ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

WILLEM T. VAN EST

Sur le groupe fondamental des schémas analytiques de variété à une dimension

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 2 (1980), p. 45-77

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_2_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 2 (1980), 45-77.

SUR LE GROUPE FONDAMENTAL DES SCHÉMAS ANALYTIQUES DE VARIÉTÉ A UNE DIMENSION

par Willem T. van EST

L'objectif de cet article est de démontrer qu'un schéma de variété analytique (s.v.a.) connexe et simplement connexe à une dimension est un arbre analytique. (Pour les définitions voir ci-dessous et la référence [3].)

Les applications immédiates du théorème concernent la théorie des feuilletages. Rappelons que le schéma quotient $M/\mathcal{F}$ d'un feuilletage analytique $\mathcal{F}$ de co-dimension 1 sur une variété analytique M est un s.v.a. de dimension 1 (1). Puisque le groupe fondamental de $M/\mathcal{F}$ est un quotient de celui de M (M étant supposée connexe), on obtient parmi les conséquences le théorème bien connu de Hæfliger [8] sur les feuilletages analytiques de co-dimension 1. Ainsi le théorème de Hæfliger s'avère un théorème de géométrie intrinsèque des s.v.a..

Puisque tout s.v.a. connexe de dimension 1 s'écrit, à une équivalence près, comme un couple (A;T) où A est un arbre et T est un sous-groupoïde ouvert du groupoïde topologique Γ_A de tous les germes de transition $A \to A$ [8], l'étude des s.v.a. de dimension 1 se réduit à une étude de la géométrie analytique des arbres analytiques, étude amorcée déjà par Hæfliger et Reeb [10]. En particulier les arbres analytiques dans lesquels toute transition admet un prolongement unique à domaine maximal — dits arbres complètement serrés — jouissent de la propriété remarquable que l'ensemble des transitions maximales possède une structure de groupe local intégrable au sens de Malcev [12]. C'est surtout à cette propriété que tient le théorème énoncé au début.

(1) A présent il y a diverses définitions de la notion de quotient d'une variété par rapport à un feuilletage, toutes apparentées entre elles, mais dont les conditions d'applicabilité diffèrent légèrement de l'une à l'autre (voir [2], [3], [13], [14], [15], [19]).

Les idées sous-jacentes de cet article ont été exposées dans les stades successifs de leur développement lors des rencontres à Schnepfenried (Haute-Alsace) (1978), Amsterdam (1978), et Mulhouse (1979).

Je tiens à témoigner ma reconnaissance envers G. Reeb qui, par son intuition géométrique, m'a été un guide sûr.

0. Terminologie et notations.

Dans un espace topologique tout ouvert connexe non vide sera dit *domaine.* Les *composantes connexes* d'un espace localement connexe sont les domaines maximaux.

Un homéomorphisme $\tau : U \to V$, où U, V sont des domaines dans les espaces respectifs X, Y, sera dit *transition;* par abus de notation on écrira souvent $\tau : X \to Y$.

Soient $\tau_1 : X \to Y$, $\tau_2 : Y \to Z$ des transitions. Alors le produit $\tau_1\tau_2 : X \to Z$ n'est une transition que si $\operatorname{im} \tau_1 \cap \operatorname{dom} \tau_2$ est un domaine. A noter que la désignation $\tau_1\tau_2$ pour le produit signifie que *nous considérons les transitions comme des opérateurs à droite;* néanmoins les notations employées ne seront pas toujours adaptées à cette convention.

La notation $\tau_1 \subset \tau_2$ signifie que $\operatorname{dom} \tau_1 \subset \operatorname{dom} \tau_2$ et que $\tau_1 = \tau_2|\operatorname{dom} \tau_1$. De plus, pour deux transitions τ_1, τ_2 telles que $D := \operatorname{dom} \tau_1 \cap \operatorname{dom} \tau_2 \neq \emptyset$, et que $\tau_1|D = \tau_2|D$, $\tau_1 \cup \tau_2$ est défini par $\tau_1 \cup \tau_2|\operatorname{dom} \tau_i = \tau_i$, $\operatorname{dom}(\tau_1 \cup \tau_2) = \operatorname{dom} \tau_1 \cup \operatorname{dom} \tau_2$. De façon analogue on définit $\tau_1 \cap \tau_2$.

Soient τ_1, τ_2 des transitions $X \to Y$. On écrit $\tau_1 = \tau_2$ q.p. s'il y a un ouvert non vide sur lequel τ_1 et τ_2 coïncident.

Dans le cas où les espaces topologiques sont doués d'une structure de variété $C^k (0 \leqslant k \leqslant \omega)$ (éventuellement non séparée) les transitions seront supposées C^k-difféomorphes.

1. Arbres topologiques.

Un espace topologique X connexe et localement connexe sera dit *arbre topologique* si l'intersection de deux domaines est toujours connexe (éventuellement vide). Par suite dans un arbre topologique l'intersection d'un nombre fini d'ouverts connexes est connexe.

Les variétés algébriques sur un corps algébriquement clos munies de la topologie de Zariski fournissent des exemples d'arbres topologiques.

Dans la catégorie des complexes simpliciaux on définit la notion d'arbre simplicial comme complexe qui, avec la topologie d'Alexandroff ([2]), est un arbre topologique. Les arbres combinatoires sont les complexes simpliciaux classiques ([3]) de dimension 1 qui sont des arbres simpliciaux.

Pour les arbres topologiques on a le théorème de Helly que voici.

PROPOSITION 1.1 (Helly). — *Soit* X *un arbre topologique et* U_0, U_1, U_2 *un triple de domaines tel que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2$. *Alors* $U_0 \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

En effet $U_0 \cap U_1$ étant non vide, $U = U_0 \cup U_1$ est un domaine, et donc $D := U \cap U_2$ est connexe. Puisque

$$U_i \cap D = U_i \cap U \cap U_2 = U_i \cap U_2 \neq \emptyset \quad (i = 0, 1),$$

et que $D = (U_0 \cap D) \cup (U_1 \cap D)$, il faut, en tenant compte de la connexité de D, que $(U_0 \cap D) \cap (U_1 \cap D) = D \cap (U_0 \cap U_1)$ soit non vide. Donc $U_2 \cap (U_0 \cap U_1)$ est non vide.

Par récurrence on obtient le

COROLLAIRE. — *Soit* X *un arbre topologique et* $U_1, \ldots, U_n$ *un n-uple de domaines tel que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset \, (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$. *Alors* $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \neq \emptyset$.

De la définition d'arbre il s'ensuit que tout sous-domaine d'un arbre est encore un arbre.

Soient X_1 un arbre, $X_0 \subset X_1$ un sous-domaine, $U \subset X_1$ un ouvert, et $U = \bigcup_j U_j$ la décomposition de U en composantes connexes U_j. Alors $\bigcup_j (U_j \cap X_0)$ est une décomposition de $U \cap X_0$ en ouverts-fermés. Puisque $U_j \cap X_0$ est connexe pour tout j, il s'ensuit que

(*) $U_j \cap X_0$ est une composante connexe de $U \cap X_0$ si $U_j \cap X_0 \neq \emptyset$.

Soit l'espace X réunion d'une collection $\{X_i\}$ ordonnée (par inclusion) d'arbres ouverts X_i, et soit U un domaine dans X. Choisissons pour un index i fixe, tel que $U \cap X_i \neq \emptyset$, une composante connexe U_i de $U \cap X_i$, et désignons, pour tout $j \geqslant i$, la composante connexe de

([2]) C'est la topologie dont les fermés sont les sous-complexes.
([3]) Un complexe simplicial est dit classique s'il est isomorphe à un sous-complexe du complexe des parties finies de l'ensemble des sommets.

$U \cap X_j$, qui contient U_i, par U_j. $\{U_j | j \geqslant i\}$ est une collection ordonnée par inclusion. En remplaçant dans la remarque (*) ci-dessus, X_0 par $X_j (j \geqslant i)$ et X_1 par X_k $(k \geqslant j)$, on trouve que $U_k \cap X_j$ est une composante connexe de $(U \cap X_k) \cap X_j = U \cap X_j$. En tenant compte de l'inclusion $U_k \supset U_j$, il en découle que $U_k \cap X_j = U_j$. Donc $U^\circ = \bigcup_{k \geqslant i} U_k$ est un sous-domaine de U tel que

$$U^\circ \cap X_j = \left(\bigcup_{k \geqslant i} U_k\right) \cap X_j = \left(\bigcup_{k \geqslant j} U_k\right) \cap X_j = \bigcup_{k \geqslant j} (U_k \cap X_j) = U_j .$$

Chaque U_j étant ouvert-fermé dans $U \cap X_j$, il s'ensuit que $U^\circ \cap X_j$ est ouvert-fermé dans $U \cap X_j$, et par conséquent on obtient, par passage à la limite, que U° est ouvert-fermé dans U, d'où $U = U^\circ$. Ainsi nous avons trouvé que pour tout domaine $U \subset X$, $U \cap X_j = U_j$ est connexe.

Soient maintenant U_0, U_1 deux domaines dans X. Puisque $U_i \cap X_j$ est connexe, et que X_j est un arbre,

$$(U_0 \cap X_j) \cap (U_1 \cap X_j) = (U_0 \cap U_1) \cap X_j$$

est connexe. Donc par passage à la limite $U_0 \cap U_1$ est connexe, d'où la

PROPOSITION 1.2. — *Un espace* X, *qui est réunion d'une collection ordonnée par inclusion d'arbres ouverts, est un arbre topologique.*

A part un principe de construction d'arbres topologiques par limite inductive, il y a aussi un principe de construction par recollement que voici.

PROPOSITION 1.3. — *Soit* $X = X_1 \cup X_2$, *où les* X_i *sont des sous-arbres ouverts tels que* $X_1 \cap X_2$ *soit un domaine. Alors* X *est un arbre topologique.*

Tout d'abord nous allons démontrer que pour tout domaine $U \subset X$, les ouverts $U_i := U \cap X_i$, $(i=1,2)$, et $U_{12} := U_1 \cap U_2 = U \cap X_1 \cap X_2$ sont connexes.

En effet, si l'un des U_i est vide, l'assertion découle de la définition d'arbre.

Supposons maintenant que les U_i soient non vides tous les deux. U étant connexe, il faut que $U_1 \cap U_2 = U \cap X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$. Supposons de plus que C_{12} soit une composante connexe de $U_1 \cap U_2$, et que $C_i (i=1,2)$ soit la composante de U_i qui contient C_{12}. D'après la remarque (*) ci-devant, $C_i \cap X_1 \cap X_2 = C_{12}$. Posons $C = C_1 \cup C_2$, alors

$$C \cap X_i = C_i \cup (C_j \cap X_i) = C_i \cup C_{12} = C_i,\ i \neq j .$$

Puisque C_i est ouvert-fermé dans $U \cap X_i = U_i$, il s'ensuit que $C (\neq \emptyset)$

est ouvert-fermé dans U, et donc $U = C$. Par suite $U_i = C_i$, $U_1 \cap U_2 = C_{12}$.

Supposons maintenant que U, V soient des domaines. Il faut prouver que $U \cap V$ soit connexe. Les décompositions

$$U = U_1 \cup U_2, \quad V = V_1 \cup V_2$$

entraînent la décomposition $U \cap V = (U_1 \cap V_1) \cup (U_2 \cap V_2)$.

Les X_i étant des arbres, les $U_i \cap V_i$ sont connexes. Donc si l'un des $U_i \cap V_i$ est vide, la connexité de $U \cap V$ est vérifiée. Si les $U_i \cap V_i$ sont non vides tous les deux, cela entraîne que V_1, V_2, U_1, U_2 sont non vides, et que $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap X_{12}$, $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap X_{12}$ sont non vides en vertu de la connexité de V et de U. En appliquant la proposition de Helly (1.1) au triple U_1, V_1, X_{12} on trouve que

$$\begin{aligned} U_1 \cap V_1 \cap X_{12} &= (U_1 \cap X_{12}) \cap (V_1 \cap X_{12}) = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2) \\ &= (U_1 \cap V_1) \cap (U_2 \cap V_2) \neq \varnothing . \end{aligned}$$

En tenant compte de la connexité de $U_i \cap V_i$, il s'ensuit que $U \cap V$ est connexe.

Comme nous avons déjà remarqué, la proposition précédente contient un principe de construction par recollement. En effet soit $\tau : X_0 \to X_1$ une transition d'arbres. En recollant X_0 à X_1 par τ, on obtient l'amalgame $X_0 \underset{\tau}{*} X_1$ avec les plongements canoniques $\rho_i : X_i \to X_0 \underset{\tau}{*} X_1$ tels que $\tau = \rho_0 \rho_1^{-1}$, $\tau^{-1} = \rho_1 \rho_0^{-1}$ (les ρ_i sont considérés comme des opérateurs à droite). Évidemment les $\rho_i(X_i)$ sont des sous-arbres ouverts de l'amalgame, et

$$\rho_0(X_0) \cap \rho_1(X_1) = \rho_0(\operatorname{dom} \tau) = \rho_1(\operatorname{im} \tau)$$

est un domaine. Donc $X_0 \underset{\tau}{*} X_1$ est un arbre.

