ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES HELMSTETTER

Radical d'une algèbre symétrique à gauche

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 4 (1979), p. 17-35

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_17_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
29, 4 (1979), 17-35.

RADICAL D'UNE ALGÈBRE SYMÉTRIQUE A GAUCHE

par Jacques HELMSTETTER

On appelle algèbre symétrique à gauche une algèbre dont l'associateur est une application trilinéaire symétrique par rapport aux deux variables de gauche, c'est-à-dire un espace vectoriel A muni d'un produit, application bilinéaire de $A \times A$ dans A, que nous noterons $(a,b) \longmapsto ab$, et qui vérifie l'identité suivante :

$$a(bc) - (ab)c = b(ac) - (ba)c. \tag{1}$$

Si nous posons $[a,b] = ab - ba$, cette condition implique que l'application $(a,b) \longmapsto [a,b]$ est un crochet d'algèbre de Lie.

Si nous posons $ab = L_a(b) = R_b(a)$, cette condition (1) est équivalente à chacune des deux conditions que voici :

$$L_{[a,b]} = [L_a, L_b] \tag{2}$$
$$R_{bc} - R_c R_b = [L_b, R_c]. \tag{3}$$

Je me propose de définir et d'étudier le radical d'une telle algèbre A, lorsqu'elle est de dimension finie sur **C**. Cette hypothèse me permet, d'une part d'utiliser la théorie élémentaire des groupes de Lie, d'autre part de partir d'une définition de ce radical due à Monsieur J.L. Koszul. Cette définition, dont j'expliquerai plus loin les motivations géométriques, m'amène à étudier un certain sous-ensemble Ω de A, qui est le complémentaire d'une hypersurface algébrique ; si l'algèbre A n'est pas associative, je ne connais pas d'autre façon d'exploiter cette définition, que d'étudier le polynôme $D(x)$ dont cette hypersurface est l'ensemble des zéros, ce qui m'oblige à supposer le corps de base algébriquement clos ; si ce corps K n'est pas algébriquement clos, et si K' est sa clôture algébrique, la seule modification à apporter aux résultats énoncés plus loin, est qu'il faut remplacer Ω par l'ensemble des points de $A \otimes K'$ où $D(x)$ ne s'annule pas. On trouvera dans [5] des démonstrations de ces résultats, valables pour tout corps K de caractéristique nulle ; on y trouve une utilisation massive et laborieuse de séries formelles, dont l'existence et l'utilité s'expliquent de façon très naturelle par la théorie élémentaire des groupes de Lie. Toutes ces raisons font que, dans l'étude que j'entreprendrai à la suite de cette introduction, je me placerai dans le cas le plus favorable où le corps de base est $\mathbf{C}$.

On rencontre des structures d'algèbres symétriques à gauche dans divers problèmes de géométrie ; je n'en citerai qu'un seul, parce qu'il me permettra d'introduire des notions utilisées dans la suite ; il s'agit de l'étude des représentations affines de groupes de Lie, avec trajectoire ouverte et groupe d'isotropie discret (pour les points de cette trajectoire), ce qui implique que le groupe de Lie opère dans un espace affine de même dimension. Notez que si l'on connaît la représentation de l'algèbre de Lie du groupe dans cet espace affine, on connaît déjà les points à isotropie discrète, et les points à trajectoire ouverte (pourvu que l'ensemble des composantes connexes du groupe soit dénombrable). C'est pourquoi, étant donné une représentation affine d'une algèbre de Lie, je peux parler des points à trajectoire ouverte, et dire éventuellement que cette algèbre opère transitivement si tous les points sont à trajectoire ouverte.

Revenons à l'algèbre symétrique à gauche A, qui est aussi une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{C}$ (ou $\mathbf{R}$) ; soit G un groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie est A. L'ensemble des opérateurs affines sur l'espace vectoriel A sera identifié avec l'espace vectoriel $\mathrm{A} \oplus \mathrm{End}(\mathrm{A})$; si $a \in \mathrm{A}$ et $f \in \mathrm{End}(\mathrm{A})$, alors (a,f) est l'opérateur affine défini ainsi : $(a,f)(x) = a + f(x)$, pour tout $x \in \mathrm{A}$. Les transformations affines de A forment un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie peut être identifiée avec l'espace vectoriel $\mathrm{A} \oplus \mathrm{End}(\mathrm{A})$ muni du crochet que voici :

$$[(a,f), (b,g)] = (f(b) - g(a), [f, g]).$$

L'identité (2) nous permet de vérifier que l'application $a \longmapsto (a,\mathrm{L}_a)$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie A dans cette algèbre de Lie $\mathrm{A} \oplus \mathrm{End}(\mathrm{A})$. C'est une représentation affine de l'algèbre de Lie A, et elle détermine une représentation affine du groupe de Lie G ; ces représentations seront appelées les *représentations affines canoniques* de A et G dans A.

Pour tout $x \in \mathrm{A}$, considérons l'application

$$a \longmapsto (a,\mathrm{L}_a)(x) = (\mathrm{I}+\mathrm{R}_x)(a) ;$$

son noyau est l'algèbre d'isotropie de x, et son image est l'espace tangent en

x à la trajectoire de x. Soit Ω l'ensemble des $x \in A$ tels que $I + R_x$ soit un endomorphisme bijectif de A ; Ω n'est pas vide puisqu'il contient l'élément nul ; Ω est l'ensemble des points de A à trajectoire ouverte et à groupe d'isotropie discret, pour la représentation affine canonique de G dans A. Le corps de base étant $\mathbf{C}$, Ω est même une trajectoire de G dans A ; si le corps de base était le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, chaque composante connexe de Ω serait une trajectoire de G dans A.

Réciproquement, soit A une algèbre de Lie, et supposons qu'on ait trouvé une représentation affine de A dans un espace affine B, telle qu'un point $y \in B$ ait une algèbre d'isotropie nulle et une trajectoire ouverte ; sans nuire à la généralité des hypothèses, on peut se ramener au cas où B est un espace vectoriel dont l'élément nul est justement ce point y ; la représentation affine de A dans B est alors une application qu'on peut noter $a \longmapsto (\rho(a), \lambda_a)$, avec $\rho(a) \in B$ et $\lambda_a \in \mathrm{End}(B)$; et en outre ρ doit être une application linéaire bijective de A sur B. On peut montrer que si on pose :

$$L_a = \rho^{-1} \circ \lambda_a \circ \rho,$$

alors le produit $(a,b) \longmapsto L_a(b)$ confère à A une structure d'algèbre symétrique à gauche, compatible avec la structure d'algèbre de Lie qui se trouvait initialement sur A.

