ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GABRIEL DEBS

Quelques propriétés des espaces α-favorables et applications aux convexes compacts

Annales de l'institut Fourier, tome 30, nº 2 (1980), p. 29-43

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_2_29_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 2 (1980), 29-43.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES α-FAVORABLES ET APPLICATIONS AUX CONVEXES COMPACTS

par Gabriel DEBS

Introduction.

Soient K un convexe compact et $\mathscr{E}(K)$ l'ensemble de ses points extrêmaux ; on sait que K est métrisable dès que $\mathscr{E}(K)$ est souslinien (i.e. image continue d'un polonais). Ce critère de métrisabilité dû à Corson [5] a été amélioré par Haydon [8] qui a montré qu'il suffit en fait que X soit cosmique (i.e. image continue d'un métrique séparable). La démonstration de Haydon repose sur un résultat d'intégration vectorielle ; mais à la fin de son article Haydon demande si son résultat ne découle pas du théorème de Corson. Il pose plus précisément la question suivante : Un espace topologique fortement α-favorable et cosmique X, est-il nécessairement souslinien ? En fait il est surprenant de constater que la plupart des auteurs qui se sont intéressés à l'étude de la structure de $\mathscr{E}(K)$ semblent avoir négligé la seule propriété topologique que l'on connaisse sur cet espace.

Nous allons donner une réponse positive à la question de Haydon et montrer même que sous ces hypothèses, X est alors lusinien. Ensuite nous examinerons ce qui se passe quand on remplace l'hypothèse que X est cosmique par l'hypothèse que X est Lindelöf et à diagonale G_δ (nous dirons alors que X est sous-cosmique) : Sous ces conditions plus faibles, nous montrerons que la structure borélienne de X est isomorphe à celle d'un espace lusinien, conclusion qui était suffisante pour montrer que dans le cas où $X = \mathscr{E}(K)$, alors K est métrisable, ce qui améliore le théorème de Haydon précité. On donne aussi (parallèlement à ce qui a lieu dans le cas métrisable) des conditions suffisantes pour qu'un espace fortement α-favorable soit un G_δ absolu, et on montrera que beaucoup de propriétés de l'ensemble des points extrêmaux d'un convexe compact proviennent du seul fait que c'est un espace topologique fortement α-favorable.

1. Terminologie.

On note par $\mathscr{I}$ l'ensemble des irrationnels qui sera muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{R}$. Un espace topologique séparé est dit *souslinien* (resp. *lusinien*) s'il est image continue (resp. bijective continue) de l'espace $\mathscr{I}$. Un espace *analytique* est un espace souslinien métrisable. Un espace $\mathscr{K}$-*analytique* est un espace topologique séparé qui est l'image de $\mathscr{I}$ par une application multivoque s.c.s. et à valeurs compactes. Un espace topologique X est dit de *Lindelöf* si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable ; il est dit *héréditairement de Lindelöf* si tout sous-espace ouvert est de Lindelöf.

Sur un espace topologique X on note par G (resp. F, resp. Z, resp. K) la famille des ouverts (resp. fermés, resp. fermés zéros de fonctions continues, resp. compacts) de X. La tribu engendrée par G ou F (resp. Z) est notée B(X) (resp. Ba(X)) ; c'est la tribu borélienne (resp. de Baire) de X.

Si $\mathscr{X}$ est une famille non vide de sous-ensembles d'un ensemble X, on dit qu'une partie A de X est $\mathscr{X}_\sigma$ (resp. $\mathscr{X}_\delta$, resp. $\mathscr{X}$-souslinienne) si A est obtenue comme réunion dénombrable (resp. intersection dénombrable, resp. noyau d'un schéma de Souslin) d'éléments de $\mathscr{X}$. Quand il n'y a pas de confusion sur X, on note A^c au lieu de $X \backslash A$ le complémentaire de A dans X. Si $B \subset X \times Y$ et $x \in X$, $B(x)$ désignera la coupe de B suivant le point x.

2. Structure borélienne des espaces fortement α-favorables.

2.1. *Rappels sur le jeu de Choquet.* — Soient X un espace topologique, $\mathscr{C}$ l'ensemble de ses ouverts, et $\mathscr{S}$ le graphe de la relation d'appartenance dans $X \times \mathscr{C}$:

$$\mathscr{S} = \{(x,V) \in X \times \mathscr{C} : \quad x \in V\}.$$

Le jeu de Choquet sur X est un jeu infini dans lequel deux joueurs α et β choisissent à tour de rôle un élément de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{S}$ respectivement. Le joueur β commence la partie. Les coups successifs d'une partie sont indexés par $\mathbf{N}$, de sorte que les coups à indice pair (resp. impair) sont relatifs à β (resp. α). La règle du jeu est la suivante : Si au coup $2n$ le joueur β choisit $(x_n,V_n) \in \mathscr{S}$, alors au coup $(2n+1)$ le joueur α doit choisir $U_n \in \mathscr{C}$ tel que $x_n \in U_n \subset V_n$; inversement si au coup $(2n+1)$ le joueur α choisit $U_n \in \mathscr{C}$, au coup $(2n+2)$ le joueur β doit choisir $(x_{n+1}, V_{n+1}) \in \mathscr{S}$ tel que $V_{n+1} \subset U_n$. Ainsi au cours d'une partie les joueurs α et β forment deux suites emboîtées $(U_n)_{n \in N}$ et $(V_n)_{n \in N}$ d'ouverts ; le joueur α gagne la partie si