Supposons de plus qu'une transition d'arbres $\sigma : X_0 \to X_2$ soit donnée. Alors $\rho_0^{-1}\sigma$ est une transition $X_0 \underset{\tau}{*} X_1 \to X_2$, et par suite $\left(X_0 \underset{\tau}{*} X_1\right) \underset{\rho_0^{-1}\sigma}{*} X_2$ est un arbre. Par abus de notation on écrira

$$\left(X_0 \underset{\tau}{*} X_1\right) \underset{\sigma}{*} X_2$$

ou $\overset{2}{\underset{i=0}{*}} X_i$ si aucune confusion sur les transitions recollantes n'est à craindre.

Soit $\{X_i ; i \in I\}$ une collection d'arbres et soit donnée, pour tout $i \in I$, une transition $\tau_i : X_0 \to X_i$. Par récurrence (éventuellement transfinie) on définit l'amalgame $\underset{j \in \{0\} \cup I}{\ast} X_j$; d'après les propositions 1.2, 1.3 c'est un arbre topologique.

Soit maintenant J un arbre combinatoire dirigé, c'est-à-dire J est un ensemble muni d'une application $\pi : J \to J$ à unique point fixe 0, et tel que pour tout $j \in J$ on a $\pi^{n_j}(j) = 0$ pour un exposant n_j convenable. Supposons qu'à tout $j \in J$ soit associé un arbre topologique X_j et à tout couple $\pi(j), j$ $(j \neq 0)$ une transition $\tau_j : X_{\pi(j)} \to X_j$. Alors en recollant, à l'aide des τ, à X_0 les X_{j_1} pour lesquels $0 = \pi(j_1)$, puis aux X_{j_1} les X_{j_2} avec $j_1 = \pi(j_2)$ et ainsi de suite, on obtient l'amalgame sur J, $\underset{j \in J}{\ast} X_j$, des arbres X_j. Les propositions 1.2 et 1.3 montrent encore que $\underset{j \in J}{\ast} X_j$ est un arbre topologique.

Plus généralement on a

Proposition. — *Soit $\mathcal{X} = \{X_i\}$ un recouvrement en arbres ouverts de l'espace* X, *tel que toute intersection $X_i \cap X_j$ soit connexe. Alors* X *est un arbre topologique si et seulement si le complexe de Čech classique* (3) *associé à* $\mathcal{X}$ *est un arbre simplicial.*

Puisque nous n'aurons pas besoin de la proposition dans la suite nous en supprimons la démonstration.

2. Arbres différentiables.

Un arbre topologique A sera dit *différentiable de classe* $C^k (0 \leqslant k \leqslant \omega)$ si A est muni d'une structure de variété C^k (en général non séparée).

Puisque tout domaine dans un arbre topologique est encore un arbre topologique et que toute variété contient des boules ouvertes, il s'ensuit qu'un arbre différentiable est de dimension 1.

Parmi les variétés de dimension 1 les arbres sont caractérisés par la

Proposition 2.1. — *Pour qu'une variété* A *de dimension* 1 *soit un arbre, il faut et il suffit que chaque point de* A *soit point de dissection.*

En effet supposons que l'ouvert $A - \{a\}$, $a \in A$, soit connexe, et que $I \ni a$ soit un intervalle ouvert. Alors $I - \{a\}$ se décompose en deux composantes, donc $(A - \{a\}) \cap I$ n'est pas connexe; contradiction.

Réciproquement soit A une variété dont chaque point est point de dissection. Alors si U, V sont des domaines tels que $U \cap V \neq \varnothing$, $U \cap V$ est un ouvert convexe ([3]) et donc connexe ([4]).

Les propositions 1.2 et 1.3 sont valables aussi dans le cadre C^k. Puisque tout intervalle réel ouvert est un arbre topologique, on peut construire en abondance des arbres C^k. En effet tout arbre C^k s'obtient par un procédé (éventuellement transfini) de recollement successif et passage à la limite, à partir d'intervalles ouverts.

Pour le reste de ce paragraphe on se place dans le cadre C^k pour un k fixe.

Une immersion d'arbres $\sigma : A \to B$ sera appelée un *resserrement.* Le produit de deux resserrements est un resserrement. Dans le cas où A et B sont la droite réelle, σ est en même temps un plongement, puisqu'une fonction réelle sur $\mathbf{R}$ qui est localement strictement monotone l'est globalement. En général il peut arriver qu'un resserrement ne soit pas injectif. Par exemple, soit A l'amalgame de deux exemplaires $\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{R}_2$ de $\mathbf{R}$ recollés par la transition $\xi_2 = \tau(\xi_1) = \xi_1$, $\xi_1 < 0$, alors l'application $\sigma : A \to \mathbf{R}$, définie par $\xi = \sigma(\xi_i) = \xi_i$ sur chaque $\mathbf{R}_i$, est un resserrement non injectif.

Pour formuler un critère permettant de reconnaître si un resserrement est un plongement ou non, nous avons besoin d'une notion introduite dans [10] et [3].

Un point b d'un arbre sera appelé un *point de branchement* s'il existe $b' \neq b$ tel que tout voisinage de b rencontre tout voisinage de b'. Evidemment b' est aussi un point de branchement ; b et b' seront dits *associés* et le couple b, b' sera appelé un *couple associé.*

CRITÈRE. — *Pour qu'un resserrement* $\sigma : A \to B$ *soit un plongement il faut et il suffit que pour tout couple associé* b, b' *on ait* $\sigma(b) \neq \sigma(b')$.

Remarquons d'abord que l'on n'a qu'à démontrer la partie suffisante du critère. De plus l'assertion du critère ne concerne que l'aspect topologique du resserrement. Avant d'aborder la démonstration une suite de remarques s'impose.

(1) *Il suffit de prouver le critère pour* A *à branchement fini.*

En effet, pour un A quelconque, tout couple de points x, y est contenu dans un sous-domaine A' à branchement fini ([3]). Puisque tout point de

([4]) En s'appuyant sur la proposition 10.1.1 de [3] on prouve facilement que dans un ouvert convexe tout couple de points est contenu dans un sous-domaine.

branchement de A' en est un pour A, le critère impliquerait que $\sigma|A'$ est un plongement et par suite $\sigma(x) \neq \sigma(y)$ si $x \neq y$. Donc σ est injectif.

Soit D un sous-domaine de l'arbre A. Un point frontière p de D sera dit respectivement *point frontière associé à* D ou *point frontière terminal* suivant le cas qu'il existe $q \in D$ qui soit associé à p ou non.

(2) *Si* D *est un intervalle ouvert, alors à tout point frontière terminal* p *de* D *est associé un bout* $\beta_D(p)$ *de* D *tel que : toute suite* $d_n \in D$ *qui converge vers* $\beta_D(p)$ ([5]), *converge vers* p, *et vice versa.*

En effet soit $J \ni p$ un intervalle ouvert, alors $J \cap D$ est connexe et c'est donc un sous-intervalle de J qui contient p dans sa frontière. Par suite p est situé à un bout $\bar{\beta}(p)$ de $J \cap D$. Si $q \in D$ était situé au bout $\bar{\beta}(p)$ de $J \cap D$, p serait associé à D. Donc $\bar{\beta}(p)$ détermine un bout $\beta_D(p)$ de D. Par conséquent : toute suite de D qui converge vers $\beta_D(p)$ est presqu'entièrement contenue dans $J \cap D$ et converge en conséquence vers $\bar{\beta}(p)$, et converge donc vers p, et vice versa.

(3) *Pour tout couple associé* p, q *et tout voisinage* U *de* q, *il existe un intervalle ouvert* $J \subset U$ *tel que* p, q *soient des points frontières terminaux de* J *et tel que* $\beta_J(p) = \beta_J(q)$.

On peut supposer que U soit un intervalle ouvert. Pour tout intervalle ouvert $V \ni p$, $J = V \cap U$ est non vide et donc connexe. C'est donc un sous-intervalle de V et de U à points adhérents p, q. Si $p \in J$ alors $p \in U$, et de plus $p \neq q$. U étant de Hausdorff, p et q pourraient être séparés par des voisinages convenables. Donc $p \notin J$, et de même $q \notin J$, ou p, q sont des points frontières de J dans respectivement V, U. Si $\beta_J(p) \neq \beta_J(q)$, ils pourraient être séparés dans J par un $r \in J$, donc $\beta_J(p)$, $\beta_J(q)$ seraient séparés par r dans A, et par suite p, q seraient séparés dans A. Donc $\beta_J(p) = \beta_J(q)$ et l'assertion s'ensuit.

(4) *Soient* p, q *un couple associé et* $\sigma : A \to B$ *une application continue d'arbres. Alors* $\sigma(p) = \sigma(q)$ *ou bien* $\sigma(p)$, $\sigma(q)$ *est un couple associé.*

Immédiat.

(5) *Soit* $\sigma : A \to B$ *une application continue d'arbres tel que* $\sigma(a) \neq \sigma(a')$ *pour tout couple associé* a, a'. *Si* D *est un domaine tel que* $\sigma|D$ *soit un*

([5]) Pour la notion de « bout » et de « convergence vers un bout » voir p. ex. H. Hopf : Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen, Comm. Math. Helv. 16 (1943/44), p. 84 = Selecta Heinz Hopf (Springer 1964) p. 247.

plongement ouvert, alors σ *applique un point frontière terminal respectivement associé à* D *sur un point frontière terminal de* $\sigma(D)$ *respectivement associé à* $\sigma(D)$.

Soit p un point frontière terminal, alors une suite $d_n \in D$ qui converge vers p n'admet aucun point limite dans D (un tel point limite serait associé à p). Puisque $\sigma|D$ est un plongement, $\sigma(d_n)$ n'admet aucun point limite dans $\sigma(D)$. D'autre part $\sigma(d_n) \to \sigma(p)$ par continuité. Donc $\sigma(p) \notin D$, par suite $\sigma(p)$ est dans la frontière de $\sigma(D)$.

Supposons maintenant que p soit associé à $q \in D$. D'après les remarques (3) et (2), il existe un sous-intervalle ouvert $J \subset D$ tel que p, q soient des points frontières terminaux de J et que toute suite $d_n \in J$ qui converge vers q, converge vers p aussi. En vertu de l'hypothèse et la remarque (4), $\sigma(p)$, $\sigma(q)$ est un couple associé terminal à $\sigma(J)$. Si $\sigma(p) = \sigma(r)$, $r \in D$, alors r, q est un couple associé terminal à J, puisque $\sigma|D$ est un plongement. Donc une suite $d_n \in J$ convergente vers r, est en même temps convergente vers q, et donc en même temps convergente vers p, ce qui entraîne que p et r sont associés. En vertu de l'hypothèse sur σ, on trouverait $\sigma(p) \neq \sigma(r)$, contradiction. Donc $\sigma(p)$ est point frontière associé à $\sigma(D)$. Le raisonnement montre que, si, réciproquement, pour un point frontière p, $\sigma(p)$ est associé à $\sigma(D)$, alors p est associé à D.

(6) *Soit* J *un intervalle ouvert à point frontière terminal* p. *Alors tout voisinage de* p *contient un intervalle* $U \ni p$ *tel que* $J \cup U$ *soit un intervalle ouvert.*

En effet soit $V \ni p$ un intervalle ouvert dans le voisinage donné. Alors $V \cap J$ est un intervalle ouvert à point frontière terminal p. Soit maintenant $U \subset V$ un sous-intervalle ouvert tel que $p \in U$, que $U \cap J = V \cap J$, et que les deux bouts de $U \cap J$ correspondent respectivement à un bout de J et un bout de U. Il s'ensuit que $U \cup J$ est un intervalle ouvert.

(7) *Soit* A *un arbre à* n *points de branchement. Alors, si* $n > 0$, *il existe* $s \in A$ *tel que* $A - \{s\} = A_1 \cup C$ *où* A_1 *est un domaine à un nombre de points de branchement inférieur à* n *et où* C *est un intervalle ouvert.*

En effet les composantes connexes $C_i (i=0,\ldots,n)$ de $A - S$, où S est l'ensemble des points de branchement, sont des intervalles ouverts. De plus on sait ([3]) que $\Sigma_A = \{C_i\} \cup S$ porte une structure d'arbre combinatoire dont les C_i sont les sommets, les $s \in S$ sont les arêtes ; les sommets de bord de s sont les deux composantes C_i pour lesquelles s est point frontière.

Supposons que C_0 soit sommet terminal de Σ_A et que $s \in S$ soit l'arête qui y aboutit. Alors C_0 est une composante connexe de $A - \{s\}$; l'autre composante connexe A_1 a $n - 1$ points de branchement au plus.

