ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTIANE CHAMFY

Fonctions méromorphes dans le cercle-unité et leurs séries de Taylor

Annales de l'institut Fourier, tome 8 (1958), p. 211-262
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1958__8__211_0>

FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE CERCLE-UNITÉ ET LEURS SÉRIES DE TAYLOR

par Christiane CHAMFY.

INTRODUCTION

L'objet de cet ouvrage est d'étudier les relations entre le comportement dans le cercle-unité de certaines familles de fonctions méromorphes dans ce cercle et holomorphes à l'origine, et les coefficients de leur développement en série de Taylor au voisinage de l'origine.

Dans la première partie, nous nous intéressons aux fonctions méromorphes bornées par 1 en module sur le cercle-unité. Schur avait établi [11] qu'il existe une suite d'inégalités rationnelles sur les coefficients du développement d'une fonction en série de Taylor au voisinage de l'origine, constituant une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit holomorphe et bornée par 1 en module dans le cercle-unité. Nous montrons ici qu'il existe de même des inégalités rationnelles sur les coefficients d'une fonction méromorphe, constituant une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait exactement p pôles dans le cercle-unité et soit bornée par 1 en module sur ce cercle. Nous indiquons ensuite un procédé pratique pour former ces inégalités, dans le cas où les coefficients sont réels, à l'aide de suites de polynômes associés.

Dans la deuxième partie, nous étudions les fonctions méromorphes dans le cercle-unité qui sont holomorphes à l'origine et ont un développement en série de Taylor à coefficients entiers. Une classe importante de ces fonctions est formée de fractions rationnelles. Des études de Borel [1] et de Carlson et Polya [2] ont montré que la possibilité de prolonger une fonction à coefficients entiers à l'extérieur du cercle-unité constitue une condition suffisante pour qu'elle soit une fraction rationnelle. M. Salem [10] s'est intéressé au comportement de ces fonctions à l'intérieur du cercle-unité, au voisinage de la frontière, et a démontré que, si une fonction à coefficients entiers n'est pas une fraction rationnelle, elle approche nécessairement toute valeur dans toute couronne au voisinage du cercle-unité. On ignore si la fonction prend alors nécessairement toute valeur dans le cercle-unité. Le résultat que nous établissons ici précise dans une certaine mesure le théorème de M. Salem, en montrant que, selon un vocabulaire que nous définissons, une fonction à coefficients entiers, si elle n'est pas une fraction rationnelle, approche toute valeur, dans le cercle-unité, ou bien une infinité de fois, ou bien au moins une fois avec un ordre infini.

Parmi ces fonctions à coefficients entiers, celles qui sont des fractions rationnelles, ont un seul pôle dans le cercle-unité et n'en ont aucun sur ce cercle, ont pour pôles de module inférieur à 1 les nombres algébriques d'une famille remarquable : ce sont les inverses des entiers algébriques appelés nombres de Pisot-Vijayaraghavan [8], [13], [14]. Nous nous intéressons ici aux inverses d'entiers algébriques qui ont un seul de leurs conjugués, en plus d'eux-mêmes, intérieur au cercle-unité, et tous leurs autres conjugués extérieurs à ce cercle. En appliquant les résultats exposés dans la première partie, nous montrons que deux nombres conjugués de cette famille ne peuvent approcher simultanément trop près du cercle-unité, et nous déterminons les couples qui en approchent le plus près. Les inégalités du chapitre II, dans le cas où $p = 1$, avaient de même permis à MM. Dufresnoy et Pisot de déterminer tous les nombres de Pisot-Vijayaraghavan qui sont inférieurs à une certaine borne, et en particulier tous ceux qui approchent le plus petit nombre de l'ensemble dérivé. La méthode employée pourrait sans doute s'appliquer de la même façon à des familles analogues de nombres algébriques, auxquels on imposerait d'avoir un nombre donné, supérieur à deux, de conjugués intérieurs au cercle-unité. Elle est cependant appliquée ici avec trop peu de généralité pour qu'on puisse l'affirmer.

Certains des résultats exposés ici ont fait l'objet de notes à l'Académie des Sciences [3], [4].

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Pisot pour l'aide que m'ont apportée ses conseils et ses encouragements. Je remercie M. Salem qui a bien voulu faire partie du jury auquel je soumets cette thèse, et M. Dubreil qui a bien voulu le présider, ainsi que M. Montel qui a bien voulu présenter mes notes à l'Académie des Sciences et M. Chabauty qui a bien voulu accueillir ce travail dans les Annales de l'Institut Fourier.

PREMIÈRE PARTIE

Inégalités sur les coefficients des séries de Taylor des fonctions méromorphes bornées par 1 en module sur le cercle-unité.

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS HOLOMORPHES

Nous nous bornerons à rappeler sans démonstrations les principaux résultats obtenus par Schur [11].

Soit donc $F(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle-unité, ayant, au voisinage de l'origine, le développement en série de Taylor :

$$F(z) \equiv U_0 + U_1 z + \cdots + U_n z^n + \cdots$$

Supposons que pour $|z| \leqq 1$, on ait $|F(z)| \leqq 1$. En vertu de la loi du module maximum il suffit pour cela que $|F(z)| \leqq 1$ pour $|z| = 1$. On a alors en particulier $|U_0| \leqq 1$. Nous désignerons désormais par fonction de Schur toute fonction satisfaisant aux conditions ci-dessus.

On considère la suite de fonctions :

$$F_0(z) \equiv F(z)$$
$$\vdots$$
$$F_{n+1}(z) \equiv \frac{F_n(z) - U_{n,0}}{1 - \overline{U}_{n,0} F_n(z)} \frac{1}{z}$$

où $U_{n,0} = F_n(0)$, et où $\overline{U}_{n,0}$ est l'imaginaire conjugué de $U_{n,0}$

Supposons que $F_n(z)$ soit une fonction de Schur. Si $F_n(z)$ n'est pas constante, $F_{n+1}(z)$ est holomorphe dans tout le cercle-unité. Si $F_n(z)$ est une constante de module différent de 1, $F_{n+1}(z)$ est définie en tout point sauf à l'origine. Nous conviendrons, dans ce cas, de poser $F_{n+1}(O) = 0$, et $F_{n+1}(z)$ sera ainsi holomorphe dans tout le cercle-unité si $|U_{n,0}| \neq 1$. Cette fonction est d'autre part bornée par 1 en module sur le cercle-unité. C'est donc une fonction de Schur.

Si $|U_{n,0}| = 1$, la fonction $F_n(z)$ est nécessairement constante et $F_{n+1}(z)$ n'est définie nulle part.

On peut donc former à partir de $F(z)$ une suite de fonctions de Schur : ou bien cette suite est infinie, ou bien elle s'achève par une fonction constante et de module 1 dans le cercle-unité.

Nous associerons à la fonction $F(z)$ la suite correspondante des coefficients $U_{n,0}$, définie à partir de $n = 0$ en posant $U_{0,0} = U_0$. Ou bien cette suite est infinie, et les nombres $U_{n,0}$ ont tous un module strictement inférieur à 1, ou bien la suite est finie et s'achève par un nombre $U_{S,0}$ de module 1, les autres coefficients ayant un module strictement inférieur à 1. Dans le premier cas, nous dirons que la fonction est de rang infini; dans le second cas, nous dirons qu'elle est de rang S. Nous désignerons d'une façon générale par S ce rang, fini ou non.

Le résultat fondamental obtenu par Schur est que l'existence d'une suite de coefficients de l'un ou l'autre type constitue une condition nécessaire et suffisante pour que $F(z)$ soit ce que nous avons appelé une fonction de Schur. Plus précisément :

1° Une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse associer à une fonction $F(z)$, par le procédé exposé ci-dessus, une suite finie de coefficients $U_{0,0} = U_0, U_{1,0}, \ldots, U_{S,0}$ tels que :

$$|U_{n,0}| < 1 \text{ pour } 0 \leq n \leq S-1, \text{ et } |U_{S,0}| = 1$$

est que : $F(z) \equiv \dfrac{D_S(z)}{E_S(z)}$, où $D_S(z)$ et $E_S(z)$ sont deux polynômes premiers entre eux tels que $D_S(z)$ est de degré S et que $E_S(z) \equiv \varepsilon z^S D_S(z^{-1})$, où ε est une constante de module 1, et où $E_S(z)$ a tous ses zéros extérieurs au cercle-unité.

La fonction $F(z)$ est bien définie par la donnée des $S+1$ constantes $U_{0,0}, U_{1,0}, \ldots, U_{S,0}$, et en particulier $\varepsilon = U_{S,0}$. Nous désignerons cette fonction par le symbole, introduit par Schur : $[z; U_{0,0}, \ldots, U_{S,0}]$.

2° D'une façon générale, le coefficient associé $U_{n,0}$ peut, pour $n \leq S$, s'exprimer en fonction des coefficients $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et de leurs imaginaires conjugués. On a : $U_{n,0} = \Phi_n(U_0, \ldots, U_n)$, la fonction Φ_n étant une fonction rationnelle de

$$U_0, \overline{U}_0, \ldots, U_{n-1}, \overline{U}_{n-1}, U_n,$$

indépendante de $F(z)$.

Inversement : $U_n = \Psi_n(U_{0,0}, \ldots, U_{n,0})$, la fonction Ψ_n étant une fonction rationnelle de $U_{0,0}, \overline{U}_{0,0}, \ldots, U_{n-1,0}, \overline{U}_{n-1,0}, U_{n,0}$, indépendante de $F(z)$.

Soit alors $U_{0,0}, U_{1,0}, \ldots, U_{n,0}, \ldots$ une suite infinie de constantes de module strictement inférieur à 1. Considérons la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} \Psi_n(U_{0,0}, \ldots, U_{n,0})z^n$.

Cette série est convergente dans le cercle-unité, et sa somme est une fonction de Schur. En d'autres termes, les conditions :

$$|\Phi_n(U_0, \ldots, U_n)| < 1 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geq 0,$$

ou bien :

$$|\Phi_n(U_0, \ldots, U_n)| < 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq n < S, \quad \text{et} \quad |\Phi_S(U_0, \ldots, U_S)| = 1$$

sont nécessaires et suffisantes pour que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n z^n$ ait pour somme une fonction de Schur.

CHAPITRE II

INÉGALITÉS POUR UNE FONCTION MÉROMORPHE

Nous allons montrer qu'on peut de même exprimer, sous forme d'inégalités rationnelles sur les coefficients de son développement en série de Taylor au voisinage de l'origine, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction méromorphe dans le cercle-unité, holomorphe à l'origine et bornée par 1 en module sur la circonférence-unité, ait un nombre donné p de pôles dans le cercle unité.

L'existence de telles inégalités a été établie par MM. Dufresnoy et Pisot [5], dans le cas particulier de fonctions ayant un seul pôle, simple, distinct de l'origine, dans le cercle-unité, et ayant un développement en série de puissances à coefficients entiers rationnels au voisinage de l'origine. Nous suivrons une méthode analogue à celle qu'ils ont utilisée.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| \leqq 1$, bornée par 1 en module pour $|z| = 1$, et ayant, dans le cercle-unité, p pôles distincts ou non, $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$, différents de 0. Soit :

$$f(z) \equiv u_0 + u_m z^m + u_{m+m'} z^{m+m'} + \cdots + u_n z^n + \cdots$$

son développement en série de puissances au voisinage de l'origine, où m et m' sont positifs, et u_m et $u_{m+m'}$ non nuls (u_0 pouvant être nul).

J'ai exposé les résultats qui suivent dans une note citée [3], dans le cas particulier d'une fonction réelle pour z réel, ayant en vue certaines applications arithmétiques. Ces résultats sont encore valables, à quelques modifications de détail près, pour une fonction complexe quelconque, ainsi que cela m'avait d'ailleurs été signalé par M. Bender après la parution de ma note, et c'est sous cette forme que je vais maintenant les exposer.

Nous utiliserons le lemme suivant, fondé sur le théorème de Rouché :

Lemme. — *Soient* $A(z)$ *et* $B(z)$ *deux polynômes vérifiant l'inégalité:* $|B(z)| \leqq |A(z)|$ *sur la circonférence-unité.*

Soit la fonction: $\varphi(z) \equiv B(z) f(z) - A(z)$, *ayant, au voisinage de l'origine, le développement en série de puissances:*

$$\varphi(z) \equiv a_k z^k + \cdots, \qquad \text{avec} \qquad k \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad a_k \neq 0.$$

Si q *est le nombre de zéros de* $A(z)$ *de module inférieur à* 1, *on a* $k \leqq p + q$, et $\varphi(z)$ *a au plus* $p + q - k$ *zéros de module inférieur à* 1 *autres que l'origine.*

Soit en effet la fonction :

$$\varphi_\lambda(z) \equiv B(z) f(z) - \lambda A(z),$$

où λ est une constante réelle strictement supérieure à 1.

L'application du théorème de Rouché à la fonction

$$(z - \zeta_1) \ldots (z - \zeta_p) \varphi_\lambda(z),$$

holomorphe pour $|z| \leqq 1$, montre que cette fonction a, à l'intérieur du cercle-unité, autant de zéros que

$$\lambda A(z)(z - \zeta_1) \ldots (z - \zeta_p),$$

soit $p + q$. Si on fait tendre λ vers 1, k de ces zéros tendent vers 0, ce qui démontre le lemme.

Nous allons former une fonction holomorphe et bornée par 1 en module pour $|z| \leqq 1$, telle que les coefficients de son développement en série de Taylor au voisinage de l'origine soient des fonctions rationnelles des u_n. C'est en appliquant la méthode de Schur à cette fonction que nous obtiendrons les inégalités cherchées.

Il convient de distinguer plusieurs cas :

1° $|u_0| > 1$:

Soit la fonction :

$$\text{(transformation 1)} \qquad f_1(z) \equiv \frac{\bar{u}_0 f(z) - 1}{u_0 - f(z)} z^m.$$

Nous pouvons appliquer le lemme précédent à $f(z) - u_0$, avec $A(z) \equiv u_0$, $B(z) \equiv 1$. Il nous montre que, $f(z)$ ayant l'origine pour zéro d'ordre m, la fonction $[f(z) - u_0]\, z^{-m}$ a au plus $p - m$ zéros dans le cercle-unité. Les pôles de $f_1(z)$ étant nécessairement des zéros de cette expression, $f_1(z)$ a donc au plus $p - m$ pôles dans le cercle-unité.

On a inversement :

$$f(z) \equiv \frac{u_0 f_1(z) + z^m}{f_1(z) + \bar{u}_0 z^m}$$

et le lemme montre de la même façon que, si p_1 est le nombre de pôles de $f_1(z)$ dans le cercle unité, $p \leqq p_1 + m$.