$$\bigcap_{n \in N} U_n = \bigcap_{n \in N} V_n \neq \varnothing .$$

On dit que l'espace X (ou sa topologie) est *fortement α-favorable* si le joueur α possède une *stratégie gagnante.* Ici la notion de stratégie est celle des jeux infinis à *information parfaite ;* c'est-à-dire qu'à chaque étape du jeu le joueur α est supposé se souvenir de tous ses coups précédents ainsi que de ceux de β, et peut tenir compte de sa mémoire pour établir sa stratégie. Lorsque l'ensemble X est muni de plusieurs topologies on parlera de jeu dans $\mathscr{T}$.

Ainsi une *partie* dans $\mathscr{T}$ est la donnée d'une suite $(J_n)_{n \in N}$, avec $J_{2n} \in \mathscr{S}$ et $J_{2n+1} \in \mathscr{T}$ qui vérifient les règles décrites ci-dessus ; la suite finie $(J_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est dite un *début de partie* dans $\mathscr{T}$. Soient $\mathscr{J}$ et $\mathscr{J}'$ deux débuts de partie, on dira que $\mathscr{J}'$ prolonge $\mathscr{J}$ si $\mathscr{J}$ est une section commençante de $\mathscr{J}'$. On dit qu'une partie (ou qu'un début de partie) est *conforme à une α-stratégie* donnée, si le joueur α applique cette stratégie à chacun de ses coups.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* X *un ensemble muni de deux topologies* $\mathscr{T}$ *et* $\mathscr{T}'$; *on suppose que* $\mathscr{T}$ *est moins fine que* $\mathscr{T}'$ *et qu'il existe dans* $\mathscr{T}'$ *une base* $\mathscr{B}'$ *formée d'éléments qui sont* G_δ *pour* $\mathscr{T}$. *Alors si* $\mathscr{T}$ *est fortement α-favorable, il en est de même pour* $\mathscr{T}'$.

Démonstration. — Notons $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}'$) le graphe de la relation $\in$ dans $X \times \mathscr{T}$ (resp. $X \times \mathscr{T}'$). D'après l'hypothèse, pour tout $B' \in \mathscr{B}'$ il existe une suite $(V_k(B'))_{k \in N}$ dans $\mathscr{T}$ telle que

$$B' = \bigcap_{k \in N} V_k(B').$$

Si σ est une α-stratégie gagnante sur $\mathscr{T}$, on peut en déduire une α-stratégie gagnante sur $\mathscr{T}'$ de la manière suivante :

Si β joue $J'_0 = (x_0, V'_0) \in \mathscr{T}'$, alors α choisit $B'_0 \in \mathscr{B}'$ tel que $x_0 \in B'_0 \subset V'_0$; comme $J_0 = (x_0, V_0(B'_0)) \in \mathscr{S}$, le joueur α peut former $J_1 = \sigma(J_0) \in \mathscr{T}$. Enfin α joue $J'_1 = J_1 \cap B'_0 \in \mathscr{T}'$ qui vérifie $x_0 \in J'_1 \subset V'_0$.

Si au coup suivant β joue $J'_2 = (x_1, V'_1) \in \mathscr{S}'$, alors α choisit $B'_1 \in \mathscr{B}'$ tel que $x_1 \in B'_1 \subset V'_1$; comme $J_2 = (x_1, V_1(B'_0) \cap V'_1(B'_1) \cap J_1) \in \mathscr{S}$, le joueur α peut former $J_3 = \sigma(J_0, J_1, J_2)$. Enfin α joue $J'_3 = J_3 \cap B'_1 \in \mathscr{T}'$ qui vérifie $x_1 \in J'_3 \subset V'_1$.

Ainsi au bout de $(2n+1)$ coups $(J'_k)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$ avec $J'_{2k} = (x_k, V'_k)$, le joueur α aura construit en itérant le procédé précédent, des suites finies $(J_k)_{0\leqslant k\leqslant 2n+1}$ et $(B'_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ vérifiant :

$$(1) \qquad B'_k \in \mathscr{B}' \quad \text{et} \quad x_k \in B'_k \subset V'_k$$

$$(2) \qquad J_{2k+1} = \sigma(J_0, J_1, \ldots, J_{2k})$$

$$(3) \qquad J_{2k} = (x_k, J_{2k-1} \cap \bigcap_{i=0}^{k} V_k(B'_i)).$$

Alors au $(2n+2)^{\text{ième}}$ coup, α joue $J'_{2n+1} = J_{2n+1} \cap B'_n$. Cette stratégie est clairement gagnante puisque :

$$\varnothing \neq \bigcap_{n\in\mathbf{N}} J_{2n+1} \subset \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \bigcap_{\substack{p\in\mathbf{N}\\ p\leqslant n}} V_n(B'_p) = \bigcap_{p\in\mathbf{N}} \bigcap_{\substack{n\in\mathbf{N}\\ n\geqslant p}} V_n(B'_p)$$

$$= \bigcap_{p\in\mathbf{N}} B'_p \subset \bigcap_{p\in\mathbf{N}} J'_{2p}. \qquad \square$$