Maintenant nous sommes en mesure de prouver le critère. D'après la remarque (1) on peut se restreindre au cas où A est à branchement fini.

Supposons d'abord que A soit sans point de branchement, donc que A soit un intervalle ouvert, et que $\sigma : A \to B$ soit un resserrement. σ étant une immersion, il existe un sous-intervalle ouvert non vide maximal $J \subset A$ tel que $\sigma|J$ soit un plongement. Si $p \in A$ est point frontière terminal de J, $\sigma(p)$ est point frontière terminal de $\sigma(J)$ (remarque (5)). Alors il existe un intervalle ouvert $V \ni \sigma(p)$ tel que $\sigma(J) \cup V$ est un intervalle ouvert ((6)). Soit $U \ni p$ un intervalle ouvert tel que $\sigma|U$ soit un plongement, que $\sigma(U) \subset V$, et que $J \cup U$ est un intervalle ouvert. Alors $\sigma|J \cup U$ est une immersion de l'intervalle $J \cup U$ dans l'intervalle $\sigma(J) \cup V$; c'est donc un plongement. Donc J ne serait pas maximal. Par conséquent J n'admet pas de point frontière ; c'est dire que $J = A$.

Soit A un arbre à $n + 1$ points de branchement et supposons que le critère soit vérifié pour tout arbre à n points de branchement au plus. D'après (7) il existe un $s \in A$ tel que $A - \{s\} = A_1 \cup C$ où A_1 a un nombre de points de branchement inférieur à $n + 1$ et où C est un intervalle ouvert. En vertu de l'hypothèse de récurrence, $\sigma|A_1$ et $\sigma|C$ sont des plongements. De plus (5) implique que $\sigma(s)$ est frontière à la fois à C et A_1, par conséquent $\sigma(s) \notin \sigma(A_1) \cup \sigma(C)$. Donc $\sigma(A_1)$, $\sigma(C)$ sont contenus chacun dans une composante connexe de $B - \sigma(s)$. Puisque σ est localement bilatère, et que C et A_1 se trouvent de différents côtés de s, les composantes connexes respectives de $B - \sigma(s)$ qui contiennent $\sigma(C)$, $\sigma(A_1)$ sont différentes. Cela établit l'injectivité globale de σ.

Un arbre A sera dit *complètement serré* si tout resserrement $A \to B$ est un plongement.

On dit qu'un couple associé a, a' d'un arbre A est *resserrable* s'il existe un resserrement local σ tel que $\sigma(a) = \sigma(a')$; autrement le couple a, a' sera dit *rigide*.

Si le couple a, a' *est resserrable, il existe un resserrement* $\sigma : A \to B$ *tel que* $\sigma(a) = \sigma(a')$.

En effet soit ρ un resserrement d'un voisinage ouvert connexe V de a, a' tel que $\rho(a) = \rho(a')$. Les remarques (3) et (6) ci-dessus montrent qu'il existe des intervalles $J_a \ni a$, $J_{a'} \ni a'$, dont l'intersection $J = J_a \cap J_{a'}$ est à la fois une composante connexe de $J_a - \{a\}$ et de $J_{a'} - \{a'\}$. De plus, puisque

$\rho|J_a =: \rho_a$ et $\rho|J_{a'} =: \rho_{a'}$ sont des plongements, et que $\rho(a) = \rho(a')$, on peut même supposer que $\rho(J_a) = \rho(J_{a'})$. Par suite $\tau_a = \rho_a\rho_{a'}^{-1}$ est un plongement $J_a \to J_{a'}$ tel que $\tau_a|J = \mathrm{id}_J$, $\tau_a(a) = a'$.

Soit maintenant $A_a(A_{a'})$ la composante connexe de $A - \{a'\}(A-\{a\})$ qui contient $a(a')$, et soit $A_0 = A_a \cap A_{a'}$. On a $J_a \subset A_a$, $J_{a'} \subset A_{a'}$ et

$$J_a \cap A_{a'} = J_a \cap A_0 = J_a \cap J_{a'} = J.$$

A s'identifie canoniquement à $A_a \underset{\mathrm{id}_{A_0}}{*} A_{a'}$.

On définit la transition $\tau : A_a \to A_{a'}$ par $\mathrm{dom}\,\tau = A_0 \cup J_a$, $\tau|A_0 = \mathrm{id}_{A_0}$, $\tau|J_a = \tau_a$. Puisque τ_a se réduit à l'identité sur $J_a \cap A_0 = J$, τ est bien définie ; on vérifie facilement que τ est une transition. Donc τ est un prolongement de id_{A_0} avec $\tau(a) = a'$. Par suite on a une application canonique $\sigma : A = A_a \underset{\mathrm{id}_{A_0}}{*} A_{a'} \to A_a \underset{\tau}{*} A_{a'}$, avec $\sigma(a) = \sigma(a')$. Puisque $\sigma|A_a$ et $\sigma|A_{a'}$ sont des plongements, σ est un resserrement ce qui établit l'assertion.

La remarque précédente jointe au critère pour l'injectivité d'un resserrement conduit au

THÉORÈME 2.1. — *Pour qu'un arbre soit complètement serré il faut et il suffit que tout couple associé soit rigide.*

COROLLAIRE 1. — *Tout sous-domaine d'un arbre complètement serré est un arbre complètement serré.*

La rigidité étant une condition locale, et tout couple associé d'un sous-domaine étant associé dans l'arbre ambiant, le corollaire s'ensuit du théorème.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $A = \cup A_i$ *où* $\{A_i\}$ *est un système ordonné par inclusion d'arbres ouverts complètement serrés. Alors* A *est complètement serré.*

En effet A est un arbre d'après la proposition 1.2. Tout couple associé de A est contenu dans un A_i convenable et est donc rigide.

Dans la suite nous avons besoin de la

PROPOSITION 2.2. — *Soit* $\tau : A_1 \to A_2$ *une transition d'arbres complètement serrés. Alors* $A_1 \underset{\tau}{*} A_2$ *est complètement serré si et seulement si* τ *est une transition maximale* (§ 0).

Soient $\rho_i : A_i \to A_1 \underset{\tau}{*} A_2$ les plongements canoniques. $\underline{A}_i := \rho_i(A)$, $\underline{A}_{12} = \underline{A}_1 \cap \underline{A}_2$, $\tau = \rho_1\rho_2^{-1}$.

On suppose d'abord que τ soit maximale, c'est dire que $\mathrm{id}_{\underline{A}_{12}} : \underline{A}_1 \to \underline{A}_2$ est une transition maximale. Soit $\sigma : A_1 \underset{\tau}{*} A_2 \to B$ un resserrement. Les $\underline{A}_i$ étant complètement serrés, les $\sigma_i := \sigma|\underline{A}_i$ sont des plongements. Puisque $\sigma(\underline{A}_{12}) \subset \sigma(\underline{A}_1) \cap \sigma(\underline{A}_2)$, la transition $\sigma_1\sigma_2^{-1} : \underline{A}_1 \to \underline{A}_2$ prolonge $\mathrm{id}_{\underline{A}_{12}}$, et donc $\sigma_1\sigma_2^{-1} = \mathrm{id}_{\underline{A}_{12}}$ à cause de la maximalité de $\mathrm{id}_{\underline{A}_{12}}$. Autrement dit $\sigma(\underline{A}_{12}) = \sigma(\underline{A}_1) \cap \sigma(\underline{A}_2)$, ce qui implique l'injectivité de σ.

Supposons maintenant que $A_1 \underset{\tau}{*} A_2$ soit complètement serré et que $\tilde{\tau}$ soit un prolongement de τ. Alors on a un resserrement canonique $\sigma : A_1 \underset{\tau}{*} A_2 \to A_1 \underset{\tilde{\tau}}{*} A_2$ tel que $\tilde{\rho}_i = \rho_i\sigma = \rho_i\sigma_i$, où les $\tilde{\rho}_i$ sont les plongements canoniques $A_i \to A_1 \underset{\tilde{\tau}}{*} A_2$. L'hypothèse implique que σ est un plongement. Par suite $\sigma_1\sigma_2^{-1} = \mathrm{id}_{\underline{A}_{12}}$, et

$$\tilde{\tau} = \tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2^{-1} = (\rho_1\sigma_1)(\sigma_2^{-1}\rho_2^{-1}) = \rho_1\mathrm{id}_{\underline{A}_{12}}\rho_2^{-1} = \rho_1\rho_2^{-1} = \tau,$$

d'où la maximalité de τ.

3. Arbres analytiques.

Dans tout ce paragraphe on se met dans le cadre analytique.

PROPOSITION 3.1. — *Soient* A *et* B *des arbres analytiques complètement serrés et* $\tau_i : A \to B$, $i = 1, 2$, *des transitions telles que* $\tau_1 = \tau_2$ q.p. (§ 0). *Alors* $\tau_1 \cup \tau_2$ *est une transition bien définie.*

Supposons qu'on ait démontré que

$$\tau_1|\mathrm{dom}\,\tau_1 \cap \mathrm{dom}\,\tau_2 = \tau_2|\mathrm{dom}\,\tau_1 \cap \mathrm{dom}\,\tau_2 .$$

Alors $\tau_1 \cup \tau_2$ est un resserrement bien défini sur $\mathrm{dom}\,\tau_1 \cup \mathrm{dom}\,\tau_2$. Puisque $\mathrm{dom}\,\tau_1 \cup \mathrm{dom}\,\tau_2 = D$ est un domaine dans A, D est complètement serré, d'où il s'ensuit que $\tau_1 \cup \tau_2$ est une transition.

Donc il suffit de prouver que, si τ_1, τ_2 sont définies sur le même domaine, la relation $\tau_1 = \tau_2$ q.p. entraîne $\tau_1 = \tau_2$.

Supposons d'abord que τ_1, τ_2 soient définies sur un intervalle J et que $\tau_1 = \tau_2$ sur un ouvert $U \subset J$. $\tau_1(J) \cap \tau_2(J)$ est un intervalle ouvert dans B et $V_i = \tau_i^{-1}(\tau_1(J) \cap \tau_2(J))$ sont des sous-intervalles ouverts dans J avec $U \subset V_1 \cap V_2$, et $\tau_i : V_i \to \tau_1(J) \cap \tau_2(J)$ sont des équivalences analytiques d'intervalles ouverts. En vertu de l'analyticité des τ_i et du fait que

$\tau_1|U = \tau_2|U$ il s'ensuit que $V_1 = V_2 = : V$ et que $\tau_1|V_1 = \tau_2|V_2$. Supposons que $p \in J$ serait un point frontière de V. Alors $q_1 : = \tau_1(p) \neq \tau_2(p) = : q_2$ et le couple q_1, q_2 serait associé dans B, et $\sigma : \tau_1(J) \cup \tau_2(J) \to J$ défini par $\sigma|\tau_1(J) = \tau_1^{-1}$ $\sigma|\tau_2(J) = \tau_2^{-1}$ serait un resserrement local tel que $\sigma(q_1) = \sigma(q_2) = p$. Donc le couple associé q_1, q_2 serait resserrable ce qui contredit le caractère complètement serré de B (théorème 2.1.). Par conséquent $V = J$ et $\tau_1 = \tau_2$.

Soit maintenant $D \subset A$ un domaine sur lequel τ_1, τ_2 sont définies de façon, que $\tau_1 = \tau_2$ q.p. et soit V l'ouvert maximal sur lequel $\tau_1 = \tau_2$. Soit $p \in D$ un point adhérent de V et $J \ni p$ un intervalle ouvert. Puisque $\tau_1|J \cap V = \tau_2|J \cap V$ il s'ensuit, comme nous venons de constater, que $\tau_1|J = \tau_2|J$ et donc $J \subset V$; par suite $p \in V$, d'où $V = D$.

Corollaire. — *Soient* A *et* B *des arbres complètement serrés, alors toute transition* $\tau : A \to B$ *se prolonge de façon unique en une transition maximale* $\hat{\tau} : A \to B$.

En effet si τ_1 et τ_2 sont des transitions maximales qui prolongent τ, alors $\tau_1 \cup \tau_2$ est une transition et par suite $\tau_1 = \tau_1 \cup \tau_2 = \tau_2$.

Proposition 3.2. — *Un arbre analytique* A *est complètement serré si et seulement si toute transition* $\tau : A \to A$ *admet un prolongement unique en une transition maximale.*

On n'a qu'à prouver la partie suffisante. Supposons que a, a' soit un couple associé resserrable, alors il existe une transition $\tau : A \to A$ telle que $\tau(a) = a'$ et que τ coïncide avec l'identité sur un intervalle ouvert (voir § 2). En vertu de l'unicité du prolongement maximal on aurait $\tau \subset \mathrm{id}_A$ et donc $a = \tau(a) = a'$, ce qui contredit l'hypothèse que a, a' serait un couple associé.

