

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES CHAUMAT

ANNE-MARIE CHOLLET

**Ensembles pics pour  $A^\infty(D)$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, n° 3 (1979), p. 171-200

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1979\\_\\_29\\_3\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_171_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ENSEMBLES PICS POUR $A^\infty(D)$

par J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET

Soit  $D$  un domaine borné strictement pseudoconvexe dans  $\mathbf{C}^n$ , à frontière régulière. Soit  $A(D)$  la classe des fonctions analytiques dans  $D$ , continues dans  $\overline{D}$  et  $A^\infty(D)$  la classe des fonctions analytiques dans  $D$  dont toutes les dérivées sont continues dans  $\overline{D}$ . On note  $N$  une sous-variété du bord  $\partial D$  de  $D$  dont l'espace tangent  $T_p(N)$  est, en chaque point  $p$  de  $N$ , contenu dans le sous espace complexe maximal de  $T_p(\partial D)$ .

Indépendamment A. Nagel [11], G. Henkin et A. Tumanov [8] ont prouvé, en supposant  $N$  de classe  $C^3$ , que tout sous ensemble compact de  $N$  est un ensemble pic pour  $A(D)$ . Peu après, W. Rudin [12] a obtenu le même résultat sous l'hypothèse plus faible,  $N$  de classe  $C^1$ .

Récemment, M. Hakim et N. Sibony [6] ont obtenu une version locale de ce résultat pour  $A^\infty(D)$ : si  $N$  est de classe  $C^\infty$ , pour tout point  $p$  de  $N$ , il existe un voisinage  $\omega$  de  $p$  tel que tout compact  $K$  de  $\omega \cap N$  est un ensemble pic pour  $A^\infty(D)$ . Dans le même travail, ils montrent que la réunion de deux ensembles pics pour  $A^\infty(D)$  n'est pas nécessairement un ensemble pic pour  $A^\infty(D)$ . On ne peut, de ce fait, obtenir un résultat global par un argument simple de compacité, comme dans le cas de  $A(D)$ .

Dans ce papier, nous montrons que tout compact d'une telle sous-variété  $N$  de  $\partial D$  est un ensemble pic pour  $A^\infty(D)$ . C'est le théorème 21.

### Définitions et notations.

1.  $D$  désigne un domaine borné de  $\mathbf{C}^n$ , strictement pseudo-convexe, à frontière  $\partial D$  de classe  $C^\infty$ . Il existe donc une fonction  $r$ , à valeurs réelles, de classe  $C^\infty$  dans un voisinage de  $\bar{D}$  l'adhérence de  $D$  telle que

$$(1.1) \quad D = \{z ; r(z) < 0\},$$

$$(1.2) \quad \text{grad } r \neq 0 \text{ sur } \partial D,$$

(1.3)  $r$  est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de  $\partial D$ , c'est-à-dire, la forme de Levi de  $r$

$$4 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (z) w_j \bar{w}_k$$

est définie positive pour tout  $z$  dans un voisinage de  $\partial D$ .

2. On note

$A(D)$  la classe des fonctions analytiques dans  $D$ , continues dans  $\bar{D}$ ,

$A^\infty(D)$  la classe des fonctions analytiques dans  $D$ , continues ainsi que leurs dérivées de tous ordres dans  $\bar{D}$ .

Dans tout ce qui suit,  $E$  est un sous-ensemble fermé de  $\partial D$ .

3. Un sous ensemble  $E$  de  $\partial D$  est un ensemble pic pour une classe donnée s'il existe une fonction  $f$  de cette classe telle que l'on ait

$$f = 1 \text{ sur } E \quad \text{et} \quad |f| < 1 \text{ dans } \bar{D} \setminus E$$

ou, ce qui est équivalent,

$$f = 0 \text{ sur } E \quad \text{et} \quad \text{Re } f > 0 \text{ dans } \bar{D} \setminus E.$$

4. Sauf mention explicite du contraire, les fonctions, variétés, champs de vecteurs étudiés dans la suite seront de classe  $C^\infty$ .

5. On identifiera naturellement  $\mathbf{C}^n$  à  $\mathbf{R}^{2n}$  en posant

$$(z_1, \dots, z_n) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

si on note  $z_j = x_j + iy_j$  pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Les vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}$  forment une base de  $T_z(\mathbf{C}^n)$  l'espace tangent en  $z$  à  $\mathbf{C}^n$  considéré comme espace vectoriel réel de dimension  $2n$ . On définit sur cet espace une structure presque complexe  $J$  de la manière suivante.  $J$  est un opérateur  $\mathbf{R}$ -linéaire tel que l'on ait

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Si on identifie, comme on le fera assez fréquemment, les vecteurs tangents en  $z$  à  $\mathbf{C}^n$  à des vecteurs de  $\mathbf{C}^n$ , on voit que cet opérateur agit comme la multiplication par  $i$ .

On note  $\mathbf{C}T_z(\mathbf{C}^n)$  le complexifié de  $T_z(\mathbf{C}^n)$  c'est-à-dire  $T_z(\mathbf{C}^n) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ ; c'est un espace vectoriel complexe de dimension  $2n$  dont les vecteurs  $\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}$  forment une base.

$$\text{On a} \quad \frac{\bar{\partial}}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

On rappelle que  $T_z(\mathbf{C}^n)$  n'est autre que l'ensemble des éléments réels de  $\mathbf{C}T_z(\mathbf{C}^n)$  c'est-à-dire des éléments égaux à leurs conjugués.

$J$  s'étend en un opérateur  $\mathbf{C}$ -linéaire sur  $\mathbf{C}T_z(\mathbf{C}^n)$  tel que l'on ait

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = i \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Si on note  $(\ , \ )_{\mathbf{C}}$  le produit scalaire hermitien induit par  $\mathbf{C}^n$  sur  $\mathbf{C}T_z(\mathbf{C}^n)$  et  $(\ , \ )$  le produit scalaire euclidien sur  $T_z(\mathbf{C}^n)$ , on a

$$(\ , \ )_{\mathbf{C}} = (\ , \ ) \quad (5.1)$$

sur  $T_z(\mathbf{C}^n)$  considéré comme l'ensemble des éléments réels de  $\mathbf{C}T_z(\mathbf{C}^n)$ .

Le symbole  $\| \ \|$  représentera la norme euclidienne dans  $T_z(\mathbf{C}^n)$ .

6.  $\partial D = \{z \in \mathbf{C}^n; r(z) = 0\}$  est une hypersurface de  $\mathbf{C}^n$ . On note  $T_z(\partial D)$  l'espace tangent en  $z$  à  $\partial D$  de dimension réelle  $2n - 1$  et  $\text{grad } r(z)$  le gradient de  $r$  évalué en  $z$ .

On pose, pour tout  $z$  de  $\partial D$ ,

$$\chi_z = \text{grad } r(z) \quad (6.1)$$

et on note

$$\tau_z = J\chi_z. \quad (6.2)$$

$\tau_z$  appartient à  $T_z(\partial D)$  et, puisque  $r$  est de classe  $C^\infty$ , on peut, sans restreindre la généralité, supposer  $\|\chi_z\| = \|\tau_z\| = 1$  pour tout  $z$  de  $\partial D$ .

On désigne par  $T_z^c(\partial D)$  le sous espace complexe maximal de l'espace tangent réel  $T_z(\partial D)$ . Il est de dimension complexe  $n - 1$  et on a la décomposition orthogonale réelle, en tout point  $z$  de  $\partial D$ ,

$$T_z(\partial D) = \mathbf{R}[\tau_z] \oplus T_z^c(\partial D), \quad (6.3)$$

où  $\mathbf{R}[\tau_z]$  est le sous espace vectoriel réel engendré par  $\tau_z$ . On vérifie en identifiant  $T_z^c(\partial D)$  à un sous espace de  $\mathbf{C}^n$  que l'on a

$$T_z^c(\partial D) = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n; \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) = 0 \right\}. \quad (6.4)$$

On note

$\mathbf{CT}_z(\partial D)$  le complexifié de  $T_z(\partial D)$ ,

$$T_z^{1,0}(\partial D) = \left\{ X \in \mathbf{CT}_z(\mathbf{C}^n); X = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}; a_j \in \mathbf{C}, \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) = 0 \right\},$$

$$T_z^{0,1}(\partial D) = \left\{ X \in \mathbf{CT}_z(\mathbf{C}^n); X = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}; a_j \in \mathbf{C}, \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0 \right\}.$$

$T_z^{1,0}(\partial D)$  et  $T_z^{0,1}(\partial D)$  sont des sous espaces de  $\mathbf{CT}_z(\partial D)$  de dimension complexe  $n - 1$ .

$T_z^c(\partial D)$  est un sous espace réel de dimension  $2n - 2$  de  $T_z(\partial D)$ . Il s'identifie donc naturellement à un sous espace réel de  $\mathbf{CT}_z(\partial D)$ . On a plus précisément  $T_z^c(\partial D) = \{\text{Re } X; X \in T_z^{1,0}(\partial D)\}$ . En effet l'inclusion est évidente et les dimensions réelles sont égales. Si  $X$  appartient à  $T_z^{1,0}$ ,  $\bar{X}$  appartient à  $T_z^{0,1}$  donc tout vecteur  $\xi$  de  $T_z^c(\partial D)$  peut s'écrire

$$\xi = X + \bar{X}, \quad X \in T_z^{1,0}(\partial D), \quad \bar{X} \in T_z^{0,1}(\partial D) \quad (6.5)$$

c'est-à-dire

$$\xi = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial r}{\partial z_j} = 0. \quad (6.6)$$

7. On note  $[X, Y]$  le crochet de Lie  $XY - YX$  de deux champs de vecteurs tangents à  $\partial D$  et on définit sur  $T_z^c(\partial D)$  une forme hermitienne en posant

$$L_z(\xi, \eta) = ([X, \bar{Y}]_z, \tau_z)_c \quad (7.1)$$

si  $\xi = X + \bar{X}$  et  $\eta = Y + \bar{Y}$ .

Si  $\eta$  s'écrit

$$\eta = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^n \bar{b}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \text{ avec } \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial r}{\partial z_j} = 0, \quad (7.2)$$

un calcul simple permet de vérifier que l'on a, d'après (6.2), (6.6) et (7.2),

$$L_z(\xi, \eta) = -2i \sum_{j,k} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) a_j \bar{b}_k. \quad (7.3)$$

On reconnaît là, à un coefficient près, la forme de Levi de  $r$  évaluée au point  $z$ .