DÉFINITION 2.3 (voir [10]). — *Un espace topologique* X *est dit cosmique s'il est régulier et vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(i) X *est image continue d'un espace métrisable séparable.*

(ii) *il existe dans* X *une suite* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de fermés telle que pour tout ouvert* U *de* X *et tout* $x \in U$, *on ait* $x \in F_n \subset U$ *pour un certain* n.

THÉORÈME 2.4. — *Tout espace cosmique fortement α-favorable est lusinien.*

Démonstration. — Soit $(X, \mathscr{T})$ un tel espace. Considérons une suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fermés vérifiant la condition (ii) de la définition précédente. Si $\mathscr{T}'$ désigne la topologie engendrée par

$$\mathscr{B}' = \{F_n ; n \in \mathbf{N}\} \cup \{F_n^c ; n \in \mathbf{N}\},$$

il est facile de voir que $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{B}'$ vérifient les conditions du théorème 2.2 (les F_n sont G_δ pour $\mathscr{T}$ car un espace cosmique est héréditairement de Lindelöf). Par suite $\mathscr{T}'$ est fortement α-favorable, de plus cette topologie est métrisable séparable puisqu'elle est régulière et à base dénombrable. Il résulte de ([3], p. 136, théorème 8.7) que $(X, \mathscr{T}')$ est polonais et par suite que $(X, \mathscr{T})$ est lusinien puisque $\mathscr{T} < \mathscr{T}'$. $\square$

Nous allons maintenant étudier ce qui se passe quand on affaiblit, dans le théorème précédent, l'hypothèse que X est cosmique. Rappelons qu'un espace topologique est dit *submétrisable* si sa topologie est plus fine qu'une topologie métrisable (voir [2], p. 97, ex. 27). Un espace cosmique est submétrisable et de Lindelöf.

LEMME 2.5. — *Pour un espace topologique régulier et de Lindelöf les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La diagonale dans* $X \times X$ *est un* G_δ.

(ii) *Il existe sur* X *une suite de fonctions continues qui sépare les points.*

(iii) X *est submétrisable.*

Démonstration. — (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que la diagonale Δ dans $X \times X$ s'écrive comme intersection de la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'ouverts. L'espace X étant complètement régulier et Δ de Lindelöf on peut trouver pour tout $n \in \mathbf{N}$ une suite $(f_{n,p})_{p \in \mathbf{N}}$ de fonctions continues sur X telle que l'on ait

$$\Delta \subset \bigcup_{p \in \mathbf{N}} V_{n,p} \times V_{n,p} \subset U_n \qquad \text{avec} \qquad V_{n,p} = \{f_{n,p} > 0\}.$$

Il est immédiat alors que la famille $(f_{n,p})_{(n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ sépare les points de X.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions sur X vérifiant (ii); on supposera de plus $0 \leqslant g_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. La distance sur X définit par $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{2^n} |g_n(x) - g_n(y)|$ détermine alors sur X une topologie moins fine que la topologie initiale.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Immédiat. □

DÉFINITION 2.6. — *Un espace topologique sera dit sous-cosmique s'il est régulier, de Lindelöf et submétrisable.*

Nous allons maintenant démontrer une propriété fondamentale sur la structure des espaces sous-cosmiques fortement α-favorables. Cette démonstration reposera sur le théorème de sélection suivant établi dans [6].

THÉORÈME 2.7. — *Soient* $(X,\mathscr{X})$ *un espace mesurable,* Y *un espace polonais et* F *une application multivoque de* X *dans l'ensemble des parties non vides de* Y *vérifiant :*

1) *Pour tout* $(n,p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, *il existe* $A_{n,p} \in \mathscr{X}$ *et* $V_{n,p}$ *ouvert de* Y *tels que :*

$$\mathrm{Gr}(F) = \{(x,y) \in X \times Y : \ y \in F(x)\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{p \in \mathbf{N}} A_{n,p} \times V_{n,p}.$$

2) *Pour tout ouvert* V *de* Y, $F^{-}(V) = \{x \in X ; F(x) \cap V \neq \varnothing\} \in \mathscr{X}$. *Alors il existe une application* $f :\ X \to Y$ *mesurable et telle que* $f(x) \in F(x)$ *pour tout* $x \in X$.