Donc tout couple associé est rigide, ce qui établit la proposition.

On dit qu'un resserrement $\sigma : A \to B$ est *universel* si

(i) σ est surjectif,

(ii) B est complètement serré,

(iii) pour tout resserrement $\sigma' : A \to B'$, qui satisfait à (i) et (ii), il existe une équivalence $\varepsilon : B \to B'$ telle que $\sigma' = \sigma\varepsilon$.

Remarques. — (1) L'équivalence ε est unique puisque localement σ, σ' sont des plongements, et par suite $\varepsilon = \sigma^{-1}\sigma'$ localement.

(2) Si $\sigma : A \to B$ est un resserrement universel, alors (iii) montre que tout resserrement $\sigma'' : A \to B''$ sur un arbre complètement serré B'' est encore un resserrement universel.

Si A est complètement serré, $\mathrm{id} : A \to A$ est un resserrement universel puisque tout resserrement est un plongement.

Remarque. — Bien que la définition du resserrement universel ait un sens dans toute catégorie C^k, $0 \leqslant k \leqslant \omega$, elle ne comporte d'exemples non triviaux que dans la catégorie analytique.

PROPOSITION 3.3. — *Supposons que* $\sigma : A \to B$ *et* $\sigma' : A' \to B'$ *soient des resserrements universels et que* $\tau : A \to A'$ *soit un resserrement. Alors il existe un plongement unique* $\rho : B \to B'$ *tel que* $\sigma\rho = \tau\sigma'$.

En effet $\tau\sigma' : A \to B'$ est un resserrement qui applique A sur un domaine D dans B, donc sur un arbre complètement serré. $\sigma : A \to B$ étant un resserrement universel, il existe une équivalence unique $\varepsilon : B \to D$ avec $\tau\sigma' = \sigma\varepsilon$. On prend pour ρ la composition de ε avec l'inclusion $D \subset B$; l'unicité de ρ tient à l'unicité de ε.

La proposition précédente permet d'imiter dans une certaine mesure les propositions 1.2 et 1.3 que voici.

PROPOSITION 3.4. — *Soit* A *réunion d'un système ordonné par inclusion d'arbres* A_λ *qui admettent tous un resserrement universel. Alors* A *admet un resserrement universel.*

PROPOSITION 3.5. — *Soit* $A = A_1 \cup A_2$ *où les* A_i *sont des sous-arbres ouverts tels que* $A_1 \cap A_2$ *soit un domaine, que* A_1 *soit complètement serré, et que* A_2 *admette un resserrement universel. Alors* A *admet un resserrement universel.*

En ce qui concerne la proposition 3.4, le système des resserrements universels $\sigma_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$ donne naissance, en vertu de la proposition 3.3, à un système inductif $\{B_\lambda ; \rho_{\lambda\mu}, \lambda < \mu\}$ tel que $\iota_{\lambda\mu}\sigma_\mu = \sigma_\lambda\rho_{\lambda\mu}$, $\lambda < \mu$, où $\iota_{\lambda\mu}$ est l'inclusion $A_\lambda \subset A_\mu$. Du corollaire 2 du théorème 2.1, il s'ensuit que $\sigma : A \to B$ est un resserrement sur un arbre complètement serré, où $\sigma = \varinjlim \sigma_\lambda$, $B = \varinjlim B_\lambda$. Par passage à la limite inductive l'universalité de σ résulte de l'universalité des σ_λ.

En ce qui concerne la proposition 3.5 nous supposons que $\sigma_2 : A_2 \to B_2$ soit un resserrement universel. $A_1 \cap A_2$ comme sous-domaine de A_1 est complètement serré. Par suite $\tau = \sigma_2|A_1 \cap A_2$ est un plongement, et on a une transition $\tau : A_1 \to B_2$. Soit $\hat{\tau} : A_1 \to B_2$ le prolongement maximal de τ. Alors $B = A_1 \underset{\hat{\tau}}{*} B_2$ est complètement serré (proposition 2.2), et les applications canoniques $\rho_1 : A_1 \to B$ $\rho_2 : A_2 \xrightarrow{\sigma_2} B_2 \to B$ définissent un resserrement surjectif $\sigma : A \to B$. On écrira $\underline{A}_i := \rho_i(A_i) = \sigma(A_i)$. Soit maintenant $\sigma' : A \to C$ un resserrement surjectif sur un C complètement serré. En envisageant $\sigma'|A_i$ comme une application $A_i \to \sigma'(A_i)$, on constate que ce sont des resserrements surjectifs sur des arbres complètement serrés, et en vertu de l'hypothèse il existe des équivalences uniques $\varepsilon_i : \underline{A}_i \to \sigma'(A_i)$ telles que $(\sigma|A_1)\varepsilon_1 = (\sigma'|A_1)$, $(\sigma|A_2)\varepsilon_2 = (\sigma'|A_2)$. $A_1 \cap A_2$ étant complètement serré,

$$\sigma|A_1 \cap A_2 : A_1 \cap A_2 \to \sigma(A_1 \cap A_2) \subset \underline{A}_1 \cap \underline{A}_2$$

est un resserrement universel. Par conséquent ε_1, ε_2 coïncident sur $\sigma(A_1 \cap A_2)$. D'après la proposition 3.1 ils coïncident alors sur $\underline{A}_1 \cap \underline{A}_2$. Donc le couple $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ définit une équivalence $\varepsilon : B \to C$ telle que $\sigma\varepsilon = \sigma'$, ce qui établit l'universalité de σ.

En tenant compte du fait que tout arbre analytique s'obtient par un procédé (éventuellement transfini) de recollement successif d'intervalles ouverts et de passage à la limite inductive d'une suite croissante d'arbres construits, et que tout intervalle ouvert est complètement serré, on trouve

THÉORÈME 3.1. — *Tout arbre analytique admet un resserrement universel.*

Soit $\sigma : A \to B$ un resserrement universel. On définit la variété analytique $\underline{A}$ comme le quotient de A par rapport à la relation d'équivalence définie par : $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow \sigma(a_1) = \sigma(a_2)$. $\underline{A}$ s'identifie à B par l'application quotient $\underline{\sigma}$, et la projection canonique $\upsilon_A : A \to \underline{A}$ est un resserrement universel. L'universalité de σ entraîne que $\underline{A}$ et υ_A ne dépendent pas du choix particulier de σ.

Le théorème précédent implique que tout arbre analytique A admet un resserrement universel canonique $\upsilon_A : A \to \underline{A}$. On démontre aisément que, si $A \subset B$, alors $\underline{A} \subset \underline{B}$ et $\upsilon_A = \upsilon_B|A$; de plus si $\sigma : A \to B$ est un resserrement on a un plongement canonique $\underline{\sigma} : \underline{A} \to \underline{B}$ tel que $\upsilon_A\underline{\sigma} = \sigma\upsilon_B$.

On va utiliser le théorème et ses conséquences immédiates dans l'étude du groupe universel d'un arbre analytique (§ 5) ainsi que dans l'étude du groupe fondamental d'un s.v.a. de dimension 1 (§ 7).

4. Rappel sur les groupes locaux.

D'après Malcev [12] on définit un *groupe local* comme un ensemble L muni

– d'une multiplication qui est définie pour certains couples $x, y \in L$,
– d'une inversion (involutive) qui est définie partout,
– d'un élément neutre,

de façon que les axiomes suivants soient remplis

(GL1) $ex = xe = x$ pour tout $x \in L$.
(GL2) $e = e^{-1} = xx^{-1} = x^{-1}x$ pour tout $x \in L$.
(GL3) si xy est défini $y^{-1}x^{-1}$ est défini et $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.
(GL4) Si xy, yz, $x(yz)$ sont définis, alors $(xy)z$ est défini et $x(yz) = (xy)z$.

Les notions d'homomorphisme et d'isomorphisme pour les groupes locaux se définissent de façon évidente. Cependant il est à noter qu'un homomorphisme bijectif φ n'est pas nécessairement un isomorphisme, car il peut arriver que $\varphi(x)\varphi(y)$ soit défini sans que xy le soit.

Soit L un groupe local et $S \subset L$ un sous-ensemble tel que $e \in S$ et $S^{-1} \subset S$. Si l'on définit la multiplication et l'inversion dans S comme la restriction à S de celles de L, S obtient une structure de groupe local. Comme tel S est appelé *sous-groupe local* de L.

Puisque tout groupe est en même temps un groupe local, les sous-groupes locaux d'un groupe fournissent des exemples des groupes locaux.

Un homomorphisme $\varphi : L \to L'$ de groupes locaux sera appelé *isomorphisme local* si φ établit un isomorphisme de L sur le sous-groupe local $\varphi(L)$ de L'; on dit aussi que L est *localement isomorphe* à L'.

Un groupe local sera dit *intégrable* (anglais : enlargeable) s'il est localement isomorphe à un groupe.

A tout groupe local L on associe le *groupe enveloppant* U(L) dont on va décrire une présentation.

A tout $x \in L$ on associe un générateur u_x de U(L). A tout couple (x,y) dont le produit xy est défini – on écrira $(x,y) \in C_{L \times L}$ – on associe une relation $u_x u_y = u_{xy}$.

On définit

$$(*) \qquad U(L) = (\underset{x \in L}{u_x} \,;\, \underset{(x,y) \in C_{L\times L}}{u_x u_y = u_{xy}})$$

L'application $u : L \to U(L)$ est un homomorphisme, et tout homomorphisme $\varphi : L \to G$, où G est un groupe, se factorise de manière canonique $L \xrightarrow{u} U(L) \xrightarrow{u\backslash\varphi} G$.

On prouve facilement que L est intégrable si et seulement si u est un isomorphisme local. Nous dirons que L est *faiblement intégrable* si u est un homomorphisme injectif.

Une suite d'éléments $a_1, \ldots, a_n$ d'un groupe local L est appelée *suite locale* si par insertion convenable des parenthèses le produit $a_1 \ldots a_n$ devient calculable. A priori il se peut qu'il y ait diverses manières d'insérer les parenthèses de façon à rendre le produit calculable et en plus le résultat du calcul peut en dépendre ; si, par contre, le résultat n'en dépend pas on dit que la suite locale est *à produit stable.*

La *loi associative générale* a lieu pour L si toute suite locale est à produit stable.

La multiplication dans L est dite *saturée* si le produit xy est défini dès qu'il existe des suites locales $a_1, \ldots, a_p ;\ a_{p+1}, \ldots, a_n$ telles que

(i) $a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n$ soit locale ;

(ii) x resp. y soient des évaluations de $a_1, \ldots, a_p$ resp. $a_{p+1}, \ldots, a_n$ pour une insertion convenable des parenthèses.

Les définitions précédentes nous permettent de formuler le

CRITÈRE DE MALCEV. — *Pour que* L *soit faiblement intégrable il faut et il suffit que la loi associative générale soit remplie.*

Pour que L *soit intégrable il faut et il suffit que* L *soit faiblement intégrable et que la multiplication soit saturée.*

Remarques. — (1) Dans [12] Malcev n'a énoncé que la première partie du critère. Par reconstruction de sa démonstration, qui n'est indiquée que sommairement, on arrive au critère complet (voir [7]).

(2) Le critère de Malcev se rapporte de façon naturelle à une démonstration de Cartan de l'intégrabilité [6] d'une algèbre de Lie [4]. Pour plus de détails on peut se reporter à [7].

(3) On notera que la loi associative générale et la propriété de saturation de la multiplication s'expriment sans qu'on ait besoin des axiomes (GL1)-(GL4). De plus les deux propriétés ensemble impliquent (GL4).

[6] A distinguer de la notion classique d'intégrabilité d'une algèbre de Lie qui revient à la notion de résolubilité.

5. Le groupe universel d'un arbre analytique.

Soit A un arbre analytique complètement serré. Par L(A) on désignera l'ensemble des transitions maximales $A \to A$. Supposons que $\tau_1, \tau_2 \in L(A)$ et que $\tau_1\tau_2$ soit défini. Il peut arriver que $\tau_1\tau_2 \notin L(A)$, mais en tout cas $\tau_1\tau_2$ se prolonge en une unique transition maximale que l'on désignera par $\tau_1 \wedge \tau_2$. De cette façon on obtient une multiplication partielle $\wedge$ dans L(A), et $\tau_1 \wedge \tau_2$ est défini si et seulement si $\tau_1\tau_2$ est défini. Il est immédiat que id_A est l'élément neutre et que l'inversion usuelle est une inversion relative à $\wedge$.

THÉORÈME 5.1. — L(A) *muni de* $\wedge$ *et de l'inversion usuelle est un groupe local intégrable.*

La démonstration sera donnée dans § 5.1.

Le groupe enveloppant U(L(A)) sera appelé le *groupe universel* GU(A) de A.