Donc, $p_1 = p - m$.

D'autre part, la transformation homographique du plan complexe $X = \frac{x - \alpha}{1 - \bar{\alpha} x}$, où α et $\bar{\alpha}$ sont deux nombres imaginaires conjugués de module inférieur à 1, conserve la circonférence-unité dans son ensemble, ainsi que son intérieur et son extérieur. Donc :

$$\left|\frac{\bar{u}_0 f(z) - 1}{u_0 - f(z)}\right| = \left|\frac{f(z) - \bar{u}_0^{-1}}{1 - u_0^{-1} f(z)}\right| \leqq 1$$

pour tout z tel que $|f(z)| \leqq 1$, et, par conséquent, $|f_1(z)| \leqq 1$ sur la circonférence-unité; $f_1(z)$ étant holomorphe à l'origine, c'est une fonction de la même forme que $f(z)$, mais qui a un nombre de pôles dans le cercle-unité strictement inférieur. Enfin, les coefficients de son développement en série de Taylor au voisinage de l'origine sont des fonctions rationnelles des u_n.

2° $|u_0| = 1$:

Supposons tout d'abord $\bar{u}_0 u_m$ réel.

Formons la fonction :

(transformation 2) $$g_1(z) \equiv \frac{(z^{2m} + u_0 \bar{u}^m z^m - 1) f(z) - u_0(z^{2m} - 1)}{\bar{u}_0(z^{2m} - 1) f(z) - (z^{2m} - \bar{u}_0 u_m z^m - 1)}.$$

On a inversement :

$$f(z) \equiv \frac{(z^{2m} - \bar{u}_0 u_m z^m - 1) g_1(z) - u_0(z^{2m} - 1)}{\bar{u}_0(z^{2m} - 1) g_1(z) - (z^{2m} + u_0 \bar{u}_m z^m - 1)}.$$

Sur la circonférence-unité, on a :

$$|z^{2m} - \bar{u}_0 u_m z^m - 1| = |(z^m - z^{-m}) - \bar{u}_0 u_m|.$$

Sur cette circonférence, z et z^{-1} sont imaginaires conjugués, et, par conséquent, $(z^m - z^{-m})$ est imaginaire pur; $\bar{u}_0 u_m$ étant réel, il en résulte que, sur la circonférence-unité, on a :

$$|z^{2m} - \bar{u}_0 u_m z^m - 1| > |z^m - z^{-m}| = |z^{2m} - 1|.$$

On en conclut tout d'abord que $|g_1(z)| \leqq 1$ sur la circonférence-unité. En outre, $z^{2m} - \bar{u}_0 u_m z^m - 1$ a m zéros dans le cercle-unité. L'application du lemme au dénominateur de $g_1(z)$ montre donc que ce dénominateur a, dans le cercle-unité, au plus $p + m$ zéros. Soit p_1 le nombre de pôles de $g_1(z)$ dans ce cercle. Un raisonnement analogue montre que le dénominateur de $f(z)$ y a au plus $p_1 + m$ zéros. On a donc dans tous les cas $p \leqq p^1 + m$.

Nous distinguerons encore plusieurs cas :

A) $m' < m$:

Soit, au voisinage de l'origine :

$$(z) \equiv u_0 + u_m z^m + u_{m+m'} z^{m+m'} + u_{m+m'_1} z^{m+m'_1} + \cdots \\ + u_{m+m'_k} z^{m+m'_k} + u_{2m} z^{2m} + \cdots,$$

où u_{2m} peut être nul.

En tenant compte de ce que $\bar{u}_0 u_m = u_0 \bar{u}_m$, on a alors :

$$g_1(z) \equiv \frac{-(u_{m+m'} z^{m+m'} + \cdots + u_{m+m'_k} z^{m+m'_k}) + (\bar{u}_0 u_m^2 - u_{2m}) z^{2m} + \cdots}{-\bar{u}_0 (u_{m+m'} z^{m+m'} + \cdots + u_{m+m'_k} z^{m+m'_k}) - \bar{u}_0 u_{2m} z^{2m} + \cdots}.$$

Donc $g_1(z)$ est holomorphe à l'origine et a, dans le cercle-unité, au plus $p + m - (m + m') = p - m'$ pôles. Au voisinage de l'origine :

$$g_1(z) \equiv u_0 - u_m^2 u_{m+m'}^{-1} z^{m-m'} + \cdots$$

et, par conséquent :

$$f(z) \equiv \frac{u_m^2 u_{m+m'}^{-1} z^{m-m'} + \cdots}{\bar{u}_0 u_m^2 u_{m+m'}^{-1} z^{m-m'} + \cdots}.$$

On voit que $p \leqq p_1 + m - (m - m')$. Donc $p_1 = p - m'$.

B) $m' = m$:

Au voisinage de l'origine :

$$g_1(z) \equiv \frac{(\bar{u}_0 u_m^2 - u_{2m}) z^{2m} + \cdots}{-\bar{u}_0 u_{2m} z^{2m} + \cdots} \equiv \left(u_0 - \frac{u_m^2}{u_{2m}}\right) + \cdots$$

On a donc encore $p_1 \leqq p - m = p - m'$, et $g_1(z)$ est holomorphe à l'origine. Comme $p \leqq p_1 + m$ dans tous les cas, on a : $p_1 = p - m = p - m'$.

C) $m' > m$:

Le développement en série de puissances du numérateur de $g_1(z)$ au voisinage de l'origine est de la forme : $\bar{u}_0 u_m^2 z^{2m} + \cdots$, et celui du dénominateur, de la forme : $u_D z^D + \cdots$, avec $u_D \neq 0$ et D strictement supérieur à $2m$. On montre alors comme ci-dessus que $p_1 = p - m$.

En multipliant $g_1(z)$ par z^{D-2m}, on obtient une fonction holomorphe à l'origine, qui a $p_1 - D + 2m = p + m - D$ pôles dans le cercle-unité. Cette quantité ne dépend que de p et des u_n, et est inférieure à p. Enfin, il est évident que les coefficients de cette fonction sont des fonctions rationnelles des u_n, et qu'elle est bornée par 1 en module pour $|z| = 1$.

Supposons maintenant $\bar{u}_0 u_m$ complexe :

Effectuons dans le développement de $f(z)$ le changement de variable $z = e^{i\theta} Z$, où θ est une constante quelconque. On obtient ainsi une nouvelle fonction $f^*(Z)$ qui a les mêmes propriétés que $f(z)$ et le même nombre p de pôles dans le cercle-unité. Au voisinage de l'origine :

$$f^*(Z) \equiv u_0 + u_m^* Z^m + \cdots,$$

en posant $u_m^* = u_m e^{im\theta}$. Si nous choisissons θ tel que, par exemple, $e^{im\theta} = \dfrac{u_0 \bar{u}_m}{|u_m|}$, la quantité $\bar{u}_0 u_m^*$ sera réelle. A $f^*(Z)$ correspond alors une fonction $g_1^*(Z)$ telle que :

$$g_1^*(Z) \equiv \frac{(Z^{2m} + u_0 \bar{u}_m^* Z^m - 1) f^*(Z) - u_0 (Z^{2m} - 1)}{(Z^{2m} - 1)\bar{u}_0 f^*(Z) - (Z^{2m} - \bar{u}_0 u_m^* Z^m - 1)}.$$

$g_1^*(Z)$ a les mêmes propriétés que la fonction $g_1(z)$ étudiée ci-dessus : le nombre de ses pôles dans le cercle-unité, inférieur à p, ne dépend que des u_n^*, donc des u_n, et, pour obtenir une fonction holomorphe à l'origine, il suffit de la multiplier éventuellement par une puissance de Z qui ne dépend aussi que des u_n.

En opérant le changement de variable inverse, $Z = e^{-im\theta} z$, on obtient, en tenant compte de la valeur choisie pour $e^{im\theta}$:

$$\frac{(\bar{u}_0^2 u_m \bar{u}_m^{-1} z^{2m} + \bar{u}_0 u_m z^m - 1) f(z) - u_0 (\bar{u}_0^2 u_m \bar{u}_m^{-1} z^{2m} - 1)}{\bar{u}_0 (\bar{u}_0^2 u_m \bar{u}_m^{-1} z^{2m} - 1) f(z) - (\bar{u}_0^2 u_m \bar{u}_m^{-1} z^{2m} - \bar{u}_0 u_m z^m - 1)}$$

Cette fonction a, dans le cercle-unité, le même nombre de pôles que $g_1^*(Z)$, et a l'origine pour pôle de même ordre. Par conséquent, en la multipliant au besoin par une puissance de z ne dépendant que des u_n, on obtient une fonction méromorphe, holomorphe à l'origine, bornée par 1 en module sur la circonférence-unité, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des u_n, et dont le nombre de pôles dans le cercle-unité, strictement inférieur à p, est lié biunivoquement à p et aux u_n.

3° $|u_0| < 1$:

Formons la fonction :

(transformation 3) $h_1(z) \equiv \dfrac{f(z) - u_0}{1 - \bar{u}_0 f(z)} \dfrac{1}{z}$.

$h_1(z)$ est holomorphe à l'origine et bornée par 1 en module sur la circonférence-unité, et, en vertu du lemme préliminaire, elle a au plus p pôles dans le cercle-unité. D'autre part :

$$f(z) \equiv \frac{zh_1(z) + u_0}{\bar{u}_0 z h_1(z) + 1}$$

et, si p_1 est le nombre de pôles dans le cercle-unité de $h_1(z)$, le lemme préliminaire montre que $p_1 \leqq p$. Donc $p_1 = p$.

Si $|h_1(0)| < 1$, nous formons la fonction :

$$h_2(z) \equiv \frac{h_1(z) - h_1(0)}{1 - \bar{h}_1(0) h_1(z)} \frac{1}{z}$$

et, de même, tant que $|h_r(0)| < 1$, la fonction :

$$h_{r+1}(z) \equiv \frac{h_r(z) - h_r(0)}{1 - \bar{h}_r(0) h_r(z)} \frac{1}{z}.$$

La condition $|h_r(z)| < 1$ pour tout r constitue, d'après le chapitre I, une condition suffisante pour que $f(z)$ soit une fonction de Schur. Donc, si p est positif, il existe un rang R tel que $|h_R(O)| \geqq 1$. Les fonctions $h_r(z)$ ont, pour $1 \leqq r \leqq R$, exactement p pôles, sont holomorphes à l'origine et bornées par 1 en module sur la circonférence-unité. En transformant la fonction $h_R(z)$ par les transformations 1 ou 2, on obtient donc une fonction ayant les mêmes propriétés que $f_1(z)$ ou $g_1(z)$.

A l'aide d'un nombre fini de transformations des types 1, 2 ou 3, nous arriverons donc à former une fonction de Schur $F(z)$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des u_n. De plus, dans chacune des transformations effectuées, le nombre de pôles dans le cercle-unité de la fonction obtenue dépend biunivoquement du nombre de pôles dans le cercle-unité et des coefficients de la fonction initiale, et la fonction obtenue est bornée par 1 en module sur le cercle-unité si et seulement si la fonction initiale l'est. Par conséquent, il est nécessaire et suffisant, pour que $f(z)$ ait p pôles dans le cercle-unité et soit bornée par 1 en module sur ce cercle, que $F(z)$ soit une fonction de Schur.

Or, les inégalités sur les coefficients de $F(z)$ obtenues selon la méthode exposée au chapitre précédent, constituent une condition nécessaire et suffisante pour que $F(z)$ soit une fonction de Schur. Ce sont des inégalités rationnelles sur les u_n. *Jointes à celles qui conditionnent le mode de formation de* $F(z)$, *et qui sont aussi des inégalités rationnelles sur les* u_n, *elles constituent donc les conditions nécessaires et suffisantes cherchées pour que la fonction* $f(z)$, *holomorphe à l'origine, soit méromorphe dans le cercle-unité et bornée par* 1 *en module sur la circonférence-unité* et, *ait* p *pôles différents de* 0, *distincts ou non, dans le cercle-unité.*

CHAPITRE III

FORMATION DIRECTE DES INÉGALITÉS DU CHAPITRE II

La fonction de Schur $F(z)$ se déduit de $f(z)$ au moyen d'une transformation homographique :

$$F(z) \equiv \frac{A_1(z)f(z) + A_2(z)}{A_3(z)f(z) + A_4(z)},$$

où $A_1(z)$, $A_2(z)$, $A_3(z)$, $A_4(z)$ sont des polynômes dont les coefficients sont des fonctions entières de certains u_n. Il existe donc un entier n_0 tel que les inégalités $|\Phi_n(U_0, \ldots, U_n)| < 1$ relatives à la fonction $F(z)$ puissent s'écrire $|\varphi_n(u_0, \ldots, u_{n_0+n})| < 1$, la fonction φ_n étant une fonction rationnelle de $u_0, \overline{u}_0, \ldots, u_{n_0+n-1}, \overline{u}_{n_0+n-1}, u_{n_0+n}$.

Si nous supposons maintenant les u_n réels, ces inégalités pourront se mettre sous la forme :

$$\varphi'_n(u_0, \ldots, u_{n_0+n-1}) < u_{n_0+n} < \varphi''_n(u_0, \ldots, u_{n_0+n-1}).$$

Cette forme peut être particulièrement commode dans les applications, mais, dans la pratique, la complication des formules rend vite ce genre de résolution impossible.

Dans le cas où $p = 1$, MM. Dufresnoy et Pisot ont établi un moyen pratique d'obtenir directement les inégalités sous la forme ci-dessus, à l'aide de certains couples de polynômes [5]. Nous allons montrer que ce procédé peut se généraliser au cas d'une fonction $f(z)$ ayant un nombre quelconque de pôles dans le cercle-unité.

Supposons donc $f(z)$ réelle pour z réel. Nous reprendrons les notations des chapitres précédents. Nous dirons, par analogie avec le cas d'une fonction de Schur, que $f(z)$ est de rang s si elle peut se mettre sous la forme $f(z) \equiv d(z)/e(z)$, où $d(z)$ et $e(z)$ sont deux polynômes premiers entre eux tels que $d(z)$ est de degré s et que $d(z) \equiv \varepsilon z^s e(z^{-1})$, ε valant ± 1. Si $f(z)$ ne peut pas être mise sous cette forme, nous dirons qu'elle est de rang infini, et nous désignerons d'une façon générale par s son rang, fini ou non.