### Remarques classiques sur la forme de Levi [3], [4], [8].

8. *Remarque.* — Soit  $\xi$  et  $\eta$  deux champs de vecteurs de  $T^c(\partial D)$  le sous fibré du fibré  $T(\partial D)$ . Si on pose,

$$F_z(\xi, \eta) = ([J\xi, \eta]_z, \tau_z)$$

et

$$G_z(\xi, \eta) = ([\xi, \eta]_z, \tau_z),$$

on a alors

$$F_z(\xi, \eta) + iG_z(\xi, \eta) = 2iL_z(\xi, \eta).$$

*Preuve.* —  $F_z(\xi, \eta) + iG_z(\xi, \eta) = ([J\xi, \eta]_z + i[\xi, \eta]_z, \tau_z)$ .

D'après (5.1), on a

$$\begin{aligned} F_z(\xi, \eta) + iG_z(\xi, \eta) &= ([J\xi, \eta]_z + i[\xi, \eta]_z, \tau_z)_c \\ &= ([iX - i\bar{X}, Y + \bar{Y}]_z + i[X + \bar{X}, Y + \bar{Y}]_z, \tau_z)_c \\ &= 2i([X, Y]_z, \tau_z)_c + 2i([X, \bar{Y}]_z, \tau_z)_c \\ &= 2iL_z(\xi, \eta). \end{aligned}$$

On a en effet  $([X, Y]_z, \tau_z)_c = 0$ . Car le crochet  $[X, Y]_z$  de deux champs de vecteurs de  $T^{1,0}(\partial D)$  est dans  $T^{1,0}(\partial D)$  et si  $Z$  est un tel champ on a

$$\begin{aligned} (Z_z, \tau_z)_C &= (\operatorname{Re} Z_z, \tau_z)_C + i(\operatorname{Im} Z_z, \tau_z)_C \\ &= (\operatorname{Re} Z_z, \tau_z) + i(\operatorname{Im} Z_z, \tau_z) = 0. \end{aligned}$$

9. *Remarque.* — Il existe deux constantes  $C_0$  et  $c_0$ ,  $C_0 \geq 1$  et  $0 < c_0 \leq 1$ , ne dépendant que de  $D$ , telles que, pour tout champ de vecteurs  $\eta$  de  $T^c(\partial D)$ , en tout point  $z$  de  $\partial D$ , on ait

$$C_0 \|\eta_z\|^2 \geq ([J\eta, \eta]_z, \tau_z) \geq c_0 \|\eta_z\|^2.$$

*Preuve.* — Puisque  $D$  est un domaine strictement pseudoconvexe, à frontière de classe  $C^\infty$ , il s'agit là d'une conséquence de (1.3), (7.3) et de la remarque 8.

10. *Remarque.* — La partie réelle  $([J\xi, \eta]_z, \tau_z)$  de la forme de Levi définit sur  $T_z^c(\partial D)$  un produit scalaire réel que l'on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ . On peut prolonger ce produit scalaire à  $T_z(\mathbf{C}^n)$  en posant, pour tout vecteur  $\xi_z$  de  $T_z^c(\partial D)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \tau_z, \xi_z \rangle_L &= 0 & \langle \tau_z, \tau_z \rangle_L &= 1, \\ \langle \chi_z, \xi_z \rangle_L &= 0 & \langle \chi_z, \chi_z \rangle_L &= 1, \end{aligned} \tag{10.1}$$

et

$$\langle \tau_z, \chi_z \rangle_L = 0.$$

On a alors, pour tout vecteur  $\xi_z$  de  $T_z(\mathbf{C}^n)$

$$C_0 \|\xi_z\|^2 \geq \|\xi_z\|_L^2 \geq c_0 \|\xi_z\|^2 \tag{10.2}$$

avec  $\|\xi_z\|_L^2 = \langle \xi_z, \xi_z \rangle_L$  et  $\|\xi_z\|^2 = (\xi_z, \xi_z)$ .

*Preuve.* —  $\langle \xi_z, \eta_z \rangle_L = ([J\xi, \eta]_z, \tau_z) = \operatorname{Re} 2i L_z(\xi, \eta)$ . C'est la partie réelle d'une forme hermitienne définie positive puisque  $D$  est strictement pseudoconvexe. Elle définit donc un produit scalaire sur  $T^c(\partial D)$  et la relation (9.2) est vérifiée d'après la remarque 9.

11. DEFINITIONS. — Soit  $W$  un sous espace de  $T_z(\mathbf{C}^n)$ . On note  $W^L$  le  $L$ -orthogonal de  $W$  dans  $T_z(\mathbf{C}^n)$  c'est-à-dire l'orthogonal de  $W$  pour le produit scalaire  $L$  et  $P_W$  le projecteur  $L$ -orthogonal de  $T_z(\mathbf{C}^n)$  sur  $W$ .

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  au voisinage d'un point  $z$  de  $\partial D$  et  $df$  sa différentielle. On désigne par  $\operatorname{grad}_L f(z)$  le vecteur de  $T_z(\mathbf{C}^n)$  tel que l'on ait

$$df(\xi)(z) = \xi_z f = \langle \text{grad}_L f(z), \xi_z \rangle_L \quad (11.1)$$

pour tout vecteur  $\xi_z$  de  $T_z(\mathbf{C}^n)$ .

### Variétés totalement réelles.

12. DEFINITION. — Une sous-variété  $V$  de  $\mathbf{C}^n$  est totalement réelle si, en tout point  $p$  de  $V$ , on a

$$T_p(V) \cap JT_p(V) = \{0\}. \quad (12.1)$$

13. Remarque. — La dimension réelle maximale d'une sous-variété totalement réelle de  $\mathbf{C}^n$  est  $n$ .

On fera fréquemment usage dans la suite de la proposition suivante due à F.R. Harvey et R.O. Wells [7].

14. PROPOSITION. — Soit  $V$  une sous-variété de classe  $C^\infty$ , totalement réelle, définie dans un ouvert  $\omega$  de  $\mathbf{C}^n$ , et soit  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $V$ , alors il existe une fonction  $F$  de classe  $C^\infty$  dans  $\omega$  telle que l'on ait

a)  $F = f$  sur  $V$ ,

b)  $\bar{\partial}F$  s'annule à l'ordre infini sur  $V$ , c'est-à-dire, pour tout entier  $\alpha$ , les dérivées d'ordre  $\alpha$  de  $\bar{\partial}F$  sont nulles sur  $V$ .

De plus, si  $f$  est à support compact dans  $V$ ,  $F$  est également à support compact dans  $\omega$ .

15. On s'intéresse particulièrement dans ce travail aux sous-variétés  $N$  de classe  $C^\infty$  de  $\partial D$  qui vérifient, en chaque point  $p$  de  $N$ ,

$$T_p(N) \subset T_p^c(\partial D). \quad (15.1)$$

D. Burns et L. Stout [2] ont montré qu'une telle sous-variété est nécessairement totalement réelle. De là, puisque  $JT_p(N)$  est aussi inclus dans  $T_p^c(\partial D)$ , la dimension réelle d'une telle sous-variété est inférieure ou égale à  $n - 1$ .

Plus précisément, on a la remarque suivante.



16. *Remarque.* — Soit  $N$  une sous variété de  $\partial D$  vérifiant (15.1); alors  $T_p(N)$  et  $JT_p(N)$  sont  $L$ -orthogonaux en chaque point  $p$  de  $N$ .

*Preuve.* — Soit  $\xi_p$  un vecteur de  $JT_p(N)$  et  $\eta_p$  un vecteur de  $T_p(N)$ . Il existe localement des champs de vecteurs  $\xi'$  et  $\eta$  de  $T(\partial D)$  tangents à  $N$  le long de  $N$  tels que, au point  $p$ ,  $\eta_p$  soit la valeur de  $\eta$  et  $\xi_p$  celle de  $J\xi'$ . On a alors

$$([\xi', \eta]_p, \tau_p) = 0. \quad (16.1)$$

En effet, le crochet de deux champs de vecteurs  $\xi'$  et  $\eta$  tangents à  $N$  est tangent à  $N$ . D'après (15.1), il est dans  $T_p^c(\partial D)$ ; il est donc orthogonal à  $\tau_p$  et l'on a (16.1). De la définition 10 du produit scalaire  $L$ , on déduit

$$\langle \xi_p, \eta_p \rangle_L = 0. \quad (16.2)$$

Le résultat suivant est utilisé par G. Henkin et A. Tumanov [8]. On donne ici quelques indications sur sa preuve.

17. PROPOSITION. — Soit  $N$  une sous variété de dimension réelle  $k$  de  $\partial D$  de classe  $C^\infty$  telle que, pour chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ .

Alors, pour tout point  $p_0$  de  $N$ , il existe un voisinage  $\omega$  de  $p_0$  dans  $\mathbf{C}_n$  et deux sous-variétés  $M$  et  $\tilde{M}$  de  $\partial D \cap \omega$ , de classe  $C^\infty$ , totalement réelles, de dimension réelle respective  $n-1$  et  $n$  telles que l'on ait

- a)  $N \subset M \subset \tilde{M}$  dans  $\omega$ ,
- b)  $T_p(M) \subset T_p^c(\partial D)$  pour tout point  $p$  de  $M \cap \omega$ ,
- c)  $\tau_p \in T_p(\tilde{M})$  pour tout point  $p$  de  $\tilde{M} \cap \omega$ .