Une équivalence d'arbres $\varepsilon : A \to A'$ induit un isomorphisme de L(A) sur L(A′) et par prolongement un isomorphisme de U(L(A)) sur U(L(A′)).

Soit $A \subset B$ une inclusion d'arbres analytiques complètement serrés. Toute transition $\tau : A \to A$ admet un prolongement maximal τ_B sur B, et on obtient une application $\iota_{AB} : \tau \longmapsto \tau_B$ de L(A) dans L(B).

THÉORÈME 5.2. — ι_{AB} *est un isomorphisme local de* L(A) *dans* L(B).

ι_{AB} se prolonge en un homomorphisme $GU(A) \to GU(B)$ que l'on désignera encore par ι_{AB}.

Pour un arbre analytique quelconque A, on définit $GU(A) := GU(\underline{A})$ où $\underline{A}$ désigne l'arbre de base du resserrement universel canonique (§ 3).

5.1. *Démonstration des théorèmes.* — En ce qui concerne le théorème 5.1, la vérification des axiomes (GL1)-(GL3) pour L(A) est immédiate. On va établir la loi associative générale et la propriété de saturation pour la multiplication. Selon la remarque (3) de § 4, cela établira l'axiome GL(4) et en même temps l'intégrabilité de L(A). Or ces propriétés résulteront des propositions auxiliaires A et B ci-dessous.

PROPOSITION A. — *Pour toute suite* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *de transitions maximales* $A \to A$ *il existe un arbre complètement serré* P, *et des plongements* $\rho_j : A \to P$ $(j=0,\ldots,n)$ *tels que* $\rho_{j-1}\rho_j^{-1} = \tau_j$ $(j=1,\ldots,n)$.

On pose d'abord $\tilde{P} = A \underset{\tau_1}{*} A \underset{\tau_2}{*} \ldots \underset{\tau_n}{*} A$, et l'on désigne par $\tilde{\rho}_i : A \to \tilde{P}$ $(i=0,\ldots,n)$ les plongements canoniques. Alors $\tau_i = \tilde{\rho}_{i-1}\tilde{\rho}_i^{-1}$. Soit $\upsilon : \tilde{P} \to \underline{\tilde{P}} = P$ le resserrement universel.

Alors $\rho_i = \tilde{\rho}_i\upsilon$ sont encore des plongements et $\rho_{i-1}\rho_i^{-1}$ prolonge $\tilde{\rho}_{i-1}\tilde{\rho}_i^{-1} = \tau_i$. τ_i étant maximale, on a $\tau_i = \rho_{i-1}\rho_i^{-1}$.

PROPOSITION B. — *Soit* P *un arbre complètement serré et* $\rho_i : A \to P$, $i = 0, \ldots n$, *des plongements tels que* $\rho_{i-1}\rho_i^{-1} = \tau_i$. *Alors si* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *est une suite locale,* $\rho_0\rho_n^{-1}$ *est défini, et toute évaluation du produit* $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$ *est égale à* $\rho_0\rho_n^{-1}$.

On pose $B_i = \rho_i(A)$ et on notera que $\rho_i\rho_k^{-1}$ est défini si et seulement si $B_i \cap B_k \neq \emptyset$. De plus il s'ensuit essentiellement de la proposition 2.2 que dans ce cas $\rho_i\rho_k^{-1} \in L(A)$.

On va procéder par récurrence.

Pour $n = 2$ il faut prouver que si $\tau_1 \wedge \tau_2$ est défini, $\rho_0\rho_2^{-1}$ est défini, et que $\tau_1 \wedge \tau_2 = \rho_0\rho_2^{-1}$. Supposons que $\tau_1 \wedge \tau_2$ et donc que $\tau_1\tau_2$ soit défini. Alors il existe $x \in A$ tel que

$$x\tau_1 = x\rho_0\rho_1^{-1}, \qquad (x\tau_1)\tau_2 = (x\rho_0\rho_1^{-1})(\rho_1\rho_2^{-1})$$

soient définis. En posant $x\rho_0 = y$, on constate que $x = y\rho_0^{-1}$, $x\tau_1 = y\rho_1^{-1}$, $x\tau_1\tau_2 = y\rho_2^{-1}$ sont définis. Donc $y \in B_0 \cap B_1 \cap B_2$ et par suite $B_0 \cap B_2 \neq \emptyset$, ou $\rho_0\rho_2^{-1}$ est défini.

Selon la remarque ci-dessus $\rho_0\rho_2^{-1} \in L(A)$; de plus $\rho_0\rho_2^{-1}$ prolonge visiblement $\tau_1\tau_2$, d'où $\tau_1 \wedge \tau_2 = \rho_0\rho_2^{-1}$.

Supposons que la proposition soit vérifiée pour $n = k - 1 \geqslant 2$ et que $\tau_1, \ldots, \tau_k$ soit une suite locale. Donc il y a un $i \in \{1,\ldots,k\}$ tel que $\tau_{i-1} \wedge \tau_i$ soit défini et que $\tau_1, \ldots, \tau_{i-2}, \tau_{i-1} \wedge \tau_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_k$ soit encore une suite locale. Nous venons d'établir que $\tau_{i-1} \wedge \tau_i = \rho_{i-2}\rho_i^{-1}$. Donc la suite locale $\tau_1, \ldots, \tau_{i-2}, \tau_{i-1} \wedge \tau_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_k$ satisfait à l'hypothèse de la proposition par rapport à la suite des plongements $\rho_0, \ldots, \rho_{i-2}, \rho_i, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_k$. Le cas $n = k - 1$ étant vérifié, cela entraîne que $\rho_0\rho_k^{-1}$ est défini et que toute évaluation du produit

$$\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{i-2} \wedge (\tau_{i-1} \wedge \tau_i) \wedge \tau_{i+1} \wedge \ldots \wedge \tau_k$$

est égale à $\rho_0\rho_k^{-1}$. Puisque toute évaluation du produit $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_k$ est une évaluation d'un produit

$$\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{i-2} \wedge (\tau_{i-1} \wedge \tau_i) \wedge \tau_{i+1} \wedge \ldots \wedge \tau_k$$

pour un i convenable, il résulte que toute évaluation de $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_k$ est égale à $\rho_0\rho_k^{-1}$.

Les propositions A et B établissent la loi associative générale.

Pour établir la saturation de la multiplication plaçons-nous dans les hypothèses de la proposition B, et supposons que $\tau_1, \ldots, \tau_p\,;\ \tau_{p+1}, \ldots, \tau_n$ soient des suites locales. Donc en vertu de la même proposition $\rho_0\rho_p^{-1}$, $\rho_p\rho_n^{-1}$ et $\rho_0\rho_n^{-1}$ sont définis ou, ce qui revient au même, $\mathbf{B}_0 \cap \mathbf{B}_p \neq \varnothing$, $\mathbf{B}_p \cap \mathbf{B}_n \neq \varnothing$, $\mathbf{B}_0 \cap \mathbf{B}_n \neq \varnothing$. D'après le théorème de Helly, on a $\mathbf{B}_0 \cap \mathbf{B}_p \cap \mathbf{B}_n \neq \varnothing$. Alors pour $y \in \mathbf{B}_0 \cap \mathbf{B}_p \cap \mathbf{B}_n$, $x = y\rho_0^{-1}$, $y\rho_p^{-1}$, $y\rho_n^{-1}$ sont définis et, en posant $\tau' = \rho_0\rho_p^{-1}$, $\tau'' = \rho_p\rho_n^{-1}$.

$$(x\tau')\tau'' = ((y\rho_0^{-1})(\rho_0\rho_p^{-1}))(\rho_p\rho_n^{-1}) = y\rho_n^{-1}$$

est défini. Donc $\tau'\tau''$ est défini et par suite $\tau' \wedge \tau''$ est défini. D'après la proposition B, τ' et τ'' sont les évaluations des produits respectifs $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_p$ et $\tau_{p+1} \wedge \ldots \wedge \tau_n$.

Cela établit le théorème 5.1.

En ce qui concerne le théorème 5.2, l'injectivité de ι_{AB} est évidente. Il faut prouver que, si pour $\tau_1\tau_2 \in L(A)$, $\tau_{1B} \wedge \tau_{2B} = \tau_B$ avec $\tau \in L(A)$, alors $\tau_1 \wedge \tau_2 = \tau$. Pour cela on construit un arbre P complètement serré et des plongements $\rho_{iB} : B \to P$, $i = 0, 1, 2$, tels que $\rho_{i-1B}\rho_{iB}^{-1} = \tau_{iB}$.

En posant $\rho_{iA} = \rho_{iB}|A$, on a $\rho_{i-1A}\rho_{iA}^{-1} = \tau_i$. Le fait que $\tau_{1B} \wedge \tau_{2B}$ est défini et égal à τ_B pour un τ convenable $\in L(A)$, se traduit par $\rho_{0A}(A) \cap \rho_{2A}(A) \neq \varnothing$. Donc on a de nouveau $\rho_{iA}(A) \cap \rho_{jA}(A) \neq \varnothing$, i, $j = 0, 1, 2$, ce qui implique selon Helly $\rho_{0A}(A) \cap \rho_{1A}(A) \cap \rho_{2A}(A) \neq \varnothing$. Comme nous venons de voir dans la démonstration ci-devant, cela équivaut à $\tau_1 \wedge \tau_2 \in L(A)$, et par suite on a $\tau_1 \wedge \tau_2 = \tau$.

6. Rappel sur les schémas de variété et leur groupe fondamental.

Dans ce paragraphe on se met de nouveau dans la catégorie C^k pour un k arbitraire. Pour plus de détails on pourra se reporter aux articles [3] et [6].

Soit P une variété non nécessairement séparée, et Γ_P le groupoïde des germes de transition $P \to P$, ([8]); α, ω désigneront respectivement les applications « source » et « but »; pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_P$ le produit $\gamma_1\gamma_2$ est défini si et seulement si $\omega(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2)$; le sous-groupoïde E_P des identités s'identifie à P en tant qu'espace topologique.

Soit T un sous-groupoïde de Γ_P tel que $E_P \subset T$. Le couple $A = (P\,;T)$ sera dit un *schéma de variété* (s.v.); P s'appelle la *variété des pages* (ou *cartes*), les composantes connexes de P étant les *pages;* T sera dit le *groupoïde de transition.*

Soient $(P;T)$ et $(P';T')$ des s.v., M le faisceau des germes de morphismes locaux $P \to P'$, et $\alpha : M \to P$, $\omega : M \to P'$ les applications « source » et « but ». On dit qu'un sous-faisceau $\Lambda \subset M$ est un *morphisme* $(P;T) \to (P';T')$ si

(i) $T\,\Lambda\,T' \subset \Lambda$,

(ii) $\alpha : \Lambda \to P$ est surjectif,

(iii) $\alpha^{-1}(p)$ est une T'-orbite pour tout $p \in P$.

(Applications et germes d'application sont toujours considérés comme des opérateurs à droite.)

La composition de morphismes se définit de façon évidente. Ainsi on obtient la catégorie $\mathscr{SV}$ des s.v.

Pour deux s.v. $\mathscr{A} = (P;E_P)$, $\mathscr{A}' = (P';E_{P'})$ la notion de morphisme $\mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ se réduit à la notion de morphisme de variété $P \to P'$. Donc la catégorie des variétés est contenue dans $\mathscr{SV}$ comme une sous-catégorie pleine; les s.v. équivalents à un objet de cette sous-catégorie seront appelés *variétés.*

A tout $\mathscr{A} = (P;T) \in \mathscr{SV}$ on associe l'espace topologique Top $(\mathscr{A})$, le quotient de P par rapport à la relation d'équivalence $\alpha(t) \sim \omega(t)$, $t \in T$; l'application quotient $P \to \mathrm{Top}(\mathscr{A})$ sera désignée par top (ou $\mathrm{top}_{\mathscr{A}}$ au besoin). De fait Top : $\mathscr{A} \to \mathrm{Top}(\mathscr{A})$ est un foncteur $\mathscr{SV} \to \mathscr{TOP}$.

Si top : $P \to \mathrm{Top}(\mathscr{A})$ est une immersion topologique — c'est dire que Top $(\mathscr{A})$ est une variété topologique — la structure C^k sur P induit une structure C^k sur $\mathrm{Top}(\mathscr{A}) = V$. Dans ces conditions $\mathscr{A}$ est équivalent à $(V;\mathrm{id}_V)$, i.e. $\mathscr{A}$ est une variété. Réciproquement si $\mathscr{A}$ est une variété, top : $P \to \mathrm{Top}(\mathscr{A})$ est une immersion topologique.

On dit que $\mathscr{A}$ est *connexe/compact si* Top $(\mathscr{A})$ est connexe/compact.

Si $\mathscr{A}$ est un s.v. connexe, la dimension des pages est constante; c'est par définition la *dimension de* $\mathscr{A}$; la dimension est un invariant de la classe d'équivalence.