THÉORÈME — 1. *Il existe, à partir d'un certain rang n_0 et pour $n \leq s$ un couple unique de polynômes premiers entre eux $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$, tels que :*

$$d_n^+(z) \quad \textit{est de degré } n, \quad e_n^+(0) = +1, \quad \textit{et} \quad d_n^+(z) \equiv z^n e_n^+(z^{-1})$$

et que, au voisinage de l'origine :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} \equiv u_0 + \ldots + u_{n-1}z^{n-1} + v_n^+ z^n + v_{n,n+1}^+ z^{n+1} + \ldots,$$

et un couple unique de polynômes premiers entre eux $d_n^-(z)$ et $e_n^-(z)$, tels que :

$$d_n^-(z) \quad \textit{est de degré } n, \quad e_n^-(0) = +1, \quad \textit{et} \quad d_n^-(z) \equiv -z^n e_n^-(z^{-1})$$

et que, au voisinage de l'origine :

$$\frac{d_n^-(z)}{e_n^-(z)} \equiv u_0 + \ldots + u_{n-1}z^{n-1} + v_n^- z^n + v_{n,n+1}^- z^{n+1} + \ldots,$$

$e_n^+(z)$ et $e_n^-(z)$ ont p zéros dans le cercle-unité.

2. *On a les inégalités :*

$$v_n^- < u_n < v_n^+ \qquad \textit{pour} \qquad n_0 \leq n < s$$

et :

$$v_s^- < u_s = v_s^+ \quad \textit{si} \quad f(1) = +1, \qquad v_s^- = u_s < v_s^+ \quad \textit{si} \quad f(1) = -1.$$

Ces inégalités sont celles qui ont été mises en évidence au chapitre précédent et qui expriment une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction F (z) associée à $f(z)$ soit une fonction de Schur.

Remarquons que les n coefficients inconnus des polynômes

$d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$, ou $d_n^-(z)$ et $e_n^-(z)$, sont solutions d'un système de n équations linéaires dont les coefficients sont $u_0, \ldots, u_{n-1}$. Ce sont donc des fonctions rationnelles de $u_0, \ldots, u_{n-1}$, et il en est alors de même de v_n^+ et v_n^-. Les inégalités sont donc bien obtenues sous la forme souhaitée.

Montrons d'abord que, quel que soit p, chaque couple de polynômes, s'il existe, est nécessairement unique.

1. Unicité des polynômes.

Supposons qu'il existe, par exemple, deux couples distincts de même degré n, $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ d'une part, $\delta_n^+(z)$ et $\eta_n^+(z)$ d'autre part, satisfaisant aux conditions I du théorème.

Soit, au voisinage de l'origine :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} \equiv u_0 + \cdots + u_{n-1}z^{n-1} + v_n^+ z^n + \cdots$$

$$\frac{\delta_n^+(z)}{\eta_n^+(z)} \equiv u_0 + \cdots + u_{n-1}z^{n-1} + w_n^+ z^n + \cdots$$

Considérons le polynôme : $P(z) \equiv d_n^+(z)\eta_n^+(z) - \delta_n^+(z)e_n^+(z)$.

Comme $e_n^+(0) = \eta_n^+(0) = 1$ par hypothèse, nous voyons que $P(z)$ n'a pas de termes de degré inférieur à n, son terme de degré n valant $(v_n^+ - w_n^+)z^n$. D'autre part, $P(z) \equiv - z^{2n}P(z^{-1})$. Par conséquent, $P(z)$ est identiquement nul.

Cela nous montre que :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} \equiv \frac{\delta_n^+(z)}{\eta_n^+(z)}.$$

Comme les polynômes de chaque couple sont premiers entre eux, et comme $e_n^+(0) = \eta_n^+(0) = 1$, cela entraîne :

$$d_n^+(z) \equiv \delta_n^+(z) \qquad \text{et} \qquad e_n^+(z) \equiv \eta_n^+(z).$$

On démontrerait de même l'unicité du couple $d_n^-(z)$ et $e_n^-(z)$.

2. Cas des fonctions holomorphes.

Soit F (z) une fonction de Schur réelle pour z réel, de rang S fini ou non.

Soit N un nombre $\leqq$ S. Les N premiers coefficients associés

$U_{0,0}, \ldots, U_{N-1,0}$ sont donc de module inférieur à 1. Considérons les fonctions :

$$R_N^+(z) \equiv [z; U_{0,0}, \ldots, U_{N-1,0}, +1]$$
$$R_N^-(z) \equiv [z; U_{0,0}, \ldots, U_{N-1,0}, -1].$$

D'après les résultats rappelés au chapitre I, la fonction $R_N^+(z)$ peut être mise sous la forme :

$$R_N^+(z) \equiv \frac{D_N^+(z)}{E_N^+(z)}$$

où $D_N^+(z)$ et $E_N^+(z)$ sont deux polynômes premiers entre eux tels que $D_N^+(z)$ est de degré N et que $E_N^+(z) \equiv z^N D_N^+(z^{-1})$, et tels que $E_N^+(z)$ ait tous ses zéros extérieurs au cercle-unité.

Le développement en série de Taylor de $R_N^+(z)$, convergent dans le cercle-unité, est de la forme :

$$R_N^+(z) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \Psi_i(U_{0,0}, \ldots, U_{i,0})z^i + V_N^+ z^N + V_{N,N+1}^+ z^{N+1} + \cdots$$
$$\equiv \sum_{i=0}^{N-1} U_i z^i + V_N^+ z^N + \cdots$$

Les polynômes $D_N^+(z)$ et $E_N^+(z)$ sont définis à un facteur constant près. Si on impose de plus que $E_N^+(0) = 1$, ce que nous supposerons désormais, ils répondent aux conditions 1 du théorème. On voit qu'ils existent pour $0 \leq N \leq S$.

Considérons la fonction : $\varphi(z) \equiv F(z)E_N^+(z) - D_N^+(z)$.

Au voisinage de l'origine, on a : $\varphi(z) \equiv (U_N - V_N^+)z^N + \ldots$, et le lemme démontré au chapitre II nous montre que $\varphi(z)$ n'a pas de zéros autres que l'origine dans le cercle-unité, et que $U_N = V_N^+$ si et seulement si $\varphi(z) \equiv 0$.

Soit $\varphi_\lambda(z) \equiv F(z)E_N^+(z) - \lambda D_N^+(z)$, où λ est une constante réelle strictement supérieure à 1. Cette fonction garde un signe constant pour $\rho < z \leq 1$, ρ désignant le plus grand des zéros positifs de $\varphi_\lambda(z)$. Ce signe est celui de $\varphi_\lambda(1)$, donc celui de $- D_N^+(1)$. En faisant tendre λ vers 1, on voit que $\varphi(z)$ a, pour $0 < z < 1$, le signe de $- D_N^+(1)$. Or, $D_N^+(1) = E_N^+(1)$; comme $E_N^+(z)$ n'a pas de zéros dans le cercle-unité, le signe cherché est celui de $- E_N^+(0)$: la fonction $\varphi(z)$ est négative pour $0 < z < 1$. Quand z tend vers 0 par valeurs positives, $\varphi(z)$ a le signe de $U_N - V_N^+$. Donc $V_N^+ - U_N$ est supérieur ou égal à 0, et on a l'égalité si et seulement si $F(z) \equiv R_N^+(z)$, c'est-à-dire si et seulement si $N = S$ et $F(1) = + 1$.

On voit de même que $R_N^-(z) \equiv D_N^-(z)/E_N^-(z)$, où $D_N^-(z)$ et $E_N^-(z)$ sont deux polynômes premiers entre eux tels que $D_N^-(z)$ est de degré N et $D_N^-(z) \equiv -z^N E_N^-(z^{-1})$, et que, au voisinage de l'origine :

$$\frac{D_N^-(z)}{E_N^-(z)} \equiv U_0 + \cdots + U_{N-1}z^{N-1} + V_N^- z^N + V_{N,N+1}^- z^{N+1} + \cdots$$

$E_N^-(z)$ a tous ses zéros extérieurs au cercle-unité et, si on impose de plus, ce que nous ferons désormais, que $E_N^-(0) = 1$, les deux polynômes sont bien définis et répondent aux conditions 1 du théorème.

On a enfin $V_N^- - U_N \leq 0$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $N = S$ et $F(1) = -1$.

Montrons enfin que les deux systèmes d'inégalités :

$$(\sigma_1) \qquad \begin{array}{lll} V_N^- < U_N < V_N^+ & \text{pour} & 0 \leq N < S, \\ V_S^- < U_S = V_S^+ & \text{si} & F(1) = +1, \\ V_S^- = U_S < V_S^+ & \text{si} & F(1) = -1, \end{array}$$

d'une part, et :

$$(\sigma_2) \qquad \begin{array}{lll} |\Phi_N(U_0, \ldots, U_N)| < 1 & \text{pour} & 0 \leq N < S, \\ \Phi_S(U_0, \ldots, U_S) = 1 & \text{si} & F(1) = +1, \\ \Phi_S(U_0, \ldots, U_S) = -1 & \text{si} & F(1) = -1, \end{array}$$

d'autre part, sont équivalents.

La démonstration est analogue à celle qui a été faite par MM. Dufresnoy et Pisot dans le cas d'une fonction méromorphe bornée par 1 en module sur la circonférence-unité et ayant un seul pôle de module inférieur à 1. Nous l'exposerons brièvement.

On a, de façon évidente :

$$\begin{array}{lcl} D_1^+(z) \equiv U_0 + z & & D_1^-(z) \equiv U_0 - z \\ E_1^+(z) \equiv 1 + U_0 z & \text{et} & E_1^-(z) \equiv 1 - U_0 z. \end{array}$$

Par conséquent :

$$F_1(z) \equiv \frac{[E_1^+(z) + E_1^-(z)]F(z) - [D_1^+(z) + D_1^-(z)]}{[E_1^-(z) - E_1^+(z)]F(z) - [D_1^-(z) - D_1^+(z)]}$$

Montrons par récurrence que, de même, dans les conditions d'existence des polynômes considérés :

$$F_N(z) \equiv \frac{[E_N^+(z) + E_N^-(z)]F(z) - [D_N^+(z) + D_N^-(z)]}{[E_N^-(z) - E_N^+(z)]F(z) - [D_N^-(z) - D_N^+(z)]}$$

Considérons la fonction :

$$P_1(z) \equiv D_N^+(z)E_N^-(z) - D_N^-(z)E_N^+(z).$$

Au voisinage de l'origine :

$$P_1(z) \equiv (V_N^+ - V_N^-)z^N + \cdots.$$

Comme d'autre part :

$$P_1(z) \equiv z^{2N}P_1(z^{-1}),$$

on en déduit :

$$P_1(z) \equiv (V_N^+ - V_N^-)z^N.$$

On établit de façon analogue les relations :

$$\begin{aligned}
D_{N+1}^+(z)E_N^+(z) - D_N^+(z)E_{N+1}^+(z) &\equiv (U_N - V_N^+)z^N(1-z)\\
D_{N+1}^-(z)E_N^+(z) - D_N^+(z)E_{N+1}^-(z) &\equiv (U_N - V_N^+)z^N(1+z)\\
D_{N+1}^+(z)E_N^-(z) - D_N^-(z)E_{N+1}^+(z) &\equiv (U_N - V_N^-)z^N(1+z)\\
D_{N+1}^-(z)E_N^-(z) - D_N^-(z)E_{N+1}^-(z) &\equiv (U_N - V_N^-)z^N(1-z)
\end{aligned}$$

et on en déduit :

$$(1) \quad D_{N+1}^+(z) \equiv \frac{V_N^+ - U_N}{V_N^+ - V_N^-}(1-z)D_N^- + \frac{U_N - V_N^-}{V_N^+ - V_N^-}(1+z)D_N^+$$

$$(2) \quad E_{N+1}^+(z) \equiv \frac{V_N^+ - U_N^-}{V_N^+ - V_N^-}(1-z)E_N^- + \frac{U_N - V_N^-}{V_N^+ - V_N^-}(1+z)E_N^+$$

$$(3) \quad D_{N+1}^-(z) \equiv \frac{V_N^+ - U_N}{V_N^+ - V_N^-}(1+z)D_N^- + \frac{U_N - V_N^-}{V_N^+ - V_N^-}(1-z)D_N^+$$

$$(4) \quad E_{N+1}^-(z) \equiv \frac{V_N^+ - U_N}{V_N^+ - V_N^-}(1+z)E_N^- + \frac{U_N - V_N^-}{V_N^+ - V_N^-}(1-z)E_N^+$$

Supposons que :

$$F_N(z) \equiv \frac{(E_N^+ + E_N^-)F(z) - (D_N^+ + D_N^-)}{(E_N^- - E_N^+)F(z) - (D_N^- - D_N^+)}.$$

Comme :

$$E_N^+(z)F(z) - D_N^+(z) \equiv (U_N - V_N^+)z^N + \cdots$$

et :

$$E_N^-(z)F(z) - D_N^-(z) \equiv (U_N - V_N^-)z^N + \cdots$$

on voit que :

$$F_N(0) = \frac{2U_N - V_N^+ - V_N^-}{V_N^+ - V_N^-}.$$

On en déduit :

$$F_{N+1}(z) \equiv \frac{1}{z}\,\frac{[E_N^+(U_N - V_N^-) + E_N^-(V_N^+ - U_N)]F(z) - [D_N^+(U_N - V_N^-) + D_N^-(V_N^+ - U_N)]}{[E_N^-(V_N^+ - U_N) - E_N^+(U_N - V_N^-)]F(z) - [D_N^-(V_N^+ - U_N) - D_N^+(U_N - V_N^-)]}$$

et les formules (1), (2), (3), (4) montrent que :

$$F_{N+1}(z) \equiv \frac{[E_{N+1}^-(z) + E_{N+1}^+(z)]F(z) - [D_{N+1}^-(z) + D_{N+1}^+(z)]}{[E_{N+1}^-(z) - E_{N+1}^+(z)]F(z) - [D_{N+1}^-(z) - D_{N+1}^+(z)]}.$$

Par conséquent, pour $0 \leqq N \leqq S$:

$$F_N(0) = \frac{2U_N - V_N^+ - V_N^-}{V_N^+ - V_N^-}.$$

Donc :

$$1 - F_N(0) = 2\,\frac{V_N^+ - U_N}{V_N^+ - V_N^-} \qquad \text{et} \qquad 1 + F_N(0) = 2\,\frac{U_N - V_N^-}{V_N^+ - V_N^-}$$

et le système (σ_1) entraîne (σ_2).

Réciproquement :

$$V_0^+ = +1, \qquad V_0^- = -1, \qquad \text{et} \qquad F(0) = U_0.$$

$|F(0)| < 1$ entraîne donc bien que $V_0^- < U_0 < V_0^+$.