Rappelons qu'un espace mesurable $(X,\mathscr{X})$ est dit *standard* s'il est isomorphe à un espace lusinien (resp. $[0,1]$) muni de sa tribu borélienne.

THÉORÈME 2.8. — *Soit* X *un espace topologique sous-cosmique et fortement* α-*favorable ; alors l'espace mesurable* $(X,\mathrm{Ba}(X))$ *est standard.*

Fixons d'abord quelques notations : on désigne par $\sum$ l'ensemble $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ des suites (infinies) d'entiers. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on désigne par S_n l'ensemble des suites finies d'entiers de longueur n, et on pose $S = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} S_n$. Soit $s \in S$; on note par $|s|$ la longueur de la suite s ; si $\sigma \in S \cup \sum$ on écrira $s \prec \sigma$ si s est une section commençante de σ ; pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note (s,k) la suite de longueur $(|s|+1)$ qui prolonge s par l'entier k. On munit $\sum$ de la topologie produit qui est engendrée par les ilôts

$$\sum\nolimits_s = \{\sigma \in \sum :\ \ s \prec \sigma\}$$

quand s décrit S ; l'espace $\sum$ est alors homéomorphe à l'espace $\mathscr{I}$ des irrationnels.

Pour démontrer le théorème 2.8 nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2.9. — *Sous les hypothèses précédentes sur* X *il existe une application* φ *de* $\sum$ *sur* X *vérifiant :*

a) φ *est Baire mesurable.*

b) $\forall s \in S,\ \varphi(\sum_s) \in \mathrm{Ba}(X)$.

c) $\forall \sigma \in \sum,\ \varphi(\sigma) = \bigcap_{s \prec \sigma} \varphi(\sum_s)$.

Démonstration. — Notons par $\mathscr{T}$ la topologie de X et soit $\mathscr{T}'$ une topologie métrisable moins fine que $\mathscr{T}$, qui est définie par une distance d ; pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons :

$$G_n = \left\{(x,y) \in X \times X :\ \ d(x,y) < \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Dans la suite quand on parlera d'ouverts, sans plus de précision on entendra des ouverts pour $\mathscr{C}$. L'espace X étant complètement régulier, l'ensemble $\mathscr{L}$ des ouverts F_σ de X forme une base pour $\mathscr{C}$; et par suite on peut trouver sur X une α-stratégie gagnante λ qui prend ses valeurs dans $\mathscr{L}$.

On peut alors construire par récurrence sur $n = |s|$ des familles $(U_s)_{s \in S}$ et $(V_s)_{s \in S}$ d'ouverts et une famille $(x_s)_{s \in S}$ de points de X vérifiant :

(0) Pour tout $k \in \mathbf{N} \approx S_1$, $V_k = X$; et $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de points de X telle que les ouverts $U_k = \lambda(x_k, V_k)$, recouvrent X quand k décrit $\mathbf{N}$.

Et pour tout entier $n \geqslant 2$:

$(1)_n \qquad \forall s \in S_n, \qquad x_s \in V_s \qquad \text{et} \qquad V_s \times V_s \subset G_n.$

$(2)_n \qquad \forall t \in S_{n-1}, \qquad U_t = \bigcup_{\substack{s \in S_n \\ t \prec s}} U_s = \bigcup_{\substack{s \in S_n \\ t \prec s}} V_s.$

$(3)_n \qquad \forall s \in S_n, \qquad U_s = \lambda(J_0, J_1, \ldots, J_{2n})$

avec

$$\begin{cases} J_{2k} = (x_{\pi_k(s)}, V_{\pi_k(s)}) & \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant n \\ J_{2k+1} = U_{\pi_k(s)} & \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$$

où π_k désigne la projection canonique de S_n sur S_k.

Cette construction que nous admettrons est immédiate ; elle repose sur le fait que tout élément U de $\mathscr{L}$ est lui-même un espace de Lindelöf. La stratégie λ étant gagnante, pour tout $\sigma \in \sum$ l'ensemble $\bigcap_{s \prec \sigma} V_s$ est non vide et réduit à un point d'après $(1)_n$; soit $\varphi(\sigma)$ ce point. L'application φ ainsi construite de $\sum$ dans X est clairement surjective et continue pour $\mathscr{C}'$; donc $(X, \mathscr{C}')$ est analytique.

