

ALANO ANCONA

## **Une propriété de la compactification de Martin d'un domaine euclidien**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, n° 4 (1979), p. 71-90

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1979\\_\\_29\\_4\\_71\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_71_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE PROPRIÉTÉ DE LA COMPACTIFICATION DE MARTIN D'UN DOMAINE EUCLIDIEN

par Alano ANCONA

---

### Introduction.

Soient  $\Omega$  un domaine greenien de  $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$  et  $\hat{\Omega}$  le compactifié de Martin de  $\Omega$  relativement au faisceau des fonctions harmoniques ordinaires (\*). On note  $\Delta = \hat{\Omega} - \Omega$  la frontière de Martin de  $\Omega$  et  $\Delta_1$  l'ensemble des points minimaux de  $\Delta$ . Dans la première partie de ce travail, on se propose d'établir le critère géométrique suivant de convergence vers un point de  $\Delta_1$  :

(P<sub>1</sub>) Supposons que  $\Omega$  contienne une boule ouverte  $B(x_0, r) (r > 0)$  et soit  $z_0$  un point de  $\partial B(x_0, r) \cap \partial\Omega$  : alors le point  $x_0 + t(z_0 - x_0)$  tend dans  $\hat{\Omega}$  vers un point de  $\Delta_1$  lorsque  $t \in [0, 1[$  tend vers 1.

On peut d'ailleurs étendre ce résultat aux suites de  $B(x_0, r)$  tendant non tangentiellement (dans la boule) vers  $z_0$ , et préciser le comportement sur  $\partial\Omega$  de la minimale ainsi obtenue.

On obtient ainsi une solution positive, dans un cas particulier, à un problème de G. Choquet pour un domaine contenant un cône ouvert de révolution. Dans [1] on a construit, pour  $\varphi \in ]0, \frac{2\pi}{3}[$ , un domaine plan  $\Omega_\varphi$  contenant l'« angle »  $\left\{ te^{i\theta}; 0 < t < 2, |\theta| < \frac{\varphi}{2} \right\}$ , et tel que l'adhérence dans

(\*) On peut étendre l'essentiel des résultats de ce travail au cas des opérateurs elliptiques d'ordre 2, à coefficients hölderiens ([12]).

$\hat{\Omega}_\varphi$  du segment réel  $]0, 1]$  englobe une infinité de points de  $\Delta - \Delta_1$ . On peut d'ailleurs en modifiant convenablement la construction obtenir un tel domaine pour tout  $\varphi \in ]0, \pi[$  (voir la remarque 5 plus bas).

La propriété  $(P_1)$  donne un critère simple de convergence vers un point de  $\Delta_1$ , n'exigeant aucune régularité sur  $\partial\Omega$  au voisinage de  $z_0$ , contrairement aux critères déjà connus : domaines à courbure bornée de De La Vallée Poussin ([9], [8]) domaines lipschitziens étudiés par R. A. Hunt et R. L. Wheeden ([5], [6]) (on trouvera d'autres exemples, plus particuliers, dans [1], [2], [3], [7]). De plus, la propriété  $(P_1)$  permet par exemple d'obtenir une nouvelle condition simple pour que l'adhérence  $\hat{\Omega}$  de  $\Omega$  soit naturellement homéomorphe à  $\hat{\Omega}$  : il suffit que  $\Omega$  soit borné et réunion d'une famille de boules ouvertes de même rayon  $r_0$  (\*\*\*) et que si  $\Omega$  contient deux boules ouvertes  $B_1$  et  $B_2$  de rayon  $r_0$  et opposées par rapport à un point  $z$  de  $\partial\Omega$ ,  $\Omega$  contient un cône ouvert de sommet  $z$  et de révolution par rapport à un axe normal au diamètre commun de  $B_1$  et  $B_2$ . Cette classe de domaine n'est pas comparable (pour l'inclusion) à la classe des domaines lipschitziens bornés.

La méthode suivie suggère et permet d'établir dans le cas plan une autre propriété :

$(P_2)$  Soient  $\varphi, \psi > 0$ , avec  $\varphi + 2\psi \leq 2\pi$ ,  $\varphi \geq \psi$ ; si on a :

$$\left\{ te^{i\theta}; 0 < t < 2, |\theta| < \frac{\varphi}{2} \right\} \subset \Omega \subset \left\{ te^{i\theta}; t > 0, |\theta| \leq \frac{\varphi}{2} + \psi \right\}$$

alors la trace sur  $]0, 1]$  du filtre des voisinages de  $0$ , converge dans  $\hat{\Omega}$  vers un point minimal de  $\Delta$ .

Ce résultat était également suggéré par les exemples déjà mentionnés de [1].

Dans la dernière partie de ce travail on apporte une solution négative à une conjecture de Martin; il n'est pas vrai en général que dans  $\hat{\Omega}$  on a  $\Delta = \bar{\Delta}_1$ ; cette propriété est mise en défaut dans le cas du domaine plan

$$\left( \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[ n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4} \right] \right).$$

On peut construire des contre-exemples analogues dans  $\mathbb{R}^3$ .

(\*\*) Si  $\Omega$  possède seulement ces deux propriétés, il n'y a qu'une ou deux minimales normalisées distinctes associées à un point frontière (voir le 8-b).

Les méthodes utilisées ici prolongent celles de [1] : établissement de majorations d'un type introduit par Carleson ([4], [5]), puis obtention à partir de là d'« inégalités de Harnack jusqu'au bord » qui permettent de déterminer la frontière de Martin de  $\Omega$ .

**1. Un critère de convergence vers un point minimal.**

Dans toute la suite  $\Omega$  désignera un domaine de Green de  $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ ,  $G$  sa fonction de Green ; on notera  $B(x,r)$  la boule ouverte (euclidienne) de centre  $x$  et de rayon  $r$ ,  $e_1 = (1,0,0 \dots)$ ,  $e_2 = (0,1,0 \dots)$  les deux premiers vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  ; on pose enfin  $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$  pour  $x = (x_1, x_2 \dots) \in \mathbf{R}^n$  et  $d(x,y) = \|x - y\|$ .

On commence par établir l'estimation suivante, analogue à une estimation de L. Carleson pour les mesures harmoniques dans un domaine lipschitzien (voir [3], [4] et [1]).

LEMME 1. — *On suppose que  $\Omega$  contient le demi-espace  $x_1 > 0$ , on désigne par  $D_+$  la demi-droite  $\{te_1; t > 0\}$ , et on pose  $A_t = te_1$ . Il existe une constante  $c_1 > 0$  ne dépendant que de  $n$ , telle que*

$$\forall Q \in D_+, \quad \forall t > 0, \quad \forall P \in \Omega \cap \partial B(0,t) \quad G(P,Q) \leq c_1 G(A_t, Q).$$

On utilise la symétrie  $x \mapsto \tilde{x}$  par rapport à l'hyperplan  $x_1 = 0$  ; si  $Q$  est dans le demi-espace  $x_1 > 0$ , on a :

$$(1) \quad \forall P \in \Omega^- = \Omega \cap \{x; x_1 < 0\} \quad G(P,Q) \leq G(\tilde{P}, Q).$$

Pour le voir, il suffit d'appliquer le principe du maximum à la fonction surharmonique sur  $\Omega^-$ ,  $P \mapsto G(\tilde{P}, Q) - G(P, Q)$ , qui possède une limite positive en chaque point de  $\partial\Omega^- \cap \Omega$  et qui est minorée par l'opposé d'un potentiel sur  $\Omega$ .