Tout s.v. connexe de dimension 1 est équivalent à un schéma $(P;T)$ où P est un arbre différentiable; la démonstration sera donnée dans § 6.1.

Pour le reste de ce paragraphe nous ne considérons que des s.v. $(P;T)$ *où* P *est un arbre différentiable.*

Pour un tel s.v. on définit le *groupe fondamental* $\pi_1((P;T))$ comme le groupe $\Pi(T)$ du groupoïde T; $\Pi(T)$ se définit de la manière suivante.

Pour tout $t \in T$ on désignera la composante connexe de t par $[t]$. Les composantes connexes de T seront les générateurs de $\Pi(T)$. A tout couple $t_1, t_2 \in T$ dont le produit est défini – on écrira $(t_1,t_2) \in C_{T\times T}$ – on associe la relation $[t_1][t_2] = [t_1t_2]$. On définit

$$(**) \qquad \Pi(T) = (\underset{t\in T}{[t]} ; \underset{(t_1,t_2)\in C_{T\times T}}{[t_1][t_2] = [t_1t_2]})$$

A un isomorphisme près, le groupe fondamental est un invariant de la classe d'équivalence de $(P;T)$. (P,T) est dit simplement connexe si $\pi_1((P;T)) = (1)$.

Si $(P;T)$ est une variété $\pi_1((P;T)) \simeq \pi_1(\mathrm{Top}\,(P;T))$.

A tout s.v. connexe $\mathscr{A}$ on sait associer un « revêtement universel » $\tilde{\mathscr{A}} \xrightarrow{\Lambda} \mathscr{A}$, tel que $\tilde{\mathscr{A}}$ soit un s.v. simplement connexe, sur lequel $\pi_1(\mathscr{A})$ opère comme un groupe d'automorphismes de telle sorte que $g\Lambda = \Lambda$, $g \in \pi_1(\mathscr{A})$.

Si $\tilde{\mathscr{A}}$ est un arbre P, alors $\pi_1(\mathscr{A}) = : G$ opère de façon *génériquement libre*, ce qui veut dire que l'élément neutre de G est le seul élément de G qui soit égal à id_P q.p. Dans ces conditions $\mathscr{A}$ est équivalent à $(P;T_G)$, où T_G est le groupoïde des germes des $g \in G$; par abus de notation on écrira aussi $\mathscr{A} = (P;G)$.

Réciproquement si G est un groupe qui opère de façon génériquement libre sur un arbre P, G s'identifie à $\pi_1((P;G))$ et P s'identifie au revêtement universel de $(P;G)$, l'action de $\pi_1((P;G))$ étant celle de G.

Soit M une variété connexe et soit $\mathscr{F}$ un feuilletage sur M de codimension 1. On sait définir un s.v. quotient $M/\mathscr{F}$ qui est un s.v. connexe de dimension 1. $\pi_1(M/\mathscr{F})$ est un quotient de $\pi_1(M)$ (à un isomorphisme près).

6.1. On va indiquer sommairement une démonstration pour l'équivalence d'un s.v. connexe $(P'';T'')$ de dimension 1 à un s.v. $(P;T)$ où P est un arbre.

En effet P'' étant une variété de dimension 1, on peut concevoir P'' comme obtenue par recollement d'intervalles ouverts. Par conséquent on peut remplacer $(P'';T'')$ par un s.v. équivalent $(P';T')$ où les pages P'_i sont des intervalles ouverts. Soit $\langle T'\rangle$ l'ensemble des transitions $P' \to P'$ qui sont des sections dans T'. Pour tout $\tau \in \langle T'\rangle$, dom τ (resp. im τ) est contenu dans une page $P'_i = : [\mathrm{dom}\,\tau]$ (resp. $= : [\mathrm{im}\,\tau]$). Soit G le graphe combinatoire dont les sommets sont les pages P'_i, dont les arêtes sont les $\tau \in \langle T'\rangle$, l'origine de τ resp. le sommet terminal [7] étant définis comme $[\mathrm{dom}\,\tau]$ resp. $[\mathrm{im}\,\tau]$. La connexité de G est garantie par la connexité de

[7] Terminologie conformément à J.-P. Serre : Arbres, amalgames, SL_2, Astérisque, 46 (1977).

$(P';T')$. Soit $J' \subset G$ un sous-arbre combinatoire maximal. En choisissant une origine P'_0 dans J', alors une application prédécesseur sur l'ensemble des sommets est déterminée, et par suite une structure d'arbre dirigé J. On définit $P = \underset{j \in J}{*} P'_j$ où les transitions recollantes sont les arêtes de J' qui vont d'un sommet à un successeur. Selon les remarques à la fin de § 1, P est un arbre; il emprunte sa structure C^k de celle de P'. Les plongements canoniques $P'_j \to P$ définissent une immersion $P' \to P$ et transportent T' en un groupoïde de transition T sur P. $(P;T)$ est équivalent à $(P';T')$.

7. Schémas de variété analytiques.

Dans tout ce paragraphe on se place dans le cadre analytique.

Soit $\sigma : A \to B$ un resserrement surjectif d'arbres. A tout $t \in \Gamma_A$ on fait correspondre $t^\sigma = \sigma^{-1} t\sigma$, où σ resp. σ^{-1} sont des germes convenables de σ resp. d'un inverse partiel de σ. L'application $t \longmapsto t^\sigma$ est un homomorphisme continu ouvert de Γ_A sur Γ_B. Donc pour tout sous-groupoïde ouvert $T \subset \Gamma_A$ on obtient comme image un sous-groupoïde ouvert $T^\sigma \subset \Gamma_B$; en particulier $E_A^\sigma = E_B$. Par conséquent si $E_A \subset T$, $E_A^\sigma = E_B \subset T^\sigma$. Dans ce cas σ induit un homomorphisme $\Pi(\sigma) : \Pi(T) \to \Pi(T^\sigma)$, c'est dire que σ induit un homomorphisme

$$\Pi(\sigma) : \pi_1((A;T)) \to \pi_1((B;T^\sigma)).$$

Soit $E_A \subset T \subset S \subset \Gamma_A$, où T et S sont des sous-groupoïdes ouverts de Γ_A. On peut envisager S comme un morphisme $(A;T) \to (A;S)$. Puisque toute composante connexe de T est contenue dans une composante connexe de S, et que l'inclusion $T \subset S$ est un homomorphisme, on obtient un homomorphisme de projection $\Pi(S) : \pi_1((A;T)) \to \pi_1((A;S))$.

En particulier la composition du resserrement universel $\upsilon : A \to \underset{\sim}{A}$ (§ 3) avec le morphisme $\Gamma_{\underset{\sim}{A}} : (\underset{\sim}{A};T^\upsilon) \to (\underset{\sim}{A};\Gamma_{\underset{\sim}{A}})$ définit un homomorphisme

$$\Pi(\upsilon)\Pi(\Gamma_{\underset{\sim}{A}}) : \pi_1((A;T)) \to \pi_1((\underset{\sim}{A};\Gamma_{\underset{\sim}{A}})).$$

Proposition 7.1. — *Pour toute transition maximale $\tau : \underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{A}$ l'ensemble $[\tau]$ des germes τ_x, $x \in \operatorname{dom} \tau$, est une composante connexe de Γ_A et vice-versa. La correspondance $u_\tau \longmapsto [\tau]$ se prolonge en un isomorphisme de $UL(\underset{\sim}{A})$ sur $\pi_1((\underset{\sim}{A};\Gamma_{\underset{\sim}{A}}))$.*

$\{[\tau]\}$ est un recouvrement de $\Gamma_{\underset{\sim}{A}}$ par des domaines. $[\tau_1] \cap [\tau_2] \neq \varnothing$ veut dire que τ_1 et τ_2 ont un germe commun, et donc $\tau_1 = \tau_2$ q.p., d'où, en vertu du caractère complètement serré de $\underline{A}$, $\tau_1 = \tau_2$. Les $[\tau]$ sont donc disjoints deux à deux ; ce sont bien les composantes connexes de $\Gamma_{\underline{A}}$.

Les groupes $UL(\underline{A})$ et $\pi_1((\underline{A},\Gamma_{\underline{A}}))$ sont définis par les présentations (*) § 4 et (**) § 6. Visiblement $u_\tau \longmapsto [\tau]$ n'est autre qu'un changement de notation qui remplace (*) par (**).

Remarques. – (1) La proposition peut être réformulée en disant que les relations $[t_1][t_2] = [t_1 t_2]$, $(t_1,t_2) \in C_{\Gamma_{\underline{A}} \times \Gamma_{\underline{A}}}$, définissent une structure de groupe local intégrable sur l'ensemble $[\Gamma_{\underline{A}}]$ des composantes connexes de $\Gamma_{\underline{A}}$, et que $\pi_1((\underline{A};\Gamma_{\underline{A}})) = U([\Gamma_{\underline{A}}])$.

(2) On peut montrer que le s.v.a. $(A;\Gamma_A)$ est équivalent à $(\underline{A},\Gamma_{\underline{A}})$, ce qui laisse reconnaître que le groupe universel $GU(A)$ (§ 5) n'est autre que $\pi_1((A;\Gamma_A))$.

THÉORÈME 7.1. – *Un s.v.a.* $(A;T)$, *où* A *est un arbre analytique, est simplement connexe si et seulement si* $\mathrm{top} : A \to \mathrm{Top}((A;T))$ *est un resserrement d'arbres* (*c'est dire que* $(A;T)$ *est un arbre*).

En effet si $\mathrm{top} : A \to \mathrm{Top}((A;T))$ est un resserrement d'arbres, $\pi_1((A;T))$ s'identifie à $\pi_1(\mathrm{Top}(A;T))$ d'après § 6. Puisque pour tout arbre topologique le groupe fondamental est trivial ([8]), on a $\pi_1((A;T)) = (1)$.

Supposons maintenant que $\pi_1((A;T)) = (1)$. Alors l'image par $\Pi(\upsilon)\Pi(\Gamma_{\underline{A}})$ de $\pi_1((A;T))$ dans $\pi_1((\underline{A};\Gamma_{\underline{A}}))$ est trivial. Le groupe $\pi_1((A;T))$ étant engendré par les $[t]$, $t \in T$, son image est engendrée par les composantes $[t^\upsilon]$ de $\Gamma_{\underline{A}}$.

Puisque, d'après la remarque (1) ci-dessus, $[\Gamma_{\underline{A}}]$ a une structure de groupe local intégrable dont $\pi_1((\underline{A};\Gamma_{\underline{A}}))$ est le groupe enveloppant, $[t^\upsilon]$ ne représente l'élément neutre de $\pi_1((\underline{A};\Gamma_{\underline{A}}))$ que si $[t^\upsilon] = E_{\underline{A}}$, ou $t^\upsilon \in E_{\underline{A}}$. Autrement dit, chaque fibre de l'application $\mathrm{top} : A \to \mathrm{Top}((A;T))$ est contenue dans une fibre de $\upsilon : A \to \underline{A}$. Par conséquent on a la factorisation $\upsilon : A \xrightarrow{\mathrm{top}} \mathrm{Top}((A;T)) \xrightarrow{\mathrm{top}\backslash\upsilon} \underline{A}$. υ étant une immersion, il faut que $\mathrm{top} : A \to \mathrm{Top}((A;T))$ soit une immersion. Donc $\mathrm{Top}((A;T))$ est une variété et $\pi_1(\mathrm{Top}(A;T)) \cong \pi_1((A;T)) = (1)$. Or cela entraîne que chaque point de $\mathrm{Top}(A;T)$ est point de dissection, autrement on pourrait construire un revêtement non trivial (cf. p. ex. [10] p. 113) ; donc d'après la proposition 2.1, $\mathrm{top} : A \to \mathrm{Top}((A;T))$ est un resserrement d'arbres.

([8]) On démontre de façon directe que tout revêtement d'un arbre topologique est un homéomorphisme.

COROLLAIRE. — *Tout s.v.a. connexe* $\mathscr{A}$ *de dimension* 1 *est équivalent à un s.v.a.* (A ;G) *où* A *est un arbre analytique et* G *un groupe de difféomorphismes* $A \to A$ *qui opère de façon génériquement libre.*

Le revêtement universel de $\mathscr{A}$ est un s.v.a. simplement connexe, c'est donc un arbre A. $\pi_1(\mathscr{A}) = :G$ opère de façon génériquement libre sur A, et $\mathscr{A}$ est équivalent à (A ;G) (§ 6).