Considérons une partie A de X qui est ambiguë d'ordre 1 pour $\mathscr{C}$; comme A est un G_δ d'un espace fortement α-favorable, il est lui-même fortement α-favorable (ceci est immédiat ; mais découle aussi du théorème 2.2) ; comme A est un F_σ d'un espace de Lindelöf, il est lui-même de Lindelöf, enfin A est régulier et submétrisable. Donc en appliquant ce qui précède à l'espace A on voit que A est $\mathscr{C}'$-analytique et de même A^c ; il découle alors du premier théorème de séparation des ensembles analytiques que A est borélien pour $\mathscr{C}'$. On a par suite $\mathrm{Ba}(\mathscr{C}) = \mathrm{Ba}(\mathscr{C}') = \mathrm{B}(\mathscr{C}')$; ce qui montre que φ est mesurable pour $\mathrm{Ba}(\mathscr{C})$. D'autre part il est facile de vérifier que $\varphi(\sum_s) = U_s$; donc *b*) et *c*) découlent de ce qui précède. $\square$

Démonstration du théorème 2.8. — Considérons l'application multivoque F de X dans l'ensemble des parties de $\sum$ définie par $F(x) = \varphi^{-1}(x)$; elle vérifie :

1) $$\mathrm{G}r(\mathrm{F}) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \bigcup_{s \in \mathrm{S}_n} \mathrm{U}_s \times \textstyle\sum_s$$

2) $$\forall s \in \mathrm{S}, \qquad \mathrm{F}^-(\textstyle\sum_s) = \varphi(\textstyle\sum_s) = \mathrm{U}_s \in \mathrm{Ba}(\mathrm{X},\mathscr{T}).$$

D'après le théorème 2.7 il existe une sélection f de X dans $\sum$ mesurable pour $\mathrm{Ba}(\mathrm{X},\mathscr{T})$. Remarquons alors que l'ensemble $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$ est borélien dans $\sum$ puisque :

$$\mathrm{Y} = \{f \circ \varphi = \mathrm{Id}\}.$$

L'application φ restreinte à Y est bijective et mesurable ; l'espace Y muni de sa tribu borélienne est standard et la tribu $\mathrm{Ba}(\mathscr{T})$ sur X est séparable puisqu'elle est égale à $\mathrm{Ba}(\mathscr{T}')$. Il découle alors du théorème des isomorphismes de Lusin (avec forme abstraite ; voir [4], p. 35, théorème 2.4) que φ est un isomorphisme borélien de A sur X, d'où la conclusion. □

Deux topologies sur un ensemble X sont dites *Baire-équivalentes* si leurs tribus de Baire respectives sont égales.

COROLLAIRE 2.10. — *Sous les mêmes hypothèses sur* $(\mathrm{X},\mathscr{T})$, *toute topologie métrisable et Baire-équivalente à* $\mathscr{T}$ *est lusinienne.*

Démonstration. — Ceci découle du fait qu'un espace topologique métrisable muni de sa tribu borélienne est standard si et seulement si il est lusinien ([4], p. 39, théorème 2.6). □

COROLLAIRE 2.11. — *Sous les mêmes hypothèses sur* $(\mathrm{X},\mathscr{T})$, *toute topologie métrisable moins fine que* $\mathscr{T}$ *est lusinienne.*

Remarque 2.12. — Considérons sur $\mathbf{R}$ la topologie $\mathscr{T}$ engendrée par les intervalles $[a,b[$; il est facile de voir que $\mathscr{T}$ est régulière de Lindelöf (même héréditairement de Lindelöf) et submétrisable (puisque plus fine que la topologie habituelle) ; de plus d'après le théorème 2.2, $\mathscr{T}$ est une topologie d'espace fortement α-favorable. Donc $(\mathbf{R},\mathscr{T})$ vérifie toutes les hypothèses du théorème 2.8 mais $(\mathbf{R},\mathscr{T})$ n'est pas lusinien ; en fait il n'est même pas cosmique car $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, \mathscr{T}\times\mathscr{T})$ n'est pas normal (voir [2], p. 113, ex. 15).

3. Une classe d'ensembles G_δ.

Il résulte du corollaire 2.4 qu'un espace cosmique fortement α-favorable X est un borélien absolu dans la catégorie des espaces réguliers (voir [2], p. 67, lemme 7). Le but de ce paragraphe est de montrer qu'en fait un tel X est un G_δ absolu dans la catégorie des espaces cosmiques. Pour cela nous avons besoin de la notion suivante :

DÉFINITION 3.1. — *Une partie* X *dans un espace topologique* Y *est dite déterminée par* A, *si* A *est une partie de* $Y \times Y$ *qui vérifie :*

a) $\forall x \in X, \quad (x,x) \in A$

b) $\forall x \in X, \quad \forall y \in X^c, \quad (x,y) \in A^c$.

On dira que X *est* G_δ*-déterminée dans* Y *s'il existe un* G_δ *dans* $Y \times Y$ *qui détermine* X.

3.2. — Voici quelques exemples de parties X qui sont G_δ-déterminées dans un espace Y :

a) S'il existe sur Y une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions continues vérifiant

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in X^c, \quad \exists n \in \mathbf{N} : \quad f_n(x) \neq f_n(y).$$

On dit alors que X est distingable dans Y (voir [9]).

b) Si la diagonale dans $Y \times Y$ est un G_δ et X quelconque.

c) Si X est Z-souslinien dans Y.

d) S'il existe une application continue f de Y dans un espace topologique Y′ telle que $f(X) \cap f(Y \backslash X) = \emptyset$ et que $f(X)$ soit G_δ-déterminé dans $f(Y)$.