On considère ensuite d'autres symétries ; pour simplifier les notations identifions le plan engendré par  $e_1$  et  $e_2$  au plan complexe,  $(e_1, e_2)$  se transformant en  $(1, i)$ , et notons  $x = (x_1 + ix_2, x_3, \dots, x_n)$  tout point  $x \in \mathbf{R}^n$ .

D'après les inégalités de Harnack, si  $u$  est harmonique positive sur le domaine  $\left\{ (z, x_3, \dots); 0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$  on a, avec une constante  $c \geq 1$  :

$$(2) \quad u(te^{i\varphi}, x_3, \dots) \leq cu(te^{i\varphi'}, x_3, \dots)$$

pour tout  $t > 0$ ,  $(x_3, \dots) \in \mathbf{R}^{n-2}$ ,  $\varphi, \varphi' \in \left[ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right]$ . Il faut remarquer qu'une homothétie ramène à  $t = 1$ .

Soit  $s$  la symétrie par rapport à l'hyperplan

$$H = \left\{ (z, x_3, \dots); \operatorname{Arg}^t(z) = \frac{3\pi}{8} \right\}.$$

D'après (1) et (2), on a pour  $P = (z, x_3, \dots)$  :

$$(3) \quad \forall Q \in D_+, \quad \operatorname{Arg}^t(z) = \frac{5\pi}{8} : G(P, Q) \leq cG(s(P), Q).$$

En appliquant le principe du maximum à la fonction  $P \mapsto cG(s(P), Q) - G(P, Q)$  dans  $\Omega \cap \left\{ (z, x_3, \dots), \frac{3\pi}{8} \leq \operatorname{Arg}^t(z) \leq \frac{5\pi}{8} \right\}$  on obtient

$$\operatorname{Sup} \left\{ G_Q(te^{i\varphi}, x_3, \dots); \frac{3\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{8} \right\} \leq c \operatorname{Sup} \left\{ G_Q(te^{i\varphi}, x_3, \dots); \frac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{8} \right\}.$$

On voit alors en faisant tourner l'hyperplan autour de l'axe  $D_+$ , que si  $\mathcal{C}$  désigne le cône d'axe  $D_+$  et de demi-angle au sommet  $\frac{3\pi}{8}$  on a :

$$\begin{aligned} & Q \in D_+, \quad t > 0, \\ \Rightarrow \operatorname{sup} \{ G_Q(P); \|P\| = t \} & \leq c \operatorname{sup} \{ G_Q(P); \|P\| = t, P \in \mathcal{C} \}. \end{aligned}$$

Une nouvelle utilisation des inégalités de Harnack et une homothétie donnent alors :

$$(4) \quad t > 0, \quad P \in \Omega \cap \partial B(0, t), \quad \text{et} \quad \|Q\| \leq \frac{t}{2} \quad \text{ou} \quad \|Q\| \geq 2t : \\ G(P, Q) \leq c'cG(A_r, Q).$$

Considérons enfin le cas où  $\frac{t}{2} < \|Q\| < 2t$ ,  $\|P\| = t$ ; on peut supposer  $\|Q\| \neq t$  et majorer, d'après les inégalités de Harnack,  $G_Q$  par  $c''G_Q(A_r)$  sur la sphère  $\partial B\left(Q, \frac{|t - \|Q\||}{2}\right)$ , ce qui avec le principe du maximum établit l'inégalité (4) dans ce dernier cas.

Pour un domaine contenant une boule, on déduit du lemme 1 les majorations suivantes :

COROLLAIRE 2. — On suppose que  $\Omega$  contient la boule ouverte  $B(x,r)(r>0)$ , et que  $y \in \partial B(x,r)$ . Désignons par  $\Sigma$  le diamètre  $]y, y + 2(x-y)[$  et pour  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$ , posons  $P_\alpha = y + \alpha(x-y)$ . On a alors, avec une constante  $c_2 > 0$  ne dépendant que de  $n$  :

$$\forall \alpha \in ]0, \frac{1}{2}[, \quad \forall Q \in \Sigma, \quad P \in \Omega \cap \partial B(y, \alpha r), \quad G(P, Q) \leq c_2 G(P_\alpha, Q).$$

En raisonnant comme à la fin de la démonstration précédente, on obtient facilement l'estimation lorsque  $Q \in [P_{\alpha/2}, P_{2\alpha}]$ ; considérons donc les  $Q \notin [P_{\alpha/2}, P_{2\alpha}]$ .

Avec une homothétie, on se ramène à  $r = \frac{1}{2}$ ; la transformation de Kelvin associée à l'inversion de pôle  $y + 2(x-y)$  et de puissance 1, suivie d'une isométrie ramène à un domaine  $\Omega$  contenant le demi-espace  $x_1 > 0$ , et à établir pour ce domaine l'estimation suivante (avec les notations du lemme 1)

$$\forall Q \in D_+, \quad Q \notin \left] \frac{\alpha e_1}{4 - \alpha}, \frac{\alpha e_1}{1 - \alpha} \right[ , \quad \forall P \in \partial B(\alpha) \cap \Omega : \\ G(P, Q) \leq c G\left(\frac{\alpha e_1}{2 - \alpha}, Q\right)$$

où  $B(\alpha)$  désigne la boule de diamètre  $\left[ \frac{-\alpha e_1}{2 + \alpha}, \frac{\alpha e_1}{2 - \alpha} \right]$ .

Si  $\|Q\| \leq \frac{\alpha}{4 - \alpha} G_Q$  est majorée sur  $\Omega - B\left(0, \frac{\alpha}{3 - \alpha}\right)$  par  $c_1 G_Q\left(\frac{\alpha e_1}{3 - \alpha}\right)$ , d'après le lemme 1 et le principe du maximum; avec les inégalités de Harnack on a aussi :

$$G_Q\left(\frac{\alpha e_1}{3 - \alpha}\right) \leq c G_Q\left(\frac{\alpha e_1}{2 - \alpha}\right),$$

ce qui prouve l'estimation pour  $\|Q\| \leq \frac{\alpha}{4 - \alpha}$ ; on raisonne de même pour  $\|Q\| \geq \frac{\alpha}{1 - \alpha}$ .

COROLLAIRE 3. — *On conserve les hypothèses et les notations du corollaire 2. Il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que :*

$$(5) \quad \forall \alpha \in \left] 0, \frac{1}{2} \right], \quad \forall P \in B(x, r) \cap B\left(y, \frac{\alpha r}{2}\right), \quad \forall Q \in \Omega \cap \partial B(y, \alpha r) : \\ G(P, Q) \leq c_3 G(P, P_\alpha).$$

Désignons par  $P_1$  le point où la demi-droite  $xP$  coupe la sphère  $\partial B(x, r)$  et posons  $x'_\alpha = P_1 + \frac{\alpha}{2}(x - P_1)$ ,  $x''_\alpha = P_1 + \frac{\alpha}{4}(y - x)$ .

