

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-CLAUDE TOUGERON

**Sur les fonctions C^∞ et les distributions qui
appartiennent à la classe de Bernstein**

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 3 (1979), p. 125-161

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_125_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FONCTIONS C^∞ ET LES DISTRIBUTIONS QUI APPARTIENNENT A LA CLASSE DE BERNSTEIN

par Jean-Claude TOUGERON

Introduction.

Soit $A_n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}[x; \partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynômes dans \mathbf{R}^n . Une distribution T dans un ouvert de \mathbf{R}^n est de Bernstein si $T = 0$ ou si la dimension de $A_n(\mathbf{C}) \cdot T$ sur $A_n(\mathbf{C})$ est égale à n . Soient \mathcal{E}_n l'anneau des germes de fonctions complexes C^∞ à l'origine de \mathbf{R}^n , \mathcal{N}_n l'anneau des germes de fonctions de Nash complexes à l'origine de \mathbf{R}^n . On note \mathcal{B}'_n l'ensemble des germes de distributions de Bernstein à l'origine de \mathbf{R}^n et l'on pose $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}'_n \cap \mathcal{E}_n$; \mathcal{B}_n est un anneau contenant \mathcal{N}_n et \mathcal{B}'_n est un module sur \mathcal{B}_n . Le but de cet article est la démonstration des deux résultats suivants :

THEOREME 1. — \mathcal{B}'_n est un module injectif sur \mathcal{N}_n .

THEOREME 2. — $\mathcal{E}_n | \mathcal{B}_n$ est un module plat sur \mathcal{N}_n .

Dans les paragraphes 1 et 2 nous étudions les propriétés de permanence des fonctions et distributions de Bernstein. Nous avons besoin de résultats globaux sur des ouverts semi-Nash de \mathbf{R}^n . Les démonstrations sont très élémentaires; la notion de famille de Bernstein, notion qui remplace en quelque sorte celle de limite pour les espaces de distributions, joue un rôle essentiel. Dans le paragraphe 3, nous démontrons qu'une distribution de Bernstein T dans un ouvert semi-Nash de \mathbf{R}^n peut être prolongée en une distribution de Bernstein, si bien entendu T est prolongeable. Ce résultat utilise le théorème de désingularisation d'Hironaka. Le théo-

rème 1 (§ 4) apparaît alors comme une conséquence facile de ce théorème de prolongement.

Dans le paragraphe 5, nous démontrons le théorème de division d'une fonction C^∞ de Bernstein par le polynôme générique, avec reste et quotient de Bernstein (nous suivons la méthode de Łojasiewicz, améliorée par un lemme de J. Mather). Nous déduisons (§ 6) le théorème 2 de ce théorème de division, en utilisant un lemme qui remédie à la non unicité du quotient et du reste dans le théorème de préparation. Cette démonstration, contrairement aux démonstrations standard du théorème de division des fonctions C^∞ par des fonctions analytiques, n'utilise pas de théorème de prolongement style Whitney (un tel théorème est d'ailleurs faux pour les fonctions de Bernstein).

1. Fonctions et distributions de Bernstein.

Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro ; posons $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$; et soit $A_n(K) = K[x, \partial]$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynômes. Soit Γ_v ($v \geq 0$) le sous-ensemble de $A_n(K)$ formé des opérateurs différentiels de degré total $\leq v$. Les Γ_v forment une filtration croissante de $A_n(K)$ et le gradué associé :

$$gr_\Gamma A_n(K) = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1/\Gamma_0 \oplus \dots \oplus \Gamma_{v+1}/\Gamma_v \oplus \dots$$

est isomorphe à l'anneau des polynômes en les variables $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, $\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n$ formant une base sur K de Γ_1/Γ_0 .

Soit $M \neq 0$ un module à gauche de type fini sur $A_n(K)$, engendré sur $A_n(K)$ par un espace vectoriel M_0 de dimension finie sur K ; les $\Gamma_v \cdot M_0$ forment une filtration croissante de M et le gradué associé :

$$\Gamma_0 \cdot M_0 \oplus \Gamma_1 \cdot M_0/\Gamma_0 \cdot M_0 \oplus \dots \oplus \Gamma_{v+1} \cdot M_0/\Gamma_v \cdot M_0 \oplus \dots$$

est un module gradué de type fini sur $gr_\Gamma A_n(K)$. On sait que la fonction $v \rightarrow \dim_K \Gamma_v \cdot M_0$ est polynomiale en v pour $v \gg 0$:

$$\dim_K \Gamma_v \cdot M_0 = \frac{\mu}{d!} v^d + \text{termes de } d^0 < d.$$

Le terme dominant ne dépend pas du M_0 choisi : $\mu = \mu(M)$ est

la multiplicité (un entier positif) du module M et $d = d(M)$ la dimension de M . On sait que $0 < d \leq 2n$; en fait, d'après un résultat de Bernstein (cf. [1]) : $n \leq d \leq 2n$. Le module M est un *module de Bernstein* si $M = 0$ ou $d(M) = n$. Tout module de Bernstein est isomorphe à $A_n(K)/L$ où L désigne un idéal à gauche de $A_n(K)$.