*Preuve.* — On considère sur  $\partial D$  la 1-forme  $\Omega$  définie par  $\Omega(V)(p) = \langle \tau_p, V \rangle_L$ , pour tout  $V$  de  $T_p(\partial D)$ . On a  $\Omega(V)(p) = 0$  si et seulement si  $V$  appartient à  $T_p^c(\partial D)$ . On peut vérifier que la 2-forme  $d\Omega$  est non dégénérée en restriction à  $T_p^c(\partial D)$  parce que  $D$  est strictement pseudoconvexe. On dit, dans cette situation, [1], [9] que  $\Omega$  définit une structure de contact sur  $\partial D$ . Puisque  $\Omega|_N$  est nulle,  $N$  est une variété intégrale de cette structure de contact et, d'après le paragraphe 15, sa dimension réelle est inférieure ou

égale à  $n - 1$ . On montre tout d'abord qu'une telle sous variété est localement contenue dans une sous variété intégrale maximale de dimension réelle  $n - 1$ . Pour cela, on applique le théorème de Darboux [1], [9]: il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p_0$  dans  $\partial D$ , un voisinage ouvert convexe  $U_1$  de  $0$  dans  $\mathbf{R}^{2(n-1)+1}$  et un difféomorphisme  $\Phi$  de classe  $C^\infty$  de  $U$  sur  $U_1$  tels que l'on ait

$$\Phi(p_0) = 0 \text{ et } \Phi^{-1*}(\Omega) = dt + \sum_{i=1}^{n-1} x_i dy_i, \quad (17.1)$$

avec sur  $\mathbf{R}^{2(n-1)+1}$  le système de coordonnées

$$(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, t).$$

On pose

$$N_1 = \Phi(N \cap U) \text{ et } \Omega_1 = \Phi^{-1*}(\Omega). \quad (17.2)$$

La sous variété  $N_1$  est de dimension  $k$  dans  $U_1$  et vérifie  $\Omega_{1|N_1} = 0$ . On en déduit

$$d\Omega_{1|N_1} = 0. \quad (17.3)$$

Soit  $\pi$  la projection orthogonale de  $\mathbf{R}^{2(n-1)+1}$  sur  $\mathbf{R}^{2(n-1)}$ . On note  $\pi(N_1) = N_2$ . Puisque  $\Omega_{1|N_1}$  est nulle, on peut réduire  $U$  de sorte que  $\pi$  soit un difféomorphisme de  $N_1$  sur  $N_2$ ;  $N_2$  est alors une sous variété de dimension réelle  $k$  de  $U_1 \cap \{t = 0\}$ . Puisque d'après (17.1) et (17.2) la 2 forme  $d\Omega_1$  ne fait pas intervenir la variable  $t$  on a, d'après (17.3),

$$d\Omega_{1|N_2} = 0. \quad (17.4)$$

La forme  $d\Omega_1 = \sum_{i=1}^{n-1} dx_i \wedge dy_i$  restreinte à  $\mathbf{R}^{2(n-1)}$  n'est autre que sa 2-forme symplectique naturelle [1], [9], [13]. D'après (17.4),  $N_2$  est une sous-variété isotrope de  $U_1 \cap \{t = 0\}$ . Alors, quitte à restreindre  $U$ , il existe une sous-variété lagrangienne  $M_2$  de  $U \cap \{t = 0\}$  contenant la variété isotrope  $N_2$  [5]. On rappelle qu'une variété lagrangienne est une variété isotrope de dimension réelle maximale.

On restreint  $U$  pour que  $M_2$  soit simplement connexe. Il existe alors une sous-variété unique  $M_1$  de  $U_1$  qui vérifie  $\Omega_{1|M_1} = 0$  et  $0 \in M_1$  et telle que  $\pi$  soit un difféomorphisme de  $M_1$  sur  $M_2$ . La sous-variété  $M_1$  est de dimension  $n - 1$  et contient  $N_1$ .

On pose  $\Phi^{-1}(M_1) = M$ .  $M$  est une sous variété de dimension  $n - 1$  dans un voisinage ouvert  $U$  de  $p_0$  dans  $\partial D$  et vérifie  $M \supset N$  et  $\Omega_{|M} = 0$ .

Pour conclure la preuve de la proposition il reste à construire la sous variété  $\tilde{M}$ . On remarque pour cela qu'en chaque point  $p$  de  $M$  le vecteur  $\tau_p$  est transverse à  $M$ . Alors, quitte à restreindre à nouveau  $U$ , on en déduit que les courbes intégrales du champ  $\tau_p$  qui rencontrent  $M$  définissent dans  $U$  une sous-variété  $\tilde{M}$  de dimension  $n$ . En  $p_0$ , on a évidemment  $T_{p_0}(\tilde{M}) \cap JT_{p_0}(\tilde{M}) = \{0\}$ . On peut donc, quitte à restreindre encore  $U$ , s'assurer que  $\tilde{M}$  est totalement réelle. On choisit alors pour  $\omega$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  dont l'intersection avec  $\partial D$  est égale à  $U$ .

18. *Remarque.* — Soit  $N$  une sous-variété de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$  et soit  $p_0$  un point de  $N$ . Il existe, au voisinage de  $p_0$ , une sous variété  $M$  vérifiant 17 a) et 17 b). On a donc, d'après la remarque 16, en tout point  $p$  de  $N$  voisin de  $p_0$ , une décomposition L-orthogonale de  $T_p(\partial D)$ ,

$$T_p(\partial D) = \mathbf{R}[\tau_p] \oplus T_p(N) \oplus T_p(N)^\perp \cap T_p(M) \oplus JT_p(M). \quad (18.1)$$

Soit  $\zeta$  un champ de vecteurs de  $T(\partial D)$  défini au voisinage de  $p_0$ . D'après (18.1), on peut écrire, le long de  $N$ , au voisinage de  $p_0$ ,  $\zeta = t\tau + \delta + \beta + \eta$ , avec  $\delta$  dans  $T(N)$ ,  $\beta$  dans  $T(N)^\perp \cap T(M)$  et  $\eta$  dans  $JT(M)$ . On prolonge ensuite ces champs de vecteurs, au voisinage de  $p_0$ , sur  $M$ , puis sur  $\partial D$  en des champs de vecteurs tangents à  $\partial D$ , de sorte que l'on ait, de plus, le long de  $M$ ,  $\delta$  et  $\beta$  dans  $T(M)$  et  $\eta$  dans  $JT(M)$ .

Si  $N$  est de dimension réelle maximale,  $\beta$  est identiquement nul.

La remarque suivante relève des mêmes idées.

19. *Remarque.* — Soit  $p_0$  un point de  $N$ ,  $M$  et  $\tilde{M}$  deux sous variétés de  $\partial D$  vérifiant dans un voisinage  $\omega$  de  $p_0$  dans  $\mathbf{C}^n$  les conclusions de la proposition 17. Alors quitte à réduire  $\omega$ , il existe des champs de vecteurs  $(\xi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , tangents à  $\partial D$ , tels que

a) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega$ ,  $\{(\xi_i), i = 1, \dots, k\}$  constituent une base L-orthonormée de  $T_p(N)$ ,

b) pour tout  $p$  de  $M \cap \omega$ ,  $\{(\xi_i), i = 1, \dots, n-1\}$  constituent une base L-orthonormée de  $T_p(M)$ ,

c) pour tout  $p$  de  $\tilde{M} \cap \omega$ ,  $\{\tau, (\xi_i), i = 1, \dots, n-1\}$  constituent une base L-orthonormée de  $T_p(\tilde{M})$ ,

d) pour tout  $p$  de  $\partial D \cap \omega$ ,  $\{\tau, (\xi_i), (J\xi_i), i = 1, \dots, n-1\}$  constituent une base L-orthonormée de  $T_p(\partial D)$ .

### Proposition fondamentale et théorème.

**20. PROPOSITION.** — Soit  $N$  une sous variété de classe  $C^\infty$  de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$  et soit  $K$  un compact de  $N$ , alors, il existe  $\Omega$  un voisinage de  $K$  dans  $\mathbf{C}^n$ , une fonction  $G$  de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega$  et une constante  $c$  strictement positive, tel que

a)  $G(z) = 0$  si et seulement si  $z$  appartient à  $K$

b)  $\bar{\partial}G$  s'annule à l'ordre infini sur  $\Omega \cap N$

c)  $\operatorname{Re} G(z) \geq c d(z, N)^2$  pour tout  $z$  de  $\Omega \cap \bar{D}$

où  $d(z, N)$  désigne la distance euclidienne de  $z$  à  $N$ .

La preuve de cette proposition nécessite plusieurs étapes et constitue l'essentiel de cet article (paragraphe 22 à 32). Le théorème 21 s'en déduit aisément ; la proposition nous permet en effet de formuler un problème de  $\bar{\partial}$  à données  $C^\infty$  qui, d'après J.J. Kohn [10], a une solution  $C^\infty$ . M. Hakim et N. Sibony ont utilisé la même méthode antérieurement dans [6].

**21. THEOREME.** — Soit  $D$  un domaine borné strictement pseudo-convexe de  $\mathbf{C}^n$  à frontière de classe  $C^\infty$ . Soit  $N$  une sous-variété de classe  $C^\infty$  de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ , alors, tout compact  $K$  de  $N$  est un ensemble pic pour  $A^\infty(D)$ .

*Preuve du théorème.* — Soit  $K$  un compact de  $N$ . Soit  $\Omega$  un voisinage de  $K$  et  $G$  une fonction qui vérifient les conclusions de la proposition 20.

Soit  $t$  une fonction à valeurs réelles, de classe  $C^\infty$  et à support dans  $\Omega$ . On suppose de plus

$$0 \leq t \leq 1 \quad (21.1)$$

et  $t = 1$  dans un voisinage  $\Omega_1$  de  $K$ . (21.2)

Soit  $h$  la (0,1) forme définie dans  $\bar{D} \setminus K$  par

$$h = \begin{cases} \bar{\partial} \left( t \frac{1}{G} \right) & \text{dans } \Omega, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La forme  $h$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{D} \setminus K$ . On peut la prolonger, ainsi que toutes ses dérivées, par 0 sur  $K$ . On obtient alors une forme de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{D}$ .

En effet, dans  $\Omega$ , on a  $\bar{\partial} h = \bar{\partial} t \cdot \frac{1}{G} - t \frac{\bar{\partial} G}{G^2}$ . D'après (21.2),  $\bar{\partial} t$  est nul au voisinage de l'ensemble des points où  $\frac{1}{G}$  n'est pas défini. La forme  $\bar{\partial} t \cdot \frac{1}{G}$  est donc de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega$  et à support dans  $\Omega \setminus K$ . On a, par ailleurs,  $\left| t \frac{\bar{\partial} G}{G^2} \right| \leq \frac{\bar{\partial} G}{(\operatorname{Re} G)^2}$ , avec, d'après b) et c) de la proposition 20, au voisinage de  $N \cap \Omega$ , pour tout entier  $k$ ,  $\bar{\partial} G = o[d(z, N)]^k$  et  $\operatorname{Re} G(z) \geq c d(z, N)^2$ . On déduit de là que la forme  $t \frac{\bar{\partial} G}{G^2}$  peut être prolongée continuellement par 0 sur  $K$  et qu'il en est de même pour toutes ses dérivées.

D'après un théorème de J.J. Kohn [10], puisque  $\bar{\partial} h$  est nulle dans  $\bar{D}$ , il existe une fonction  $u$  de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{D}$  telle que l'on ait  $\bar{\partial} u = h$ . Soit  $v$  la fonction définie par  $v = t \frac{1}{G} - u$ . Elle est holomorphe dans  $D$ , de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{D} \setminus K$ , et l'on a  $\operatorname{Re} v = t \frac{\operatorname{Re} G}{|G|^2} - \operatorname{Re} u$ . Puisque  $u$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{D}$ ,  $\operatorname{Re} u$  est bornée. D'après c) de la proposition 20,  $\operatorname{Re} G$  est positive ou nulle dans  $\bar{D} \cap \Omega$  donc, quitte à rajouter une constante, on peut supposer que l'on a

$$\operatorname{Re} v > 0 \quad \text{dans } \bar{D} \setminus K. \quad (21.3)$$

On déduit de là que la fonction  $\frac{1}{v}$  est holomorphe dans  $D$ , de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{D} \setminus K$ .