Supposons d'abord  $\|PP_1\| \leq \frac{\alpha r}{8}$  et appliquons le corollaire 2 pour la boule  $B\left(x'_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$  et le point frontière  $P_1$  (au lieu de  $y$ ), on obtient :

$$(6) \quad G(P, Q) \leq c_1 G(P, x''_\alpha), \quad \text{pour} \quad Q \in \partial B\left(P_1, \frac{\alpha r}{4}\right) \cap \Omega.$$

Le principe du maximum montre que l'inégalité a encore lieu pour  $Q \in \partial B(y, \alpha r)$ ; appliquant ensuite les inégalités de Harnack à la fonction  $z \mapsto G(P, z)$ , harmonique sur  $B\left(x, \left(1 - \frac{\alpha}{8}\right)r\right)$ , on obtient  $G(P, x''_\alpha) \leq c G(P, P_\alpha)$ . D'où le corollaire pour  $\|PP_1\| \leq \frac{1}{8}\alpha r$ .

Si  $\|PP_1\| > \frac{\alpha r}{8}$ , soit  $P'$  le point de  $PP_1$  tel que  $P_1 P' = \frac{\alpha r}{8}$ ; les inégalités de Harnack (pour les fonctions  $z \mapsto G(z, Q)$ ) montrent que :

$$\frac{1}{c'} G(P', Q) \leq G(P, Q) \leq c' G(P', Q) \quad Q \in \partial B(y, \alpha r) \cap \Omega$$

d'où l'inégalité (5) en utilisant  $G(P', Q) \leq cc_1 G(P', P_\alpha)$ .

On déduit maintenant des corollaires 2 et 3 une inégalité de type « Harnack à la frontière » permettant de comparer les potentiels  $G_P$  sur le diamètre  $\Sigma$ .

THÉOREME 1. — *Conservons les hypothèses et les notations des énoncés précédents et notons  $B_\alpha$  l'intersection de  $B(x, r)$  et  $B(y, \alpha r)$ , et  $\Sigma_\alpha$  le segment*

$$[y + \alpha(x - y), y + 2(y - x)].$$

Il existe une constante  $c_4 > 0$ , ne dépendant que de  $n$ , telle que :

$$(7) \quad \forall \alpha \in \left] 0, \frac{1}{20} \right], \quad \forall P, P' \in B_\alpha, \quad Q \in \Sigma_{10\alpha} :$$

$$\frac{G(P, Q)}{G(P, P_{2\alpha})} \leq c_4 \frac{G(P', Q)}{G(P', P_{2\alpha})}.$$

Avec une homothétie et une translation on se ramène à  $\alpha r = \frac{1}{2}$  et  $y = 0$  ;

D'après le corollaire 3, pour  $P \in B_\alpha, Q \in \partial B(y, 2\alpha r)$  :

$$G(P, Q) \leq c_3 G(P, P_{2\alpha})$$

et par conséquent,

$$(8) \quad G(P, Q) \leq c_3 \cdot G(P, P_{2\alpha}) \mu(Q), \quad \forall Q \in \Omega - \bar{B}(y, 2\alpha r)$$

où  $\mu$  désigne la mesure harmonique de  $\partial B(y, 2\alpha r)$  dans

$$\Omega - \bar{B}(y, 2\alpha r) = \Omega - \bar{B}(y, 1).$$

Fixons alors  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , à support dans la couronne  $\frac{3}{4} \leq \|x\| \leq \frac{5}{4}$ , égale à 1 sur la sphère  $\|x\| = 1$ . On sait que la mesure harmonique  $\mu_Q$  dans  $\tilde{\Omega}$  est donnée par la formule  $\mu_Q = \Delta \tilde{G}_Q + \delta_Q$  où  $\tilde{G}_Q$  est la fonction de Green de  $\tilde{\Omega} = \Omega - \bar{B}(y, 1)$ , prolongée par zéro hors de  $\tilde{\Omega}$ . D'où :

$$\mu(Q) \leq \mu_Q(\Phi) = \int \tilde{G}(P, Q) \Delta \Phi(P) dP \quad \text{si} \quad \|Q\| \geq \frac{5}{4}.$$

Posant  $\|f\|_1 = \int |f(P)| dP$ , il vient :

$$(9) \quad \mu(Q) \leq \|\Delta \Phi\|_1 \cdot \max \left\{ \tilde{G}(Q, P); \|P - y\| \leq \frac{5}{4} \right\}.$$

Appliquons alors le corollaire 2 à  $\tilde{\Omega}$ , la boule de diamètre  $\Sigma_{2\alpha}$  et le point  $P_{2\alpha}$  :

$$\max \left\{ \tilde{G}(Q, P), \|P - y\| = \frac{5}{4} \right\} \leq \max \left\{ \tilde{G}(Q, P); \|P - P_{2\alpha}\| \leq 3 \right\}$$

$$\leq c_3 \tilde{G}(Q, P_{8\alpha}), \quad \forall Q \in \Sigma_{8\alpha}.$$

D'où en revenant à (8) et (9), et en remarquant que  $\Phi$  ne dépend que de  $n$  :

$$(10) \quad \forall P \in B_\alpha, \quad \forall Q \in \Sigma_{10\alpha}, \quad \frac{G(P, Q)}{G(P, P_{2\alpha})} \leq c \tilde{G}(Q, P_{8\alpha}).$$



Or l'inégalité opposée a également lieu (avec une autre constante) :

En effet, les inégalités de Harnack donnent une constante  $c' > 0$  telle que :

$$\forall P \in B_\alpha, \quad \forall Q \in B(P_{8\alpha}, 1), \quad \frac{G(P, Q)}{G(P, P_{2\alpha})} \geq c'.$$

D'autre part, en majorant  $\tilde{G}$  par la fonction de Green de  $\mathbf{R}^n - \bar{B}(y, 1)$ , on voit que :

$$\forall Q \in \partial B(P_{8\alpha}, 1), \quad \tilde{G}(P_{8\alpha}, Q) \leq c''.$$

D'où, avec le principe du maximum

$$(11) \quad \forall P \in B_\alpha, \quad \forall Q \in \Sigma_{10\alpha} \quad \frac{G(P, Q)}{G(P, P_{2\alpha})} \geq \frac{c'}{c''} \tilde{G}(P_{8\alpha}, Q).$$

La conjonction des inégalités (10) et (11) achève d'établir le théorème.

On peut alors établir la propriété  $(P_1)$  de l'introduction ; plus précisément :

**THÉOREME 2.** — Si  $\Omega$  contient la boule  $B(x, r)$  et si  $y \in \partial B(x, r) \cap \partial\Omega$ , le point  $P_t = y + t(x - y)$  tend, lorsque  $t$  tend vers 0 ( $t > 0$ ) vers un point  $\zeta_0$  de  $\Delta_1$  dans  $\hat{\Omega}$ . Plus généralement pour toute suite  $\{P_k; k \geq 1\}$  de  $B(x, r)$  tendant non-tangentiellement vers  $y$ , on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k = \zeta_0$  dans  $\hat{\Omega}$ .