Remarque. — (3) Le théorème 7.1 tombe en défaut dans le cadre C^k avec $k \leqslant \infty$. Dans ce cas on connaît les s.v. de Reeb, $R_{\varphi^+,\varphi^-} : = (\mathbf{R};T_{\varphi^+,\varphi^-})$ où $T_{\varphi^+,\varphi^-} \subset \Gamma_{\mathbf{R}}$ est engendré par les deux transitions φ^+ et φ^-; $\operatorname{dom}\varphi^+ = \operatorname{dom}\varphi^- = \mathbf{R}$, $\varphi^+|\mathbf{R}^+ = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^+}$, $\varphi^-|\mathbf{R}^- = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^-}$, $\varphi^+(\xi) > \xi$ $(\xi < 0)$, $\varphi^-(\xi) < \xi$ $(\xi > 0)$. Tout R_{φ^+,φ^-} est simplement connexe, bien qu'aucun ne soit arbre.

On conserve les notations du corollaire.

Puisque pour tout $g \in G$, g non neutre, l'inégalité $g \neq \mathrm{id}_A$ q.p. a lieu, on déduit à l'aide du théorème 10.2.1 de [3] (ou par voie directe) que g est d'ordre infini si g conserve l'orientation dans A. Le sous-groupe $G_0 \subset G$ de tels g — dit *sous-groupe d'orientation* — est sous-groupe distingué d'index 2 au plus. $\mathscr{A}$ est dit *orientable* ou *non orientable* suivant le cas que $G/G_0 = (1)$ ou $G/G_0 = \mathbf{Z}_2$.

Cela apporte une précision au corollaire.

ADDENDUM. — G *est d'ordre infini si et seulement si le sous-groupe d'orientation* G_0 *est d'ordre infini; tout élément non neutre de* G_0 *est d'ordre infini; un sous-groupe fini de* G *est d'ordre* 2 *au plus.*

En conséquence on obtient le

THÉORÈME DE HAEFLIGER GÉNÉRALISÉ. — *Soit* $\mathscr{A}$ *un s.v.a. compact connexe de dimension* 1. *Alors le sous-groupe d'orientation* G_0 *de* $G : = \pi_1(\mathscr{A})$ *est d'ordre infini, et tout* $g \in G_0$ *non neutre est lui-même d'ordre infini.* G *ne contient d'éléments non neutres d'ordre fini* (*qui sont nécessairement d'ordre* 2) *que si* $\mathscr{A}$ *est non orientable; dans ce cas un sous-groupe fini de* G *est d'ordre* 2 *au plus.*

En effet, en conservant toujours les notations précédentes, Top((A ;G)) étant compact, G est nécessairement d'ordre infini. L'énoncé du théorème se réduit alors au corollaire et son addendum.

On pourrait pousser l'étude du revêtement universel un peu plus loin afin d'obtenir encore des précisions sur le comportement du groupe universel d'un arbre analytique ainsi que sur le groupe fondamental d'un s.v.a.. Cependant nous n'en avons pas besoin pour les applications traitées dans le paragraphe suivant.

8. Feuilletages.

Sauf mention expresse du contraire tous les feuilletages $\mathscr{F}$ envisagés dans ce paragraphe seront analytiques de co-dimension 1 ; la variété feuilletée M sera supposée analytique et connexe.

En tenant compte du fait que $\pi_1(M/\mathscr{F})$ est un quotient de $\pi_1(M)$ (§ 6), le théorème de Haefliger généralisé et le théorème 7.1 entraînent les théorèmes bien connus de Haefliger ([8], [9], [17]).

THÉORÈME 8.1. — *Si* M *est compacte le groupe* $\pi_1(M)$ *admet comme quotient le groupe fondamental d'un s.v.a. compact connexe de dimension* 1. *En particulier* $\pi_1(M)$ *est d'ordre infini.*

THÉORÈME 8.2. — *Si* M *est simplement connexe,* $M/\mathscr{F}$ *est un arbre analytique. En particulier toute feuille est fermée. Toute courbe transversale topologique est un intervalle ouvert et ne coupe chaque feuille qu'une seule fois au plus.*

COROLLAIRE. — *Dans un groupe de Lie simplement connexe tout sous-groupe analytique de codimension* 1 *est fermé.*

En effet M étant supposée simplement connexe, $M/\mathscr{F}$ est simplement connexe, d'où la première assertion (théorème 7.1). Puisque l'application quotient $p : M \to M/\mathscr{F}$ est continue, et que tout point d'un arbre est fermé, il s'ensuit que toute feuille est fermée. Une courbe transversale γ peut toujours être envisagée comme l'image d'une immersion j de la droite réelle. La transversalité de γ implique que la composition $j.p$ est encore une immersion $\mathbf{R} \to M/\mathscr{F}$, et c'est donc un plongement puisque $M/\mathscr{F}$ est un arbre. Par conséquent j est un plongement et γ coupe chaque feuille une seule fois au plus.

Le corollaire est bien connu dans la théorie des groupes de Lie et se démontre dans ce cadre par un raisonnement assez simple, en tenant compte du fait qu'un sous-groupe analytique est sous-groupe distingué dans sa fermeture ([20]).

Remarque (Haefliger). — Le théorème 8.1 est valable dans la catégorie C^k $(k < \omega)$ si l'on exige en plus que les feuilles soient simplement connexes. Dans ce cas $M/\mathscr{F}$ est une variété compacte à branchement fini, et $\pi_1(M/\mathscr{F})$ est un groupe libre de rang $\geqslant 1$.

Dans le cas général soit $\tilde{M}$ le revêtement universel de M et G le groupe fondamental de M réalisé comme groupe de difféomorphismes opérant librement sur $\tilde{M}$. Le feuilletage $\mathscr{F}$ se relève en un feuilletage $\tilde{\mathscr{F}}$ sur $\tilde{M}$ stable par rapport à G. Donc moyennant la projection canonique de $\tilde{M}$ sur l'arbre analytique $\tilde{M}/\tilde{\mathscr{F}} =: A$ le groupe G opère sur A; l'image de G dans le groupe des difféomorphismes de A sera désignée par H. Alors $M/\mathscr{F}$ s'identifie à (A;H). Il est à noter cependant que A n'est pas nécessairement le revêtement universel de $M/\mathscr{F}$, puisqu'il peut arriver que H contienne des éléments non neutres qui s'égalent à l'identité quelque part. De toute façon on va se servir de (A;H), de manière analogue à [3], pour discuter quelques questions relatives au comportement des feuilles dans M.

Tout d'abord on notera qu'un cercle γ transversal à $\mathscr{F}$ se relève en une courbe $\tilde{\gamma}$ transversale à $\tilde{\mathscr{F}}$. Donc $\tilde{\gamma}$ est un intervalle ouvert (théorème 8.2). Par suite $\tilde{\gamma}$ est le revêtement universel de γ. Autrement dit, γ représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(M)$ (Lemme fondamental de Haefliger). En particulier une « composante de Reeb » porte un élément de $\pi_1(M)$ d'ordre infini.

En ce qui concerne les feuilles fermées on remarque d'abord qu'une feuille de $\mathscr{F}$ correspond à une orbite de H, et que $\mathrm{Top}(M/\mathscr{F})$ correspond d'une part à l'espace quotient de M par rapport à $\mathscr{F}$ et d'autre part à l'espace A/H des orbites. Les applications quotient de M sur $\mathrm{Top}(M/\mathscr{F})$ et de A sur A/H étant continues ouvertes, il s'avère qu'une feuille est fermée respectivement (localement) dense suivant le cas que l'orbite correspondante de H est fermée ou (localement) dense.

Pour discuter certains cas à orbites fermées, considérons le resserrement universel canonique $\upsilon : A \to \underline{A}$. Le groupe H se transporte en un groupe $\underline{H}$ sur $\underline{A}$ (voir la fin du § 3). Soit N le noyau de l'homomorphisme $H \to \underline{H}$. Chaque orbite de N est contenue dans une fibre de υ. Les fibres de υ étant discrètes fermées, toute orbite de N est discrète fermée. Par conséquent une orbite de H, qui correspond par projection à une orbite finie de $\underline{H}$, est fermée. Cela conduit au

THÉORÈME 8.2.*a*. — *Si* $\pi_1(M)$ *est un groupe périodique toute feuille est fermée. Si de plus* $\mathscr{F}$ *est transversalement orientable* $M/\mathscr{F}$ *est un arbre. Par conséquent toute courbe transversale est un intervalle ouvert et coupe chaque feuille une seule fois au plus.*

Il ne reste qu'à établir la seconde partie du théorème. En effet, l'orientabilité transversale de $\mathscr{F}$ implique que $\underline{H}$ coïncide avec son sous-groupe d'orientation $\underline{H}_0$. Puisqu'un élément non neutre serait d'ordre infini, on a $\underline{H} = \underline{H}_0 = (1)$. Donc $H = N$, et par conséquent

$$A/H = \mathrm{Top}((A\,;H)) = \mathrm{Top}(M/F)$$

est une variété dont le groupe fondamental est un quotient de celui de M (§ 6). En particulier $\mathrm{Top}(M/\mathscr{F})$ est une variété à groupe fondamental périodique. Essentiellement par l'argument de Haefliger et Reeb ([10], p. 113) on établit que dans ce cas le groupe fondamental de $\mathrm{Top}(M/\mathscr{F})$ est trivial; c'est dire que $\mathrm{Top}(M/\mathscr{F})$ est un arbre.

En conservant les notations précédentes on va étendre un théorème de Denjoy-Siegel ([5], [18]) et un théorème de Kneser [11] au cas où M est un tore T^n (respectivement une bouteille de Klein K^n ($n \geqslant 2$)).

Pour formuler le théorème de Denjoy-Siegel rappelons d'abord qu'un *tore de Poincaré de dimension* 1 *et de rang* k ($\geqslant 2$) est un s.v.a. $(\mathbf{R}\,;T)$ où T est un groupe de translations de $\mathbf{R}$ à k générateurs libres. Dans ce cas $\mathrm{Top}((\mathbf{R}\,;T))$ est un « trou noir », i.e. un espace dans lequel le sous-espace vide et l'espace total sont les seuls ouverts.

Il peut arriver qu'un s.v.a. soit équivalent à un tore de Poincaré pour la structure C^0 sous-jacente sans qu'il le soit peut-être pour la structure analytique ([1], [3]); dans ce cas on dira que le s.v.a. est topologiquement un tore de Poincaré.

THÉORÈME DE DENJOY-SIEGEL. — *Si* M *est un tore de dimension* n *et si* $\mathscr{F}$ *ne contient aucune feuille fermée, alors* $M/\mathscr{F}$ *est topologiquement un tore de Poincaré de dimension* 1 *et de rang* k *avec* $2 \leqslant k \leqslant n$.

Avant d'aborder la démonstration du théorème remarquons, tout en conservant les notations précédentes, que H est un groupe abélien à n générateurs (non pas nécessairement indépendantes). Or le théorème 10.2.1 de [3] affirme que dans ce cas l'une des éventualités ci-dessous se présente :

(i) il existe un point H-fixe;

(ii) il existe un « essaim » H-stable de points deux à deux associés;

(iii) il existe un intervalle ouvert H-stable J;

(iv) il existe un ensemble linéaire convexe H-stable C; les composantes connexes C_i de C sont des intervalles compacts (éventuellement réduits à un seul point); par la structure de convexité les points terminaux des C_i se rangent en une suite bilatère $\{p_i ; i \in \mathbf{Z}\}$ de sorte que tout triple consécutif p_i, p_{i+1}, p_{i+2} contient un couple associé de points consécutifs.

L'hypothèse implique qu'il n'existe pas de H-orbite fermée. Cela permet d'écarter les cas (i) et (ii), puisqu'un essaim de points deux à deux associés est discret fermé.

Dans le cas (iv), il résulte de la description donnée que la suite $\{p_i ; i \in \mathbf{Z}\}$ est H-stable. D'autre part si un intervalle ouvert contient p_i et p_{i+k}, il contient, à cause de la convexité, tout p_j avec $i \leqslant j \leqslant i + k$. Puisqu'un intervalle ouvert ne contient jamais un couple associé, il s'ensuit qu'il ne contient que deux membres de la suite $\{p_i\}$ au plus. C'est dire que la suite $\{p_i\}$ est discrète fermée, et que, par conséquent, elle contient une H-orbite fermée.

Donc pour le théorème de Denjoy-Siegel on n'a qu'à considérer le cas (iii). Dans ce cas remarquons d'abord que la frontière de J est discrète fermée. En effet si un intervalle ouvert J′ contient un point frontière, l'intersection $\mathrm{J} \cap \mathrm{J}'$ est non vide, c'est donc un intervalle ouvert. Cela montre que J′ contient deux points frontières au plus, autrement dit, que la frontière de J est discrète fermée.

Puisque J est H-stable, la frontière de J est H-stable. L'absence de H-orbites fermées entraîne que la frontière de J est vide, et donc que $\mathrm{J} = \mathrm{A}$.

Donc finalement la preuve est réduite à montrer que si A est un intervalle ouvert, et H un groupe abélien de type fini qui opère sur A sans orbite fermée, alors (A ;H) est topologiquement un tore de Poincaré. Or cela résulte de la suite de remarques ci-dessous.