Les formules (1), (2), (3), (4) montrent que :

$$V_{N+1}^+ - V_{N+1}^- = 4\,\frac{(V_N^+ - U_N)(U_N - V_N^-)}{V_N^+ - V_N^-}.$$

Par conséquent, si $F_N(0)| < 1$ entraîne $V_N^- < U_N < V_N^+$, cela entraîne aussi $V_{N+1}^+ - V_{N+1}^- > 0$. L'inégalité $|F_{N+1}(0)| < 1$ entraîne alors $V_{N+1}^- < U_{N+1} < V_{N+1}^+$. Comme l'égalité $|F_S(0)| = 1$ entraîne évidemment $V_S^- < U_S = V_S^+$ ou $V_S^- = U_S < V_S^+$, les deux systèmes sont équivalents.

Signalons que l'égalité

$$V_{N+1}^+ - V_{N+1}^- = 4(V_N^+ - U_N)(U_N - V_N^-)/(V_N^+ - V_N^-)$$

entraîne que les différences $V_N^+ - V_N^-$ vont en décroissant.

3. Cas général.

Nous savons faire correspondre à $f(z)$ au moyen d'un nombre fini de transformations de trois types une fonction de Schur

F (z). Ces transformations sont telles que $f(z)$ est réelle pour z réel si et seulement si F (z) l'est, et de rang fini si et seulement si $F(z)$ l'est. Soit, dans le cas où elles sont de rang fini, $f(z) \equiv d(z)/e(z)$ et $F(z) \equiv D(z)/E(z)$. De la même façon que $d(z)$ et $e(z)$ se déduisent dans ce cas particulier de $D(z)$ et $E(z)$, nous allons déduire respectivement des couples $D_N^+(z)$ et $E_N^+(z)$, $D_N^-(z)$ et $E_N^-(z)$ correspondant à $F(z)$ les couples $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$, $d_n^-(z)$ et $e_n^-(z)$ correspondant à $f(z)$.

Nous allons considérer les trois types de transformations permettant de passer de $f(z)$ à $F(z)$. Pour simplifier les notations, nous supposerons toujours que la fonction initiale est $f(z)$ elle-même. Nous désignerons par s_1 le rang et par p_1 le nombre de pôles de la fonction obtenue. Nous supposerons l'existence d'un couple de polynômes, $d_{n_1}^+(z)$ et $e_{n_1}^+(z)$ par exemple, de degré n_1, répondant aux conditions du théorème, correspondant à cette fonction, et nous en déduirons l'existence d'un couple analogue, de degré n, correspondant à $f(z)$. Nous supposerons dans chaque cas, ce que nous justifierons par la suite que, $p_1 < n_1 \leq s_1$.

Remarquons au préalable que les formules (1), (2), (3), (4) établies précédemment pour les polynômes $D_N^+(z)$, $E_N^+(z)$, $D_N^-(z)$, $E_N^-(z)$ s'établiraient de la même façon pour tous les polynômes $d_n^+(z)$, $e_n^+(z)$, $d_n^-(z)$ $e_n^-(z)$ répondant aux conditions du théorème, quelle que soit la fonction correspondante. Dans la pratique, ces formules permettront donc, si on connaît les deux couples de polynômes d'un degré quelconque, de former les suivants par récurrence, sans avoir recours à chaque fois au procédé que nous allons maintenant employer pour démontrer leur existence.

Transformation 1 : Cas où $|u_0| > 1$.

Soit :

$$f_1(z) \equiv \frac{u_0 f(z) - 1}{u_0 - f(z)} z^m$$

et

$$f(z) \equiv \frac{u_0 f_1(z) + z^m}{f_1(z) + u_0 z^m}$$

la transformation inverse.

On sait que $p_1 = p - m$.

Posons :

$$d_n^+(z) \equiv \frac{1}{\alpha}\left[u_0 d_{n_1}^+(z) + z^m e_{n_1}^+(z)\right]$$
$$e_n^+(z) \equiv \frac{1}{\alpha}\left[d_{n_1}^+(z) + u_0 z^m e_{n_1}^+(z)\right]$$

où α est une constante telle que $e_n^+(0) = 1$. Il est possible de trouver une telle constante car n_1, étant supérieur à p_1, est positif, et alors $d_{n_1}^+(0) = f_1(0)$. Or, $f_1(0)$ est différent de 0. Comme m est positif, il en résulte que $e_n^+(0)$ est aussi différent de 0.

On voit que $n = n_1 + m$ et que $d_n^+(z) \equiv z^n e_n^+(z^{-1})$. D'autre part :

$$(u_0^2 - 1) d_{n_1}^+(z) \equiv \alpha\left[u_0 d_n^+(z) - e_n^+(z)\right]$$
$$z^m(u_0^2 - 1) e_{n_1}^+(z) \equiv \alpha\left[u_0 e_n^+(z) - d_n^+(z)\right].$$

Si $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ avaient un facteur commun, il diviserait $d_{n_1}^+(z)$, et il ne pourrait être lui-même divisible par une puissance positive de z. Il diviserait donc également $e_{n_1}^+(z)$, ce qui est impossible. Ainsi, $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ sont premiers entre eux.

Comme $|u_0| > 1$, l'application du théorème de Rouché à l'expression de $e_n^+(z)$ montre que, puisque $e_{n_1}^+(z)$ a p_1 zéros dans le cercle-unité, $e_n^+(z)$ en a $p_1 + m = p$.

Enfin, on voit que :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} - f(z) \equiv \frac{z^m(u_0^2 - 1)\left[\dfrac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} - f_1(z)\right]}{[f_1(z) + u_0 z^m]\left[\dfrac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} + u_0 z^m\right]},$$
$$\equiv z^m\left[\frac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} - f_1(z)\right]\left[\frac{u_0^2 - 1}{f_1^2(0)} + \cdots\right].$$

Transformation 2 : Cas où $|u_0| = 1$.

Soit la fonction :

$$\gamma_1(z) \equiv z^k g_1(z),$$
$$\equiv z^k \frac{(z^{2m} + u_0 u_m z^m - 1) f(z) - u_0(z^{2m} - 1)}{u_0(z^{2m} - 1) f(z) - (z^{2m} - u_0 u_m z^m - 1)},$$

où k est un entier positif ou nul tel que $\gamma_1(z)$ soit holomorphe à l'origine, et que $\gamma_1(0)$ soit différent de 0. Inversement :

$$f(z) \equiv \frac{(z^{2m} - u_0 u_m z^m - 1)\gamma_1(z) - u_0 z^k (z^{2m} - 1)}{u_0(z^{2m} - 1)\gamma_1(z) - (z^{2m} + u_0 u_m z^m - 1) z^k}.$$

Posons :

$$d_{n_1}^+(z) \equiv \frac{1}{\alpha(z)}\left[u_0(z^{2m} - u_0 u_m z^m - 1)\, d_{n_1}^+ - (z^{2m} - 1) z^k e_{n_1}^+\right],$$

$$e_n^+(z) \equiv \frac{1}{\alpha(z)}\left[(z^{2m} - 1)\, d_{n_1}^+ - u_0(z^{2m} + u_0 u_m z^m - 1) z^k e_{n_1}^+\right],$$

$\alpha(z)$ étant un polynome tel que $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ soient premiers entre eux. On a :

$$d_{n_1}^+(z) \equiv \frac{\alpha(z)}{u_m^2 z^{2m}}\left[(z^{2m} - 1) e_n^+ - u_0(z^{2m} + u_0 u_m z^m - 1)\, d_n^+\right],$$

$$e_{n_1}^+(z) \equiv \frac{\alpha(z)}{u_m^2 z^{2m+k}}\left[u_0(z^{2m} - u_0 u_m z^m - 1) e_n^+ - (z^{2m} - 1) d_n^+\right]$$

ce qui montre que, puisque $d_{n_1}^+(z)$ et $e_{n_1}^+(z)$ sont premiers entre eux, $\alpha(z)$ ne peut être qu'un monôme de degré inférieur ou égal à $2m + k$. Nous distinguerons encore plusieurs cas.

A) $m' < m$:

Alors $k = 0$, et, au voisinage de l'origine :

$$\gamma_1(z) \equiv u_0 - u_m^2 u_{m+m'}^{-1} z^{m-m'} + \cdots$$

On a vu d'autre part que $p_1 = p - m'$.

Le lemme du chapitre II, appliqué à $\gamma_1(z) - u_0$, montre que $m - m' \leq p_1$. On a donc certainement $n_1 > m - m'$, et, au voisinage de l'origine :

$$\frac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} \equiv u_0 - u_m^2 u_{m+m'}^{-1} z^{m-m'} + \cdots$$

On voit alors que $\alpha(z) \equiv A z^{m-m'}$, A étant une constante arbitraire. Comme $e_n^+(0) = -\dfrac{u_m^2}{A u_{m+m'}}$, nous pouvons choisir A de façon que $e_n^+(0) = 1$.

D'autre part, $n = n_1 + 2m'$, et $e_n^+(z) \equiv z^n d_n^+(z^{-1})$. Le théorème de Rouché montre que $e_n^+(z)$ a, dans le cercle-unité, $p_1 + m' = p$ zéros. Enfin :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} - f(z) \equiv z^{2m'}\left[\frac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} - \gamma_1(z)\right]\left[\frac{u_{m+m'}^2}{u_m^2} + \cdots\right].$$

B) $m' = m$:

On a encore $k = 0$, et, au voisinage de l'origine :

$$\gamma_1(z) \equiv \left(u_0 - \frac{u_m^2}{u_{2m}}\right) + \cdots$$

$\gamma_1(0)$ est différent de u_0, donc $d_{n_1}^+(0)$ aussi, puisque n_1 est positif. Cela entraîne que $\alpha(z)$ se réduit à une constante A que l'on peut choisir telle que $e_n^+(0) = 1$.

On a $n = n_1 + 2m$ et $e_n^+(z) \equiv z^n d_n^+(z^{-1})$. Le théorème de Rouché montre que $e_n^+(z)$ a, dans le cercle-unité, $p_1 + m = p$ zéros. Enfin :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} - f(z) \equiv z^{2m}\left[\frac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} - \gamma_1(z)\right]\left[\frac{u_{2m}^2}{u_m^2} + \cdots\right].$$

C) $m' > m$:

k est alors strictement positif, et $p_1 = p - m - k$.

$\gamma_1(0)$ est différent de 0, et $d_{n_1}^+(0)$ aussi. Par conséquent, $\alpha(z)$ se réduit à la constante A, que nous choisirons encore telle que $e_n^+(0) = 1$.

On a $n = n_1 + 2m + k$, et $d_n^+(z) \equiv z^n e_n^+(z^{-1})$. Le polynôme $e_n^+(z)$ a, dans le cercle-unité, $p_1 + m + k = p$ zéros. Enfin :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} - f(z) \equiv z^{2m+k}\left[\frac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} - \gamma_1(z)\right]\left[\frac{u_m^2}{\gamma_1^2(0)} + \cdots\right].$$

Transformation 3 : Cas où $|u_0| < 1$.

Soit :

$$h_1(z) \equiv \frac{f(z) - u_0}{1 - u_0 f(z)} \frac{1}{z}$$

et :

$$f(z) \equiv \frac{u_0 + zh_1(z)}{u_0 z h_1(z) + 1}$$

la transformation inverse.

On sait que $p_1 = p$.

Posons :

$$d_n^+(z) \equiv u_0 e_{n_1}^+(z) + z d_{n_1}^+(z)$$
$$e_n^+(z) \equiv e_{n_1}^+(z) + u_0 z e_{n_1}^+(z)$$

$d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ sont de degré $n = n_1 + 1$, et $d_n^+(z) \equiv z^n e_n^+(z^{-1})$. On a $e_n^+(0) = 1$. D'autre part :

$$z(1 - u_0^2) d_{n_1}^+(z) \equiv d_n^+(z) - u_0 e_n^+(z)$$
$$(1 - u_0^2) e_{n_1}^+(z) \equiv e_n^+(z) - u_0 d_n^+(z)$$

ce qui montre que, $d_{n_1}^+(z)$ et $e_{n_1}^+(z)$ étant premiers entre eux, $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ le sont aussi.

En vertu du théorème de Rouché, $e_n^+(z)$ a, dans le cercle-unité, autant de zéros que $e_{n_1}^+(z)$, soit $p_1 = p$.

Enfin :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} - f(z) \equiv z\left[\frac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} - h_1(z)\right][(1-u_0^2) + \cdots]$$

Si nous n'avions pas supposé $p_1 < n_1 \leqq s_1$, les démonstrations précédentes tomberaient en défaut en plusieurs endroits. Or, à chaque transformation, on a $n - n_1 \geqq p - p_1$ et il est évident que, si s et s_1 sont finis, $s - s_1 = n - n_1$. Par conséquent, on voit de proche en proche qu'on pourra déduire un couple de polynômes $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ de tout couple $D_N^+(z)$ et $E_N^+(z)$, sauf peut-être pour $N = 0$. Comme d'autre part, $n - n_1$ est toujours indépendant de n, on voit que, si n_0 est le degré des polynômes déduits de $D_1^+(z)$ et $E_1^+(z)$, les polynômes $d_n^+(z)$ et $e_n^+(z)$ existeront pour $n_0 \leqq n \leqq s$.

On a trouvé dans tous les cas :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} - f(z) \equiv z^{n-n_1}\left[\frac{d_{n_1}^+(z)}{e_{n_1}^+(z)} - \varphi_1(z)\right][c + c_1 z + \cdots]$$

où $\varphi_1(z)$ désigne $f_1(z)$, $\gamma_1(z)$, $h_1(z)$ suivant le cas, et où c est une constante positive.

Donc :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} - f(z) \equiv z^{n-N}\left[\frac{D_N^+(z)}{E_N^+(z)} - F(z)\right][C + C_1 z + \cdots]$$

où C est une constante positive.

Il en résulte que, au voisinage de l'origine :

$$\frac{d_n^+(z)}{e_n^+(z)} \equiv u_0 + \cdots + u_{n-1}z^{n-1} + v_n^+ z^n + \cdots$$

et que $v_n^+ - u_n = C(V_N^+ - U_N)$.

On démontrerait de la même façon qu'il existe, pour $n_0 \leqq n \leqq s$, un couple de polynômes $d_n^-(z)$ et $e_n^-(z)$, déduits de $D_N^-(z)$ et $E_N^-(z)$, qui répondent aux conditions 1 du théorème, et qu'on a $v_n^- - u_n = C(V_N^- - U_N)$.