De plus si  $\{P_k\} \subset B(x, r)$  tend vers  $y$  dans  $\mathbf{R}^n$ , et vers un point  $\zeta_1$  dans  $\hat{\Omega}$ , on a  $K_{\zeta_1} \geq cK_{\zeta_0}$  pour une constante  $c > 0$ , et  $K_{\zeta_1}$  est bornée au voisinage de tout point  $z$  de  $\partial\Omega$  distinct de  $y$ , et tend même vers 0 au point  $z$  si  $z$  est régulier pour  $\Omega$ .

On désigne dans cet énoncé et dans la suite par  $K_\zeta(P) = K(\zeta, P)$  le noyau de Martin sur  $\hat{\Omega} \times \Omega$ , normalisé au point  $x$ . La démonstration du théorème 2 s'appuie essentiellement sur le théorème 1 ; on utilisera aussi le lemme élémentaire suivant :

**LEMME 4.** — Sous les hypothèses du corollaire 2, il existe une constante  $c > 0$ , telle que pour toute fonction  $u$  harmonique positive sur  $\Omega$ , on a, en

posant  $D_\alpha = B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$  :

$$\forall \alpha \in \left]0, \frac{1}{10}\right], \quad R_u^{D_\alpha}(P_{2\alpha}) \geq cu(P_{2\alpha}) (*).$$

(\*)  $R_u^{D_\alpha}$  désigne la réduite de  $u$  sur  $D_\alpha$  dans  $\Omega$ .

D'après les inégalités de Harnack  $u(P) \geq c u(P_{2\alpha})$  sur  $B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$ ; d'où si  $\varphi_\alpha$  désigne le potentiel capacitaire de  $D_\alpha$  dans  $B(P_{2\alpha}, 2\alpha r)$ :  $u \geq cu(P_{2\alpha})\varphi_\alpha$ . Une homothétie de rapport  $\frac{1}{\alpha r}$  montre que  $\varphi_\alpha(P_{2\alpha})$  est indépendant de  $\alpha$ . D'où le lemme.

*Démonstration du théorème 2 :*

I. Désignons par  $\Sigma$  le segment  $]y, x]$ , et montrons que dans  $\hat{\Omega}, \hat{\Sigma} \cap \Delta$  est réduit à un point minimal. D'après le théorème 1, on a si  $\alpha \in \left]0, \frac{1}{20}\right]$ :

$$\forall P \in B_\alpha, \quad \forall Q \in \Sigma_{10\alpha} \quad \frac{1}{c} \frac{G(P_\alpha, Q)}{G(P_\alpha, P_{2\alpha})} \leq \frac{G(P, Q)}{G(P, P_{2\alpha})} \leq c \frac{G(P_\alpha, Q)}{G(P_\alpha, P_{2\alpha})}.$$

En faisant, en particulier  $Q = x$  (point de normalisation) :

$$(12) \quad \forall P \in B_\alpha, \quad \frac{1}{c} K_{P_\alpha}(P_{2\alpha}) \leq K_P(P_{2\alpha}) \leq c K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})$$

inégalité qui s'étend à tout  $P$  dans l'adhérence  $\hat{B}_\alpha$  de  $B_\alpha$  dans  $\hat{\Omega}$ .

II. Si  $u$  est une fonction harmonique  $> 0$  sur  $\Omega - B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$  et  $\alpha \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ , on déduit des inégalités de Harnack :

$$(13) \quad u(Q) \geq c K_{P_\alpha}(Q) \left( \frac{u(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})} \right), \quad Q \in \partial B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right).$$

Prenant  $u = K_\zeta$ ,  $\zeta \in \hat{B}_\alpha$  adhérence de  $B_\alpha$  dans  $\hat{\Omega}$ , on aura donc (en tenant compte de (12))

$$(14) \quad K_\zeta(Q) \geq c' K_{P_\alpha}(Q), \quad Q \in \Omega - B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right).$$

On en déduit que si  $\zeta \in \bigcap_{\alpha > 0} \hat{B}_\alpha$  et si  $\zeta_0$  est un point de  $\hat{\Sigma} \cap \Delta$  :  $K_\zeta \geq c' K_{\zeta_0}$  sur  $\Omega$ . En particulier si  $\zeta_0$  est un autre point de  $\hat{\Sigma} \cap \Delta$ , on a :

$$\frac{1}{c'} K_{\zeta_0} \leq K_{\zeta'_0} \leq c' K_{\zeta_0} \text{ sur } \Omega.$$

III. Observons que si on pose  $D_\alpha = B\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$ , on a :

$$R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha}(Q) \geq c' K_{P_\alpha}(Q) \left( \frac{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})} \right), \quad Q \in \partial B\left(P_\alpha, \frac{3\alpha r}{4}\right)$$

d'après le lemme 4 (\*) et les inégalités de Harnack ; l'inégalité s'étend évidemment à tous les  $Q \in \Omega - B\left(P_\alpha, \frac{3\alpha r}{4}\right)$  et par conséquent, en utilisant (12)

$$(15) \quad \forall Q \in \Omega, \quad \liminf_{\alpha \rightarrow 0} R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha}(Q) \geq c'_1 K_{\zeta_0}(Q).$$

IV. Montrons alors que  $K_{\zeta_0}$  est minimale (ce qui prouvera que  $\hat{\Sigma} \cap \Delta$  est réduit à un point) ; si  $u$  est une fonction harmonique  $> 0$  sur  $\Omega$  majorée par  $K_{\zeta_0}$  et si  $\lambda = \sup \{t > 0; tu \leq K_{\zeta_0}\}$ , posons  $v = \lambda u$  ; on a :

$$R_v^{D_\alpha}(Q) \leq c'_2 K_{P_\alpha}(Q) \left( \frac{v(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})} \right) \leq c'_3 K_{P_\alpha}(Q) \left( \frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})} \right)$$

pour tout  $Q \in \Omega$  (on utilise encore les inégalités de Harnack et le principe du maximum). Or :

$$R_v^{D_\alpha} + R_{K_{\zeta_0} - v}^{D_\alpha} = R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha} \quad (\text{additivité de la réduite})$$

et

$$R_{K_{\zeta_0}}^{D_\alpha} \leq c'_3 K_{P_\alpha} \left( \frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})} \right) + (K_{\zeta_0} - v) \quad \text{sur } \Omega.$$

D'après (15), on a donc en posant  $\gamma = \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})}$  :

$$c'_1 K_{\zeta_0} \leq (K_{\zeta_0} - v) + c'_3 \gamma K_{\zeta_0} \quad \text{et} \quad v \leq (1 - c'_1 + c'_3 \gamma) K_{\zeta_0},$$

ce qui prouve  $\gamma \geq \frac{c'_1}{c'_3} > 0$ .