On retrouve cette construction dans l'étude des domaines homogènes convexes saillants, telle qu'elle est faite par exemple dans [9]. Le corps de base est alors $\mathbf{R}$, et on obtient les algèbres symétriques à gauche vérifiant la propriété suivante : si on appelle Ω_0 la composante connexe de Ω qui contient l'élément nul de A, alors Ω_0 est un ouvert convexe saillant. En particulier il n'existe aucune translation de vecteur non nul qui laisse Ω_0 invariant, et l'absence de telles translations est très importante dans l'étude à laquelle je fais référence. Revenant au cas général, on peut être tenté d'entreprendre l'étude de l'ensemble des vecteurs $a \in A$ tels que $\Omega + a = \Omega$, d'autant plus que cet ensemble est justement le radical de A, lorsque l'algèbre symétrique à gauche A est une algèbre associative.

Par ailleurs, si l'algèbre symétrique à gauche A provient d'un domaine homogène convexe saillant, alors il existe des homomorphismes d'algèbres de Lie s de A dans $\mathbf{R}$, tels que la forme bilinéaire symétrique $(a,b) \longmapsto s(ab)$ soit définie positive ; par exemple $s(a) = \mathrm{tr}\, L_a$; ces formes linéaires s jouent un rôle important dans l'étude à laquelle je fais référence. En outre, si A est une algèbre associative (de dimension finie), on sait que son radical est le noyau de la forme bilinéaire symétrique $(a,b) \longmapsto s(ab)$, s étant la forme linéaire $a \longmapsto \operatorname{tr} L_a$, ou bien $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$. Ces considérations, parmi d'autres, ont amené J.L. Koszul à proposer la définition suivante : *le radical d'une algèbre symétrique à gauche* A est l'ensemble des $a \in A$ tels que $\Omega + a = \Omega$; à partir de cette définition, on peut montrer tout de suite que ce radical est un idéal à gauche de A (ce résultat sera retrouvé dans la suite); cette définition était accompagnée de la conjecture selon laquelle il doit y avoir un rapport entre ce radical et une forme bilinéaire symétrique associée à un homomorphisme d'algèbres de Lie s de A dans le corps de base. Contrairement à ce que laissaient prévoir les études sur les domaines homogènes convexes, ce n'est pas la forme linéaire $a \longmapsto \operatorname{tr} L_a$ qu'il convient d'utiliser en priorité dans le cas général, mais c'est la forme linéaire $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$, qui est aussi un homomorphisme d'algèbres de Lie, puisque de l'identité (3) on déduit tout de suite que $\operatorname{tr} R_{bc} = \operatorname{tr} R_b R_c$. Nous montrerons en effet que ce radical est le plus grand idéal à gauche contenu dans le noyau de la forme linéaire $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$; malheureusement il n'est pas toujours égal au noyau de la forme bilinéaire $(a,b) \longmapsto \operatorname{tr} R_{ab}$; on peut seulement dire qu'il est le plus grand idéal à gauche contenu dans ce deuxième noyau.

Ayant ainsi défini le radical d'une algèbre symétrique à gauche, on voudrait retrouver certaines propriétés des radicaux des algèbres associatives, en particulier le fait que le quotient par le radical est une algèbre à radical nul. Or le radical d'une algèbre symétrique à gauche A n'est pas toujours un idéal bilatère. Néanmoins, si B est un idéal à gauche de A, on peut donner à l'espace vectoriel quotient A/B une structure d'algèbre symétrique à gauche, pourvu que l'on ait trouvé une sous-algèbre de Lie C supplémentaire de B dans A; en effet soient x et $y \in A/B$, et soient a et b les éléments de C dont les images dans A/B sont x et y; par définition le produit xy est l'image de ab dans A/B; ce produit symétrique à gauche sur A/B en fait une algèbre de Lie isomorphe à C. Il me parait raisonnable de conjecturer une espèce de généralisation du théorème de Lévi pour les algèbres symétriques à gauche, disant (entre autres choses) qu'il existe toujours une sous-algèbre de Lie supplémentaire du radical; si ceci est vrai, il est facile de démontrer que le quotient par le radical a un radical nul.

Revenons définitivement au cas où A est une algèbre symétrique à gauche de dimension finie n sur $\mathbf{C}$. Posons $D(x) = \det(I + R_x)$; D est une fonction polynomiale sur A, de degré $\leqslant n$. Le corps de base étant $\mathbf{C}$, les translations qui conservent la trajectoire ouverte Ω, sont aussi les translations qui conservent le polynôme D, parce que Ω est l'ensemble des points qui n'annulent pas D. Nous sommes donc ramenés à l'étude de ce polynôme, que nous appellerons le *polynôme caractéristique* de l'algèbre A. Avant de poursuivre, notons que si l'algèbre A possède un élément neutre à droite e (autrement dit, si $R_e = I$), alors la représentation canonique laisse invariant le point $-e$ (elle est donc isomorphe à la représentation linéaire déterminée par $a \longmapsto L_a$), et le polynôme D est homogène de degré n par rapport à ce point (en effet $D(x-e) = \det R_x$).

L'étude du polynôme D se fera dans deux directions. Tout d'abord nous calculons sa dérivée logarithmique par rapport à un champ de vecteurs X sur A ; on trouve que, en tout point $x \in \Omega$:

$$X.(\mathrm{Log}\, D) = \mathrm{tr}(I + R_x)^{-1} R_{X(x)}. \tag{4}$$

Puisque $D(0) = 1$, on peut définir Log D au moins dans un voisinage de 0 ; cela suffit pour faire le développement en série entière de Log D au point 0. Pour beaucoup d'auteurs qui ont travaillé sur des séries formelles, une série formelle sur l'espace vectoriel A est une forme linéaire sur l'espace vectoriel SA, SA étant l'algèbre symétrique de A, c'est-à-dire l'algèbre associative commutative unifère libre engendrée par A, laquelle est aussi une algèbre graduée : $SA = \oplus S^p A$. C'est ce point de vue que nous adoptons ici ; ainsi à la fonction $\sigma = \mathrm{Log}\, D$, nous associons la forme linéaire σ' sur SA définie comme suit : tout d'abord $\sigma'(1) = \sigma(0) = 0$; ensuite la restriction de σ' à A est la différentielle de σ au point 0 ; puis la restriction de σ' à $S^2 A$, considérée comme forme bilinéaire symétrique sur A, est la hessienne de σ au point 0 ; et plus généralement, si $a_1, a_2, \ldots, a_p \in A$ et si $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_p$ est leur produit dans l'algèbre SA, alors $\sigma'(a_1 \times \ldots \times a_p)$ est la dérivée d'ordre p de σ au point 0 par rapport aux p champs de vecteurs constants et égaux à $a_1, a_2, \ldots, a_p$. On peut démontrer la formule suivante, dans laquelle la sommation est faite sur l'ensemble des permutations w de $\{1,2,\ldots,p\}$:

$$\sigma'(a \times b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_p) = (-1)^p \,\mathrm{tr}(\Sigma R_{b_{w(1)}} R_{b_{w(2)}} \ldots R_{b_{w(p)}} R_a). \tag{5}$$