PROPOSITION 1.1. — Soit M un module à gauche sur $A_n(K)$ engendré par un élément T . Considérons les conditions suivantes :

- (i) M est un module de Bernstein.
- (ii) Si $K(x)$ désigne le corps des fractions de $K[x]$, $M \otimes_{K[x]} K(x)$ est un espace vectoriel de dimension finie $\nu(M)$ sur $K(x)$.
- (iii) Il existe $a \in K[x] \setminus \{0\}$, des $b_{i,\omega} \in K[x]$ et un entier p tels que :

$$a \cdot \frac{\partial^p T}{\partial x_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega T, \quad i = 1, \dots, n.$$

Alors (i) \implies (ii) \iff (iii) et $\nu(M) \leq \mu(M)$. Si a n'est pas diviseur de zéro dans M (i.e. $a \cdot m = 0, m \in M \implies m = 0$), (iii) \implies (i).

Preuve. — (i) \implies (ii) soient $m_1, \dots, m_\nu \in M$ tels que les $m_i \otimes 1$ soient linéairement indépendants sur $K(x)$. On a $m_i = D_i \cdot T$, avec $D_i \in A_n(K)$. Posons $v_0 = \sup d^0 D_i, i = 1, \dots, \nu$. Alors $\Gamma_{v_0} \cdot T$ contient tous les $P_j \cdot m_i$, avec $P_j \in K[x]$ et $d^0 P_j \leq v - v_0$, d'où $\dim_K \Gamma_{v_0} \cdot T \geq \nu \cdot \binom{n + v - v_0}{n}$; ainsi $\mu(M) \geq \nu$, c.q.f.d.

(ii) \implies (iii) : évident.

(iii) \implies (i) si a n'est pas diviseur de zéro dans M . En effet, posons $q_0 = np - n + 1$; si b est une puissance convenable de a , on a en dérivant les relations (iii) :

$$b \cdot \partial^\mu T = \sum_{|\omega| < q_0} b_{\mu,\omega} \partial^\omega T \quad (b_{\mu,\omega} \in K[x])$$

pour tout $\mu, |\mu| = q_0$. En dérivant ces dernières relations, on a pour tout $\mu, |\mu| \geq q_0$:

$$b^{|\mu| - q_0 + 1} \cdot \partial^\mu T = \sum_{|\omega| < q_0} b_{\mu,\omega} \partial^\omega T$$

avec $b_{\mu,\omega} \in K[x]$ et $d^0 b_{\mu,\omega} \leq C|\mu|$ (C constante indépendante de μ et ω). Ainsi, $\forall \mu \in \mathbf{N}^n, \mu' \in \mathbf{N}^n, |\mu| + |\mu'| = v$:

$$b^{v-q_0+1} \cdot x^{\mu'} \cdot \partial^\mu T = \sum_{|\omega| < q_0} b^{|\mu'|} \cdot x^{\mu'} \cdot b_{\mu,\omega} \cdot \partial^\omega T$$

où $b^{|\mu'|} \cdot x^{\mu'} \cdot b_{\mu,\omega}$ est un polynôme de degré $\leq C' \cdot v$. L'élément b n'étant pas diviseur de zéro dans M , la dimension de $\Gamma_v \cdot T$ est $\leq \binom{n+q_0-1}{n} \binom{n+C' \cdot v}{n}$, ce qui entraîne le résultat.

DEFINITION 1.2. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n . Une distribution $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$ est une distribution de Bernstein si $A_n(\mathbf{C}) \cdot T$ est un module de Bernstein sur $A_n(\mathbf{C})$. On note $\mathcal{B}'(\Omega)$ l'ensemble des $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$ qui sont de Bernstein et l'on pose $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}'(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$; $\mathcal{B}^\omega(\Omega) = \mathcal{B}'(\Omega) \cap \mathcal{A}(\Omega)$ ($\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{A}(\Omega)$ désignent les anneaux de fonctions complexes respectivement C^∞ et analytiques dans l'ouvert Ω).

Une fonction $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ est une fonction de Nash, si f est solution d'une équation : $a_p f^p + \dots + a_0 = 0$, $a_i \in \mathbf{C}[x]$ et $a_p \neq 0$. On note $\mathcal{N}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de Nash dans Ω ; $\mathcal{N}(\Omega)$ est contenu dans $\mathcal{A}(\Omega)$ et contient $\mathbf{C}[x]$; en outre, $\mathcal{N}(\Omega)$ est un anneau, intègre si Ω est connexe (et même régulier de dimension n , si Ω vérifie certaines conditions très faibles, cf. [10]).