Utilisons alors l'inégalité (13) ci-dessus :

$$v(Q) \geq c K_{P_\alpha}(Q) \left( \frac{v(P_{2\alpha})}{K_{P_\alpha}(P_{2\alpha})} \right) \geq c K_{P_\alpha}(Q) \left( \frac{v(P_{2\alpha})}{K_{\zeta_0}(P_{2\alpha})} \right), \quad Q \in \Omega - \bar{B}\left(P_\alpha, \frac{\alpha r}{2}\right)$$

d'où à la limite :  $v(Q) \geq c \frac{c'_1}{c'_3} K_{\zeta_0}(Q), \forall Q \in \Omega$ .

(\*) Ce lemme devient inutile si on remarque que l'inégalité a lieu sur  $\partial D_\alpha$ .

Ainsi toute fonction harmonique  $u > 0$  sur  $\Omega$ , majorée par  $K_{\zeta_0}$  majore une homothétique de  $K_{\zeta_0}$ ; cela suffit, d'après le lemme de décomposition de Riesz, (\*) pour voir que  $K_{\zeta_0}$  est minimale.

V. On a donc établi la première assertion du théorème 2; l'inégalité  $K_{\zeta_1} \geq cK_{\zeta_0}$  pour  $\zeta_1 \in \Delta$  et limite d'une suite de points de  $B(x,r)$  tendant dans  $\mathbf{R}^n$  vers  $y$ , est également établie; le corollaire 3 montre que

$$K_{\zeta_1}(Q) \leq c_2 K_{\zeta_1}(P_\alpha) \mu_\alpha(Q) \quad \text{sur} \quad \Omega - B(y, 2\alpha r)$$

où  $\mu_\alpha$  est la mesure harmonique de  $\partial B(y, 2\alpha r) \cap \Omega$  dans  $\Omega - \bar{B}(y, 2\alpha r)$ ; il s'ensuit que  $K_{\zeta_1}$  reste bornée au voisinage de tout  $z \in \partial\Omega$  distinct de  $y$ , et tend vers 0 au point  $z$ , si  $z$  est de plus régulier.

Quant à la propriété sur les suites  $\{P_k\}$  tendant « non tangentiellement » vers  $y$  dans  $B(x,r)$ , elle découle très facilement des inégalités de Harnack : soient  $P_{\alpha_k}$  la projection de  $P_k$  sur  $\Sigma = ]y, x]$  et  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\limsup \frac{\|P_k - P_{\alpha_k}\|}{\|y - P_k\|} \leq 1 - 2\varepsilon.$$

On a pour  $k$  assez grand :

$$\frac{1}{c} G(P_{\alpha_k}, Q) \leq G(P_k, Q) \leq c G(P_{\alpha_k}, Q), \quad Q \notin T_k$$

où  $T_k$  désigne le cône de révolution de sommet  $y$ , d'axe  $[y, P_{2\alpha_k}]$ , et rayon de base  $4d(P_k, \Sigma)$  ( $c$  dépend de  $\varepsilon > 0$ ); d'où si  $\lim P_k = \zeta_1 \in \Delta$ ,  $K_{\zeta_1} \leq c^2 K_{\zeta_0}$  et finalement  $K_{\zeta_1} = K_{\zeta_0}$ .

*Remarque 5.* — Indiquons, pour terminer cette partie, comment on peut modifier une construction de [1] pour obtenir un domaine plan contenant un angle  $\left\{ z \in \mathbf{C}^* ; |\text{Arg}(z)| < \frac{\varphi}{2} \right\}$ , avec  $0 < \varphi < \pi$ , et tel que la fermeture dans  $\hat{\Omega}$  du segment  $]0, 1]$  contienne une infinité de points de  $\Delta$  (pour  $\varphi < \frac{2\pi}{3}$  la construction de [1] suffit).

(\*) Plus simplement,  $K_{\zeta_0} - v \equiv 0$  puisque cette fonction ne peut majorer  $\varepsilon K_{\zeta_0}, \forall \varepsilon > 0$ .

Posons :  $U_0 = \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; |\text{Arg}'(z)| < \frac{\varphi}{2} \right\}$  et fixons une suite  $\{\rho_k\}_{k \geq 0}$  de réels tels que  $0 < \rho_{k+1} < \frac{1}{4} \rho_k$ . On pose

$$U_1 = \left[ \bigcup_{k \geq 0} \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+1} < |z| < \rho_{2k}, \frac{\varphi}{2} < \text{Arg}'z < \frac{3\pi}{2} \right\} \right] \\ \cup \left[ \bigcup_k \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+2} \leq |z| \leq \rho_{2k+1}, \frac{\varphi}{2} < \text{Arg}'z < \frac{\pi}{2} \right\} \right]$$

et symétriquement :

$$U_2 = \left[ \bigcup_k \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+2} < |z| < \rho_{2k+1}, -\frac{3\pi}{2} < \text{Arg}'z < -\frac{\varphi}{2} \right\} \right] \\ \cup \left[ \bigcup_k \left\{ z \in \mathbf{C}^* ; \rho_{2k+1} \leq |z| \leq \rho_{2k}, -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}'z < -\frac{\varphi}{2} \right\} \right].$$

On prend pour  $\Omega$  la réunion de  $U_0, U_1$  et  $U_2$  et des « trous »

$$T_k = \left\{ \rho_{2k+1} < |z| < 2\rho_{2k+1} ; \text{Arg}'z = \frac{\varphi}{2} \right\} \\ \text{et} \quad T'_k = \left\{ \rho_{2k} < |z| < 2\rho_{2k} ; \text{Arg}'z = -\frac{\varphi}{2} \right\}.$$

On montre alors en reprenant les raisonnements de [1] que si  $\{\rho_k\}$  est assez rapidement décroissante, on aura deux minimales associées à 0,  $u$  et  $v$  telles que  $u(P)$  tend vers 0 quand  $P$  tend vers 0 en restant dans  $U_1$  et  $v(P)$  possède le comportement analogue dans  $U_2$ ; de plus lorsque  $\zeta$  parcourt la trace sur  $\Delta$  de la fermeture dans  $\hat{\Omega}$  de  $]0, 1[ K_\zeta$  décrit le segment  $[u, v]$ .

## 2. Application à l'étude globale de $\hat{\Omega}$ .

On dira que le domaine  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^n$  est admissible s'il existe  $r > 0$  tel que :

1)  $\Omega$  est réunion d'une famille de boules ouvertes de rayon  $r$ .

2) Pour chaque couple  $(B_1, B_2)$  de boules ouvertes de rayon  $r$  contenues dans  $\Omega$  et extérieurement tangentes en  $y \in \partial B_1 \cap \partial B_2$ , il existe  $\vec{u} \neq 0$  orthogonal au diamètre commun de  $B_1$  et  $B_2$  et  $\delta \in ]0, 1[$  tel que  $\Omega$  contient le cône de révolution

$$\mathcal{C} = \{ z \in \mathbf{R}^n ; 0 < \|z - y\| < \delta, \langle z - y, \vec{u} \rangle \leq (1 - \delta) \|z - y\| \|u\| \}.$$

Comme exemples de domaines admissibles, citons d'abord les domaines à courbure bornée de De La Vallée Poussin ; notons aussi l'exemple suivant qui montre qu'un domaine admissible n'est pas nécessairement lipschitzien : soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbf{R}_+$ , positive, et telle que  $f(0) = f'(0) = 0$  ; le domaine de révolution  $\Omega$  de complémentaire

$$\mathbf{C}\Omega = \left\{ x \in \mathbf{R}^n ; x_1 \geq 0, \sqrt{\sum_2^n x_i^2} \leq f(x_1) \right\}$$

est localement admissible (\*).

