du théorème

2.15 de [14] qui s'applique à (presque) tout anneau, mais dont la preuve est fastidieuse]. Dans ce cas, la partie (i) du corollaire 4.3 est bien connue, et le corollaire 4.4 (dont l'énoncé se simplifie) reste valable pour les isomorphismes de Lie ne satisfaisant *pas* nécessairement $\phi(X)^* = \phi(X^*)$ (cf. [13] et [25], corollaire 4.1.21).

Le corollaire suivant est connu (cf. [15] et [28], p. 348 ; voir aussi [17]).

COROLLAIRE 4.6. – *Soit* $\mathfrak{M}$ *un facteur fini continu. Soit* G *son groupe unitaire, ou son groupe général linéaire ou le groupe dérivé de celui-ci. Soit* ρ *la représentation adjointe de* G *dans* $sl(\mathfrak{M})$ *définie par* $\rho(g)(X) = gXg^{-1}$.

Alors, ρ *est algébriquement irréductible.*

Preuve. – Soit V un sous-espace vectoriel de $sl(\mathfrak{M})$ tel que $gXg^{-1} \in V$ pour tout $g \in G$ et tout $X \in V$. Soit E un projecteur de $\mathfrak{M}$; pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, on a

$$(1 - E + \lambda E)\, X(1 - E + \lambda E)^* \in V\ ;$$

ces relations, pour $\lambda = 1, -1, i$ et $-i$, impliquent que $[X, E] \in V$. Comme tout $Y \in sl(\mathfrak{M})$ est une combinaison linéaire finie de projecteurs, on a $[X, Y] \in V$ pour tout $Y \in sl(\mathfrak{M})$, et V est un idéal de $sl(\mathfrak{M})$. Par suite, $V = \{0\}$ ou $V = sl(\mathfrak{M})$. Q.E.D.

En termes plus pédants, le théorème 2.3 et le corollaire 4.3 s'écrivent respectivement

$$H^1(gl(\mathfrak{M}), \mathbf{C}) \approx \mathbf{C}$$

et

$$H^1(gl(\mathfrak{M}), gl(\mathfrak{M})) \approx \mathbf{C}$$

pour tout facteur $\mathfrak{M}$ de type II_1. Il est alors naturel de se demander si d'autres espaces de cohomologie peuvent se calculer avec des techniques du même type. Par exemple, l'espace $H^2(gl(\mathfrak{M}), \mathbf{C})$ est-il nul ? (C'est vrai pour les facteurs de dimension finie et pour toutes les algèbres de von Neumann proprement infinies d'après [12]).

Dans un même ordre d'idées, il serait intéressant de connaître les sous-G-modules de $\Lambda^2\, sl(\mathfrak{M})$ pour G comme au corollaire 4.6 (si $\mathfrak{M} = M_n(\mathbf{C})$, on sait que $\Lambda^2\, sl(\mathfrak{M})$ est somme de 3 sous-modules irréductibles).

Pour le second problème mentionné dans l'introduction, on conjecture que tout $Z \in sl(\mathcal{M})$ est un commutateur. Peut-être les questions suivantes, moins ambitieuses, offriraient une voie de départ :

1) Supposons que $Z \in sl(\mathcal{M})$ soit normal et engendre une sous-algèbre de von Neumann abélienne maximale régulière dans $\mathcal{M}$ au sens de [7] ; est-ce que Z est un commutateur ?

2) Supposons que $\mathcal{M}$ soit engendré par la représentation régulière gauche $g \longmapsto U_g$ du groupe libre à deux générateurs $\mathbf{Z} * \mathbf{Z}$. Soit $g \in \mathbf{Z} * \mathbf{Z} - \{1\}$. L'unitaire U_g est-il un commutateur ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BROISE, Commutateurs dans le groupe unitaire d'un facteur, *J. Math. pures et appl.*, 46 (1967), 299-312.

[2] A. BROWN et C. PEARCY, Structure of commutators of operators, *Ann. Math.*, 82 (1965), 112-127.

[3] A. BROWN et C. PEARCY, Commutators in factors of type III, *Canad. J.*, 18 (1966), 1152-1160.

[4] A. CONNES, Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type II_1, *Acta. Sci. Math.*, 39 (1977), 39-66.

[5] H.G. DALES, Automatic continuity: a survey, *Bull. London Math. Soc.*, 10 (1978), 129-183.

[6] D. DECKARD et C. PEARCY, On continuous matrix – valued functions on a stonian space, *Pac. J. Math.*, 14 (1964), 857-869.

[7] J. DIXMIER, Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini, *Ann. Math.*, 59 (1954), 279-286.

[8] J. DIXMIER, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann), 2ème édition – Gauthier-Villars 1969.

[9] Th. FACK, Sur la notion de valeur caractéristique, Préprint.

[10] H. HALPERN, Commutators in properly infinite von Neumann algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 139 (1969), 55-73.

[11] H. HALPERN, Essential central range and self-adjoint commutators in properly infinite von Neumann algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 228 (1972), 117-146.

[12] P. de la HARPE, Les extensions de $gl(\mathrm{E})$ par un noyau de dimension finie sont triviales, *J. Functional Analysis,* 33 (1979), 362-373.

[13] R.A. HOWLAND, Lie isomorphisms of derived rings of simple rings, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 145 (1969), 383-396.

[14] I.N. HERSTEIN, Topics in ring theory, *Chicago Lectures in Mathematics,* 1969.

[15] I.N. HERSTEIN, Lie and Jordan structures in simple associative rings, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 67 (1961), 517-531.

[16] C. LANSKI, Group of units of a simple ring, *J. of algebra,* 16 (1970), 108-28.

[17] A. LIEBERMANN, Adjoint representations of factor groups, *Michigan Math. J.,* 24 (1977), 109-113.

[18] C.R. MIERS, Lie derivations of von Neumann algebras, *Duke Math. J.,* 40 (1973), 403-409.

[19] C.R. MIERS, Derived ring isomorphisms of von Neumann algebras, *Canad. J. Math.,* 25 (1973), 1254-1268.

[20] F.J. MURRAY et J. von NEUMANN, On rings of operators, *Ann. of Math.,* 37 (1936), 116-229.

[21] C. PEARCY et D. TOPPING, Sums of small numbers of idempotents, *Michigan Math. J.,* 14 (1968), 453-465.

[22] C. PEARCY et D. TOPPING, Commutators and certain II_1-factors, *J.F.A.,* 3 (1969), 69-78.

[23] C. PEARCY et D. TOPPING, On commutators in ideals of compact operators, *Michigan Math. J.,* 18 (1971), 247-252.

[24] D. RUELLE, Statistical mechanics, Benjamin (1969).

[25] S. SAKAI, C*-algebras and W*-algebras, Springer, 1971.

[26] K. SHODA, Einige Sätze über Matrizen, *Jap. J. Math.,* 13 (1936), 395-406.

[27] H. SUNOUCHI, Infinite Lie rings, *Tohoku Math. J.*, 8 (1956). 291-307.

[28] D. TOPPING, Transcendental quasi-nilpotents in operator algebras, *J.F.A.*, 2 (1968), 342-351.

Manuscrit reçu le 6 février 1980.

Th. FACK,
Laboratoire de Mathématiques fondamentales
Tour 45-46, 3ème étage
Université Pierre et Marie Curie
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.

P. de la HARPE,
Section de Mathématiques
Université de Genève
2-4, rue de Lièvre
C.P. 124
1211 – Genève 24 (Suisse).