Cette formule (5) résulte de la formule (4), compte-tenu du fait que la dérivée de $(I + R_x)^{-1}$ au point 0 par rapport aux champs de vecteurs constants $b_1, b_2, \ldots, b_p$ est égale à :

$$(-1)^p \Sigma R_{b_{w(1)}} R_{b_{w(2)}} \ldots R_{b_{w(p)}}.$$

Notre deuxième démarche au sujet de ce polynôme D est la suivante : étant donné $\gamma \in G$ et $x \in A$, si x est dans la trajectoire ouverte, il en est de même de γx, et vice-versa. Donc les fonctions polynomiales $x \longmapsto D(x)$ et

$x \longmapsto D(\gamma x)$ s'annulent aux mêmes points ; et comme γ décrit l'ensemble connexe G, il faut que la seconde reste proportionnelle à la première. Il existe donc une application Δ de G dans **C** telle que :

$$D(\gamma x) = \Delta(\gamma)D(x)$$

quels que soient $\gamma \in G$ et $x \in A$; et on montre facilement que Δ est un homomorphisme de groupes de Lie de G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$. En particulier $D(\gamma 0) = \Delta(\gamma)$.

Soit J l'application de G dans A définie par $\gamma \longmapsto \gamma 0$; sa différentielle en l'élément neutre du groupe G est l'application linéaire de A dans A définie par $a \longmapsto (a,L_a)(0) = a$, c'est-à-dire l'application identique. Par suite, J est un difféomorphisme d'un voisinage de l'élément neutre de G sur un voisinage de l'élément nul de A, et on peut considérer que J *est une carte de la variété différentiable* G *au voisinage de l'élément neutre.* Si Φ est une fonction définie sur G, on peut lui associer une fonction F définie au voisinage de l'élément nul de A, et satisfaisant l'identité $\Phi(\gamma) = F(\gamma 0)$; nous dirons que F représente Φ dans la carte J. L'identité $\Delta(\gamma) = D(\gamma 0)$ montre alors que le polynôme D représente dans la carte J un homomorphisme de groupes de Lie de G dans $\mathbf{C}^*$; quant à $\log D$, il représente dans la carte J un homomorphisme de groupes de Lie de G dans le groupe additif **C**.

A ces homomorphismes de groupes de Lie est associé un homomorphisme d'algèbres de Lie de A dans **C** ; à cause de ce que nous savons de la différentielle de J en l'élément neutre de G, cet homomorphisme d'algèbres de Lie est la différentielle de D au point 0, et d'après la formule (4) c'est l'application $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$.

Inversement, soit s un homomorphisme d'algèbres de Lie (quelconque) de A dans **C** ; on peut lui associer un homomorphisme de groupes de Lie S de G dans le groupe additif **C** ; dans la carte J cette fonction S peut être représentée par une fonction σ, que l'on peut développer en série entière au point 0, ce qui nous permet de définir une forme linéaire σ' sur SA, comme il a été expliqué plus haut. Il est clair que $\sigma'(1) = \sigma(0) = 0$ et que $\sigma'(a) = s(a)$ si $a \in A$.

Il est facile de connaître les images par J des champs de vecteurs invariants à droite sur G ; ceux-ci sont les transformations infinitésimales associées aux translations à gauche sur G ; celles-ci correspondent grâce à J aux transformations affines $x \longmapsto \gamma x$ (où $x \in A$) ; et les transformations infinitésimales qui leur sont associées sont les champs de vecteurs affines Y_a définis ainsi :

$$Y_a(x) = (a,L_a)(x) = (I+R_x)(a), \qquad \text{si} \quad a \text{ et } x \in A.$$

Puisque la dérivée de S par rapport à tout champ de vecteurs invariant à droite sur G est une constante, en tout point x où σ est défini, on a :

$$(6) \qquad Y_a.\sigma = s(a).$$

Cependant on peut aussi faire opérer le champ de vecteurs Y_a sur les séries formelles ; ainsi on peut écrire :

$$(Y_a.\sigma')(b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_p) = \sigma'(a \times b_1 \times \ldots \times b_p) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \sigma'(b_1 \times \ldots \times ab_i \times \ldots \times b_p).$$

De la formule (6) on déduit la formule suivante (où $p \geqslant 1$) :

$$(7) \quad \sigma'(a \times b_1 \times \ldots \times b_p) = - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \sigma'(b_1 \times \ldots \times ab_i \times \ldots \times b_p) ;$$

elle permet de calculer par récurrence les valeurs de σ' sur les sous-espaces S^pA, à partir de $\sigma'(a) = s(a)$.

Enfin, la formule (6) peut encore s'écrire :

$$d\sigma \circ (I+R_x) = s, \qquad \text{ou bien} \qquad d\sigma = s \circ (I+R_x)^{-1}.$$

Connaissant la dérivée de $(I+R_x)^{-1}$ au point 0 par rapport aux champs de vecteurs constants $b_1, b_2, \ldots, b_p$, nous en déduisons :

$$(8) \quad \sigma'(a \times b_1 \times \ldots \times b_p) = (-1)^p \; s(\Sigma R_{b_{w(1)}} R_{b_{w(2)}} \ldots R_{b_{w(p)}}(a)),$$

avec les mêmes notations que pour la formule (5).

La conclusion de ces calculs est que σ' vérifie les formules (7) et (8) dans tous les cas, et la formule (5) dans le cas où s est l'homomorphisme d'algèbres de Lie tel que $s(a) = \operatorname{tr} R_a$ pour tout $a \in A$. Je signale que l'on peut déduire (5) de (8), ou vice-versa, grâce à la formule suivante, qui est une conséquence de (3) :

$$\operatorname{tr}((I+R_x)^{-1}R_a) = \operatorname{tr} R_{(I+R_x)^{-1}(a)}.$$

Nous appelons N l'ensemble des $a \in A$ tels que $\sigma'(a \times z) = 0$ pour tout $z \in SA$; autrement dit, N est l'ensemble des a tels que toute translation de vecteur parallèle à a conserve la fonction σ. Puisque l'ensemble des translations qui conservent un polynôme est un sous-espace vectoriel, dans le cas où s est l'homomorphisme $a \to \operatorname{tr} R_a$, on peut dire plus simplement que N est l'ensemble des $a \in A$ tels que la translation de vecteur a conserve le polynôme caractéristique $D = \exp \sigma$; dans ce cas N est donc le radical de l'algèbre symétrique à gauche A. Pour tout entier $p \geqslant 0$, nous appelons M_p l'ensemble des $a \in A$ tels que

$$\sigma'(a \times b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_p) = 0,$$

quels que soient $b_1, b_2, \ldots, b_p \in A$. Ainsi M_0 est le noyau de s, et M_1 est le noyau de la forme bilinéaire $(a,b) \to s(ab)$; il est clair que N est l'intersection de tous les M_p. Nous appelons encore N_p l'intersection de $M_0, M_1, \ldots, M_p$.