**THÉOREME 3.** — Si  $\Omega$  est borné et admissible dans  $\mathbf{R}^n$ , l'application identique de  $\Omega$  se prolonge en une homéomorphie  $\psi$  de  $\hat{\Omega}$  sur  $\hat{\Omega}$  ; si 0 est un point de  $\Omega$ , et si  $K$  désigne le noyau de Martin de  $\Omega$  normalisé en 0, pour chaque point  $P$  de  $\partial\Omega$ ,  $K_{\psi(P)}$  est l'unique fonction harmonique  $> 0$  sur  $\Omega$ , égale à 1 en 0, bornée au voisinage de tout  $P' \in \partial\Omega$  distinct de  $P$  et tendant vers zéro en  $P'$  si de plus  $P'$  est régulier pour  $\Omega$ .

*Remarque 6.* — Le théorème s'étend sans difficulté à un domaine  $\Omega$  borné et qui est localement, ou bien admissible ou bien lipschitzien : il suffit d'utiliser pour les points de  $\hat{\Omega}$  tels que  $\Omega$  est lipschitzien au voisinage, les résultats de Hunt et Wheeden ([5], [6]) (voir aussi les techniques de [1]).

*Démonstration.* — a) Soit  $P \in \partial\Omega$  ; considérons deux boules ouvertes  $B_1 = B(M_1, r)$ ,  $B_2 = B(M_2, r)$  contenues dans  $\Omega$ , avec  $P \in \partial B_1$  ( $r$  est un rayon pour lequel  $\Omega$  est admissible). D'après le théorème 2, chaque rayon  $[P, M_i]$  définit une minimale  $K_{\zeta_i}$  ( $\zeta \in \Delta_1, i=1,2$ ) ; si  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ , il existe un segment commun  $]P, M]$  aux deux boules, et d'après le théorème 2, une suite de points  $P_k \in ]P, M]$  avec  $\lim d(P, P_k) = 0$  tend à la fois vers  $\zeta_1$  et vers  $\zeta_2$  dans  $\hat{\Omega}$  ; d'où  $\zeta_1 = \zeta_2$ .

Si  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , on utilise le cône de révolution de la définition de l'admissibilité, et on voit avec les inégalités de Harnack (comme à la fin de la démonstration du théorème 2) qu'une suite  $P_k$  de points de l'axe du cône avec  $\lim d(P, P_k) = 0$  tend à la fois vers  $\zeta_1$  et vers  $\zeta_2$  dans  $\hat{\Omega}$ .

Les différentes boules ouvertes  $B$  de rayon  $r$  contenues dans  $\Omega$  et telles que  $P \in \partial B$  définissent donc un même point  $\psi(P) \in \Delta_1$  ; d'après le

(\*) Pour un domaine de ce type, le théorème 3 est très voisin d'un résultat de H. Kesten concernant les domaines de révolution ([10]).

théorème 2  $K_{\psi(P)}$  tend vers 0 en tout point régulier  $P'$  de  $\partial\Omega$  et est bornée au voisinage de  $P' \in \partial\Omega$ ,  $P' \neq P$  en général. Pour  $P \in \Omega$  on posera  $\psi(P) = P$ ; il est clair que  $\psi$  est injective.

b) Soient  $P \in \partial\Omega$ ,  $\{P_k\}$  une suite de points de  $\bar{\Omega}$  avec  $\lim P_k = P$  dans  $\mathbf{R}^n$ , et  $u$  une valeur d'adhérence de la suite  $K_{\psi(P_k)}$ ; à chaque  $P_k$  on peut associer une boule  $B(M_k, r)$  contenue dans  $\Omega$  avec  $P_k \in \bar{B}(M_k, r)$ ; il est clair que  $\lim d(M_k, P_k) = r$ , et après extraction d'une sous suite on peut supposer que  $M_k$  possède une limite  $M$ . Fixons enfin  $\alpha \in \left]0, \frac{1}{20}\right[$  et posons

$$Q_k = P_k + \alpha \overrightarrow{P_k M_k}, \quad P_\alpha = P + \alpha \overrightarrow{P M}.$$

D'après l'inégalité (14), on a pour  $k$  assez grand :

$$K_{\psi(P_k)} \geq c K_{Q_k} \quad \text{sur} \quad \Omega - B\left(Q_k, \frac{\alpha r}{2}\right).$$

D'où en faisant tendre  $k$  vers l'infini, puis  $\alpha$  vers 0 :

$$(16) \quad u \geq c K_{\psi(P)} \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

D'autre part, d'après le corollaire 3

$$K_{\psi(P_k)} \leq c K_{\psi(P_k)}(Q_k) \mu_k(Q), \quad Q \in \Omega - \bar{B}(P_k, \alpha r)$$

où  $\mu_k$  est la mesure harmonique de  $\partial B(P_k, \alpha r)$  dans  $\Omega - B(P_k, \alpha r)$ ; à la limite,  $\mu$  désignant la mesure harmonique de  $\partial B(P, 2\alpha r)$  dans  $\Omega - B(P, 2\alpha r)$

$$u \leq c u(P_\alpha) \cdot \mu \quad \text{sur} \quad \Omega - \bar{B}(P, 2\alpha r),$$

ce qui prouve que toute valeur d'adhérence  $u$  de la suite  $K_{\psi(P_k)}$  est associée au point  $P$  :  $u$  est bornée au voisinage de  $P' \in \partial\Omega$ ,  $P' \neq P$ , et tend vers 0 en  $P'$  régulier,  $P' \neq P$ .

c) D'après la théorie de Martin, toute minimale  $K_\zeta (\zeta \in \Delta_1)$  est limite d'une suite  $K_{\psi(P_k)}$ ,  $P_k \in \Omega$ ; toute minimale est donc, d'après (16), de la forme  $K_{\psi(P)}$ ,  $P \in \partial\Omega$ .

d) Soient  $P \in \partial\Omega$ ,  $u$  harmonique  $> 0$  associée à  $P$ ; on a la représentation intégrale de Martin :

$$u = \int_{\Delta_1} K_\zeta d\mu(\zeta).$$

Pour tout  $P' \in \partial\Omega$ ,  $P' \neq P$ , et  $B$  boule de centre  $P'$  et rayon  $\frac{1}{2}d(P', P)$ ,  $\hat{R}_u^B$  est un potentiel sur  $\Omega$  et

$$\hat{R}_u^B = \int R_{K_\zeta}^B d\mu(\zeta).$$

$\hat{R}_{K_\zeta}^B$  est donc un potentiel pour  $\mu$ -presque tout  $\zeta$  et

$$\mu\{\psi(P''), P'' \in B \cap \bar{\Omega}\} = 0.$$

Il s'ensuit, en faisant varier  $B$  que  $\mu$  est à support ponctuel  $\psi(P)$  et  $u$  est proportionnelle à  $K_{\psi(P)}$ .