Sur  $\Omega_1$ , on a

$$\frac{1}{v} = \frac{G}{1 - uG}. \quad (21.4)$$

Le dénominateur  $1 - uG$  ne s'annule pas dans  $\bar{D}$  au voisinage de  $K$ ; donc  $\frac{1}{v}$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\bar{D}$ . La fonction  $\frac{1}{v}$  appartient à  $A^\infty(D)$ ; d'après (21.3) et (21.4), elle est nulle sur  $K$  et sa partie réelle est positive dans  $\bar{D} \setminus K$ . L'ensemble  $K$  est donc un ensemble pic pour  $A^\infty(D)$ .

### Preuve de la proposition fondamentale.

22. La démonstration de la proposition 24 s'inspire d'une construction faite par G. Henkin et A. Tumanov dans le cas de  $A(D)$ . Cette preuve utilise le lemme suivant.

23. LEMME. — *Il existe une constante  $C$  strictement positive ne dépendant que de  $D$  telle que, pour tout champ de vecteurs  $\eta$  de  $T^c(\partial D)$ , en tout point  $z$  de  $\partial D$ , on ait*

$$|\langle [\tau, \eta]_z, \tau_z \rangle_L| \leq C \|\eta_z\|_L.$$

*Preuve.* — Soit  $z_0$  un point de  $\partial D$ ; il existe un voisinage de  $z_0$  dans  $\partial D$  et des champs de vecteurs  $(\xi_j)$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , tels que, pour tout  $z$  dans ce voisinage,  $(\xi_j)_z$  et  $(J\xi_j)_z$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , constituent une base de  $T_z^c(\partial D)$ . On a alors

$$\eta = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_j J\xi_j,$$

et donc

$$\begin{aligned} [\tau, \eta] &= \sum_{j=1}^{n-1} \tau a_j \xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} \tau b_j J\xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \tau \xi_j + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \tau J\xi_j \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \xi_j \tau - \sum_{j=1}^{n-1} b_j J\xi_j \tau. \end{aligned}$$

On a alors, puisque  $\tau$  est  $L$ -orthogonal à  $T^c(\partial D)$ ,

$$\langle [\tau, \eta], \tau \rangle_L = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \langle [\tau, \xi_j], \tau \rangle_L + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \langle [\tau, J\xi_j], \tau \rangle_L.$$

Le lemme s'en déduit alors en utilisant la régularité et la compacité de  $\partial D$ .

**24. PROPOSITION.** — Soit  $N$  une sous-variété de dimension réelle  $k \leq n - 1$  de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ . Soit  $M$  et  $\tilde{M}$  deux sous-variétés vérifiant dans un voisinage  $\omega$  de  $\mathbf{C}^n$  les conclusions de la proposition 17. Alors, il existe une fonction  $u$  de classe  $C^\infty$  dans  $\omega$  telle que l'on ait

$$a) \quad u(z) = 0 \text{ si } z \text{ appartient à } M \cap \omega,$$

$$b) \quad \bar{\partial}u \text{ s'annule à l'ordre infini sur } \tilde{M} \cap \omega,$$

$$c) \quad \text{pour tout } p \text{ de } M \cap \omega, \quad (\text{grad}_L \text{Re } u)(p) = -\chi_p,$$

d) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega$  et pour tout champ de vecteurs  $\zeta$  de  $T(\partial D)$  qui s'écrit dans un voisinage de  $p$ , d'après la remarque 18,  $\zeta = t\tau + \delta + \eta$  avec  $\delta$  et  $\eta$  dans  $T(\partial D)$ ,  $\delta$  et  $\eta$  respectivement dans  $T(M)$  et  $JT(M)$  le long de  $M$

$$(\zeta^2 \text{Re } u)(p) = ((t\tau + \eta)^2 \text{Re } u)(p) \geq \frac{1}{2} \|t\tau_p + \eta_p\|_L^2.$$

*Preuve.* — Soit  $\tilde{u}$  une fonction à valeurs complexes de classe  $C^\infty$  sur  $\tilde{M} \cap \omega$ , telle que, pour tout  $p$  dans  $M \cap \omega$ , on ait

$$\tilde{u}(p) = 0, \quad (24.1)$$

$$(\tau \text{Re } \tilde{u})(p) = 0, \quad (24.2)$$

$$(\tau \text{Im } \tilde{u})(p) = -1 \quad (24.3)$$

et

$$(\tau^2 \text{Re } \tilde{u})(p) = \frac{1}{2} + 2C^2 \quad (24.4)$$

où  $C$  est la constante strictement positive ne dépendant que de  $D$  introduite dans le lemme 23.

D'après la proposition 14, il existe une fonction  $u$  de classe  $C^\infty$  dans  $\omega$  telle que l'on ait

$$u = \tilde{u} \text{ sur } \tilde{M} \cap \omega, \quad (24.5)$$

$$\bar{\partial}u \text{ s'annule à l'ordre infini sur } \tilde{M} \cap \omega. \quad (24.6)$$

Il reste donc à prouver que  $u$  vérifie les conditions b) et c) de la proposition. Ce sont des conséquences des propriétés (24.1) à (24.6) et de la stricte pseudoconvexité de  $D$ .

Dans cette partie de la preuve, pour alléger l'écriture, on omettra systématiquement l'indice  $p$  de  $\zeta_p$  la valeur d'un champ de vecteurs  $\zeta$  de  $T(\partial D)$  au point  $p$ . On agira de même pour  $T_p(N)$ ,  $T_p(M)$ ,  $T_p^c(\partial D)$  et  $T_p(\partial D)$ .

Des équations de Cauchy-Riemann vérifiées par  $u$  sur  $\tilde{M} \cap \omega$ , on déduit, si on note  $\xi$  un champ de vecteurs de  $T^c(\partial D)$  et si on pose  $\eta = J\xi$ , que l'on a, en tout point de  $\tilde{M} \cap \omega$ ,

$$\begin{aligned} \chi \operatorname{Re} u &= \tau \operatorname{Im} u, & \xi \operatorname{Re} u &= \eta \operatorname{Im} u, \\ \tau \operatorname{Re} u &= -\chi \operatorname{Im} u, & \eta \operatorname{Re} u &= -\xi \operatorname{Im} u. \end{aligned} \quad (24.7)$$

On remarque maintenant que si  $\xi$  est un champ de vecteurs de  $T^c(\partial D)$ , on a

$$\xi \operatorname{Re} u = \xi \operatorname{Im} u = 0 \quad \text{sur } M \cap \omega. \quad (24.8)$$

En effet, puisque  $u$  est nulle sur  $M$ , la relation (24.8) est vérifiée si  $\xi$  est un champ de vecteurs tangent à  $M$ . Mais, puisque  $M$  est totalement réelle et de dimension maximum  $n-1$ , si  $\xi$  appartient à  $JT(M)$ ,  $J\xi$  est tangent à  $M$  et, d'après (24.7), la relation (24.8) est encore vérifiée.

On a donc montré en utilisant (24.1), (24.5) et (24.6) que  $\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u$  et  $\operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u$  évalués en un point  $p$  de  $M \cap \omega$  n'ont pas de composantes dans  $T_p^c(\partial D)$ .

On déduit alors de (24.2), (24.3) et (24.7)

$$\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u = -\chi, \quad \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u = -\tau \quad \text{sur } M \cap \omega. \quad (24.9)$$

Pour établir d), on remarque que si on pose, pour tout point  $p$  de  $M \cap \omega$  et pour tout couple de champs de vecteurs  $\zeta$  et  $\zeta'$  définis au voisinage de  $p$  et tangents à  $\partial D$ ,

$$H_p(\zeta, \zeta') = (\zeta' \zeta \operatorname{Re} u)(p), \quad (24.10)$$

$H_p$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $T_p(\partial D)$  dont le noyau contient  $T_p(M)$ .

Il s'agit là d'une conséquence de (24.9).

La forme  $H_p$  est symétrique ; en effet, si  $\zeta$  et  $\zeta'$  sont deux champs de vecteurs tangents à  $\partial D$ , on a sur  $M \cap \omega$

$$[\zeta, \zeta'] \operatorname{Re} u = \langle [\zeta, \zeta'], \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u \rangle_L = \langle [\zeta, \zeta'], -\chi \rangle_L = 0 \quad (24.11)$$



puisque le crochet de deux champs de vecteurs tangents à  $\partial D$  est tangent à  $\partial D$  et que  $\chi$  est  $L$ -orthogonal à  $\partial D$  d'après (9.1).

De plus, la forme  $H_p$  est linéaire en  $\zeta'$ ; puisqu'elle est symétrique, elle est donc bilinéaire.

Si  $\zeta$  est un champ de vecteurs tangent à  $\partial D$ , tangent à  $M$  le long de  $M \cap \omega$ , il appartient au noyau de la forme  $H_p$ . En effet, pour tout champ de vecteurs  $\zeta'$  tangent à  $\partial D$ , on a sur  $M \cap \omega$

$$\zeta' \operatorname{Re} u = \langle \zeta', \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} u \rangle_L = \langle \zeta', -\chi \rangle_L = 0. \quad (24.12)$$

Puisque  $\zeta$  est tangent à  $M$ , on a pour tout  $\zeta'$  de  $T(\partial D)$

$$\zeta \zeta' \operatorname{Re} u = 0 \quad \text{sur } M \cap \omega. \quad (24.13)$$

De là, pour tout champ de vecteurs  $\zeta$  de  $T(\partial D)$  on a, en utilisant sa décomposition en chaque point  $p$  de  $M \cap \omega$ , donc de  $N \cap \omega$ ,

$$\zeta^2 \operatorname{Re} u = (t\tau + \eta)^2 \operatorname{Re} u = t^2 \tau^2 \operatorname{Re} u + 2t\tau\eta \operatorname{Re} u + \eta^2 \operatorname{Re} u. \quad (24.14)$$

On va donc évaluer chacun des termes de cette somme.