(9) LEMME. — *Pour tout* $p \geqslant 1$, N_p *est l'ensemble des* $a \in N_{p-1}$ *tels que* $ba \in N_{p-1}$ *pour tout* $b \in A$.

Démonstration. — La formule (7) permet d'écrire :

$$\sigma'(a \times b_1 \times \cdots \times b_p) = -\sigma'(b_p a \times b_1 \times \cdots \times b_{p-1}) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p-1} \sigma'(a \times b_1 \times \cdots \times b_p b_i \times \cdots \times b_{p-1}).$$

Si $a \in N_{p-1}$, on en tire :

$$\sigma'(a \times b_1 \times \cdots \times b_p) = -\sigma'(b_p a \times b_1 \times \cdots \times b_{p-1}),$$

ce qui montre que a est dans N_p si et seulement si $b_p a$ est dans N_{p-1} quel que soit $b_p \in A$.

De ce premier résultat on déduit facilement les trois corollaires suivants :

(10) COROLLAIRE. — *Le sous-espace* N *est le plus grand idéal à gauche qui est contenu dans* N_0, *noyau de* s.

(11) COROLLAIRE. — *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

$N_p = N$
$N_p = N_{p+1}$
N_p *est un idéal à gauche.*

(12) COROLLAIRE. — *Il existe un entier* $p < n$ *tel que* $N = N_p$.

Continuons notre investigation :

(13) LEMME. — *Pour tout* $p \geqslant 1$, M_p *et* N_p *sont des sous-algèbres symétriques à gauche de* A.

Démonstration. — Soient a_1 et $a_2 \in \mathrm{M}_p$; nous voulons démontrer que $a_1 a_2 \in \mathrm{M}_p$; deux applications de la formule (7) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\sigma'(a_1 \times a_2 \times b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_p) \\
&\quad = -\sigma'(a_1 a_2 \times b_1 \times \cdots \times b_p) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \sigma'(a_2 \times b_1 \times \cdots \times a_1 b_i \times \cdots \times b_p) \\
&\quad = -\sigma'(b_p a_1 \times a_2 \times b_1 \times \cdots \times b_{p-1}) - \sigma'(a_1 \times b_p a_2 \times b_1 \times \cdots \times b_{p-1}) \\
&\qquad - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p-1} \sigma'(a_1 \times a_2 \times b_1 \times \cdots \times b_p b_i \times \cdots \times b_{p-1}).
\end{aligned}$$

L'égalité des deux derniers membres donne :

$$\sigma'(a_1 a_2 \times b_1 \times \cdots \times b_p) = 0$$

car tous les autres termes sont nuls. C'est pourquoi $a_1 a_2 \in \mathrm{M}_p$.

Pour démontrer que N_p est une sous-algèbre de A, on prend a_1 et a_2 dans N_p et on examine les quantités $\sigma'(a_1 a_2 \times b_1 \times \cdots \times b_q)$ telles que $0 \leqslant q \leqslant p$; si $q \geqslant 1$, le calcul précédent reste valable ; mais si $q = 0$, on écrit $\sigma'(a_1 a_2) = -\sigma'(a_1 \times a_2) = 0$.

(14) Corollaire. — *Si* $p \geqslant 1$ *et si* $q \geqslant 1$, *alors*

$$\sigma'(a_1 \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times b_p) = 0$$

chaque fois que $a_1, a_2, \ldots, a_q \in \mathrm{M}_p$.

Démonstration. — Nous procédons par récurrence sur q ; si $q = 1$, il n'y a rien à démontrer. Pour passer de q à $q + 1$, on écrit :

$$\begin{aligned}
&\sigma'(a_1 \times \cdots \times a_{q+1} \times b_1 \times \cdots \times b_p) \\
&\quad = - \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \sigma'(a_1 \times \cdots \times a_{q+1} a_j \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times b_p) \\
&\qquad - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \sigma'(a_1 \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times a_{q+1} b_i \times \cdots \times b_p).
\end{aligned}$$

Puisque $a_{q+1} a_j \in \mathrm{M}_p$, l'hypothèse de récurrence nous donne :

$$\sigma'(a_1 \times \cdots \times a_{q+1} \times b_1 \times \cdots \times b_p) = 0.$$

Nous pouvons maintenant commencer à énoncer les résultats qui constituent le but de cette étude :

(15) Proposition. — *Quels que soient* a *et* $x \in \mathrm{A}$, *et* p *entier* $\geqslant 1$, *on a :*

$$\operatorname{tr}((\mathrm{R}_x)^p \mathrm{R}_a) = \operatorname{tr} \mathrm{R}_{(\mathrm{R}_x)^p(a)}.$$

Soit M_p *l'ensemble des* $a \in A$ *tels que la valeur commune de ces deux membres soit nulle pour tout* $x \in A$; M_p *est une sous-algèbre symétrique à gauche de* A ; *et pour tout* $a \in M_p$, R_a *est un endomorphisme nilpotent de* A.

Démonstration. — Nous supposons que s est ici l'homomorphisme $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$. En notant x^p la puissance p-ième de x dans l'algèbre SA, on peut écrire les égalités suivantes, qui proviennent de (5) et (8) :

$$\sigma'(a \times x^p) = (-1)^p p\,!\operatorname{tr}(R_x^p R_a) = (-1)^p p\,!\,s(R_x^p(a)).$$

On en déduit l'égalité écrite dans la proposition (15), et le fait que les ensembles M_p qui interviennent dans cette proposition sont aussi ceux qui interviennent dans le lemme (13). Le seul résultat nouveau est le fait que R_a est nilpotent si $a \in M_p$. Or pour tout entier $r > p$ on peut écrire $\sigma'(a^r) = 0$, parce que $\sigma'(a^r) = \sigma'(a^{r-p} \times a^p)$ et on peut alors appliquer le corollaire (14). Or d'après (5), $\sigma'(a^r) = \pm (r-1)\,!\operatorname{tr} R_a^r$; il en résulte que toutes les puissances de R_a d'exposant $> p$ ont une trace nulle, ce qui n'est possible que si R_a est nilpotent.