On en déduit alors que  $\psi$  est une homéomorphie de  $\bar{\Omega}$  sur  $\hat{\Omega}$  c.q.f.d.

*Remarque 7.* — A partir des théorèmes 2 et 3, on peut obtenir avec les méthodes de [1] le théorème de Fatou sur l'existence de limites angulaires pour le quotient de deux fonctions harmoniques positives sur  $\Omega$ , pour  $\Omega$  admissible (ou seulement localement « admissible ou lipschitzien »).

*Remarque 8.* — a) On voit facilement avec les méthodes précédentes que si  $y \in \partial\Omega$  ( $\Omega$  domaine de Green) est tel que tout point de  $\Omega$  assez voisin de  $y$  appartient à une boule incluse dans  $\Omega$  et de rayon  $r$  fixe, et tel que la condition 2) de la définition des domaines admissibles soit vérifiée en  $y$ , alors toutes les suites  $(P_k) \subset \Omega$  avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(y, P_k) = 0$  convergent dans  $\hat{\Omega}$  vers une même minimale.

b) Si on suppose  $\Omega$  de Green et que seule la condition 1) de l'admissibilité est vérifiée, on montrera aisément en reprenant la démonstration du théorème 3, qu'à chaque point  $P$  de  $\partial\Omega$  est associé une ou deux minimales. De plus, toute suite  $(P_k)_{k \geq 1} \subset \Omega$  convergente dans  $\hat{\Omega}$ , et telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d(P, P_k) = 0$ , converge dans  $\hat{\Omega}$  vers une combinaison linéaire de ces minimales. Si  $\Omega$  est de plus bornée, toute minimale est ainsi associée à un point de  $\partial\Omega$ .

Par exemple, si  $F$  est une partie fermée arbitraire d'une hypersurface de classe  $C^2$  de  $\mathbf{R}^n$ , (et  $F$  non polaire pour  $n = 2$ , la remarque s'applique à  $\Omega = \mathbf{R}^n - F$  (\*).

(\*) M. Benedicks a établi ce résultat pour le cas d'un hyperplan [11].



### 3. Un critère dans le cas plan.

Les méthodes de la première partie, et les exemples construits dans [1], conduisent au théorème suivant :

THÉOREME 4. — Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux nombres positifs avec  $\varphi + 2\psi \leq 2\pi$ , et soit  $\Omega$  un domaine greenien de  $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$  contenant l'« angle »

$$\left\{ z ; 0 < |z| < 1 ; |\text{Arg}'(z)| < \frac{\varphi}{2} \right\}$$

et contenu dans l'angle  $\left\{ z \in \mathbf{C} ; |\text{Arg}'(z)| < \frac{\varphi}{2} + \psi \right\}$ . Si  $\varphi \geq \psi$ , il n'y a qu'un point de  $\Delta$  adhérent dans  $\hat{\Omega}$  au segment  $\left] 0, \frac{1}{2} \right]$  et ce point est minimal.

Remarquons que le théorème tombe en défaut pour  $\varphi < \psi$  ([1]). En utilisant la transformation  $T(z) = z^\mu$   $\mu = \frac{2\pi}{\varphi + 2\psi}$  dans le plan fendu  $\mathbf{C} - \mathbf{R}^-$ , on est ramené au cas où  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ . Une inversion de pôle 1 et puissance 1 ramène au cas où de plus  $\Omega$  contient tout l'angle  $\left\{ z \in \mathbf{C}^* ; |\text{Arg}'(z)| < \frac{\pi}{3} \right\}$ ; on supposera donc dans toute la suite que  $\Omega$  est de cette forme, et on a alors le lemme suivant analogue au lemme 1 :

LEMME 9. — Sous les hypothèses ci-dessus et désignant par  $G$  la fonction de Green de  $\Omega$  il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall t > 0, \quad \forall P \in \Omega \cap \partial B(0, t), \quad \forall Q \in \mathbf{R}^+, \quad G(P, Q) \leq cG(t, Q).$$

Il suffit de reprendre la démonstration du lemme 1, en remplaçant l'emploi de la symétrie par rapport à l'axe imaginaire par celui des symétries par rapport aux droites  $\text{Arg}'(z) = \pm \frac{\pi}{3}$ .

En adaptant la démonstration du théorème 2, on obtient l'estimation analogue à (7) :

$$\forall P, P' \in ]0, t], \quad \forall Q \in [2t, +\infty[, \quad \frac{G(P, Q)}{G(P, 2t)} \leq c' \frac{G(P', Q)}{G(P', 2t)}.$$

On démontre ensuite le théorème 4 en reprenant les arguments de la démonstration du théorème 2; on voit d'ailleurs que la minimale ainsi obtenue est associée à 0 au sens qu'elle tend vers zéro en tout point frontière régulier de  $\Omega$  distinct de 0, et reste bornée au voisinage de tout  $P \in \partial\Omega$ ,  $P \neq 0$ .

#### 4. Un contre exemple à la conjecture de Martin.

On va voir qu'en prenant dans le plan  $\mathbb{C}$  le domaine

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[ n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4} \right]$$

l'adhérence de  $\Delta_1$  dans  $\hat{\Omega}$  est distincte de  $\Delta$ .

Dans toute la suite on désignera par  $G$  la fonction de Green de  $\Omega$ , par  $K$  le noyau de Martin de  $\Omega$  normalisé en 0, et on posera  $S = \bigcup_{\mathbb{Z}} \left[ n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4} \right]$ . On utilisera le lemme suivant.

LEMME 10. — *Toute fonction harmonique sur  $\Omega$  tendant vers zéro en tout point de  $S$ , et uniformément minorée sur  $\Omega$  est positive. En particulier, si cette fonction est bornée elle est nulle.*

Soit  $\mu_n$  la mesure harmonique de  $\partial B(0, n)$  dans  $B(0, n) - S$ ; d'après le principe du maximum, il suffira de voir que  $\mu_n$  tend simplement vers zéro; or  $\mu_n = 1 - \nu_n$  où  $\nu_n$  est la mesure harmonique de  $S \cap B(0, n)$  dans  $B(0, n) \setminus S$ ; il est clair que  $\{\nu_n\}$  converge en croissant vers la réduite  $R_1^S$ , et  $R_1^S \equiv 1$  puisque sur  $\mathbb{C}$  toute fonction surharmonique positive est constante.

On peut décrire les fonctions harmoniques positives sur  $\Omega$  associées au point à l'infini.

PROPOSITION 11. — *Il existe exactement deux minimales (\*)  $h^+$  et  $h^-$  sur  $\Omega$  tendant vers 0 en tout point de  $S$ ; l'une est bornée sur le demi-plan inférieur, l'autre sur le demi-plan supérieur et  $h^-(x) = h^-(\bar{x})$  ( $x \in \Omega$ ). Enfin, toute fonction  $f$  harmonique  $> 0$  sur  $\Omega$  et nulle sur  $S$  est combinaison linéaire de  $h^+$  et  $h^-$ .*

(\*) Normalisées en 0.

a) Soient  $z = it$ ,  $t \geq 1$ , et  $p \in \mathbf{Z}$ .