Sur  $\tilde{M} \cap \omega$ , d'après (24.7), on a, parce que  $\tau$  est tangent à  $\tilde{M}$ ,  $\tau(\eta \operatorname{Re} u - J\eta \operatorname{Im} u) = 0$  et donc

$$\tau \eta \operatorname{Re} u = \tau J \eta \operatorname{Im} u = [\tau, J\eta] \operatorname{Im} u + J\eta \tau \operatorname{Im} u.$$

$\tau \operatorname{Im} u$  est égal à  $-1$  sur  $M \cap \omega$  d'après (24.3) et (24.5);  $J\eta$  est tangent à  $M$ ; on a donc  $J\eta \tau \operatorname{Im} u = 0$  sur  $M \cap \omega$ . De là, on déduit en utilisant (24.9) que, sur  $M \cap \omega$ , on a

$$\tau \eta \operatorname{Re} u = \langle [\tau, J\eta], \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u \rangle_L = -\langle [\tau, J\eta], \tau \rangle_L. \quad (24.15)$$

Mais, d'après le lemme 23, on a pour tout champ de vecteurs  $\eta$  de  $T^c(\partial D)$

$$|\langle [\tau, J\eta], \tau \rangle_L| \leq C \|\eta\|_L. \quad (24.16)$$

On déduit de (24.15) et (24.16), sur  $M \cap \omega$ ,

$$|\tau \eta \operatorname{Re} u| \leq C \|\eta\|_L. \quad (24.17)$$

Sur  $\tilde{M} \cap \omega$ , d'après (24.6),  $\bar{\partial}u$  s'annule à l'ordre infini, on a donc  $\eta(\eta \operatorname{Re} u - J\eta \operatorname{Im} u) = 0$  et ainsi

$$\eta^2 \operatorname{Re} u = \eta J \eta \operatorname{Im} u = \langle [\eta, J\eta], \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} u \rangle_L + J\eta \eta \operatorname{Im} u.$$

D'après (24.7) et (24.8), sur  $M \cap \omega$ ,  $\eta \operatorname{Im} u$  est nul. Il en est donc de même de  $J\eta \eta \operatorname{Im} u$  puisque  $J\eta$  est tangent à  $M$ . De là, d'après

(24.9), on a sur  $M \cap \omega$

$$\eta^2 \operatorname{Re} u = \langle [\eta, J\eta], -\tau \rangle_L = \langle [J\eta, \eta], \tau \rangle_L.$$

On déduit donc du lemme 9 que, pour tout champ de vecteurs  $\eta$  de  $T^c(\partial D)$ , on a sur  $M \cap \omega$

$$\eta^2 \operatorname{Re} u \geq \|\eta\|_L^2. \quad (24.18)$$

On va maintenant vérifier que l'on a sur  $M \cap \omega$ , donc sur  $N \cap \omega$ ,

$$- \quad t^2 \operatorname{Re} u \geq \frac{1}{2} \|t\tau + \eta\|_L^2. \quad (24.19)$$

Puisque  $\tau$  est L-orthogonal à  $\eta$  et que sa L-norme est égale à 1, il suffit pour établir (24.19) de vérifier que le trinôme en  $t$

$$t^2 \left( \tau^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2} \right) + 2t \tau \eta \operatorname{Re} u + \eta^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2} \|\eta\|_L^2$$

est toujours positif sur  $M \cap \omega$ .

Or on a sur  $M \cap \omega$ , d'après (24.4),  $\tau^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2} = 2C^2 > 0$  et, d'après (24.17) et (24.18),

$$(\tau \eta \operatorname{Re} u)^2 - 2C^2 \left( \eta^2 \operatorname{Re} u - \frac{1}{2} \|\eta\|_L^2 \right) \leq C^2 \|\eta\|_L^2 - 2C^2 \frac{1}{2} \|\eta\|_L^2 = 0$$

ce qui établit (24.19) et la proposition 24.

**25. DEFINITION.** — Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  dans un ouvert  $\omega$  de  $\mathbf{C}^n$ . On note

$$\begin{aligned} \|f\|_2 = & \sup_{z \in \omega} |f(z)| + \sup_{z \in \omega} \sum_{i=1}^n \left( \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(z) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y_i} f(z) \right| \right) \\ & + \sup_{z \in \omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(z) \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} f(z) \right| + \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} f(z) \right|. \end{aligned}$$

**26. PROPOSITION.** — Soit  $N$  une sous variété de dimension réelle  $k$  de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ . Alors, pour tout point  $p_0$  de  $N$ , il existe un voisinage  $\omega$  de  $p_0$  dans  $\mathbf{C}^n$ ,  $M$  et  $\tilde{M}$  deux sous variétés vérifiant les conclusions de la proposition 17 et une fonction  $f$ , non identiquement nulle, de classe  $C^\infty$  dans  $\omega$  tel que l'on ait

- a)  $f(z) = 0$  si  $z$  appartient à  $N \cap \omega$ ,
- b)  $\bar{\partial}f$  s'annule à l'ordre infini sur  $\tilde{M} \cap \omega$ ,

c) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega$ ,

$$(\text{grad}_L \text{Re } f)(p) = (\text{grad}_L \text{Im } f)(p) = 0,$$

d) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega$  et pour tout champ de vecteurs  $\xi$  de  $T(\partial D)$  qui s'écrit dans un voisinage de  $p$ , d'après la remarque 18,  $\xi = t\tau + \delta + \beta + \eta$ , avec  $\delta$ ,  $\beta$  et  $\eta$  dans  $T(\partial D)$  tels que, le long de  $M$ ,  $\delta$  et  $\beta$  appartiennent à  $T(M)$  et  $\eta$  à  $JT(M)$  et, le long de  $N$ ,  $\delta$  appartient à  $T(N)$  et  $\beta$  à  $T(M) \cap T(N)^\perp$ ,

$$(\xi^2 \text{Re } f)(p) \geq \|\beta_p\|_L^2 - \frac{1}{c_0} \|t(p)\tau_p + \eta_p\|_L^2 \|f\|_2 - \frac{2}{c_0} \|t(p)\tau_p + \eta_p\|_L \|\beta_p\|_L \|f\|_2$$

avec  $c_0$  la constante introduite dans la remarque 9.

*Preuve.* — Soit  $p_0$  un point de  $N$  et  $(\xi_i)$   $i = 1, \dots, n-1$  des champs de vecteurs tangents à  $\partial D$  vérifiant dans un voisinage de  $p_0$  les conclusions de la remarque 19.

Soit  $\tilde{f}$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\tilde{M} \cap \omega$ , à valeurs réelles, telle que l'on ait sur  $N \cap \omega$

$$\tilde{f} = 0, \tag{26.1}$$

$$\xi_i \tilde{f} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{26.2}$$

$$\tau \tilde{f} = 0. \tag{26.3}$$

D'après la proposition 14, il existe une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  dans  $\omega$  telle que l'on ait

$$f = \tilde{f} \quad \text{sur} \quad \tilde{M} \cap \omega, \tag{26.4}$$

$$\bar{\partial} f \text{ s'annule à l'ordre infini sur } \tilde{M} \cap \omega. \tag{26.5}$$

La fonction  $f$  vérifie donc les conclusions a) et b) de la proposition. Comme dans la preuve de la proposition 24, on déduit des équations de Cauchy Riemann vérifiées par  $f$  sur  $\tilde{M} \cap \omega$  que l'on a, en tout point de  $\tilde{M} \cap \omega$ ,

$$\begin{aligned} \chi \text{Re } f &= \tau \text{Im } f, & \xi_i \text{Re } f &= J\xi_i \text{Im } f \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \tau \text{Re } f &= -\chi \text{Im } f, & J\xi_i \text{Re } f &= -\xi_i \text{Im } f. \end{aligned} \tag{26.6}$$

Puisque  $\tilde{f}$  est à valeurs réelles sur  $\tilde{M} \cap \omega$ ,  $\text{Im } f$  est nulle sur  $\tilde{M} \cap \omega$  d'après (26.4). Les champs de vecteurs  $\tau$  et  $(\xi_i)$ ,

$i = 1, \dots, n-1$ , sont tangents à  $\tilde{M} \cap \omega$ ; on a donc sur  $\tilde{M} \cap \omega$

$$\tau \operatorname{Im} f = \xi_i \operatorname{Im} f = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (26.7)$$

De (26.2), (26.3), (26.4), (26.6) et (26.7) on déduit donc que, sur  $N \cap \omega$ , on a

$$\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} f = 0, \quad \operatorname{grad}_L \operatorname{Im} f = 0, \quad (26.8)$$

ce qui établit c).

Pour établir d), on remarque comme dans la preuve de la proposition 24 que si on pose, pour tout point  $p$  de  $N \cap \omega$  et pour tout couple de champs de vecteurs  $\zeta$  et  $\zeta'$  définis au voisinage de  $p$  et tangents à  $\partial D$ ,

$$K_p(\zeta, \zeta') = (\zeta' \zeta \operatorname{Re} f)(p), \quad (26.9)$$

$K_p$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $T_p(\partial D)$  dont le noyau contient  $T_p(N)$ .

La preuve de ce résultat reprend les idées développées dans le paragraphe 24 en utilisant (26.8) au lieu de (24.9). Elle n'est pas redonnée ici.

Si on pose

$$\begin{aligned} \zeta &= t\tau + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i J\xi_i, \\ \zeta' &= t'\tau + \sum_{i=1}^{n-1} a'_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} b'_i J\xi_i, \end{aligned}$$

on a, sur  $N \cap \omega$ , dans le cas particulier où  $\zeta$  et  $\zeta'$  sont tangents à  $\tilde{M}$ , c'est-à-dire où  $b_i$  et  $b'_i$  sont nuls,  $i = 1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} \zeta' \zeta \operatorname{Re} f &= tt' \tau^2 \operatorname{Re} f + \sum_{j=1}^{n-1} t a'_j \xi_j \tau \operatorname{Re} f + \sum_{j=1}^{n-1} t' a_j \tau \xi_j \operatorname{Re} f \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_i a'_j \xi_i \xi_j \operatorname{Re} f. \end{aligned}$$

On voit donc que l'on peut imposer à  $\tilde{f}$ , en sus des conditions (26.1), (26.2) et (26.3), de vérifier des conditions du second ordre au point  $p_0$  de  $N$ , à savoir

$$\tau^2 \tilde{f}(p_0) = \tau \xi_j \tilde{f}(p_0) = 0, \quad k+1 \leq j \leq n-1, \quad (26.11)$$

$$\xi_i \xi_j \tilde{f}(p_0) = \begin{cases} 0, & k+1 \leq i < j \leq n-1, \\ 2, & i = j, \quad k+1 \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (26.12)$$

La forme bilinéaire symétrique  $K_{p_0}$  en restriction à  $T_{p_0}(\tilde{M})$  a pour noyau  $T_{p_0}(N)$  et sa matrice est une matrice diagonale.