Il résulte de la proposition (14) que si s est l'homomorphisme $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$, alors toutes les sous-algèbres M_p sont contenues dans M_0, noyau de s, si bien que pour tout $p \geqslant 1$ on a :

$$N_p = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_p.$$

Cette propriété n'est pas toujours vraie si s est l'homomorphisme $a \longmapsto \operatorname{tr} L_a$. Je signale encore que si l'algèbre A possède un élément neutre à gauche ou à droite, on déduit de la formule (7) ou (8) que $M_p \subset M_{p-1}$, quel que soit l'homomorphisme s, ce qui implique $N_p = M_p$.

La proposition suivante constitue une synthèse des résultats obtenus jusqu'à présent au sujet du radical de l'algèbre A, et elle ne nécessite aucune démonstration nouvelle.

(16) Proposition. — *Dans toute algèbre symétrique à gauche* A *de dimension n sur* $\mathbf{C}$, *il existe un idéal à gauche* $\mathscr{R}(A)$, *appelé radical de* A, *qui est défini par chacune des* 4 *propriétés suivantes :*

a) Le radical est l'ensemble des $a \in A$ *tels que la translation de vecteur* a *conserve la trajectoire ouverte* Ω *de la représentation affine canonique de* G *dans* A.

b) Le radical est l'ensemble des $a \in A$ *tels que la translation de vecteur* a *conserve le polynôme caractéristique* $D(x) = \det(I + R_x)$.

c) Le radical est le plus grand idéal à gauche contenu dans le noyau de la forme linéaire $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$.

d) Le radical est l'intersection des sous-algèbres M_p *définies dans la proposition* (15); *on peut préciser qu'il existe un entier* $p < n$ *tel que* $\mathscr{R}(A) = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_p$.

Par analogie avec le cas des algèbres associatives, on peut poser la définition suivante :

(17) Définition. — *Une algèbre symétrique à gauche* A *est dite nilpotente si pour tout* $a \in A$, *la multiplication à droite* R_a *est nilpotente.*

Si B est un idéal à gauche de A, pour que B soit une algèbre nilpotente, il faut et il suffit que, pour tout $a \in B$, R_a soit un endomorphisme nilpotent de A tout entier; car $R_a(A) \subset B$. Tout idéal à gauche nilpotent de A est donc contenu dans le noyau de la forme linéaire $a \longmapsto \operatorname{tr} R_a$, et par conséquent il est contenu dans $\mathscr{R}(A)$. D'après les propositions (15) et (16, alinéa *d*), $\mathscr{R}(A)$ est lui-même un idéal à gauche nilpotent. Nous pouvons donc énoncer :

(18) Proposition. — *Le radical d'une algèbre symétrique à gauche (de dimension finie sur* $\mathbf{C}$) *est le plus grand idéal à gauche nilpotent.*

Nous allons maintenant établir une propriété du radical dans laquelle interviennent tous les homomorphismes s de l'algèbre de Lie A dans l'algèbre de Lie $\mathbf{C}$. Je rappelle les notations : à un tel homomorphisme s est associé un homomorphisme S du groupe de Lie G dans le groupe additif $\mathbf{C}$; grâce à la carte J, on peut représenter S par une fonction analytique σ définie dans un voisinage de l'élément nul de A.

(19) Proposition. — *La restriction de* σ *à tout sous-espace affine de* A *parallèle à* $\mathscr{R}(A)$ *(c'est-à-dire de la forme* $x + \mathscr{R}(A)$, x *étant assez voisin de* 0), *est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à* n; *son degré est même strictement inférieur à* n *si* A *n'est pas nilpotente.*

Démonstration. — Nous utilisons encore σ', forme linéaire sur SA, qui représente le développement en série entière de σ au point 0; nous démontrerons que $\sigma'(a_1 \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times b_p) = 0$, chaque fois que $a_1, a_2, \ldots, a_q \in \mathscr{R}(A)$, avec $q > n$ (et même $q \geqslant n$ si A n'est pas nilpotente), et quels que soient $b_1, b_2, \ldots, b_p \in A$, avec $p \geqslant 0$. Soit r la dimension de $\mathscr{R}(A)$. Nous commençons par montrer que $\sigma'(a^q) = 0$, chaque fois que $a \in \mathscr{R}(A)$ et $q > r$, ce qui signifie que la restriction de σ à

$\mathscr{R}(A)$ est un polynôme de degré $\leqslant r$. D'après la formule (8) :

$$\sigma'(a^q) = (-1)^{q-1}(q-1)!\ \ s(R_a^{q-1}(a)),$$

et puisque R_a est nilpotent, la restriction de R_a^{q-1} à $\mathscr{R}(A)$ est nulle dès que $q-1 \geqslant r$, de telle sorte que $\sigma'(a^q) = 0$.

Si l'algèbre A est nilpotente, la démonstration est terminée : σ est un polynôme de degré $\leqslant n$; et il est facile de vérifier que σ est effectivement de degré n lorsque A est une algèbre nilpotente de dimension 1 (donc une algèbre à produit nul) et que s est non nul.

Si l'algèbre A n'est pas nilpotente, nous démontrons l'égalité

$$\sigma'(a_1 \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times b_p) = 0$$

par récurrence sur p. Si $p = 0$, nous déduisons de ce qui précède que cette égalité est vraie chaque fois que $q > r$, donc chaque fois que $q \geqslant n$. Si $p = 1$, il nous suffit de démontrer que $\sigma'(a^q \times b) = 0$ chaque fois que $q \geqslant n$ et $a \in \mathscr{R}(A)$, et pour cela nous appliquons encore (8) :

$$\sigma'(a^q \times b) = (-1)^q q!\ \ s(R_a^q(b)) = 0.$$

Pour passer de p à $p+1$, (avec $p \geqslant 1$), nous appliquons la formule (7) :

$$\begin{aligned}\sigma'(a_1 \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times b_{p+1})& \\ = - \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} & \sigma'(a_1 \times \cdots \times b_{p+1}a_j \times \cdots a_q \times b_1 \times \cdots \times b_p) \\ - \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} & \sigma'(a_1 \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times b_{p+1}b_i \times \cdots \times b_p).\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence, et le fait que $\mathscr{R}(A)$ est un idéal à gauche, nous donnent $\sigma'(a_1 \times \cdots \times a_q \times b_1 \times \cdots \times b_{p+1}) = 0$.