On voit d'autre part de proche en proche que, si $f(z)$ est de rang fini, $f(1) = F(1)$.

Il en résulte qu'on a les inégalités :

$$v_n^- < u_n < v_n^+ \qquad \text{pour} \qquad n_0 \leqq n < s,$$
$$v_s^- < u_s = v_s^+ \quad \text{si} \quad f(1) = +1, \qquad v_s^- = u_s < v_s^+ \quad \text{si} \quad f(1) = -1.$$

En adjoignant à ces inégalités celles qui conditionnent la formation de $F(z)$, ainsi que celles qui expriment que $|F(0)| < 1$, on retrouve la condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ ait p pôles dans le cercle-unité que nous avons établie au chapitre II.

Remarquons que, la constante C étant indépendante de n, le fait que les différences $V_N^+ - V_N^-$ aillent en décroissant entraîne que les différences $v_n^+ - v_n^-$ vont également en décroissant.

DEUXIÈME PARTIE

Fonctions méromorphes ayant un développement de Taylor à coefficients entiers au voisinage de l'origine.

CHAPITRE IV

CRITÈRE DE RATIONNALITÉ

Nous désignerons dans ce qui suit par $f(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle-unité et ayant au voisinage de l'origine le développement en série de Taylor:

$$f(z) \equiv u_0 + u_1 z + \cdots + u_n z^n + \cdots,$$

où les u_n sont des entiers rationnels. Nous dirons pour abréger que $f(z)$ est à cœfficients entiers.

Une classe importante de telles fonctions est formée des fractions rationnelles de la forme : $f(z) \equiv \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes à coefficient entiers, et où $Q(0) = \pm 1$. Fatou [6] a montré que, réciproquement, toute fraction rationnelle ayant au voisinage de l'origine un développement en série de puissances à coefficients entiers peut être mise sous cette forme. Un théorème de Borel [1] a montré que, si une série entière à coefficients entiers rationnels a un rayon de convergence non nul, et si sa somme est prolongeable et méromorphe dans un cercle de rayon R supérieur à 1, c'est une fraction rationnelle, c'est-à-dire qu'elle est alors méromorphe dans tout le plan complexe. Le cercle-unité est donc le plus grand cercle centré à l'origine qu'on puisse assigner comme domaine de méromorphie à une fonction à cœfficients entiers sans qu'elle soit nécessairement une fraction rationnelle.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer concerne le comportement d'une fonction $f(z)$ non rationnelle au voisinage de la circonférence-unité. Il généralise dans une certaine mesure le théorème suivant dû à M. Salem :

S'il existe un nombre complexe a, un nombre $\delta > 0$ et un nombre $r < 1$ et positif tels que $|f(z) - a| > \delta$ en tout point régulier de la couronne $r < |z| < 1$, alors $f(z)$ est une fraction rationnelle.

En d'autres termes, si $f(z)$ n'est pas une fraction rationnelle, elle approche toute valeur dans toute couronne circulaire au voisinage de la circonférence-unité.

Nous allons préciser de quelle façon $f(z)$ approche ainsi une valeur arbitraire. Pour la commodité des énoncés, nous introduirons les définitions suivantes :

Étant donné un nombre ζ tel que $|\zeta| \leq 1$, nous dirons que la fonction $f(z)$ prend la valeur a au point $z = \zeta$, si, étant donnés deux nombres positifs arbitraires ε et η, il existe des points intérieurs au cercle-unité en lesquels sont simultanément vérifiées les inégalités :

$$|z - \zeta| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(z) - a| < \eta.$$

Si $z = \zeta$ est un point régulier tel que $|\zeta| < 1$, la seule valeur prise selon cette définition est évidemment $f(\zeta)$. En un même point tel que $|\zeta| = 1$, la fonction $f(z)$ peut a priori prendre plusieurs valeurs distinctes, et même prendre toute valeur.

Nous dirons plus précisement que ζ est zéro d'ordre h de $f(z) - a$, si, la valeur a étant prise par $f(z)$ au point $z = \zeta$, h est le plus petit entier positif tel qu'il existe deux nombres positifs δ et ε tels que :

$$|[f(z) - a](z - \zeta)^{-h}| > \delta$$

en tout point régulier du domaine défini par

$$|z| < 1 \quad \text{et} \quad |z - \zeta| < \varepsilon.$$

En un point régulier tel que $|\zeta| < 1$, l'ordre, au sens habituel du mot, de ζ comme zéro de $f(z) - f(\zeta)$, répond à cette définition.

Si nous ne pouvons, à un point $z = \zeta$ tel que $|\zeta| = 1$, et à une valeur a prise en ce point, faire correspondre un ordre répondant à la définition précédente, nous dirons que ζ est un zéro d'ordre infini de $f(z) - a$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *S'il existe un nombre complexe a tel que $f(z) - a$ n'ait qu'un nombre fini de zéros dans et sur le cercle-unité, chaque zéro étant compté avec son ordre, alors $f(z)$ est une fraction rationnelle.*

L'hypothèse faite peut encore s'énoncer : $f(z) - a$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans et sur le cercle-unité, et à chaque zéro de module 1 correspond, pour la valeur, a, un ordre fini.

Ce théorème entraîne celui de M. Salem. En effet, l'hypothèse faite par M. Salem est, selon les définitions précédentes, que $f(z) - a$ n'a aucun zéro pour $r < |z| \leqq 1$. Comme $f(z) - a$ n'a, pour toute valeur a, qu'un nombre fini de zéros, d'ordres finis, dans $|z| \leqq r$, la valeur a répond bien à la condition ci-dessus.

Le théorème de M. Salem entraîne que, si $f(z)$ n'est pas une fraction rationnelle, on peut toujours trouver une suite z_1, z_2, ..., z_n, ... telle que le point $z = z_n$ tende vers un point de la circonférence $|z| = 1$, et que $|f(z_n) - a|$ tende vers 0. Il peut donc s'énoncer : si $f(z)$ n'est pas une fraction rationnelle, elle prend toute valeur au moins une fois sur $|z| = 1$.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer permet de plus de préciser que :

ou bien une valeur a est prise effectivement en une infinité de points de $|z| < 1$;

ou bien elle est prise une infinité de fois sur $|z| = 1$:

ou bien elle est prise au moins une fois avec un ordre infini.

(Ces différentes hypothèses étant d'ailleurs compatibles.)

Une valeur a peut fort bien n'être prise effectivement en aucun point de $|z| < 1$.

DÉMONSTRATION :

Soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ les zéros de $f(z) - a$ dans $|z| \leqq 1$, d'ordres respectifs $h_1, \ldots, h_k$.

Si nous formons le polynôme $P(z) \equiv C \prod_{i=1}^{k} (z - \zeta_i)^{h_i}$, où C est une constante arbitraire, $\dfrac{P(z)}{f(z) - a}$ est, d'après les hypothèses faites, une fonction bornée pour $|z| < 1$. Posons : $\alpha(z) \equiv \dfrac{P(z)}{f(z) - a}$, en choisissant la constante C de façon que $\alpha(0) = 1$.

Soit :

$$\alpha(z) \equiv 1 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots$$

le développement en série de Taylor de $\alpha(z)$ au voisinage de l'origine. Ce développement converge certainement pour $|z| < 1$, $\alpha(z)$ étant bornée dans ce domaine, et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2$ converge.

D'autre part, si on pose $\beta(z) \equiv P(z) + a\alpha(z)$, on a :

$$f(z) \equiv \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}.$$

Soit :

$$\beta(z) \equiv \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_n z^n + \cdots$$

le développement en série de puissances de $\beta(z)$ au voisinage de l'origine.

Désignons par H le degré de $P(z)$, et posons : $P(z) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$, où $p_n = 0$ pour $n > H$. On a alors $\beta_n = p_n + a\alpha_n$.

D'autre part, on a évidemment $\beta_n = u_n + \alpha_1 u_{n-1} + \cdots + \alpha_n u_0$, et, en particulier, $\beta_0 = u_0$.

Considérons le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}.$$

Nous savons qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit une fraction rationnelle est qu'il existe un rang n_0 tel que $D_n = 0$ pour $n \geq n_0$.

D_n est évidemment un entier rationnel. Il suffit donc, pour pouvoir affirmer qu'il est nul à partir d'un certain rang n, de montrer qu'il tend vers 0 quand n augmente indéfiniment. Pour cela, nous utiliserons une majoration classique due à M. Hadamard. Nous savons en effet que si :

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_0^0 & d_0^1 & \dots & d_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_n^0 & d_n^1 & \dots & d_n^n \end{vmatrix},$$

on a :

$$|\Delta|^2 \leq \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} |d_i^j|^2 \right).$$

Avant de majorer le déterminant D_n, nous allons le transformer, de façon à exprimer son terme général en fonction des α_i et β_j.

Multiplions les éléments des colonnes successives jusqu'à l'avant-dernière par $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ respectivement, et ajoutons la combinaison linéaire ainsi obtenue à chaque ligne à l'élément correspondant de la dernière colonne. Puis opérons de proche en proche une substitution analogue sur toutes les colonnes à partir de la dernière : pour la $(i+1)^{\text{ème}}$ colonne, nous multiplions les éléments des colonnes successives jusqu'à la $i^{\text{ième}}$ par $\alpha_i, \ldots, \alpha_1$ et nous ajoutons la combinaison linéaire des éléments des i premières colonnes ainsi obtenue à chaque ligne à l'élément correspondant de la $(i+1)^{\text{ème}}$ colonne. On obtient ainsi :

$$D_n = \begin{vmatrix} v_{0,0} & v_{1,0} & \cdots & v_{n,0} \\ v_{0,1} & v_{1,1} & \cdots & v_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{0,n} & v_{1,n} & \cdots & v_{n,n} \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} v_{i,j} &= u_{i+j} + \alpha_1 u_{i+j-1} + \cdots + \alpha_i u_j \\ &= \beta_{i+j} - (\alpha_{i+1} u_{j-1} + \cdots + \alpha_{i+j} u_0), \end{aligned}$$

la formule étant valable même pour $i = 0$, car :

$$v_{0,j} = u_j = \beta_j - (\alpha_{i+1} u_{j-1} + \cdots + \alpha_{i+j} u_0).$$

Effectuons maintenant des combinaisons analogues sur les lignes du déterminant des $v_{i,j}$:

Multiplions les éléments des lignes successives jusqu'à l'avant-dernière par $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ et ajoutons à l'élément correspondant de la dernière ligne la combinaison linéaire ainsi obtenue à chaque colonne. Puis répétons l'opération pour les lignes successives à partir de la dernière : pour la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne, nous multiplions les éléments des j premières lignes respectivement par $\alpha_j, \alpha_{j-1}, \ldots, \alpha_1$ et nous ajoutons la combinaison linéaire des éléments des j premières lignes ainsi obtenue à chaque colonne à l'élément correspondant de la $(j+1)^{\text{ème}}$ ligne. Nous obtenons enfin :

$$D_n = \begin{vmatrix} w_{0,0} & w_{1,0} & \cdots & w_{n,0} \\ w_{0,1} & w_{1,1} & \cdots & w_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{0,n} & w_{1,n} & \cdots & w_{n,n} \end{vmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned}w_{i,j} &= v_{i,j} + \alpha_1 v_{i,j-1} + \cdots + \alpha_j v_{i,0}\\ &= (\beta_{i+j} + \alpha_1\beta_{i+j-1} + \cdots + \alpha_j\beta_i) - [\alpha_{i+1}(u_{j-1} + \alpha_1 u_{j-2} + \cdots + \alpha_{j-1}u_0)\\ &\quad + \alpha_{i+2}(u_{j-2} + \alpha_1 u_{j-3} + \cdots + \alpha_{j-2}u_0) + \cdots + \alpha_{i+j}u_0]\\ &= (\beta_{i+j} + \alpha_1\beta_{i+j-1} + \cdots + \alpha_j\beta_i) - (\alpha_{i+1}\beta_{j-1} + \alpha_{i+2}\beta_{j-2} + \cdots + \alpha_{i+j}\beta_0)\end{aligned}$$

la formule étant encore valable pour i ou $j = 0$.

Les éléments de D_n sont alors des formes bilinéaires des α_i et des β_j. C'est cette expression de D_n que nous allons utiliser pour le majorer.

Évaluons $\sum_{j=0}^{n} |w_{i,j}|^2$ pour un i quelconque. Comme $\beta_m = p_m + a\alpha_m$:

$$\begin{aligned}w_{i,j} &= [(p_{i+j} + \cdots + \alpha_j p_i) - (\alpha_{i+1}p_{j-1} + \cdots + \alpha_{i+j}p_0)]\\ &\qquad + a[(\alpha_{i+j} + \cdots + \alpha_j\alpha_i) - (\alpha_{i+1}\alpha_{j-1} + \cdots + \alpha_{i+j})]\\ &= p_{i+j} + \cdots + \alpha_j p_i - (\alpha_{i+1}p_{j-1} + \cdots + \alpha_{i+j}p_0) + a\alpha_i\alpha_j.\end{aligned}$$

D'autre part, si $i < j$, certains termes se détruisent, et il est facile de voir qu'alors :

$$\begin{aligned}w_{i,j} &= p_{i+j} + \cdots + \alpha_i p_j - (\alpha_{j+1}p_{i-1} + \cdots + \alpha_{i+j}p_0) + a\alpha_i\alpha_j\\ &= w_{j,i}.\end{aligned}$$

Il ne figure alors au second membre que des coefficients p_k tous différents. Comme $p_k = 0$ pour $H < k$, on voit que :

$$|w_{i,j}| \leqq |p_0|\,|\alpha_{i+j}| + |p_1|\,|\alpha_{i+j-1}| + \cdots + |p_H|\,|\alpha_{i+j-H}| + |a\alpha_i\alpha_j|,$$

la formule étant encore valable pour $i + j - H < 0$ si nous posons $\alpha_m = 0$ pour $m < 0$.