On peut donc conclure, quitte à restreindre le voisinage  $\omega$  de  $p_0$ , que l'on a, sur  $N \cap \omega$ , pour tout champ de vecteur  $\beta$  tangent à  $M$  et  $L$ -orthogonal à  $T(N)$  le long de  $N$

$$\beta^2 \operatorname{Re} f \geq \|\beta\|_L^2 \quad (26.13)$$

et pour tout couple  $\zeta, \zeta'$  de champs de vecteurs tangents à  $\partial D$

$$|\zeta' \zeta \operatorname{Re} f| \leq \frac{1}{c_0} \|\zeta\|_L \|\zeta'\|_L \|f\|_2. \quad (26.14)$$

Soit  $p$  un point de  $N \cap \omega$  et  $\zeta$  un champ de vecteurs tangent à  $\partial D$ . On sait, d'après la remarque 18, qu'il s'écrit au voisinage de  $p$   $\zeta = t\tau + \delta + \beta + \eta$  avec  $\delta, \beta$  et  $\eta$  tangents à  $\partial D$  tels que, le long de  $M$ ,  $\delta$  et  $\beta$  appartiennent à  $T(M)$  et  $\eta$  à  $JT(M)$  et, le long de  $N$ ,  $\delta$  appartient à  $T(N)$  et  $\beta$  à  $T(M) \cap T(N)^L$ .

On a donc, en chaque point  $p$  de  $N \cap \omega$ , puisque  $\delta$  est tangent à  $N$  le long de  $N$   $\zeta^2 \operatorname{Re} f = (t\tau + \beta + \eta)^2 \operatorname{Re} f$  et de là, d'après (26.13) et (26.14),

$$\zeta^2 \operatorname{Re} f \geq \|\beta\|_L^2 - \frac{1}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L^2 \|f\|_2 - \frac{1}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L \|\beta\|_L \|f\|_2$$

ce qui achève la preuve de la proposition 26.

**27. PROPOSITION.** — Soit  $N$  une sous-variété de dimension réelle  $k$  de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$ . Alors, pour tout point  $p_0$  de  $N$ , il existe un voisinage  $\omega$  de  $p_0$  dans  $\mathbb{C}^n$ , une fonction  $F$  de classe  $C^\infty$  dans  $\omega$  et une constante  $c_\omega$  strictement positive tels que l'on ait

- a)  $F(z) = 0$  si  $z$  appartient à  $N \cap \omega$ ,
- b)  $\bar{\partial}F$  s'annule à l'ordre infini sur  $\tilde{M} \cap \omega$ ,
- c) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega$ ,  $(\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} F)(p) = -\chi_p$ ,  
 $(\operatorname{grad}_L \operatorname{Im} F)(p) = -\tau_p$ ,
- d) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega$  et pour tout champ de vecteurs  $\zeta$  de  $T(\partial D)$  défini au voisinage de  $p$  on a

$$(\zeta^2 \operatorname{Re} F)(p) \geq c_\omega \|P_{T(N)^L}(\zeta_p)\|_L^2.$$

On rappelle que  $P_{T(N)^L}$  a été défini dans le paragraphe 11.

*Preuve.* — Soit  $p_0$  un point de  $N$ . D'après les propositions 24 et 26, il existe un voisinage  $\omega$  de  $p_0$  dans  $\mathbf{C}^n$  et deux fonctions  $u$  et  $f$  de classe  $C^\infty$  dans  $\omega$  telles que, si on pose

$$F = u + \lambda f, \quad \lambda \in \mathbf{R}^+$$

les conclusions a), b) et c) de la proposition soient vérifiées quel que soit le choix de  $\lambda$ .

Soit  $p$  un point de  $N \cap \omega$  et  $\zeta$  un champ de vecteurs tangent à  $\partial D$  défini au voisinage de  $p$ . On a, au voisinage de  $p$ , d'après la remarque 18,

$$\zeta = t\tau + \delta + \beta + \eta \quad (27.1)$$

avec  $\delta$ ,  $\beta$  et  $\eta$  tangents à  $\partial D$  tels que, le long de  $M$ ,  $\delta$  et  $\beta$  appartiennent à  $T(M)$  et  $\eta$  à  $JT(M)$  et, le long de  $N$ ,  $\delta$  appartient à  $T(N)$  et  $\beta$  à  $T(M) \cap T(N)^L$ . D'après les propositions 24 et 26, on a, sur  $N \cap \omega$

$$\begin{aligned} \zeta^2 \operatorname{Re} F &\geq \frac{1}{2} \|t\tau + \eta\|_L^2 \\ &+ \lambda \left( \|\beta\|_L^2 - \frac{1}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L^2 \|f\|_2 - \frac{2}{c_0} \|t\tau + \eta\|_L \|\beta\|_L \|f\|_2 \right). \end{aligned}$$

On rappelle que  $c_0$  est une constante ne dépendant que de  $D$ .

On pose  $a = \|t\tau + \eta\|_L$ ,  $b = \|\beta\|_L$ .

Alors, pour tout  $\epsilon$  strictement positif, d'après l'inégalité  $2ab \leq \epsilon^2 a^2 + \frac{b^2}{\epsilon^2}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \zeta^2 \operatorname{Re} F &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{c_0} \|f\|_2 - \lambda \frac{\epsilon^2}{c_0} \|f\|_2 \right) \|t\tau + \eta\|_L^2 \\ &+ \lambda \left( 1 - \frac{1}{\epsilon^2 c_0} \|f\|_2 \right) \|\beta\|_L^2. \end{aligned}$$

On choisit maintenant  $\epsilon$  pour que l'on ait

$$\left( 1 - \frac{1}{\epsilon^2 c_0} \|f\|_2 \right) \geq \frac{1}{2},$$

et,  $\epsilon$  étant fixé, on choisit  $\lambda > 0$  pour que

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{c_0} \|f\|_2 - \frac{\lambda \epsilon^2}{c_0} \|f\|_2 \right) \geq \frac{1}{4}.$$

Alors on a

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geq \frac{1}{4} \|t\tau + \eta\|_L^2 + \frac{\lambda}{2} \|\beta\|_L^2.$$

Si on pose maintenant

$$c_\omega = \inf \left( \frac{1}{4}, \frac{\lambda}{2} \right)$$

on a donc

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geq c_\omega (\|t\tau + \eta\|_L^2 + \|\beta\|_L^2)$$

et, puisque la décomposition (27.1) de  $\zeta$  est  $L$  orthogonale,

$$\zeta^2 \operatorname{Re} F \geq c_\omega \|t\tau + \eta + \beta\|_L^2$$

où  $t\tau + \eta + \beta$  n'est autre que  $P_{T(N)L}(\zeta)$ .

**28. PROPOSITION.** — Soit  $K$  un compact de  $N$  et  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$  des ouverts dans  $\mathbf{C}^n$  qui vérifient les conditions de la remarque 19 et qui forment un recouvrement fini de  $K$ . Alors, il existe des fonctions  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$  de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbf{C}^n$ , à valeurs complexes, telles que

- a) pour tout entier  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq g$ ,  $\alpha_\ell$  soit à support compact dans  $\omega_\ell$ ,
- b)  $\operatorname{Im} \alpha_\ell = 0$  sur  $\tilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$  et  $0 \leq \operatorname{Re} \alpha_\ell \leq 1$  sur  $N \cap \omega_\ell$ ,
- c)  $\sum_{\ell=1}^g \alpha_\ell = 1$  sur  $K$ ,
- d)  $\bar{\partial} \alpha_\ell$  s'annule à l'ordre infini sur  $\tilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$ ,
- e)  $\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \alpha_\ell$  appartient à  $T(N)$  en tout point de  $N \cap \omega_\ell$ .

*Preuve.* — Pour construire ces fonctions, on recouvre  $K$  par une famille finie d'ouverts  $\omega_\ell$  de  $\mathbf{C}^n$ ,  $1 \leq \ell \leq g$  vérifiant les conditions de la remarque 19. Il existe alors des fonctions  $(h_\ell)$ ,  $1 \leq \ell \leq g$ , de classe  $C^\infty$  sur  $N$ , à valeurs réelles dans l'intervalle  $[0, 1]$ , à support dans  $\omega_\ell \cap N$  qui vérifient

$$\sum_{\ell=1}^g h_\ell = 1 \text{ sur } K. \quad (28.1)$$

On désigne, pour chaque entier  $\ell$ , par  $\tilde{h}_\ell$  une fonction à valeurs réelles, de classe  $C^\infty$  sur  $\tilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$ , à support dans  $\tilde{M}_\ell \cap \omega_\ell$  telle que l'on ait, sur  $N \cap \omega_\ell$ ,

$$\tilde{h}_\ell = h_\ell, \quad (28.2)$$

$$\xi_i \tilde{h}_\ell = 0, \quad i = k + 1, \dots, n - 1, \quad (28.3)$$

$$\tau \tilde{h}_\ell = 0.$$

D'après la proposition 14, il existe une fonction  $\alpha_\varrho$  à valeurs complexes, de classe  $C^\infty$  dans  $\omega_\varrho$ , à support dans  $\omega_\varrho$  telle que l'on ait

$$\alpha_\varrho = \tilde{h}_\varrho \text{ sur } \tilde{M}_\varrho \cap \omega_\varrho, \quad (28.5)$$

$$\bar{\partial}\alpha_\varrho \text{ s'annule à l'ordre infini sur } \tilde{M}_\varrho \cap \omega_\varrho. \quad (28.6)$$

On a donc, sur  $\tilde{M}_\varrho \cap \omega_\varrho$ ,

$$\begin{aligned} \chi \operatorname{Re} \alpha_\varrho &= \tau \operatorname{Im} \alpha_\varrho, & \xi_i \operatorname{Re} \alpha_\varrho &= J\xi_i \operatorname{Im} \alpha_\varrho, \\ \tau \operatorname{Re} \alpha_\varrho &= -\chi \operatorname{Im} \alpha_\varrho, & J\xi_i \operatorname{Re} \alpha_\varrho &= -\xi_i \operatorname{Im} \alpha_\varrho. \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (28.7)$$

Puisque  $\operatorname{Im} \alpha_\varrho$  est nulle sur  $\tilde{M}_\varrho \cap \omega_\varrho$ , on a

$$\tau \operatorname{Im} \alpha_\varrho = \xi_i \operatorname{Im} \alpha_\varrho = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (28.8)$$

et, puisque  $\operatorname{Re} \alpha_\varrho$  est égale à  $\tilde{h}_\varrho$  sur  $\tilde{M}_\varrho \cap \omega_\varrho$ , on a sur  $N \cap \omega_\varrho$

$$\xi_i \operatorname{Re} \alpha_\varrho = 0 \quad i = k+1, \dots, n-1, \quad (28.9)$$

$$\tau \operatorname{Re} \alpha_\varrho = 0. \quad (28.10)$$

On déduit de là que le long de  $N \cap \omega_\varrho$ ,  $\operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \alpha_\varrho$  appartient à  $T(N)$ .