Remarque. — $\mathscr{R}(A)$ est la réunion de tous les sous-espaces vectoriels B tels que les fonctions σ aient une restriction polynomiale aux sous-espaces affines parallèles à B ; en effet, parmi les fonctions σ, figure la fonction Log D, et pour que sa restriction à un sous-espace affine soit polynomiale, il faut qu'elle soit constante.

A partir de maintenant, nous n'aurons plus besoin d'utiliser les séries formelles σ', et j'en profite pour interrompre l'exposé de cette théorie par l'examen de quelques exemples que j'ai choisis, afin de montrer d'abord que le radical n'est pas toujours un idéal bilatère, et ensuite qu'il n'est pas toujours égal au noyau de la forme bilinéaire $(a,b) \longmapsto \operatorname{tr} R_{ab}$ (ce noyau est la sous-algèbre M_1 selon les notations de la proposition (15)).

Nous partons d'une algèbre symétrique à gauche A (qui peut être associative), et nous posons $B = \operatorname{End}(A) \oplus A$; nous pouvons donner à l'espace vectoriel B une structure d'algèbre symétrique à gauche avec le produit suivant :

$$(f,a).(g,b) = (fg + [L_a, g],\ ab + f(b) + g(a)),$$

lorsque a et $b \in A$, et f et $g \in \operatorname{End}(A)$. Il n'y a aucune difficulté à vérifier, d'abord que ce produit est symétrique à gauche, et ensuite que l'application $(f,a) \longmapsto (f + L_a, a)$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie B sur le produit direct des algèbres de Lie End(A) et A. L'algèbre symétrique à gauche B possède un élément neutre à gauche et à droite, à savoir (I,0) ; la représentation affine canonique de B dans B est donc isomorphe à une représentation linéaire (car elle laisse le point $(-\mathrm{I},0)$ invariant). Si on appelle D_A et D_B les polynômes caractéristiques des algèbres A et B, il est possible de démontrer que :

$$D_B(f,a) = (\det(I+f))^{n+1} D_A((I+f)^{-1}(a)).$$

Nous voulons connaître $\mathscr{R}(B)$, et nous pouvons commencer par chercher la sous-algèbre $M_1(B)$. Après quelques calculs, on aboutit au résultat suivant : si pour tout $a \in A$ on appelle φ_a l'endomorphisme de A défini ainsi :

$$\varphi_a(x) = \frac{-1}{n+1} (\operatorname{tr} R_x) a,$$

alors $M_1(B)$ est l'ensemble des (φ_a, a), avec $a \in M_1(A)$. Si l'algèbre A est nilpotente, $M_1(B)$ est l'ensemble des $(0,a)$, avec $a \in A$, et comme cet ensemble est un idéal à gauche de B, c'est le radical. Si l'algèbre nilpotente A n'est pas une algèbre à produit nul, on remarque que $\mathscr{R}(B)$ n'est pas un idéal bilatère de B.

Passons au cas où l'algèbre A n'est pas nilpotente. Dans ce cas $\mathscr{R}(B) = 0$, parce que tout idéal à gauche contenu dans $M_1(B)$ est réduit à 0. En effet, si $\mathscr{R}(B)$ contenait un élément (g,b) non nul, alors $b \neq 0$ (car $g = \varphi_b$); puisque $(f,0).(g,b) = (fg, f(b))$, pour tout $a \in A$ il devrait exister un élément de $\mathscr{R}(B)$ de la forme $(\ldots, a)$; or c'est impossible (car $M_1(A) \neq A$). Par conséquent $\mathscr{R}(B) = 0$; et pourtant il peut arriver que

$0 \neq M_1(A) \neq A$, ce qui implique que $\mathscr{R}(B) \neq M_1(B)$. Je signale cependant que $M_2(B) = 0$, si l'algèbre A n'est pas nilpotente.

Le fait que $\mathscr{R}(B) = 0$, signifie qu'aucune translation non nulle ne laisse le polynôme D_B invariant. Le fait que $M_1(B) \neq 0$, signifie que la hessienne de ce polynôme est partout dégénérée ; en effet la hessienne de Log D_B au point 0 a pour noyau $M_1(B)$, et puisque $M_1(B) \subset M_0(B)$, le noyau de la hessienne de D_B en ce point contient $M_1(B)$; comme il existe un groupe de transformations affines de B, qui laisse D_B invariant à une constante multiplicative près, et qui envoie le point 0 sur une trajectoire ouverte, la hessienne de D_B est dégénérée en tout point de B. Par conséquent, si $0 \neq M_1(A) \neq A$, le polynôme $D_B(f - I, A) = (\det f)^{n+1} D_A(f^{-1}(a))$ est homogène de degré $n(n+1)$, sa hessienne est dégénérée en tout point, et pourtant aucune translation non nulle ne le laisse invariant ; ce type de dégénérescence non triviale méritait sans doute d'être relevé.

Je termine cet exposé par des considérations sur les algèbres symétriques à gauche nilpotentes de dimension finie sur **C** (ou éventuellement sur un autre corps de caractéristique nulle). Tout point d'une telle algèbre a une trajectoire ouverte et une algèbre d'isotropie nulle pour la représentation affine canonique. L'étude de ces algèbres, lorsque le corps de base est **C**, équivaut à l'étude des groupes de Lie qui opèrent par transformations affines dans un espace vectoriel de façon simplement transitive ; en effet, si un groupe de Lie connexe opère de façon transitive avec isotropie discrète dans une variété simplement connexe, son action doit y être simplement transitive.

(20) PROPOSITION. — *Si* A *est une algèbre symétrique à gauche nilpotente, l'algèbre de Lie* A *est résoluble.*

Démonstration. — Si l'algèbre de Lie A n'était pas résoluble, elle contiendrait une sous-algèbre de Lie semi-simple S non réduite à 0 ; toute représentation affine de S est équivalente à une représentation linéaire (elle laisse un point invariant) ; donc pour la représentation affine canonique de A dans A, il y aurait un point de A dont la sous-algèbre de stabilité contiendrait S ; ceci est impossible, car tout point de A a une sous-algèbre de stabilité réduite à 0.

Dans la proposition (20), on ne peut pas conclure que l'algèbre de Lie A est nilpotente ; en effet, une algèbre de Lie non abélienne de dimension 2 (résoluble mais non nilpotente) peut recevoir une structure d'algèbre symétrique à gauche nilpotente.

(21) COROLLAIRE. — *Quelle que soit l'algèbre symétrique à gauche* A (*de dimension finie*), *il est impossible que l'algèbre de Lie* A *soit égale à l'algèbre de Lie dérivée* $[A,A]$.