D'où, en tenant compte de ce que, pour u et v réels, on a $(u + v)^2 \leqq 2(u^2 + v^2)$:

$$|w_{i,j}|^2 \leqq 2[(|p_0|\,|\alpha_{i+j}| + \cdots + |p_H|\,|\alpha_{i+j-H}|)^2 + |a\alpha_i\alpha_j|^2],$$

Si nous appliquons à la quantité entre parenthèses l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous voyons que :

$$|w_{i,j}|^2 \leqq 2[(|p_0|^2 + \cdots + |p_H|^2)(|\alpha_{i+j}|^2 + \cdots + |\alpha_{i+j-H}|^2) + |a\alpha_i\alpha_j|^2].$$

Si nous posons $S = |p_0|^2 + \cdots + |p_H|^2$, $A = \sum_{m=0}^{+\infty} |\alpha_m|^2$, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} |w_{i,j}|^2 &\leqq \sum_{j=0}^{+\infty} |w_{i,j}|^2\\ &\leqq 2[S(H+1)\left(\sum_{m=i-H}^{+\infty} |\alpha_m|^2\right) + |a|^2 A |\alpha_i|^2].\end{aligned}$$

On a ainsi pour tout i :

$$\sum_{j=0}^{n} |w_{i,j}|^2 \leqq K, \text{ où } K = 2A[(H+1)S + |a|^2 A].$$

De plus, étant donné un nombre positif arbitraire η, on peut trouver un indice N tel que, pour $i \geqq N$:

$$\sum_{m=i-H}^{+\infty} |\alpha_m|^2 \leqq \eta'$$

ce qui entraîne en particulier $|\alpha_i|^2 \leqq \eta$. Par conséquent, on peut trouver un rang N tel que, pour $i \geqq N$:

$$2S(H+1)\left(\sum_{m=i-H}^{+\infty} |\alpha_m|^2\right) + |a|^2 A |\alpha_i|^2 \leqq \varepsilon < 1.$$

En définitive :

$$|D_n|^2 \leqq \prod_{i=0}^{n}\left(\sum_{j-0}^{n} |w_{i,j}|^2\right) \leqq K^N \varepsilon^{n-N}$$

avec $\varepsilon < 1$ et N et K fixes.

Par conséquent, $|D_n|$ tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment.

Remarques :

1. Cas de la « valeur infinie » de $f(z)$.

Nous dirons, par analogie avec les définitions précédemment posées, que $f(z)$ prend au point $z = \zeta$ (où $|\zeta| \leqq 1$) la valeur infinie si, quels que soient ε et A positifs, il existe des points intérieurs au cercle-unité vérifiant $|z - \zeta| < \varepsilon$ et $|f(z)| > A$.

Nous dirons que $z = \zeta$ est un pôle d'ordre h de $f(z)$ si h est le plus petit entier positif tel que $|f(z)(z-\zeta)^h|$ soit borné supérieurement dans la partie intérieure au cercle-unité d'un voisinage de $z = \zeta$ (ce qui, pour un point intérieur au cercle-unité, coïncide bien avec la notion habituelle de pôle d'ordre h d'une fonction méromorphe).

Il est donc équivalent de dire que $z = \zeta$ est un pôle d'ordre h de $f(z)$ ou que c'est un zéro d'ordre h de $\dfrac{1}{f(z) - C}$, C étant une constante arbitraire. Si, en particulier, nous posons $C = u_0 - 1$, la fonction

$$\frac{1}{f(z) - (u_0 - 1)} \equiv \frac{1}{1 + u_1 z + \cdots}$$

est méromorphe pour $|z| < 1$ et a au voisinage de l'origine un développement en série de Taylor à coefficients entiers. C'est évidemment une fraction rationnelle si et seulement si $f(z)$ en est une. En appliquant le théorème précédent à la fonction $\dfrac{1}{f(z)-(u_0-1)}$, nous voyons donc que:

Si une fonction $f(z)$ n'a dans et sur le cercle-unité qu'un nombre fini de pôles, d'ordres finis, c'est une fraction rationnelle.

2. Si nous supposons maintenant que $f(z) \equiv \beta(z)/\alpha(z)$, où $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ admettent les développements en série de puissances :

$$\alpha(z) \equiv 1 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_m z^m + \cdots,$$
$$\beta(z) \equiv \beta_0 + \beta_1 z + \cdots + \beta_m z^m + \cdots,$$

convergents dans le cercle-unité, et tels que $\sum_{m=0}^{+\infty} |\alpha_m|$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} |\beta_m|$ convergent, on peut montrer d'une façon analogue que $f(z)$ est une fraction rationnelle.

En effet, les séries $\sum_{m=0}^{+\infty} |\alpha_m|^2$ et $\sum_{m=0}^{+\infty} |\beta_m|^2$ convergent à fortiori. Posons :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |\alpha_m| = A_1, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} |\beta_m| = B_1, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} |\alpha_m|^2 = A_2, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} |\beta_m|^2 = B_2.$$

Nous utiliserons encore la majoration :

$$|D_n|^2 \leqq \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} |w_{i,j}|^2 \right).$$

On pose :

$$\lambda_{i,j} = \beta_{i+j} + \cdots + \alpha_j \beta_i \quad \text{et} \quad \mu_{i,j} = \alpha_{i+1}\beta_{j-1} + \cdots + \alpha_{i+j}\beta_0.$$

Alors :

$$|w_{i,j}|^2 \leqq 2\left(|\lambda_{i,j}|^2 + |\mu_{i,j}|^2\right).$$

On a :

$$|\lambda_{i,j}| \leqq |\beta_{i+j}| + \cdots + |\alpha_j||\beta_i|,$$

et

$$\sum_{j=0}^{n} |\lambda_{i,j}|^2 \leqq \left(\sum_{m=i}^{+\infty} |\beta_m|^2 \right)\left(1 + |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2\right)$$
$$+ 2 \sum_{0 \leqq q < r \leqq n} |\alpha_q||\alpha_r| \left(\sum_{m=i+r}^{i+n} |\beta_{m-q}||\beta_{m-r}| \right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la dernière quantité entre parenthèses donne alors :

$$\sum_{j=0}^{n} |\lambda_{i,j}|^2 \leqq \left(\sum_{m=i}^{+\infty} |\beta_m|^2\right)(1 + \cdots + |\alpha_n|)^2.$$

On montre de la même façon que :

$$\sum_{j=0}^{n} |\mu_{i,j}|^2 \leqq \left(\sum_{m=i+1}^{+\infty} |\alpha_m|^2\right)(|\beta_0| + \cdots + |\beta_{n-1}|)^2.$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{n} |w_{i,j}|^2 \leqq 2(A_2B_1^2 + A_1^2B_2) \qquad \text{pour tout } i,$$

et on peut encore trouver N tel que, pour $i \geqq N$:

$$\left(\sum_{m=i}^{+\infty} |\beta_m|^2\right)(1 + \cdots + |\alpha_n|)^2 + \left(\sum_{m=i}^{+\infty} |\alpha_m|^2\right)(|\beta_0| + \cdots + |\beta_{n-1}|)^2 \leqq \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Il en résulte encore que $|D_n|$ tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, donc que $f(z)$ est une fraction rationnelle.

CHAPITRE V

FONCTIONS AYANT DEUX PÔLES DANS LE CERCLE-UNITE

Il est donc suffisant, pour qu'une fonction $f(z)$ à coefficients entiers soit une fraction rationnelle, qu'elle soit bornée au voisinage de la circonférence-unité. Cette condition n'est évidemment pas nécessaire, et caractérise les fractions rationnelles qui n'ont pas de pôles sur la circonférence-unité.

Considérons les fractions rationnelles $f(z)$ qui ont un seul pôle à l'intérieur du cercle-unité et n'en ont pas sur la frontière. Les pôles de ces fonctions sont, d'après le théorème de Fatou, des inverses d'entiers algébriques. La famille de leurs pôles intérieurs au cercle-unité est celle des inverses des entiers algébriques appelés nombres de Pisot-Vijayaraghavan. Ces nombres de Pisot-Vijayaraghavan, évidemment réels, ont la propriété remarquable, établie par M. Salem [9], de former un ensemble fermé. Il est en de même de leurs inverses, dont nous désignerons l'ensemble par S_1. La valeur absolue des nombres de Pisot-Vijayaraghavan possède donc un minimum strictement supérieur à 1, trouvé par M. Siegel [12] : ce minimum est atteint pour le zéro supérieur à 1 de $z^3 - z - 1$, et pour son opposé. Les nombres de S_1 ayant la valeur absolue maxima sont donc le zéro compris entre 0 et 1 de $z^3 + z^2 - 1$, que nous désignerons par θ_1, et son opposé, zéro de $z^3 - z^2 + 1$. Par conséquent une fonction à coefficients entiers ayant un seul pôle dans le cercle-unité n'est certainement pas bornée au voisinage de la circonférence-unité si ce pôle a une valeur absolue supérieure à θ_1.

Nous allons montrer que, de même, il existe une couronne au voisinage de la circonférence-unité telle que, si une fonction à coefficients entiers n'ayant que deux pôles de module inférieur à 1 a ces deux pôles dans cette couronne, elle n'est certainement pas bornée au voisinage de la circonférence-unité.

Soit donc $f(z)$ une fraction rationnelle qui a deux pôles simples de module inférieur à 1 et n'en a pas de module 1. Nous allons étudier l'ensemble des pôles intérieurs au cercle-unité de ces fonctions, et montrer que les deux pôles d'une même fonction ne peuvent approcher simultanément trop près de la circonférence-unité. L'ensemble de ces pôles de module inférieur à 1 est celui des inverses d'entiers algébriques qui ont, ainsi qu'un autre de leurs conjugués, un module inférieur à 1, et ont tous leurs autres conjugués de module supérieur à 1. Dans cet ensemble, il convient de distinguer deux sous-ensembles, suivant que les deux conjugués de module inférieur à 1 sont réels ou imaginaires conjugués. Nous désignerons par S_2 le sous-ensemble des nombres réels et par S_2^* le sous-ensemble des nombres imaginaires.

M. Kelly [7] a démontré que l'ensemble $S_1 + S_2^*$ est lui aussi fermé, les nombres limites de S_2^* appartenant à S_2^* s'ils sont imaginaires, à S_1 s'ils sont réels. Cela montre en particulier qu'il n'y a pas d'accumulation de nombres de S_2^* au voisinage de la circonférence-unité. Nous nous proposons de déterminer, en appliquant les résultats de la première partie, les nombres de S_2^* qui ont le module maximum.

Nous ne savons pas, d'autre part, déterminer dans tous les cas la nature des limites des nombres de S_2, lorsqu'on impose aux deux nombres conjugués de tendre simultanément vers une limite. Nous savons montrer que : ou bien les deux nombres tendent vers deux nombres conjugués de S_2, ou bien l'un des deux tend vers un nombre de S_1, et même de son ensemble dérivé et nous ne savons rien dire de la limite de l'autre. Nous montrerons ici que les deux nombres d'un même couple ne peuvent approcher simultanément de la circonférence-unité.

Nous désignerons désormais par α et β deux nombres conjugués appartenant soit à S_2, soit à S_2^*, et par $Q(z)$ le polynôme irréductible à coefficients entiers dont ils sont zéros. Soit :

$$Q(z) \equiv 1 + a_1 z + \cdots + a_s z^s.$$

En particulier, si $s = 2$, on voit que $|\alpha|$ et $|\beta|$ ne peuvent être simultanément supérieurs à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, puisqu'on a alors $|\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}$.

Si $s = 3$, α et β sont alors les conjugués d'un nombre de Pisot-Vijayaraghavan du troisième degré. Or, les nombres θ_1^{-1} et $-\theta_1^{-1}$ sont précisément du troisième degré, et leurs conjugués sont imaginaires. Donc, le maximum du module pour les nombres de S_2^* qui sont de troisième degré est $\sqrt{\theta_1}$. Cette quantité est peu différente de 0,869..., et par conséquent supérieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ce maximum n'est atteint que pour deux couples opposés, respectivement formés des zéros intérieurs au cercle-unité de : $z^3 - z - 1$ et $z^3 - z + 1$. D'autre part, il n'y a pas de nombres α et β de S_2 du troisième degré dont les valeurs absolues soient simultanément supérieures ou égales à cette valeur $\sqrt{\theta_1}$.

Enfin, une autre famille remarquable de nombres α et β est formée des racines carrées des nombres de S_1 : ce sont les nombres imaginaires purs de S_2^*, d'une part, et les nombres α et β de S_2 qui sont opposés, d'autre part. Le maximum du module pour les nombres de S_2^* imaginaires purs est donc encore $\sqrt{\theta_1}$, ce maximum étant atteint pour les zéros intérieurs au cercle-unité de $z^6 - z^4 + 1$. D'autre part, le maximum de la valeur absolue des nombres α et β de S_2 qui sont opposés est également $\sqrt{\theta_1}$, ce maximum étant atteint pour les zéros intérieurs au cercle-unité de $z^6 + z^4 - 1$.

Nous allons montrer que cette valeur $\sqrt{\theta_1}$ est le maximum cherché pour le module des nombres de S_2^*, que ce maximum n'est atteint que pour les trois couples trouvés ci-dessus, et que, d'autre part, il n'existe pas de couple de nombres de S_2, autre que celui que nous venons de mettre en évidence, satisfaisant à :

$$(1) \qquad |\alpha| \geq \sqrt{\theta_1} \qquad \text{et} \qquad |\beta| \geq \sqrt{\theta_1}.$$

Nous supposerons désormais les inégalités (1) vérifiées.

Parmi les fonctions ayant un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine à coefficients entiers, ayant α et β pour seuls pôles dans le cercle-unité, et n'ayant pas de pôles sur ce cercle, nous associerons à α et β, selon une idée de

M. Salem, la fraction rationnelle :

$$f(z) \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où $P(z) \equiv \varepsilon z^s Q(z^{-1})$, ε étant choisi égal à ± 1 de telle sorte que εa^s soit positif.

Nous poserons encore, au voisinage de l'origine :

$$f(z) \equiv u_0 + u_1 z + \cdots + u_n z^n + \cdots$$

où les u_n sont entiers et où $u_0 = \varepsilon a_s$ est positif par hypothèse.

1° La fonction :

$$G(z) \equiv f(z) \frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}$$

est holomorphe dans le cercle-unité, et telle que, sur ce cercle, $|G(z)| \equiv 1$.

C'est donc une fonction de Schur, et nous allons lui appliquer le lemme de Schwarz, selon le procédé rappelé au chapitre premier

Exprimons que :

$$|G(0)| \leqq 1. \tag{2}$$

Cette inégalité s'écrit : $u_0 |\alpha\beta| \leqq 1$.
Les inégalités (1) montrent que $|\alpha\beta| > \frac{1}{2}$.
Conclusion : $u_0 = 1$.