Notations 3.3. — Soit $(I_n, p_{n,m})_{\substack{(n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \\ m \geqslant n}}$ un système projectif dénombrable ; on note $I_\infty = \varprojlim I_n$. Pour plus de commodité on écrira p_n au lieu de $p_{n,m}$ quand $m \geqslant n$, sans préciser l'indice de l'ensemble de départ. On notera aussi par p_n la projection canonique de I_∞ sur I_n. Enfin pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $i \in I_n$ on pose $q(i) = p_{n-1,n}(i) = p_{n-1}(i)$. Un système projectif dénombrable est parfaitement déterminé par la donnée de l'application q précédente.

THÉORÈME 3.4. — *Soient* Y *un espace topologique et* X *un sous-espace de* Y *vérifiant :*

a) X *est fortement* α*-favorable.*

b) X *est* G_δ*-déterminé dans* Y.

c) *Le filtre des voisinages de* X *dans* Y *admet une base formée de sous-espaces ouverts et paracompacts.*

Alors X *est un* G_δ *de* Y.

Démonstration. – Soient σ une α-stratégie gagnante sur X, et $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'ouverts de $Y \times Y$ telle que $G = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} G_n$ détermine X dans Y. Tous les ouverts considérés dans la suite sont relatifs à la topologie de Y.

Nous allons définir par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ un système projectif dénombrable d'ensembles $(I_n ; p_n ; q)$ (avec les notations 3.3), des familles $(V_i)_{i \in I_n}$ d'ouverts de Y et des familles $(J_i)_{i \in I_n}$ de débuts de parties sur X vérifiant :

(0) $\qquad I_0 = \{0\}; \qquad V_0 = Y; \qquad J_0 = Y;$

et pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$(1)_n$ $(V_i)_{i \in I_n}$ est une famille ponctuellement finie d'ouverts de Y qui recouvre X.

$(2)_n$ Pour tout $i \in I_n$, $V_i \subset V_{q(i)}$ et $V_i \times V_i \subset G_n$.

$(3)_n$ Pour tout $i \in I_n$, J_i est un début de partie sur X qui est conforme à σ et qui prolonge $J_{q(i)}$.

$(4)_n$ Pour tout $i \in I_n$, le dernier coup A_i de J_i est relatif à α et vérifie : $X \cap V_i \subset A_i$.

Supposons la construction faite jusqu'à l'ordre n.

Soit $(U_x)_{x \in X}$ un recouvrement ouvert de X plus fin que le recouvrement $(V_i)_{i \in I_n}$ tel que pour tout $x \in X$ on ait :

$$x \in U_x \qquad \text{et} \qquad U_x \times U_x \subset G_{n+1}.$$

Notons $H = \{(i,x) \in I_n \times X : \ U_x \subset V_i\}$; d'après $(4)_n$, pour tout $(i,x) \in H$, $(J_i,(x, X \cap U_x))$ est un début de partie sur X, et on peut trouver un ouvert $W_{i,x}$ de Y tel que :

$$\sigma(J_i,(x, X \cap U_x)) = X \cap W_{i,x}$$

et

$$W_{i,x} \subset U_x.$$

Comme $X \subset \bigcup_{h \in H} W_h$, il résulte des hypothèses sur X qu'on peut trouver une famille ponctuellement finie $(W_j)_{j \in J}$ d'ouverts de Y, qui recouvre X et telle que :

$$\forall j \in J, \qquad \exists h \in H : \quad W_j \subset W_h .$$

Pour tout $(i,j) \in I_n \times J$, posons :

$$B_{i,j} = \{x \in H(i) : \quad X \cap W_j \subset W_{i,x}\}$$

on définit alors :

$$I_{n+1} = \{(i,j) \in I_n \times J : \quad B_{i,j} \neq \varnothing\} .$$

Pour tout $(i,j) \in I_{n+1}$, on fixe $x_{i,j} \in B_{i,j}$ et on pose :

$$W_{i,j} = W_{i,x_{i,j}} \qquad \text{et} \qquad U_{i,j} = U_{x_{i,j}} ;$$

enfin on définit :

$$\begin{aligned} q(i,j) &= i \\ V_{i,j} &= W_j \\ J_{i,j} &= (J_i,(x_{i,j},X \cap U_{i,j}),X \cap W_{i,j}) . \end{aligned}$$

La vérification de $(1)_{n+1}$ à $(4)_{n+1}$ est immédiate ; et la construction est alors achevée.

Considérons les ensembles :

$$X' = \bigcap_{n \in N} \bigcup_{i \in I_n} V_i \qquad \text{et} \qquad X'' = \bigcup_{\bar{i} \in I_\infty} \bigcap_{n \in N} V_{p_n}(\bar{i}) .$$

Nous allons démontrer que : $X \subset X' \subset X'' \subset X$. La première inclusion $X \subset X'$ est évidente.