Démonstration. — Si A était égale à $[A,A]$, tout homomorphisme d'algèbres de Lie de A dans le corps de base serait nul ; en particulier $\operatorname{tr} R_a = 0$ pour tout $a \in A$, ce qui impliquerait $\mathscr{R}(A) = A$. D'après la proposition (20), l'algèbre de Lie A serait résoluble, ce qui est impossible si $A = [A,A]$.

Remarque. — Il est facile d'exhiber une algèbre symétrique à gauche X de dimension infinie telle que $X = [X,X]$; pensez à l'algèbre des champs de vecteurs sur un espace vectoriel (ou sur toute autre variété différentiable de torsion et courbure nulles), le produit symétrique à gauche étant la dérivation covariante.

Pour beaucoup d'algèbres nilpotentes A que je connais, j'ai observé que les matrices des endomorphismes R_a peuvent être triangularisées dans une même base de A ; autrement dit, la sous-algèbre associative engendrée par les R_a dans End(A) est nilpotente ; cette observation peut justifier la définition suivante :

(22) DÉFINITION. — *Pour toute algèbre symétrique à gauche* A, *et pour tout entier* $p \geqslant 0$, *on appelle* $C_p(A)$ *l'intersection des noyaux de tous les endomorphismes* $R_{a_1}R_{a_2} \ldots R_{a_p}$ (*avec* $a_1,a_2,\ldots,a_p \in A$) *et* $D_p(A)$ *la somme de leurs images. En particulier* $C_0(A) = 0$ *et* $D_0(A) = A$. *Les* $C_p(A)$ *forment une suite croissante, dont la réunion est notée* $C_\infty(A)$; *les* $D_p(A)$ *forment une suite décroissante, dont l'intersection est notée* $D_\infty(A)$.

Il est immédiat que l'égalité $C_p(A) = C_{p+1}(A)$ implique $C_p(A) = C_\infty(A)$, et que l'égalité $D_p(A) = D_{p+1}(A)$ implique $D_p(A) = D_\infty(A)$. L'intérêt de ces deux suites provient des deux propositions suivantes :

(23) PROPOSITION. — *Les* $C_p(A)$ *et les* $D_p(A)$ *sont des idéaux bilatères de* A.

Démonstration. — Il est manifeste que ce sont des idéaux à droite. Pour montrer que ce sont des idéaux à gauche, considérons la sous-algèbre associative B engendrée par les R_a, et l'idéal B^p de B engendré par les produits de p éléments de B ; il est manifeste que $C_p(A)$ est l'intersection des noyaux de tous les éléments de B^p, et que $D_p(A)$ est la somme de leurs images. Or la formule (3) implique que $[L_b,B] \subset B$, quel que soit $b \in A$; et par suite $[L_b,B^p] \subset B^p$, ce qui permet d'achever la démonstration.

(24) PROPOSITION. — *Les 4 assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $C_\infty(A) = A$.

(2) $D_\infty(A) = 0$.

(3) *Il existe une suite croissante* $(F_0,F_1,\ldots,F_k)$ *de sous-espaces vectoriels de* A *tels que* $F_0 = 0$, $F_k = A$, *et* $F_p.A \subset F_{p-1}$ *pour tout* $p = 1, 2, \ldots, k$.

(4) *La sous-algèbre associative engendrée par les* R_a *est nilpotente.*

Démonstration. — Il est immédiat que (1) et (2) impliquent (3), et que (3) est équivalent à (4). Pour montrer que (3) implique (1) et (2), il suffit de montrer, par récurrence sur p, que si il existe une suite $(F_0,\ldots,F_k)$ vérifiant les conditions requises, alors $F_p \subset C_p(A)$ et $F_{k-p} \supset D_p(A)$.

Il n'est malheureusement pas vrai que toutes les algèbres symétriques à gauche nilpotentes vérifient les propriétés énoncées dans la proposition (24) ; voici un contre-exemple, que j'ai pu construire à partir d'un article de L. Auslander (voir [1]) ; il s'agit d'une algèbre de dimension 3, engendrée (en tant qu'espace vectoriel) par 3 éléments a, b, c, qui se multiplient deux à deux de la façon suivante :

$$aa = bb = cc = ba = ca = 0\,;$$
$$bc = cb = a\,; \qquad ab = b\,; \qquad ac = -c\,.$$

Mais on peut démontrer, ou espérer démontrer, que les propriétés énoncées dans (24) sont vraies avec chacune des 3 hypothèses plus fortes que voici :

(25-1) L'algèbre A est associative (ou au moins symétrique à gauche et à droite) et nilpotente.

(25-2) L'algèbre symétrique à gauche A est nilpotente, et telle que les multiplications L_a et R_a sont des dérivations d'algèbre de Lie.

(25-3) L'algèbre symétrique à gauche A est nilpotente et l'algèbre de Lie sous-jacente est nilpotente.

Pour chacune de ces 3 hypothèses, il suffit de savoir démontrer que $C_1(A) \neq 0$, pourvu que $A \neq 0$; en effet, $C_{p+1}(A)$ est l'image réciproque de $C_1(A/C_p(A))$ par l'homomorphisme canonique $A \to A/C_p(A)$; si $C_p(A) \neq A$, l'algèbre $A/C_p(A)$ n'est pas réduite à 0 et satisfait celle des

3 hypothèses (25) imposée à A ; donc $C_1(A/C_p(A)) \neq 0$, et par suite $C_p(A) \neq C_{p+1}(A)$; donc il existe p tel que $C_p(A) = A$. Il résulte immédiatement du théorème de Engel que l'hypothèse (25-1) implique $C_1(A) \neq 0$ si $A \neq 0$.

Les algèbres symétriques à gauche A dans lesquelles les multiplications L_a et R_a sont des dérivations d'algèbre de Lie, sont celles où $(ab)c = (cb)a$, quels que soient $a, b, c \in A$; A. Medina (voir [7]) a montré que si une telle algèbre est nilpotente et non réduite à 0, alors $C_1(A) \neq 0$. Il aboutit au résultat final suivant : une algèbre symétrique à gauche où les multiplications sont des dérivations d'algèbre de Lie, est somme directe des idéaux bilatères $C_\infty(A)$ et $D_\infty(A)$; le second est une algèbre commutative, associative et unifère, et le premier est évidemment une algèbre nilpotente.

Avant de parler de (25-3), je vais donner une interprétation géométrique de $C_1(A)$; $C_1(A)$ est le noyau de la représentation linéaire $a \longmapsto L_a$; à la représentation affine canonique $a \longmapsto (a,L_a)$ est associée une représentation affine d'un groupe de Lie G simplement connexe, pour laquelle la trajectoire de 0 est l'espace A tout entier (parce que l'algèbre A est supposée nilpotente), ce qui implique que l'action de G dans A est simplement transitive ; $C_1(A)$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe des éléments de G qui opèrent dans A par translation. Or il y a quelques années, L. Auslander faisait la conjecture suivante : si un groupe de Lie *nilpotent* opère de façon simplement transitive dans un espace vectoriel par transformations affines, il contient dans son centre un sous-groupe de dimension non nulle qui opère par translations. Cette conjecture aurait été ensuite démontrée par J. Scheunemann (voir [8]) ; malheureusement, sa démonstration ne m'a pas convaincu.