**29. PROPOSITION.** — Soit  $\omega_\varrho$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  et  $\alpha_\varrho$  une fonction de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbf{C}^n$ , à valeurs complexes, vérifiant les conclusions a), b), d) et e) de la proposition 18. Soit  $F_\varrho$  une fonction vérifiant dans  $\omega_\varrho$  les conclusions de la proposition 27. Alors

a)  $\alpha_\varrho F_\varrho$  est de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbf{C}^n$  à support dans  $\omega_\varrho$ ,

b)  $\bar{\partial}\alpha_\varrho F_\varrho$  s'annule à l'ordre infini sur  $N \cap \omega_\varrho$ ,

c) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega_\varrho$ , on a

$$\operatorname{grad}_L (\operatorname{Re} \alpha_\varrho F_\varrho) (p) = -\alpha_\varrho(p) \chi_p,$$

d) pour tout  $p$  de  $N \cap \omega_\varrho$  et pour tout champ de vecteurs  $\xi$  de  $T(\partial D)$  défini au voisinage de  $p$  on a

$$\begin{aligned} (\xi^2 \operatorname{Re} (\alpha_\varrho F_\varrho)) (p) &= \alpha_\varrho(p) (\xi^2 \operatorname{Re} F_\varrho) (p) \\ &\quad - 2 \langle \xi_p, \tau_p \rangle_L P_{T(N)} (J\xi_p) \operatorname{Re} \alpha_\varrho. \end{aligned}$$

*Preuve.* — Puisque  $\alpha_\varrho$  est à support dans  $\omega_\varrho$ , on peut prolonger  $\alpha_\varrho F_\varrho$  par 0 en dehors de  $\omega_\varrho$ .  $\bar{\partial}\alpha_\varrho$  et  $\bar{\partial}F_\varrho$  s'annulent



à l'ordre infini sur  $N \cap \omega_\varrho$ , on a donc

$$\bar{\partial}\alpha_\varrho F_\varrho = 0 \text{ à l'ordre infini sur } N \cap \omega_\varrho. \quad (29.1)$$

On a  $\operatorname{Re} \alpha_\varrho F_\varrho = \operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Re} F_\varrho - \operatorname{Im} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Im} F_\varrho$  et, en tout point de  $N \cap \omega_\varrho$ ,

$$\operatorname{Re} F_\varrho = \operatorname{Im} F_\varrho = \operatorname{Im} \alpha_\varrho = 0 \text{ et } \operatorname{Re} \alpha_\varrho = \alpha_\varrho. \quad (29.2)$$

On déduit donc de là que l'on a, sur  $N \cap \omega_\varrho$ , d'après c) de la proposition 27,

$$\operatorname{grad} \operatorname{Re} \alpha_\varrho F_\varrho = \operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{grad} \operatorname{Re} F_\varrho = -\operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \chi = -\alpha_\varrho \cdot \chi.$$

Soit  $p$  un point de  $N \cap \omega_\varrho$  et  $\zeta$  un champ de vecteurs tangent à  $\partial D$  défini au voisinage de  $p$ . On a

$$\zeta^2(\operatorname{Re} \alpha_\varrho F_\varrho) = \zeta^2(\operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Re} F_\varrho) - \zeta^2(\operatorname{Im} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Im} F_\varrho). \quad (29.3)$$

On évalue tout d'abord le premier terme de cette différence

$$\begin{aligned} \zeta^2(\operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Re} F_\varrho) &= \operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \zeta^2 \operatorname{Re} F_\varrho + 2\zeta \operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \zeta \operatorname{Re} F_\varrho \\ &\quad + \operatorname{Re} F_\varrho \cdot \zeta^2 \operatorname{Re} \alpha_\varrho. \end{aligned} \quad (29.4)$$

Mais, sur  $N \cap \omega_\varrho$ , on a

$$\zeta \operatorname{Re} F_\varrho = \langle \zeta, \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} F_\varrho \rangle_L = \langle \zeta, -\chi \rangle_L = 0. \quad (29.5)$$

On déduit donc de (29.2) et de (29.5) que, sur  $N \cap \omega_\varrho$ , on a

$$\zeta^2(\operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Re} F_\varrho) = \operatorname{Re} \alpha_\varrho \cdot \zeta^2 \operatorname{Re} F_\varrho = \alpha_\varrho \cdot \zeta^2 \operatorname{Re} F_\varrho. \quad (29.6)$$

Le deuxième terme dans (29.3) donne

$$\begin{aligned} \zeta^2(\operatorname{Im} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Im} F_\varrho) &= \operatorname{Im} \alpha_\varrho \cdot \zeta^2 \operatorname{Im} F_\varrho + 2\zeta \operatorname{Im} \alpha_\varrho \cdot \zeta \operatorname{Im} F_\varrho \\ &\quad + \operatorname{Im} F_\varrho \cdot \zeta^2 \operatorname{Im} \alpha_\varrho \end{aligned}$$

et donc, d'après (29.2),

$$\zeta^2(\operatorname{Im} \alpha_\varrho \cdot \operatorname{Im} F_\varrho) = 2\zeta \operatorname{Im} \alpha_\varrho \cdot \zeta \operatorname{Im} F_\varrho. \quad (29.7)$$

D'après les équations de Cauchy-Riemann vérifiées par  $\alpha_\varrho$  sur  $N \cap \omega_\varrho$  et e) de la proposition 28, on a

$$\begin{aligned} \zeta \operatorname{Im} \alpha_\varrho &= J\zeta \operatorname{Re} \alpha_\varrho = \langle J\zeta, \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \alpha_\varrho \rangle_L \\ &= \langle P_{T(N)}(J\zeta), \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \alpha_\varrho \rangle_L = P_{T(N)}(J\zeta) \operatorname{Re} \alpha_\varrho. \end{aligned} \quad (29.8)$$

D'après le c) de la proposition 27, on a

$$\zeta \operatorname{Im} F_\varrho = -\langle \zeta, \tau \rangle_L. \quad (29.9)$$

On déduit de (29.7), (29.8) et (29.9) que l'on a

$$\zeta^2 (\text{Im } \alpha_\varrho \cdot \text{Im } F_\varrho) = -2 \langle \zeta, \tau \rangle_L \cdot P_{T(N)}(J\zeta) \text{Re } \alpha_\varrho \quad (29.10)$$

et donc

$$\zeta^2 (\text{Re } \alpha_\varrho F_\varrho) = \alpha_\varrho \zeta^2 \text{Re } F_\varrho - 2 \langle \zeta, \tau \rangle_L \cdot P_{T(N)}(J\zeta) \text{Re } \alpha_\varrho$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

**30. PROPOSITION.** — Soit  $N$  une sous-variété de dimension réelle  $k$  de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$  et  $W$  un ouvert relativement compact de  $N$ .

Alors il existe un ouvert  $\Omega_1$  dans  $\mathbf{C}^n$ , une fonction  $\mathfrak{F}$  de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega_1$ , à valeurs complexes et une constante  $c_1$  strictement positive tels que l'on ait

- a)  $\Omega_1 \cap N = W$ ,
- b)  $\mathfrak{F} = 0$  sur  $\Omega_1 \cap N$ ,
- c)  $\bar{\partial}\mathfrak{F}$  s'annule à l'ordre infini sur  $\Omega_1 \cap N$ ,
- d)  $\text{Re } \mathfrak{F}(z) \geq c_1 d(z, N)^2$  pour tout  $z$  de  $\Omega_1 \cap \bar{D}$ .

*Preuve.* — On applique à  $\bar{W}$  la proposition 28 et à chaque ouvert  $\omega_\varrho$ ,  $1 \leq \varrho \leq g$  du recouvrement de  $\bar{W}$  ainsi obtenu la proposition 29. On peut supposer en outre que chaque  $\omega_\varrho$  vérifie les conclusions de la proposition 27.

Alors, si on note  $\mathfrak{F}$  la fonction définie dans  $\mathbf{C}^n$  par

$$\mathfrak{F} = \sum_{\varrho=1}^g \alpha_\varrho F_\varrho, \quad (30.1)$$

par construction,  $\mathfrak{F}$  vérifie b) et c).

Il reste donc à vérifier d).

D'après c) de la proposition 28, et d'après c) et d) de la proposition 29, on a

$$\text{grad}_L \text{Re } \mathfrak{F} = -\chi \text{ sur } W \quad (30.2)$$

et, pour tout point  $p$  de  $W$  et pour tout champ de vecteurs  $\zeta$  tangent à  $\partial D$  défini au voisinage de ce point;

$$\begin{aligned} \zeta^2 \text{Re } \mathfrak{F} &= \sum_{\varrho=1}^g \zeta^2 \text{Re } \alpha_\varrho F_\varrho \\ &= \sum_{\varrho=1}^g \alpha_\varrho \cdot \zeta^2 \text{Re } F_\varrho - 2 \langle \zeta, \tau \rangle_L \sum_{\varrho=1}^g P_{T(N)}(\zeta) \text{Re } \alpha_\varrho. \end{aligned}$$

Mais, puisque  $P_{T(N)}(\xi)$  ne dépend pas de  $\varrho$ , on a, sur  $W$ ,

$$\sum_{\varrho=1}^g P_{T(N)}(\xi) \operatorname{Re} \alpha_{\varrho} = P_{T(N)}(\xi) \left( \sum_{\varrho=1}^g \operatorname{Re} \alpha_{\varrho} \right) = 0$$

car  $P_{T(N)}(\xi)$  est tangent à  $N$  et  $\sum_{\varrho=1}^g \operatorname{Re} \alpha_{\varrho}$  est égale à 1 sur  $W$ .

On déduit donc, d'après d) de la proposition 27, que l'on a sur  $W$ ,

$$\xi^2 \operatorname{Re} \mathfrak{F} = \sum_{\varrho=1}^g \alpha_{\varrho} \cdot \xi^2 \operatorname{Re} F_{\varrho} \geq \sum_{\varrho=1}^g c_{\omega_{\varrho}} \alpha_{\varrho} \|P_{T(N)L}(\xi)\|_L^2.$$

De là, si on pose

$$d = \inf_{1 \leq \varrho \leq g} c_{\omega_{\varrho}},$$

on a, sur  $W$ ,

$$\xi^2 \operatorname{Re} \mathfrak{F} \geq d \|P_{T(N)L}(\xi)\|_L^2. \quad (30.3)$$

On revient maintenant au produit scalaire et à la norme euclidienne canonique sur  $\mathbf{C}^n$  identifié à  $\mathbf{R}^{2n}$ .

D'après (30.2), (30.3) et la remarque 10 qui définit le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ , on a, en tout point de  $W$ ,

$$\operatorname{grad} \operatorname{Re} \mathfrak{F} = \operatorname{grad}_L \operatorname{Re} \mathfrak{F} = -\chi \quad (30.4)$$

$$\text{et} \quad \xi^2 \operatorname{Re} \mathfrak{F} \geq d c_0 \|P_{T(N)L}(\xi)\|^2 \geq d c_0 \|\Pi_{T(N)^\perp}(\xi)\|^2 \quad (30.5)$$

où  $\Pi_{T(N)^\perp}$  désigne le projecteur orthogonal de  $T(\mathbf{C}^n)$  sur  $T(N)^\perp$ , l'orthogonal de  $T(N)$ .