Soit $x \in X'$; la famille $(V_i)_{i \in I_1}$ étant ponctuellement finie, on peut trouver $i_1 \in I_1$ tel que :

$$(x \in V_{i_1}) \qquad \text{et} \qquad (\forall n \geqslant 1, \quad \exists j \in I_n : \quad p_1(j) = i_1 \quad \text{et} \quad x \in V_j) .$$

De même on peut trouver $i_2 \in q^{-1}(i_1)$ tel que :

$$(x \in V_{i_2}) \qquad \text{et} \qquad (\forall n \geqslant 2, \quad \exists j \in I_n : \quad p_2(j) = i_2 \quad \text{et} \quad x \in V_j) .$$

Ainsi de proche en proche on construit $\bar{i} \in I_\infty$ tel que

$$x \in V_{\bar{i}} = \bigcap_{n \in N} V_{p_n}(\bar{i}) .$$

Pour la dernière inclusion considérons $\bar{i} \in I_\infty$; l'espace X étant α-favorable il résulte de $(3)_n$ et $(4)_n$ que $X \cap V_{\bar{i}} \neq \varnothing$; d'autre part d'après

$(2)_n$ on a $V_{\bar{i}} \times V_{\bar{i}} \subset G$. Comme X est déterminé par G dans Y, il est facile de voir alors que $V_{\bar{i}} \subset X$; ce qui montre que $X'' \subset X$. Par suite $X = X'$ est un G_δ de Y. □

Signalons que la condition *c*) du théorème 3.4 est réalisée dès que Y est héréditairement paracompact (par exemple dès que Y est métrisable ou cosmique). Elle est aussi réalisée si X est de Lindelöf et Y compact, car dans ce cas si U est ouvert de Y contenant X, on peut trouver (par le théorème d'Urysohn) un ouvert K_σ (donc paracompact) V tel que $X \subset V \subset U$.

COROLLAIRE 3.5. — *Dans un espace cosmique, tout sous-espace qui est fortement α-favorable est un G_δ.*

COROLLAIRE 3.6. — *Dans un espace compact, tout sous-espace Z-souslinien qui est fortement α-favorable est un G_δ.*

Rappelons qu'un espace topologique complètement régulier est dit topologiquement complet s'il est G_δ dans son compactifié de Stone-Čech (ou dans un compactifié, ou dans tout compactifié). On remarquera que dans le corollaire suivant l'hypothèse sur X implique que X est de Lindelöf et distingable dans son compactifié de Stone-Čech (donc G_δ-déterminé).

COROLLAIRE 3.7. — *Soit X un espace topologique qui possède une image métrisable séparable par une application propre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est topologiquement complet.*

(ii) X *est fortement α-favorable.*

4. Applications.

Nous rappelons quelques points concernant la représentation intégrale dans les convexes compacts (pour plus de détail voir [1], p. 38). Soient K un convexe compact d'un espace localement convexe et $X = \mathscr{E}(K)$ l'ensemble de ses points extrêmaux. On note par Be(X) la trace sur X de la tribu de Baire Ba(K) de K ; on a évidemment $Be(X) \subset Ba(X)$. Si μ est une mesure maximale sur K (pour l'ordre de Choquet), pour tout $B \in Ba(K)$, on pose : $\bar{\mu}(X \cap B) = \mu(B)$; et on montre que $\bar{\mu}$ définit bien une mesure (non nécessairement régulière) sur la tribu Be(X), qui vérifie : $\int f\, d\bar{\mu} = \mu(f)$, pour toute fonction f continue sur K. En particulier si la mesure μ est de barycentre $x \in K$, on aura $\int f\, d\bar{\mu} = f(x)$ pour tout $f \in A(K)$, où $A(K)$ désigne l'espace des fonctions affines continues sur K.

THÉORÈME 4.1. — *Soient* K *un convexe compact et* $X = \mathscr{E}(K)$ *l'ensemble de ses points extrêmaux; alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est métrisable.*

(ii) $X \times X$ *est héréditairement de Lindelöf.*

(iii) X *est sous-cosmique.*

Démonstration. — Les implications (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) étant immédiates, il suffit de montrer que (iii) ⇒ (i).

Remarquons d'abord que X étant de Lindelöf on a $Be(X) = Ba(X)$ (d'après [8], lemme 3.1). La tribu $Be(X)$ étant alors dénombrablement séparée puisque standard (théorème 2.8) on peut trouver une famille dénombrable F de fonctions continues sur K qui sépare les points de X ; de plus on peut supposer que F est stable par produits finis et que $(-F) = F$.

Pour tout $f \in F$, et tout $x \in X$, on a $f(x) = \text{Inf}\,\{g(x)\,; g \in A(K) \text{ et } g \geqslant f \text{ sur } K\}$ (voir [1], proposition 1.3.5). L'espace X étant de Lindelöf, on peut alors trouver ([7], proposition 19) pour tout $f \in F$, une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $A(K)$ telle que :

1) $f_n \geqslant f$ sur K.

2) $\inf\limits_{n \in \mathbf{N}} f_n = f$ sur X.