Il m'a paru utile de faire ici la synthèse de quelques résultats éparpillés dans [1] et [8], en les complétant et en améliorant les démonstrations :

(26) PROPOSITION. — *Soit* A *une algèbre symétrique à gauche; les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout* $a \in A$, L_a *est nilpotent.*

(2) *L'algèbre symétrique à gauche* A *est nilpotente et l'algèbre de Lie* A *est nilpotente.*

(3) *L'algèbre symétrique à gauche* A *est nilpotente, et dans le groupe des transformations affines de* A *il existe un sous-groupe algébrique dont l'algèbre de Lie est celle formée par les opérateurs affines* (a,L_a).

Démonstration. — Nous utilisons l'homomorphisme canonique de l'algèbre de Lie des opérateurs affines (a,f) de A dans l'algèbre de Lie des endomorphismes de $K \times A$ (K étant le corps de base); à (a,f) nous associons φ tel que $\varphi(t,x) = (0, ta+f(x))$ si $t \in K$ et $x \in A$. Nous notons φ_a l'endomorphisme de $K \times A$ ainsi associé à (a,L_a).

Nous montrons d'abord que (1) implique (2) et (3). Si L_a est nilpotent, alors φ_a est nilpotent; or l'application $a \longmapsto \varphi_a$ est une représentation linéaire fidèle de l'algèbre de Lie A ; cette algèbre est donc nilpotente. Il est bien connu qu'à l'algèbre de Lie d'endomorphismes nilpotents φ_a est associé un sous-groupe algébrique de transformations linéaires ; ces transformations laissent invariant l'hyperplan affine $1 \times A$, et déterminent un sous-groupe algébrique de transformations affines de A, dont l'algèbre de Lie est celle des (a,L_a). Notons encore que la trace de L_a est nulle pour tout $a \in A$, celle de $L_a - R_a$ aussi (car l'algèbre de Lie A est nilpotente), donc celle de R_a aussi ; par suite l'algèbre symétrique à gauche A est nilpotente.

Montrons ensuite que (2) implique (1). Si l'algèbre de Lie A est nilpotente, on peut décomposer $K \times A$ en somme directe de deux sous-espaces U et V, invariants par tous les φ_a, tels que : d'une part la restriction à U de tous les φ_a est nilpotente, d'autre part la restriction à V d'au moins un φ_a est bijective (voir [2], chap. VII, § 1, n° 3; ou [6], chap. II, § 4); puisque $\varphi_a(K \times A) \subset 0 \times A$, il faut que $V \subset 0 \times A$; donc l'intersection de U avec l'hyperplan affine $1 \times A$ est non vide, et de la forme $1 \times B$, où B est un sous-espace affine de A ; B est invariant par la représentation affine $a \longmapsto (a,L_a)$, parce que $1 \times B$ est invariant par la représentation linéaire $a \longmapsto \varphi_a$. Puisque l'algèbre symétrique à gauche A est nilpotente, il faut que $B = A$; donc $U = K \times A$; il en résulte que les φ_a sont tous nilpotents, et les L_a aussi.

Montrons enfin que (3) implique (2). Si l'assertion (3) est vraie, il existe un sous-groupe algébrique Γ de transformations linéaires de $K \times A$, dont l'algèbre de Lie est celle formée par les φ_a ; comme tout groupe algébrique, Γ est produit semi-direct d'un sous-groupe algébrique nilpotent Γ_0 et d'un sous-groupe algébrique réductif Γ_1 ; puisque Γ laisse l'hyperplan $0 \times A$ invariant, Γ_1 doit laisser invariante une droite supplémentaire de cet hyperplan ; cette droite coupe l'hyperplan affine $1 \times A$ en un point $(1,a)$ qui est invariant par Γ_1. Comme l'algèbre symétrique à gauche A est nilpotente, le sous-groupe d'isotropie de $(1,a)$ dans Γ doit être discret (et même réduit à l'élément neutre si Γ est connexe); donc Γ_1 est un sous-groupe discret, et l'algèbre de Lie de Γ est nilpotente.

Les méthodes utilisées ici peuvent-elles encore être utilisées si le corps de base est un corps quelconque de caractéristique nulle ? Il est facile de démontrer de façon purement algébrique l'existence des séries formelles σ' vérifiant les égalités (7) et (8). Le seul ennui est que ces méthodes nous obligent à définir le radical à partir des translations qui conservent le polynôme caractéristique, sans nous permettre de savoir si c'est aussi l'ensemble des translations qui conservent les « trajectoires ouvertes », c'est-à-dire l'ensemble des points où ce polynôme ne s'annule pas. En particulier, je suis incapable de dire si les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) la représentation affine canonique est « simplement transitive », c'est-à-dire, le polynôme caractéristique ne s'annule jamais ;

b) l'algèbre est nilpotente, autrement dit, le polynôme caractéristique est constant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AUSLANDER, Simply transitive groups of affine motions, *American Journal of Math.*, vol. 99, n° 4 (1977), 809-826.

[2] BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, chap. VII.

[3] J. DORFMEISTER and L. KŒCHER, Relative Invarianten und nicht-associativen Algebren, *Math. Ann.*, 228 (1977), 147-186.

[4] J. HELMSTETTER, Algèbres symétriques à gauche, *C.R.A.S.*, Paris, t. 272 (1971), 1088-1091.

[5] J. HELMSTETTER, Radical et groupe formel d'une algèbre symétrique à gauche (1975), thèse de doctorat de 3e cycle, Université de Grenoble.

[6] N. JACOBSON, Lie Algebras.

[7] A. MEDINA, Sur quelques algèbres symétriques à gauche dont l'algèbre de Lie sous-jacente est résoluble, *C.R.A.S.*, Paris, t. 286 (1978), 173-176.

[8] J. SCHEUNEMANN, Translations in certain groups of affine motions, *Proceedings of the American Math. Society*, vol. 47, n° 1 (1975).

[9] E. B. VINBERG, Convex homogeneous cones, *Translations of the Moscow Math. Society*, n° 12 (1963), 340-403.

Manuscrit reçu le 16 octobre 1978
révisé le 22 mai 1979.

Jacques HELMSTETTER,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Institut Fourier
B.P. 116
38402 St Martin d'Hères Cedex.