2° $|G(0)|$ est alors inférieur à 1, et nous pouvons appliquer le lemme de Schwarz à la fonction de Schur :

$$G_1(z) \equiv \frac{G(z) - G(0)}{1 - G(0)G(z)} \frac{1}{z}$$

Exprimons donc que :

$$|G_1(0)| \leqq 1. \tag{3}$$

On a :

$$G_1(0) = \frac{u_1\alpha\beta - (\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)}{1-\alpha^2\beta^2}$$

et, par conséquent, l'inégalité (3) est équivalente à :

$$-(1-\alpha\beta)(1-\alpha)(1-\beta) \leqq u_1\alpha\beta \leqq (1-\alpha\beta)(1+\alpha)(1+\beta)$$

Or, les inégalités (1) entraînent dans tous les cas que :

$$2-\frac{(1-\alpha\beta)(1-\alpha)(1-\beta)}{|\alpha\beta|} \quad \text{et} \quad 2-\frac{(1-\alpha\beta)(1+\alpha)(1+\beta)}{|\alpha\beta|}$$

sont positifs. En effet :

Si $\alpha\beta$ est négatif, ces deux quantités sont bornées inférieurement par :

$$\frac{2|\alpha\beta|-(1+|\alpha\beta|)(1+|\alpha|)(1-|\beta|)}{|\alpha\beta|},$$

en supposant que $|\beta| \leqq |\alpha|$.

Le numérateur de cette dernière expression est lui-même borné inférieurement par $2\left(3\sqrt{\theta_1}-1-\theta_1\right)$, qui est positif.

Si $\alpha\beta$ est positif, les deux différences sont bornées inférieurement par :

$$\frac{2\alpha\beta-(1-\alpha\beta)(1+|\alpha|)(1+|\beta|)}{\alpha\beta},$$

dont le numérateur est lui-même borné inférieurement par $2\theta_1-(1-\theta_1)\left(1+\sqrt{\theta_1}\right)^2$, qui est positif.

Conclusion : u_1 ne peut être égal qu'à -1, 0, ou $+1$.

Examinons d'autre part, le cas où $|G_1(0)| = 1$:

Alors $G_1(z) \equiv \varepsilon'$, où $\varepsilon' = \pm 1$, et :

$$f(z) \equiv \frac{(\alpha z-1)(\beta z-1)(\alpha\beta+\varepsilon' z)}{(z-\alpha)(z-\beta)(1+\varepsilon'\alpha\beta z)}$$

α et β sont donc du second ou du troisième degré. Nous avons déjà étudié ces nombres.

3° Supposons donc $|G_1(0)| < 1$, et formons la fonction de Schur :

$$G_2(z) \equiv \frac{G_1(z)-G_1(0)}{1-G_1(0)G_1(z)}\,\frac{1}{z}.$$

Exprimons que :

$$(4) \qquad |G_2(0)| \leqq 1.$$

A) Si $u_1 = \pm 1$:

$$G_1(0) = \frac{u_1\alpha\beta-(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)}{-\alpha^2\beta^2+1}$$

et :

$$G_2(0) = \frac{\begin{array}{r} u_2\alpha\beta(1-\alpha^2\beta^2) + (1-\alpha\beta)^2(1-\alpha^2)(1-\beta^2) \\ -u_1(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)(1+\alpha^2\beta^2) + \alpha^3\beta^3 \end{array}}{(1-\alpha\beta)^2(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + 2u_1\alpha\beta(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta) - \alpha^2\beta^2}$$

Le dénominateur de $G_2(0)$ vaut $(1-\alpha^2\beta^2)^2[1-G_1^2(0)]$. Il est donc positif, et (4) est équivalente à :

$$2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + u_1(\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)^2 \\ + \alpha^2\beta^2 \leqq u_2\alpha\beta(1+\alpha\beta)$$

et : $$u_2\alpha\beta(1-\alpha\beta) \leqq u_1(\alpha+\beta)(1-\alpha^2\beta^2) - \alpha^2\beta^2.$$

Si $u_1(\alpha+\beta)$ est positif, le premier membre de la première de ces inégalités est positif, ce qui entraîne $u_2\alpha\beta > 0$. La seconde inégalité entraîne alors :

$$|u_2| \leqq \frac{(|\alpha|+|\beta|)(1-\alpha^2\beta^2) - \alpha^2\beta^2}{|\alpha\beta|(1-|\alpha\beta|)}.$$

Comme α et β satisfont à (1), le second membre de cette dernière inégalité est strictement inférieur à 1, et il n'y a pas de valeur entière de u_2 satisfaisant à (4).

Si $u_1(\alpha+\beta)$ est négatif, le second membre de la seconde inégalité est négatif, ce qui entraîne $u_2\,\alpha\beta < 0$. La première inégalité s'écrit alors :

$$2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) - |\alpha+\beta|(1+\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2 \\ \leqq -|u_2\alpha\beta|(1+\alpha\beta)$$

et le premier membre de cette inégalité est positif, car α et β satisfont à (1).

Conclusion : Il est donc impossible que $u_1 = \pm 1$, et on a nécessairement $u_1 = 0$.

B) Supposons donc $u_1 = 0$:

Alors :

$$G_1(0) = \frac{-(\alpha+\beta)}{(1+\alpha\beta)}$$

et

$$G_2(0) = \frac{u_2\alpha\beta(1+\alpha\beta) + (1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}.$$

Le dénominateur de $G_2(0)$ vaut encore

$$(1+\alpha\beta)^2(1-\alpha\beta)[1-G_1^2(0)],$$

qui est positif. Donc, (4) est équivalente à :

$$-2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) \leqq u_2\alpha\beta(1+\alpha\beta) \leqq 0.$$

Le lemme du chapitre II, appliqué à $f(z)-1$, montre d'autre part que u_2 ne peut être nul. Donc $u_2\alpha\beta$ est négatif.

La première inégalité montre que :

$$2-|u_2| \geqq 2\left[\frac{|\alpha\beta|(1+\alpha\beta)-(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{|\alpha\beta|(1+\alpha\beta)}\right].$$

Si α et β sont imaginaires, le numérateur du second membre est borné inférieurement par :

$$\alpha\beta(1+\alpha\beta)-(1-\alpha\beta)(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2),$$

qui est positif car α et β satisfont à (1).

Si α et β sont réels, ce numérateur est borné inférieurement par :

$$|\alpha\beta|(1-|\alpha\beta|)-2(1-|\alpha|^2)(1-|\beta|^2),$$

qui est également positif.

Donc, $2-|u_2|$ est positif dans tous les cas, et on ne peut avoir que $u_2=\pm 1$.

Enfin, si α et β sont réels et de même signe, u_2 est négatif, et :

$$1+u_2 \geqq \frac{\alpha\beta(1+\alpha\beta)-2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{\alpha\beta(1+\alpha\beta)}.$$

La quantité entre crochets est $\geqq \theta_1(1+\theta_1)-2(1-\theta_1)^2>0$, et il n'y a donc pas de valeur entière de u_2 satisfaisant à (4) dans ce cas.

Conclusion : si α et β sont imaginaires, $u_2=-1$;
s'ils sont réels, ils sont nécessairement de signes contraires et $u_2=+1$.

Examinons d'autre part le cas où $|G_2(0)|=1$.

C) Si $G_2(z)\equiv +1$:

On trouve alors :

$$G(z)\equiv\frac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(\alpha z-1)(\beta z-1)}.$$

Donc $f(z)\equiv 1$. Nous sommes dans le cas où $Q(z)$ est un polynôme réciproque, évidemment du quatrième degré. Étant irréductible, il est nécessairement de la forme :

$$Q(z) \equiv z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + 1,$$

où a_1 et a_2 sont entiers rationnels.

Soit $T(Z) \equiv Z^2 + a_1 Z + a_2 - 2$ le polynôme déduit de $Q(z)$ en posant $Z = z + \frac{1}{z}\cdot$

Si α et β appartiennent à S_2^*, nous sommes dans le cas où $T(Z)$ a ses deux zéros imaginaires. Ce cas est donc caractérisé par : $a_1^2 < 4(a_2 - 2)$.

L'équation qui a pour racines $\alpha\beta$, $\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ est alors :

$$z^4 - (a_2 - 2)z^3 + (2 + a_1^2 - 2a_2)z^2 - (a_2 - 2)z + 1 = 0.$$

$\alpha\beta$ est la seule racine comprise entre 0 et 1 de cette équation. Il est aisé de vérifier que, si $a_1^2 < 4(a_2 - 2)$, cette racine est inférieure à θ_1 ; par conséquent, α et β ne peuvent satisfaire à (1).

Si α et β appartiennent à S_2, nous sommes dans le cas où $T(Z)$ a ses deux zéros réels et supérieurs à 2 en valeur absolue.

On a alors :

$$Z_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}}{2}$$

et

$$Z_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}}{2},$$

Z_1 et Z_2 désignant les deux zéros de $T(Z)$. Si Z_M est celle de ces deux quantités qui a la plus grande valeur absolue, on voit que :

$$|Z_M| = \frac{1}{2}\left[|a_1| + \sqrt{a_1^2 - 4(a_2 - 2)}\right].$$

Les deux zéros de $Q(z)$ qui appartiennent à S_2 ont respectivement pour valeur absolue :

$$|z_i| = \left|\frac{|Z_i| - \sqrt{Z_i^2 - 4}}{2}\right|, \qquad \text{où} \qquad i = 1 \text{ ou } 2.$$

$|z_i|$ est donc fonction décroissante de $|Z_i|$, et la plus petite de ces deux valeurs absolues correspond à $|Z_M|$.

D'autre part, $|Z_M|$ est, pour a_2 donné, fonction croissante de $|a_1|$, et, pour a_1 donné, fonction décroissante de a_2. Or, $T(Z)$ a ses deux zéros réels et supérieurs à 2 en valeur absolue :

ou bien quand $T(2)$ et $T(-2)$ sont < 0, soit :

$$a_2 + 2 < 2a_1 < -(a_2 + 2).$$

a_2 est alors nécessairement < -2, et, pour a_2 donné :

$$|Z_M| \geqq \frac{\sqrt{-4(a_2 - 2)}}{2}.$$

Donc : $|Z_M| \geqq \sqrt{5}$;

ou bien, $T(2)$ et $T(-2)$ étant > 0, quand le discriminant de l'équation : $T(Z) = 0$ est > 0 et la demi-somme des racines > 2 en valeur absolue. Les conditions exigées sont donc :

$$-(2 + a_2) < -2a_1 < 2 + a_2$$

et

$$a_1^2 - 4(a_2 - 2) > 0$$
$$|a_1| > 4.$$

La deuxième inégalité montre que, pour a_1 donné :

$$|Z_M| \geqq \frac{|a_1| + 1}{2},$$

et la troisième inégalité montre alors que : $|Z_M| \geqq 3$.

Celui des deux zéros de $Q(z)$ appartenant à S_2 qui a la plus petite valeur absolue est donc dans tous les cas tel que :

$$|z| \leqq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \sqrt{\theta_1}.$$

Ces deux zéros ne peuvent donc satisfaire à (1).

D) Si $G_2(z) \equiv -1$:

On trouve que $Q(z)$ est proportionnel à :

$$(z - \alpha)(z - \beta)\left(-z^2 + \frac{(\alpha + \beta)(1 - \alpha\beta)}{\alpha\beta(1 + \alpha\beta)} z + \frac{1}{\alpha\beta}\right).$$

Si ce polynôme n'est pas irréductible, α et β sont du troisième degré au plus, et nous retrouvons un cas étudié.

Si le polynôme est irréductible, on a :

$$Q(z) \equiv -z^4 + \frac{(\alpha+\beta)(1+\alpha^2\beta^2)}{\alpha\beta(1+\alpha\beta)}z^3 + \frac{(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{\alpha\beta(1+\alpha\beta)}z^2 - \frac{(\alpha+\beta)(1+\alpha^2\beta^2)}{\alpha\beta(1+\alpha\beta)}z + 1.$$

Or, la condition $G_2(0) = -1$ s'écrit, puisque $u_2 = \pm 1$:

$$2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) = \pm\alpha\beta(1+\alpha\beta)\cdot$$

Le coefficient de z^2 dans $Q(z)$ est donc égal à $\pm\frac{1}{2}$, ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle ces coefficients sont entiers.

Conclusion : Il est impossible que $|G_2(0)| = 1$.

4° On peut alors former la fonction de Schur :

$$G_3(z) \equiv \frac{G_2(z) - G_2(0)}{1 - G_2(0)G_2(z)}\,\frac{1}{z}$$

et lui appliquer le lemme de Schwarz. Exprimons que :

$$(5) \qquad |G_3(0)| \leqq 1.$$

On trouve :

$$G_3(0) = \frac{u_3\alpha\beta(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) - \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta) - u_2(\alpha+\beta)(1-\alpha^2\beta^2)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{-2u_2\alpha\beta(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) - \alpha^2\beta^2(1+\alpha\beta)}$$

Le dénominateur de $G_3(0)$ vaut :

$$-u_2\alpha\beta(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)[1+G_2(0)],$$

et cette quantité est positive, car $u_2\alpha\beta$ est négatif dans tous les cas.

L'inégalité (5) est donc équivalente à :

$$\frac{\alpha\beta[2u_2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)+\alpha\beta(1+\alpha\beta)] + (\alpha+\beta)[u_2(1-\alpha^2\beta^2)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)+\alpha^2\beta^2]}{-u_2\alpha\beta(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} \leqq -u_2u_3$$

et

$$\frac{-\alpha\beta[2u_2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)+\alpha\beta(1+\alpha\beta)] + (\alpha+\beta)[u_2(1-\alpha^2\beta^2)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)+\alpha^2\beta^2]}{-u_2\alpha\beta(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} \geqq -u_2u_3.$$

Soit : $$\varphi_1(\alpha, \beta) \leqq -u_2u_3 \leqq \varphi_2(\alpha, \beta)$$

Comme u_2 vaut $+1$ ou -1, ces deux inégalités entraîneront nécessairement $u_3 = 0$ si $1 + \varphi_1(\alpha, \beta)$ et $1 - \varphi_2(\alpha, \beta)$ sont positifs, c'est-à-dire si

$$\alpha\beta[u_2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + \alpha\beta(1+\alpha\beta)] \\ + \varepsilon'(\alpha+\beta)[u_2(1-\alpha^2\beta^2)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + \alpha^2\beta^2]$$

est positif pour $\varepsilon' = +1$ et $\varepsilon' = -1$. Les couples α, β de S_2 et S_2^* étant deux à deux opposés, nous pouvons nous borner à étudier ces inégalités dans le cas où $\alpha + \beta$ est positif ou nul. D'autre part, le coefficient de $\varepsilon'(\alpha+\beta)$ dans l'expression ci-dessus est positif dans tous les cas quand α et β satisfont à (1). Il suffit donc, pour pouvoir affirmer que $u_3 = 0$, de vérifier que

$$\alpha\beta[u_2(1-\alpha\beta)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + \alpha\beta(1+\alpha\beta)] \\ -(\alpha+\beta)[u_2(1-\alpha^2\beta^2)(1-\alpha^2)(1-\beta^2) + \alpha^2\beta^2]$$

est positif, en supposant $\alpha + \beta$ non négatif. Cette dernière expression vaut encore :

$$(1-\alpha)(1-\beta)[\alpha\beta(u_2 + \alpha\beta - u_2\alpha^2\beta^2) \\ - u_2(\alpha+\beta)(1-\alpha^3\beta^3) - u_2(\alpha+\beta)^2(1-\alpha^2\beta^2)]$$

et a le signe de la quantité entre crochets, que nous désignerons par $\varphi_3(\alpha, \beta)$.