Nous allons alors démontrer que la famille

$$G = \{f_n\,; f \in F \quad \text{et} \quad n \in \mathbf{N}\}$$

distingue X dans K (voir 3.2.*a*) ce qui est suffisant (d'après [9]) pour conclure que K est métrisable.

Soient alors $x \in X$ et $y \in K \backslash X$; désignons par μ une mesure maximale sur K qui représente y, et par $\bar{\mu}$ la mesure σ-additive qu'elle définit sur $Ba(X)$.

Considérons l'ensemble H des fonctions $\mathscr{G}$ bornées et Baire-mesurables sur X qui vérifient $\int g\, d\bar{\mu} = g(x)$; c'est un espace vectoriel contenant les constantes et stable par limite monotone bornée et par limite uniforme et F est stable par produits finis. Par suite si l'on supposait $F \subset H$ il résulterait du théorème de la classe monotone que H contient les fonctions caractéristiques des éléments de la tribu $\mathcal{A}$ engendrée par F; mais $\mathcal{A}$ est par hypothèse une sous-tribu dénombrablement séparée de la tribu $Ba(X)$ qui est standard et on concluerait alors par le théorème des isomorphismes que $Ba(X) = \mathcal{A}$; donc que $\bar{\mu} = \varepsilon_x$ ce qui est faux. Donc il existe $f \in F$ tel que $\int f\, d\bar{\mu} \neq f(x)$ et comme $(-f) \in F$ on peut supposer $f(x) < \int f\, d\bar{\mu}$; d'où :

$$\operatorname*{Inf}_{n \in \mathbf{N}} f_n(x) = f(x) < \int f\, d\bar{\mu} \leqslant \operatorname*{Inf}_{n \in \mathbf{N}} \int f_n\, d\bar{\mu} = \operatorname*{Inf}_{n \in \mathbf{N}} f_n(y)$$

et par suite il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f_n(x) < f_n(y)$. □

Remarque 4.2. – On ignore si la seule condition que $(X, Ba(X))$ est standard, est suffisante pour que K soit métrisable. La démonstration précédente montre qu'elle est suffisante si l'on suppose de plus que toute fonction continue sur X admet un prolongement sur K en une fonction convexe de 1re classe de Baire. En particulier un simplexe de Lion (voir [12]) est métrisable si et seulement si $(X, Ba(X))$ est standard.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate des corollaires 3.6 et 3.7.

THÉORÈME 4.3. – *Sous l'une des deux hypothèses suivantes, l'ensemble* X *des points extrêmaux du convexe compact* K *est* G_δ *dans* $\bar{X}$:

a) Il existe une application propre de X *sur un espace métrisable séparable.*

b) X *est* Z*-souslinien dans* $\bar{X}$.

Le *a*) améliore un résultat de M. Talagrand (voir [13], théorème 3) car dans un espace compact, tout sous-espace qui est G_δ et de Lindelöf est $K_{\sigma\delta}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. M. ALFSEN, Compact convex sets and boundary integrals, Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Ergebnisse der Mathematik*, 57).

[2] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. 9, Paris, Hermann, 1974 (*Act. Scient. et Ind.*).

[3] G. CHOQUET, Lectures on Analysis, vol. I, New-York, W.A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[4] J. P. R. CHRISTENSEN, Topology and Borel structure, North-Holland, 1974 (*Mathematics studies* 10).

[5] H. H. CORSON, Metrizability of compact convex sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151 (1970), 589-596.

[6] G. DEBS, Sélection d'une multi-application à valeurs G_δ, *Bull. Acad. Royale de Belgique*, LXV (1979), 211-216.

[7] A. GOULET DE RUGY, C. SCHOL-CANCELIER, B. TAYLOR-MAC GIBBON, Quelques résultats nouveaux sur les points extrêmaux d'un simplexe compact, Séminaire Choquet (Initiation à l'Analyse), 10e année, 1970-71, exposé n° 18.

[8] R.HAYDON, An extreme point creterion for separability of a dual Banach space and a new proof of a Theorem of Corson, *Quarterly J. Math.*, 2d Series, 27 (1976), 379-380.

[9] J. E. JAYNE, Metrization of compact convex sets, *Maths. Ann.*, 234 (1978), 109-115.

[10] E. MICHAEL, $\aleph$-spaces, *J. Math. Mech.*, 15 (1966), 983-1002.

[11] B. MAC GIBBON, A criterion for the metrizability of a compact convex set in terms of the set of extreme points, *J. Funct. Anal.*, 11 (1972), 385-392.

[12] M. ROGALSKI, Opérateur de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques, *J. Funct. Anal.*, 2 (1968), 458-488.

[13] M. TALAGRAND, Sur les convexes compacts dont l'ensemble des points extrêmaux est K-analytique, *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 49-53.

Manuscrit reçu le 4 décembre 1979.

Gabriel DEBS,
Équipe d'Analyse
Tour 46, 4e étage
Université Pierre et Marie-Curie
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.