Soit  $\Omega_1$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  et  $\Pi$  une application de classe  $C^\infty$  de  $\Omega_1$  dans  $\mathbf{C}^n$  tels que l'on ait

$$\Omega_1 \cap N = W, \quad (30.6)$$

(30.7) pour chaque  $z$  de  $\Omega_1$ ,  $\Pi(z)$  est une projection orthogonale de  $z$  sur  $\partial D$  et appartient à  $\Omega_1 \cap \partial D$ ,

(30.8)  $\Pi(z) = z$  si  $z$  appartient à  $\Omega_1 \cap \partial D$ .

On applique la formule de Taylor sur  $\partial D$  le long d'une courbe intégrale d'un champ de vecteurs  $\xi$  tangent à  $\partial D$  et orthogonal à  $N$  sur  $W$ . Alors, d'après (30.4) et (30.5), quitte à restreindre  $\Omega_1$  en conservant la propriété  $\Omega_1 \cap N = W$ , on a, en tout point  $z$  de  $\Omega_1 \cap \partial D$ ,

$$\operatorname{Re} \mathfrak{F}(z) \geq \frac{1}{2} d c_0 d(z \cdot N)^2. \quad (30.9)$$

Maintenant, quitte à restreindre à nouveau  $\Omega_1$  avec la même précaution  $\Omega_1 \cap N = W$ , on peut, toujours d'après (30.4), supposer que l'on a, en tout point  $z$  de  $\Omega_1 \cap \partial D$ ,

$$(\text{grad Re } \mathfrak{F}(z), -\chi_z) \geq \frac{1}{2}.$$

De cette inégalité, on déduit, en appliquant la formule de Taylor et en réduisant éventuellement  $\Omega_1$  que l'on a, pour tout  $z$  de  $\Omega_1 \cap \bar{D}$ ,

$$\text{Re } \mathfrak{F}(z) \geq \text{Re } \mathfrak{F}(\Pi(z)) + \frac{1}{4} \|z - \Pi(z)\|. \quad (30.10)$$

De (30.9) et (30.10), on conclut, pour tout  $z$  de  $\Omega_1 \cap \bar{D}$ ,

$$\text{Re } \mathfrak{F}(z) \geq \frac{1}{2} d c_0 [d(\Pi(z), N)]^2 + \frac{1}{4} \|z - \Pi(z)\|.$$

Il existe donc une constante  $c_1$  telle que, pour tout  $z$  de  $\Omega_1 \cap \bar{D}$ , on ait  $\text{Re } \mathfrak{F}(z) \geq c_1 d(z, N)^2$ .

**31. PROPOSITION.** — Soit  $N$  une sous variété de dimension réelle  $k$  de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$  et soit  $K$  un compact de  $N$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $\Omega_2$  de  $K$  dans  $\mathbf{C}^n$ , une fonction  $\mathfrak{S}$  de classe  $C^\infty$  dans  $\Omega_2$ , à valeurs complexes et une constante  $c_2$  strictement positive tels que l'on ait

- a)  $\mathfrak{S}(z) = 0$  sur  $N \cap \Omega_2$  si et seulement si  $z$  appartient à  $K$ ,
- b)  $\bar{\partial} \mathfrak{S}$  s'annule à l'ordre infini sur  $N \cap \Omega_2$ ,
- c)  $\text{Re } \mathfrak{S}(z) \geq -c_2 d(z, N)^2$  pour tout  $z$  de  $\Omega_2$ .

*Preuve.* — Soit  $z$  un point de  $\mathbf{C}^n$ ; on dit que  $z_0$  est une L-projection de  $z$  sur  $N$  si et seulement si  $z_0$  appartient à  $N$  et  $z - z_0$  appartient à  $T_{z_0}(N)^\perp$ .

Une application du théorème des fonctions implicites, les remarques 9 et 10 et un argument de compacité montrent qu'il existe un voisinage ouvert  $\Omega_2$  de  $K$  dans  $\mathbf{C}^n$ , relativement compact, une application  $P_N$  de classe  $C^\infty$  de  $\Omega_2$  dans  $N \cap \Omega_2$  et une constante  $e$  tels que l'on ait

$$(31.1) \text{ pour chaque } z \text{ de } \Omega_2, P_N(z) \text{ est une L-projection de } z \text{ sur } N \text{ et appartient à } \Omega_2 \cap N,$$

$$(31.2) P_N(z) = z \text{ si } z \text{ appartient à } \Omega_2 \cap N,$$

$$(31.3) \quad d(z, N)^2 \geq e \|z - P_N(z)\|^2 \quad \text{pour tout } z \text{ de } \Omega_2.$$

Soit  $s$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $N$ , positive, à support compact  $A$  telle que l'on ait

$$(31.4) \quad s(z) = 0 \quad \text{sur } \Omega_2 \cap N \text{ si et seulement si } z \text{ appartient à } K.$$

On utilise une partition  $h_\varrho$  de l'unité subordonnée à un recouvrement fini de  $A$  par des ouverts  $(\omega_\varrho)$ ,  $1 \leq \varrho \leq g$  vérifiant les conditions de la remarque 19 et on pose  $k_\varrho = s h_\varrho$  sur  $\omega_\varrho \cap N$ .

On a alors  $s = \sum_{\varrho=1}^g k_\varrho$ . En reprenant les idées développées dans la preuve de la proposition 28 on prolonge chaque fonction  $k_\varrho$  en une fonction  $\mathcal{K}_\varrho$  à valeurs complexes de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{C}^n$ , à support dans  $\omega_\varrho$ . On obtient alors une fonction  $\mathfrak{S} = \sum_{\varrho=1}^g \mathcal{K}_\varrho$  de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{C}^n$ , à support compact, telle que l'on ait

$$(31.5) \quad \mathfrak{S} = s \quad \text{sur } N,$$

$$(31.6) \quad \bar{\partial}\mathfrak{S} \text{ s'annule à l'ordre infini sur } N,$$

$$(31.7) \quad \text{grad}_L \text{Re } \mathfrak{S} \text{ appartient à } T(N) \text{ en chaque point de } N.$$

Soit  $z$  un point de  $\Omega_2$ . On applique la formule de Taylor à  $\text{Re } \mathfrak{S}$  entre  $z$  et  $P_N(z)$ . On a

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathfrak{S}(z) &= \text{Re } \mathfrak{S}(P_N(z)) + \langle \text{grad}_L \text{Re } \mathfrak{S}(P_N(z)), z - P_N(z) \rangle_L \\ &\quad + (\text{Re } \mathfrak{S})'' [P_N(z) + \theta(z - P_N(z))] (z - P_N(z), z - P_N(z)) \end{aligned}$$

où  $\theta$  est un réel de  $]0, 1[$  et  $(\text{Re } \mathfrak{S})''(x)$  désigne la 2-forme hessienne de  $\text{Re } \mathfrak{S}$  évaluée au point  $x$ .

D'après (31.7) et (31.5) et parce que  $s$  est positive sur  $N$  on a

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathfrak{S}(z) &\geq (\text{Re } \mathfrak{S})'' [P_N(z) + \theta(z - P_N(z))] (z - P_N(z), z - P_N(z)) \\ &\geq - \|\text{Re } \mathfrak{S}\|_2 \|z - P_N(z)\|^2. \end{aligned}$$

De (31.3) et (31.8) on déduit

$$\text{Re } \mathfrak{S}(z) \geq - \frac{\|\text{Re } \mathfrak{S}\|_2}{e} d(z, N)^2,$$

ce qui achève la preuve de la proposition si on pose

$$c_2 = \frac{\|\text{Re } \mathfrak{S}\|_2}{e} + 1.$$

32. FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION FONDAMENTALE. — Soit  $N$  une sous-variété de  $\partial D$  telle que, en chaque point  $p$  de  $N$ , on ait  $T_p(N) \subset T_p^c(\partial D)$  et soit  $K$  un compact de  $N$ .

On applique la proposition 30 à un ouvert  $W$  relativement compact de  $N$  contenant  $K$ , puis, la proposition 31 au compact  $K$ . On considère alors la fonction  $G$  définie dans  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$  par  $G = \mathfrak{F} + \frac{1}{2} \frac{c_1}{c_2} \mathfrak{S}$ . Si on pose  $c = \frac{1}{2} c_1$ , la fonction  $G$ , l'ouvert  $\Omega$  et la constante  $c$  vérifient les conclusions de la proposition 20.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.I. ARNOLD, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Editions MIR (1976), Moscou.
- [2] D. BURNS, and E.L. STOUT, Extending functions from submanifolds of the boundary, *Duke Math. J.*, 43 (1976), 391-404.
- [3] G.B. FOLLAND and J.J. KOHN, The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex, Princeton University Press (1972).
- [4] G.B. FOLLAND and E.M. STEIN, Estimates for the  $\bar{\partial}_b$  complex and analysis on the Heisenberg group, *Com. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 429-522.
- [5] W. GUILLEMIN, Géométrie symplectique et physique mathématique, Colloque Intern. C.N.R.S, Aix en Provence (1974).
- [6] M. HAKIM et N. SIBONY, Ensembles pics dans des domaines strictement pseudoconvexes, *Duke Math. J.*, 45 (1978), 601-617.
- [7] F.R. HARVEY and R.O. WELLS, Holomorphic approximation and hyperfunction theory on a  $C^1$  totally real submanifold of a complex manifold, *Math. Ann.*, 197 (1972), 287-318.
- [8] G.M. HENKIN, et A.E. TUMANOV, C.R. Ecole d'été à Drogobytch (1974).
- [9] S. KOBAYASHI, Transformation groups in differential geometry, Springer-Verlag (1972), Appendice 1.

- [10] J.J. KOHN, Global regularity for  $\bar{\partial}$  on weakly pseudoconvex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181 (1973), 273-292.
- [11] A. NAGEL, Smooth zero sets and interpolation sets for some algebras of holomorphic functions on strictly pseudoconvex domains, *Duke Math. J.*, 43 (1976), 323-348.
- [12] W. RUDIN, Peak interpolation sets of classe  $C^1$ , *Pacific J. Math.*, 75 (1978), 267-279.
- [13] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds, *Regional conference series in mathematics* 29, Amer. Math. Soc.

Manuscrit reçu le 26 juin 1978  
révisé le 13 septembre 1978.

J. CHAUMAT & A.M. CHOLLET,  
Université de Paris-Sud  
Centre d'Orsay  
Mathématiques  
Bâtiment 425  
91405 Orsay Cedex.