Si α et β sont imaginaires, $u_2 = -1$ et :

$$\varphi_3(\alpha, \beta) \equiv \alpha\beta(\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta - 1) + (\alpha+\beta)(1-\alpha^3\beta^3) + (\alpha+\beta)^2(1-\alpha^2\beta^2).$$

Si $\alpha\beta$ est supérieur ou égal à θ_1, $\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta - 1$ est positif, et, par conséquent, $\varphi_3(\alpha, \beta)$ est positif si α et β sont imaginaires et satisfont à (1).

Si α et β sont réels, $u_2 = +1$, et α et β sont de signes contraires. Supposons que α soit positif. On voit alors facilement que $\varphi_3(\alpha, \beta)$ est fonction décroissante de $\alpha\beta$ et de $\alpha + \beta$, donc de β. Comme β est inférieur ou égal à $-\sqrt{\theta_1}$, cela entraîne $\varphi_3(\alpha, \beta) \geqq \varphi_3(\alpha, -\sqrt{\theta_1})$. Enfin, $\varphi_3(\alpha, -\sqrt{\theta_1})$ est elle-même fonction décroissante de α, et on vérifie aisément que $\varphi_3(+\sqrt{\theta_1}, -\sqrt{\theta_1})$ est positif.

Conclusion : Quand α et β satisfont à (1), on a nécessairement $u_3 = 0$, dans tous les cas. Le développement en série de puissances de $f(z)$ au voisinage de l'origine est donc nécessairement de la forme :

$$f(z) \equiv 1 + u_2 z^2 + u_4 z^4 + \cdots,$$

où $u_2 = +1$ si α et β appartiennent à S_2, et $u_2 = -1$ si α et β appartiennent à S_2^*.

5° Considérons la fonction :

$$g_1(z) \equiv \frac{(z^4 + u_2 z^2 - 1) f(z) - (z^4 - 1)}{(z^4 - 1) f(z) - (z^4 - u_2 z^2 - 1)}.$$

Au voisinage de l'origine :

$$g_1(z) \equiv \frac{(1 - u_4) z^4 + \cdots}{-u_4 z^4 + \cdots}.$$

De l'étude faite au chapitre II, 2°, il résulte que $g_1(z)$ est holomorphe dans le cercle-unité, et que u_4 est différent de 0. Comme $|g_1(z)| = 1$ sur le cercle-unité, $g_1(z)$ est une fonction de Schur, et, en vertu du lemme de Schwarz : $|g_1(0)| \leqq 1$. Comme u_4 est entier, ceci est équivalent à : $|u_4| \geqq 1$.

Considérons la fonction de Schur :

$$g_2(z) \equiv \frac{g_1(z) - g_1(0)}{1 - g_1(0) g_1(z)} \frac{1}{z}.$$

Nous pouvons en particulier exprimer que : $|g_2(\alpha)| \leqq 1$, soit :

$$\left| \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha^4 + u_2 u_4 \alpha^2 - 1}{\alpha^4 - u_2(u_4 - 1)\alpha^2 - 1} \right| \leqq 1. \tag{6}$$

A) Si α et β sont imaginaires, l'inégalité (6) est équivalente à :

$$(\alpha^4 - u_4 \alpha^2 - 1)(\beta^4 - u_4 \beta^2 - 1) \\ \leqq \alpha\beta\,[\alpha^4 + (u_4 - 1)\alpha^2 - 1][\beta^4 + (u_4 - 1)\beta^2 - 1]$$

soit :

$$\psi(\alpha, \beta) \equiv u_4^2 \alpha^2 \beta^2 (1 - \alpha\beta) + u_4[2\alpha^3\beta^3 + (1 + \alpha\beta)(1 - \alpha^2\beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)] \\ - \alpha\beta[(1 - \alpha^2\beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2] + (1 - \alpha^4)(1 - \beta^4)(1 - \alpha\beta) \leqq 0.$$

Pour tout couple α, β satisfaisant à (1), $\psi(\alpha, \beta)$ est une fonction croissante de u_4. D'autre part, le premier membre peut être considéré comme une fonction des variables indépendantes $\alpha^2 + \beta^2$ et $\alpha\beta$. Pour $\alpha\beta$ constant, et α et β satisfaisant à (1), et pour u_4 supérieur à 1, c'est une fonction croissante de $\alpha^2+\beta^2$, qui est toujours supérieur ou égal à $-2\,\alpha\beta$. Donc, si on suppose u_4 supérieur à 1 :

$$\begin{aligned}\psi(\alpha,\beta)\geqq 4\alpha^2\beta^2(1-\alpha\beta)+4\alpha\beta[\alpha^2\beta^2-(1+\alpha\beta)(1-\alpha^2\beta^2)]\\ +2\alpha^2\beta^2(1-\alpha^2\beta^2)-\alpha^3\beta^3+(1-\alpha^2\beta^2)^2(1-\alpha\beta)\end{aligned}$$

et il est aisé de vérifier que le second membre est >0 si $0_1\leqq\alpha\beta\leqq 1$.

L'inégalité (6) ne peut donc être satisfaite si $u_4\geqq 2$. On a donc nécessairement $u_4=1$ si α et β sont imaginaires.

B) Si α et β sont réels, l'inégalité (6) est équivalente à :

$$-1\leqq\frac{1}{\alpha}\,\frac{\alpha^4+u_4\alpha^2-1}{\alpha^4-(u_4-1)\alpha^2-1}\leqq+1.$$

α et β étant alors de signes contraires, on peut supposer α positif. La seconde inégalité ci-dessus s'écrit :

$$(1-\alpha)\,(1-\alpha^4)-(u_4-1)\alpha^3-u_4\alpha^2\geqq 0.$$

Or, si u_4 est supérieur à 1, on a :

$$(1-\alpha)\,(1-\alpha^4)-(u_4-1)\alpha^3-u_4\alpha^2\leqq(1-\alpha)\,(1-\alpha^4)-\alpha^3-2\alpha^2,$$

et $(1-\alpha)\,(1-\alpha^4)-\alpha^3-2\alpha^2$ est négatif, car α satisfait à (1).

Conclusion : on a nécessairement $u_4=1$.

6° Si $u_4=1$, on a, au voisinage de l'origine :

$$g_1(z)\equiv\frac{w_nz^n+\cdots}{-z^4+\cdots}$$

où n est supérieur à 4, et où les coefficients des développements du numérateur et du dénominateur sont entiers. Le développement en série de Taylor de $g_1(z)$ dans le cercle-unité est donc à coefficients entiers. Comme $|g_1(z)|=1$ sur le cercle-unité, $g_1(z)$ se réduit nécessairement à un monôme de la forme $\varepsilon'\,z^p$, où $\varepsilon'=\pm 1$, et où p est positif.

Donc : $$f(z)\equiv\frac{(z^4-1)-\varepsilon'z^p(z^4-u_2z^2-1)}{(z^4+u_2z^2-1)-\varepsilon'z^p(z^4-1)}.$$

A) Si p est pair : α et β sont zéros de

$$(z^4+u_2z^2-1)-\varepsilon'z^{2p'}\;(z^4-1),$$

en posant $p = 2p'$. Or, les polynômes $(z^2 \pm z - 1) \pm z^{p'}(z^2 - 1)$ sont, pour tout entier p', des polynômes irréductibles dont l'un des zéros appartient à S_1. Les nombres θ_1 et $-\theta_1$ appartiennent à cette famille et correspondent à $p' = 1$, et à un choix de signes convenable.

α et β sont donc dans ce cas les racines carrées d'un nombre de S_1 positif ou négatif, et nous retrouvons un cas étudié précédemment.

B) Si p est impair: Posons $p = 2p' + 1$, où p' est supérieur ou égal à 0.

Changer ε' en $-\varepsilon'$ revenant à remplacer α et β par leurs opposés, on peut supposer que $\varepsilon' = +1$.

Si α et β sont réels, on suppose encore α positif. On doit avoir:

$$\alpha^2 - (1 - \alpha^4)(1 - \alpha^{2p'+1}) = 0.$$

Or la condition $\alpha \geqq \sqrt{\theta_1}$ est dans ce cas équivalente à:

$$\alpha^6 + \alpha^4 - 1 \geqq 0.$$

On vérifie que cette inégalité entraîne:

$$\alpha^2 - (1 - \alpha^4)(1 - \alpha^{2p'+1}) > 0.$$

Il est donc impossible que α et β satisfassent à (1) dans ce cas.

Si α et β sont imaginaires:

On doit avoir: $\quad |\alpha^{2p'+1}| = \left| \dfrac{\alpha^4 - \alpha^2 - 1}{\alpha^4 - 1} \right|$

soit:

$$(7) \quad (1 + \alpha^2\beta^2)^2[1 - (\alpha\beta)^{2p'+1}] + \alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(1 - \alpha^2\beta^2) \\ - (\alpha^2 + \beta^2)^2[1 - (\alpha\beta)^{2p'+1}] = 0.$$

$\alpha^2 + \beta^2$ est supérieur ou égal à $-2\alpha\beta$, et le premier membre de l'égalité (7) est borné inférieurement par:

$$\psi_1(\alpha, \beta) \equiv (\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta - 1)^2 - (\alpha\beta)^{2p'+1}(1 - \alpha^2\beta^2)^2.$$

(1) est dans ce cas équivalente à: $(\alpha\beta)^3 + (\alpha\beta)^2 - 1 \geqq 0$, et entraîne par conséquent:

$$\psi_1(\alpha, \beta) \geqq (\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta - 1)^2 - (\alpha\beta)^{2p'+7} \\ > (\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta - 1)^2 - (\alpha\beta)^{2p'+6},$$

Cette dernière expression est, pour une valeur donnée de $\alpha\beta$, fonction croissante de p'. Pour $p' = 1$, elle vaut :

$$(1-\alpha\beta)[(\alpha\beta)^3+(\alpha\beta)^2-1][(\alpha\beta)^{p'+3}+(\alpha\beta)^2+\alpha\beta-1]$$

qui est positif ou nul, car α et β satisfont à (1). Donc, si p' est supérieur ou égal à 1, le premier membre de l'égalité (7) est positif pour tout couple α, β satisfaisant à (1).

Enfin, si $p' = 0$, $Q(z) \equiv (z^4 - z^2 - 1) - z(z^4 - 1)$, et on vérifie que les deux zéros de ce polynôme intérieurs au cercle-unité sont imaginaires. Le polynôme dont les zéros sont les produits deux à deux de ceux de $Q(z)$ est :

$$T(Z) \equiv Z^{10} - Z^7 - Z^5 + Z^4 - 2Z^3 + Z^2 - Z + 1,$$

et $\alpha\beta$ est certainement son plus petit zéro positif. Or, $T(0) = +1$ et on vérifie que $T(\theta_1)$ est < 0. On a donc certainement $\alpha\beta < \theta_1$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

Il n'existe pas de couples de nombres de S_2^* *dont le module soit supérieur à* $\sqrt{\theta_1}$. *Il en existe trois couples et trois seulement dont le module vaut* $\sqrt{\theta_1}$. *Ces nombres sont respectivement zéros de* $z^6 - z^4 + 1$, $z^3 - z - 1$, *et* $z^3 - z + 1$.

Le seul couple de nombres de S_2 *dont les valeurs absolues soient simultanément supérieures ou égales à* $\sqrt{\theta_1}$ *est formé des nombres* $+\sqrt{\theta_1}$ *et* $-\sqrt{\theta_1}$, *zéros de* $z^6 + z^4 - 1$.

D'autre part, si une fraction rationnelle à coefficients entiers a pour seul pôle de module inférieur ou égal à 1 un pôle double de module strictement inférieur à 1, ce pôle appartient à S_1. Par conséquent, sa valeur absolue est certainement inférieure à $\sqrt{\theta_1}$.

Nous pouvons donc énoncer :

Si une fonction $f(z)$ *à coefficients entiers n'a que deux pôles, distincts ou confondus, à l'intérieur du cercle-unité, et si ces deux pôles ont un module supérieur à* $\sqrt{\theta_1}$, $f(z)$ *n'est certainement pas bornée au voisinage de la circonférence-unité.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Borel. Sur une application d'un théorème de M. Hadamard. *Bull. Soc. Math.*, 18 (1894), p. 22-25.

[2] F. Carlson. Uber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math. Zeitschrift*, 9 (1921), p. 1-13.

[3] C. Chamfy. Sur les coefficients de certaines fonctions méromorphes dans le cercle-unité. *C.R. Acad. Sc.*, 243(1956), p. 225-227.

[4] C. Chamfy. Valeur minima du module pour un ensemble fermé d'entiers algébriques. *C. R. Acad. Sc.*, 244, (1957), p. 1992-1194.

[5] J. Dufresnoy et Ch. Pisot. Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle-unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 72, (1955), p. 69-92.

[6] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 30 (1906), p. 335-40).

[7] J. Kelly. A closed set of algebraic integers. *Amer. J. Math.*, 72 (1950), p. 565-572.

[8] Ch. Pisot. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. *Ann. di Pisa*, 7 (1938), p. 205-248.

[9] R. Salem. A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan. *Duke Math. Journ.*, 11 (1944,) p. 103-108.

[10] R. Salem. Power series with integral coefficients. *Duke Math. Journ.*, 12 (1945), p. 153-172.

[11] J. Schur. Über Potenzreihen, die im innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J.f.r.u.ang. Math.*, 147 (1917), p. 205-232).

[12] C. L. Siegel. Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle. *Duke Math. Journ.*, 11 (1944), p. 597-602.

[13] T. Vijayaraghavan. On the fractional parts of the powers of a number (II). *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, 37, (1941), p. 349-357.

[14] T. Vijayaraghavan. On the fractional parts of the powers of a number (III). *Journ. of the London Math. Soc.*, 17 (1942), p. 137-138.

TABLE DES MATIÈRES