On a  $G_z(p) = G(0, p+z)$  par un argument de symétrie. D'après le lemme 1, on a donc :

$$G_z(p) = G_0(p+z) \leq cG_0(z).$$

La fonction  $K_z$  est donc majorée par une constante positive sur  $\mathbf{Z}$ ; les inégalités de Harnack pour les cercles de diamètres  $[n, n+1]$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) montrent alors que  $K_z$  est uniformément majorée sur  $\mathbf{R} \cap \Omega$ , et donc aussi sur tout le demi-plan inférieur. Il s'ensuit que toute valeur d'adhérence de  $K_{it}$  pour  $t$  tendant vers  $+\infty$ , est bornée dans le demi-plan inférieur.

b) Remarquons qu'une inversion de pôle 0 transforme le domaine, en un domaine complémentaire d'un fermé inclus dans  $\mathbf{R}$ ; le théorème 2 montre donc que pour  $t$  tendant vers  $+\infty$ ,  $K_{it}$  tend vers une minimale  $h^+$  bornée sur le demi-plan inférieur; posant  $h^-(z) = h^+(\bar{z})$ ,  $h^-$  et  $h^+$  sont des minimales distinctes, puisqu'elles ne peuvent être bornées sur  $\Omega$ .

Enfin d'après la remarque 8b) (puisque l'inverse de  $\Omega$  vérifie la propriété 1 de l'admissibilité) toute fonction harmonique associée au point à l'infini (c'est-à-dire nulle sur  $S$ ) est combinaison de  $h^+$  et  $h^-$ .

Notons  $\mathcal{F}$  la base de filtre  $\{\Omega \setminus \bar{B}(0, n)\}_{n \geq 1}$ ; comme les éléments de  $\mathcal{F}$  sont connexes, l'ensemble  $F$  des points de  $\Delta$  adhérents à  $\mathcal{F}$  est connexe;  $F$  est contenu dans l'ensemble des fonctions associées au point à l'infini, et contient  $h^+$  et  $h^-$ :  $F$  est donc exactement le segment  $[h^-, h^+]$ .

Observons que  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} K_n = \frac{1}{2}(h^+ + h^-)$ , par raison de symétrie. Si  $\zeta$  est un point de  $\Delta$  limite d'une suite  $\{x_k\}$  convergeant dans  $\mathbf{C}$  vers un point de  $\left[n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4}\right]$  on a d'après les inégalités de Harnack une constante  $c > 0$  telle que :

$$\frac{1}{c} \frac{K_n}{K_n(\alpha_n)} \leq \frac{K_\zeta}{K_\zeta(\alpha_n)} \leq c \frac{K_n}{K_n(\alpha_n)} \quad \text{sur} \quad \partial B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$$

avec  $\alpha_n = n + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}$ .

Cette inégalité a donc lieu également sur  $\Omega \setminus B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ . En l'écrivant

au point 0 (pour  $|n| \geq 2$ ), on voit que  $\frac{1}{c} K_n(\alpha_n) \leq K_\zeta(\alpha_n) \leq c K_n(\alpha_n)$  et finalement

$$\frac{1}{c^2} K_n \leq K_\zeta \leq c^2 K_n \quad \text{sur} \quad \Omega \setminus B\left(n + \frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right).$$

Il s'ensuit que toute fonction harmonique adhérente à ces fonctions  $K_\zeta$  (pour  $|n| \rightarrow \infty$ ) est de la forme  $\lambda h^+ + \mu h^-$ , avec

$$\lambda + \mu = 1, \quad \text{et} \quad \lambda h^+ + \mu h^- \geq \frac{1}{2c^2} (h^+ + h^-).$$

On doit donc avoir  $\lambda \geq \frac{1}{2c^2}$ ,  $\mu \geq \frac{1}{2c^2}$  : on n'obtient donc pas tout le segment  $[h^+, h^-]$ , c'est-à-dire que  $\bar{\Delta}_1$  ne contient pas tout l'ensemble F, ce qui prouve que  $\bar{\Delta}_1 \neq \Delta$ .

*Remarques.* — 1) On obtiendra un exemple analogue dans  $\mathbf{R}^3$  en prenant  $\Omega = \mathbf{R}^3 - S$  où S est la réunion des carrés

$$\left[ n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4} \right] \times \left[ m + \frac{1}{4}, m + \frac{3}{4} \right] \times \{0\}, (n, m) \in \mathbf{Z}^2.$$

Seul le dernier argument du lemme 10 est à modifier :  $\mathbf{R}_1^S$  est surharmonique, invariante par le groupe des translations associé à  $\mathbf{Z}^2 \times \{0\}$  : la mesure associée  $\mu = \Delta \mathbf{R}_1^S$  l'est aussi ; mais il est immédiat que le potentiel newtonien  $\frac{1}{r} * \mu$  d'une telle mesure  $\mu$  est partout infini si  $\mu \neq 0$ .

2) On obtiendra un domaine borné avec  $\bar{\Delta}_1 \neq \Delta$  en prenant la trace sur la boule unité de l'image de  $\Omega$  par l'inversion  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ANCONA, Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien, *Annales de l'Institut Fourier*, 28, 4 (1978), 169-213.
- [2] M. BRELOT, Remarques sur la variation des fonctions harmoniques et les masses associées. Application, *Annales de l'Institut Fourier*, II (1950), 101-111.
- [3] M. BRELOT, Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin, *Annales de l'Université de Grenoble*, 23 (1950).

- [4] L. CARLESON, On the existence of boundary values for harmonic functions of several variables, *Ark. Math.*, 4 (1962).
- [5] R. A. HUNT and R. L. WHEEDEN, On the boundary values of harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 132, n° 2 (1968), 307-322.
- [6] R. A. HUNT and R. L. WHEEDEN, Positive harmonic functions on Lipschitz domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 147 (1970), 507-527.
- [7] H. KESTEN, Positive harmonic functions with zero boundary values, à paraître.
- [8] R. S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 (1941), 137-172.
- [9] C. De La VALLÉE POUSSIN, Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine limité par des surfaces à courbure bornée, *Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 2, vol. 2 (1933), 167-192.
- [10] H. KESTEN, Positive harmonic functions with zero boundary values, *Proc. Symp. Pure maths*, vol XXXV, 1 (1979), 349-352.
- [11] M. BENEDICKS, Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domains of  $\mathbf{R}^n$ , Report n° 5, Inst. Mittag-Leffler, 1978.
- [12] A. ANCONA, Principe de Harnack à la frontière et problèmes de frontière de Martin, Colloque Franco-Danois de Théorie du Potentiel 1979, Springer, à paraître.

Manuscrit reçu le 30 janvier 1979  
révisé le 26 février 1979.

Alano ANCONA,  
E.N.S.E.T.  
61, Avenue du Président Wilson  
94230 Cachan.

---