1) H *coïncide avec le sous-groupe d'orientation* H_0. En effet une transformation $h \in \mathrm{H}$ qui changerait l'orientation aurait un unique point fixe y. En vertu de la commutativité de H, y serait point fixe pour tout $g \in \mathrm{H}$, ce qui contredit l'absence d'orbite fermée.

2) $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0$ *est un groupe libre de rang* k *avec* $k < n$. Puisque tout $h \in \mathrm{H}$ conserve l'orientation, tout h non neutre est d'ordre infini. H étant de type fini, cela démontre que H est libre de rang k. Puisque H est engendré par n éléments, on a $k \leqslant n$.

3) *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $h \in \mathrm{H}$ *opère sans point fixe;*

(ii) *il existe* $x_0 \in \mathrm{A}$ *de sorte que la suite bilatère* $(h^n(x_0) ; n \in \mathbf{Z})$ *est monotone et divergente pour* $n \to \infty$ *et* $n \to -\infty$;

(iii) *pour tout* $x \in A$ *la suite bilatère* $(h^n(x),\ n \in \mathbf{Z})$ *est monotone et divergente pour* $n \to \infty$ *et* $n \to -\infty$.

L'assertion est élémentaire.

4) *Soit* $F \subset H$ *un fixateur maximal, dont le point fixe correspondant est* x_0. *Alors pour* $h \in H - F$ *la suite monotone bilatère* $(h^n(x_0);\ n \in \mathbf{Z})$ *est divergente pour* $n \to \infty$ *et pour* $n \to -\infty$. Sinon on aurait à la suite de la monotonicité de h que $h^n(x_0)$ est convergente pour $n \to \infty$ ou bien pour $n \to -\infty$. Mais alors on aurait pour la limite y que $h(y) = y$, et en même temps, à cause de $f(h^n(x_0)) = h^n(f(x_0)) = h^n(x_0)$, $f \in F$, que $f(y) = y$ pour $y \in F$, et le fixateur F ne serait pas maximal.

5) En conservant les notations de 4) on a : H *contient un sous-groupe* S *de rang* 2 *supplémentaire à* F. Tout d'abord la remarque précédente montre que, si $h^n \in F$, on a $h \in F$. Donc H/F est libre (remarque 2)). Si rang (H/F) $\leqslant 1$, l'orbite de x_0 serait $\{x_0\}$ dans le cas où $H = F$, et serait $\{h^n(x_0;\ n \in \mathbf{Z}\}$, pour $h \in H - F$ convenable, dans le cas où rang (H/F) $= 1$. Dans les deux cas c'est une orbite fermée (remarque 4). Donc rang (H/F) $\geqslant 2$ et l'assertion s'ensuit.

6) *Soient* S *un sous-groupe de* H *de rang* 2 *et* $x_0 \in A$ *tels que pour tout* h *non neutre de* S *la suite monotone bilatère* $(h^n(x_0);\ n \in \mathbf{Z})$ *est divergente pour* $n \to \infty$ *et pour* $n \to -\infty$. *Alors* (A;H) *est topologiquement un tore de Poincaré de dimension* 1 *et de rang* k.

Soit le couple h_1, h_2 une base de S, et S_1 le sous-groupe engendré par h_1. Alors A/S_1 est un cercle. En vertu de la commutativité de h_1 et h_2, le dernier induit un difféomorphisme $\hat{h}_2$ du cercle A/S_1. Si $\hat{h}_2$ a un point fixe sur A/S_1, il y aurait un point fixe x sur A pour un certain $h_3 = h_1^m h_2$; cela contredirait l'hypothèse en vertu de la remarque 3). Donc $\hat{h}_2$ opère sans point fixe. Puisque la classe de différentiabilité est supérieure à 2, le résultat de Denjoy ([5]) affirme que A s'applique sur **R** par un homéomorphisme η de telle façon que S corresponde à un groupe de translations S^η de rang 2 ; S^η est donc un sous-groupe dense du groupe des translations ; par suite le centralisateur de S^η dans le groupe des homéomorphismes de **R** est le groupe des translations. En conséquence η transporte H en un groupe de translations de rang k, ce qui achève la démonstration du théorème de Denjoy-Siegel.

Remarques. — (1) Le théorème de Denjoy-Siegel subsiste toujours pour une classe de différentiabilité inférieure à ω (mais supérieure à 1) pour les feuilletages $\mathscr{F}$ du tore qui admettent un relèvement $\tilde{\mathscr{F}}$ dans l'espace euclidien $\tilde{M}$ à feuilles fermées. Dans ce cas un théorème de Haefliger [9] permet toujours d'affirmer que $\tilde{M}/\tilde{\mathscr{F}}$ est un arbre différentiable et la même démonstration s'applique.

(2) Le théorème classique de Denjoy-Siegel affirme que toute feuille sur le tore T^2 est dense, pourvu qu'il n'existe pas de feuille compacte. Sous cette forme Reeb ([16]) a su étendre le théorème au cas de certains feuilletages de co-dimension 1 et de classe C^2. Sa méthode consiste à trouver des conditions qui garantissent que $M/\mathscr{F}$ soit dominé topologiquement par un tore de Poincaré de dimension 1 et de rang 2. Dans ce cas $\mathrm{Top}(M/\mathscr{F})$ est dominé par un trou noir, c'est donc, en conséquence, encore un trou noir; autrement dit toute feuille est dense.

Une bouteille de Klein K^n $(n \geqslant 2)$ sera le quotient de $\mathbf{R}^n$ par rapport à un groupe affine discret G aux propriétés suivantes : (i) G contient un sous-groupe invariant de translations $G_0 = \mathbf{Z}^n$ tel que $G/G_0 = \mathbf{Z}_2$; (ii) G est sans torsion; (iii) il existe $h \in G - G_0$ et $g \in G_0$ non neutre tels que $hgh^{-1} = -g$ (notation additive dans G_0).

Soient G_{+1}, G_{-1} les sous-groupes de G_0 des éléments qui sont invariants respectivement multipliés de -1 sous l'action adjointe de h. Dans les conditions indiquées on a : Pour tout $\hat{h} \in G - G_0$, $\hat{h}^2$ est un élément non neutre de G_{+1}, d'où rang $G_{+1} \geqslant 1$; G_0/G_{-1} est un groupe libre et G_{+1} s'applique injectivement dans G_0/G_{-1} par projection canonique; $[G,G] \subset G_{-1}$, en conséquence G_{+1} s'applique injectivement dans $G/[G,G]$ par projection canonique. Donc pour tout sous-groupe $H \subset G$ non réduit à l'identité on a rang $H \geqslant 1$ si $H \subset G_0$, et s'il existe $\hat{h} \in H - G_0$, $\hat{h}^2$ se projette sur un élément libre de $G/[G,G]$. De toute façon pour un tel H, on a rang $H/[H,H] \geqslant 1$. Par suite, pour toute variété F sur laquelle H opère librement, le premier nombre de Betti du quotient F/H est non nul.

Théorème de Kneser. — *Si* $M = K^n$, *tout feuilletage* $\mathscr{F}$ *possède une feuille dont le premier nombre de Betti est non nul.*

En reprenant les notations précédentes on va esquisser sommairement comment on peut établir l'existence d'un fixateur non trivial H dans G. Le point fixe correspondant $x \in A$ représente une feuille $\tilde{F}_x \in \tilde{\mathscr{F}}$ sur laquelle H opère librement. Par suite $\tilde{F}_x$ correspond à une feuille $F_x \cong \tilde{F}_x/H$ dont le premier nombre de Betti est non nul.

On va s'appuyer de nouveau sur le théorème 10.2.1 de [3] pour étudier l'action de G_0.

Tout d'abord le cas (i) ne peut pas se présenter puisqu'un tel point fixe correspondrait à une feuille de dimension $(n - 1)$ admettant l'action libre d'un groupe $\cong \mathbf{Z}^n$, ce qui est absurde pour des raisons homologiques.

Dans le cas (iv) le théorème 10.2.1 de [3] spécifie encore que G_0 opère sur la suite $(p_i\,;\ i \in \mathbf{Z})$ comme un groupe de translations, donc comme un groupe cyclique. Puisque rang $G_0 \geqslant 2$, cela entraîne l'existence d'un fixateur non trivial.

Dans le cas (ii), où il existe une G_0-orbite qui est un essaim E, il y a parmi les composantes connexes de $A - E$ une seule A' dont E constitue la frontière, toute autre composante connexe n'a qu'un seul point de E comme frontière. Par conséquent A' est un arbre G_0-stable.

Si A' contient toujours un essaim qui est G_0-orbite on obtient un sous-domaine G_0-stable $A'' \subset A'$, et ainsi de suite. En faisant appel à un théorème de Haefliger ([8], Chap. V, théorème 4) ou bien par un raisonnement direct qui ne fait intervenir que la nature topologique des données, on trouve que les essaims -- G_0-orbites sont en nombre fini. Donc il existe un sous-domaine G_0-stable $A^* \subset A$ qui ne contient plus d'essaim $-$ G_0-orbite. Dès maintenant on peut supposer que A^* contient un intervalle ouvert G_0-stable J.

Puisque G_0 est sous-groupe distingué dans G, l'intervalle ouvert $h(J)$ est encore G_0-stable. Si $h(J) \cap J = \varnothing$, $h(J)$ est contenu dans une composante connexe C de $A^* - \bar{J}$. Dans ce cas C est G_0-stable aussi, et par conséquent le point frontière unique commun de C et J est G_0-stable; absurdité. Donc $J' = h(J) \cap J$ est un intervalle ouvert qui est G-stable. On établit aisément (voir p. ex. [3]) que, si G opère sur un intervalle ouvert, alors il y a un fixateur non trivial.

Cela établit le théorème de Kneser.

Annexe ajoutée sur épreuve : Après l'achèvement de ce travail, l'auteur a trouvé l'article de S. Jekel, On two theorems of A. Haefliger concerning foliations, Topology 15 (1976), 267-271, où M. Jekel se sert de l'intégrabilité du groupe local L (**R**) (voir § 5 ci-dessus), propriété qu'il démontre par un raisonnement analogue au nôtre. Néanmoins il nous semble que l'article de M. Jekel et le présent travail soient toujours assez disjoints pour justifier une publication du dernier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Arnol'd, Small denominators I, *Transl. AMS*, (2), 46 (1965), 213-284.
[2] R. Barre, De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, *Ann. Inst. Fourier*, 23 (1973), 227-312.
[3] L. G. Bouma and W. T. van Est, Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet.*, series A, 81 (1978), 313-347.

[4] E. CARTAN, La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, Oeuvres, partie I, vol. 2.

[5] A. DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. Math. pures appl.*, (9), 11 (1932), 333-375.

[6] W. T. van EST, Fundamental groups of manifold schemes, *Topological Structures II, part* 1, *Editors : P. C. Baayen, J. van Mill, Mathematical Centre Tracts* 115, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1979).

[7] W. T. van EST and M. A. M. van der LEE, On Malcev's criterion for enlargeability of local groups, *à paraître.*

[8] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, *Comm. Math. Helv.*, 32 (1958), 248-329.

[9] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, (3), 16 (1964), 367-397.

[10] A. HAEFLIGER et G. REEB, Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan, *L'Ens. Math.*, II^e série, 3 (1957), 107-125.

[11] H. KNESER, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Ann.*, 91 (1924), 135-154.

[12] A. MALCEV, Sur les groupes topologiques locaux et complets, *Doklady*, XXXII (1941), 606-608.

[13] P. MOLINO, Sur la géométrie transverse des feuilletages, *Ann. Inst. Fourier*, 25 (1975), 279-284.

[14] J. PRADINES, Sur une classe remarquable de relations d'équivalence sur des variétés, *Réunion Ann. de Mat.*, Jaca (1977).

[15] J. PRADINES et J. WOUAFO-KAMGA, La catégorie des QF-variétés, *CRAS*, série A, 288 (1979), 717-719.

[16] G. REEB, Sur les structures feuilletées de co-dimension un et sur un théorème de M. A. Denjoy, *Ann. Inst. Fourier*, 11 (1961), 185-200.

[17] G. REEB, Feuilletages, Résultats anciens et nouveaux (Painlevé, Hector et Martinet), Les Presses de L'Université de Montréal, 1974.

[18] C. L. SIEGEL, Note on differential equations on the torus, *Ges. Abh. Bd III*, 52.

[19] J. WOUAFO-KAMGA, Décomposition des G-structures d'ordre supérieur. Structures transverses des feuilletages, Thèse, Toulouse (1979).

[20] K. YOSIDA, A problem concerning the second fundamental theorem of Lie, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 13 (1937), 152-155.

Manuscrit reçu le 14 novembre 1979.

WILLEM T. van EST,
Mathematisch Instituut
Universiteit van Amsterdam
Roetersstraat 15
Amsterdam (Pays-Bas).