PROPOSITION 1.3. — Une fonction $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ appartient à $\mathcal{B}(\Omega)$ si et seulement si les conditions suivantes équivalentes sont satisfaites :

- (i) $A_n(\mathbf{C}) \cdot f$ est un module de Bernstein sur $A_n(\mathbf{C})$.
- (ii) L'espace vectoriel E_f engendré sur $\mathbf{C}(x)$ par les $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, est de dimension finie $v(f)$ sur $\mathbf{C}(x)$.
- (iii) Il existe $a \in \mathbf{C}[x] \setminus \{0\}$, des $b_{i,\omega} \in \mathbf{C}[x]$ et un entier p , tels que :

$$a \cdot \frac{\partial^p f}{\partial x_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \quad i = 1, \dots, n.$$

- (iv) Il existe $a \in \mathcal{N}(\Omega)$, a non diviseur de zéro dans $\mathcal{N}(\Omega)$ (i.e. $a \neq 0$ sur chaque composante connexe de Ω), des $b_{i,\omega} \in \mathcal{N}(\Omega)$ et un entier p tels que :

$$a \cdot \frac{\partial^p f}{\partial x_i^p} = \sum_{|\omega| < p} b_{i,\omega} \partial^\omega f, \quad i = 1, \dots, n.$$

Preuve. — L'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii) résulte de 1.1. Visiblement, (iii) \implies (iv).

(iv) \implies (ii) soit A l'anneau engendré sur $\mathbf{C}(x)$ par a et les $b_{i,\omega}$: A est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}(x)$ contenant a^{-1} et stable par dérivation. Les relations (iv) entraînent que le module engendré sur A par les $\partial^\omega f$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, est de type fini sur A , donc de dimension finie sur $\mathbf{C}(x)$. A fortiori, E_f sera de dimension finie sur $\mathbf{C}(x)$, c.q.f.d.

COROLLAIRE 1.4. — $\mathcal{B}(\Omega)$ est un sous-anneau de $\mathcal{E}(\Omega)$ contenant $\mathcal{X}(\Omega)$ et stable par dérivation.

Preuve. — Soient $f, g \in \mathcal{B}(\Omega)$; alors $\nu(f+g) \leq \nu(f) + \nu(g)$; $\nu(fg) \leq \nu(f) + \nu(g)$; $\nu(\partial^\omega f) \leq \nu(f)$ pour tout $\omega \in \mathbf{N}^n$. Ainsi $\mathcal{B}(\Omega)$ est un anneau stable par dérivation. Enfin, $\mathcal{B}(\Omega) \supset \mathcal{X}(\Omega)$, d'après 1.3. (iv).

PROPOSITION 1.5. —

- (i) Soit U un ouvert de Ω . Si $T \in \mathcal{B}'(\Omega)$, $T|U \in \mathcal{B}'(U)$.
- (ii) Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de Ω . Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est telle que pour tout $i \in I$, $T|U_i \in \mathcal{B}'(U_i)$, alors $T \in \mathcal{B}'(\Omega)$.

Preuve. — L'assertion (i) est évidente. Quant à (ii), on a une injection de $A_n(\mathbf{C})$ -modules : $A_n(\mathbf{C}) \cdot T \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} A_n(\mathbf{C}) \cdot (T|U_i)$, d'où l'inégalité cherchée : $d(A_n(\mathbf{C}) \cdot T) \leq n$.

PROPOSITION 1.6. — Soient Ω_n un ouvert de \mathbf{R}^n ; Ω_p un ouvert de \mathbf{R}^p ; $a : \Omega_n \longrightarrow \Omega_p$ une application de Nash, i.e toutes ses composantes sont des fonctions de Nash dans Ω_n . Alors, si $f \in \mathcal{B}(\Omega_p)$, $foa \in \mathcal{B}(\Omega_n)$.

Preuve. — Soit A l'anneau engendré sur $\mathbf{C}(x)$ par les composantes a_1, \dots, a_p de a : A est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}(x)$ stable par dérivation. En outre, il existe une partition finie de Ω_n en ouverts U_i tels que pour tout i , $A|U_i$ soit un corps. D'après 1.5, il suffit de montrer que $foa|U_i \in \mathcal{B}(U_i)$ pour tout i et donc nous pouvons, pour la démonstration, supposer que A est un corps.

L'espace vectoriel engendré sur A par les $\partial^\omega(foa)$, $\omega \in \mathbf{N}^n$, est contenu dans l'espace vectoriel V engendré sur A par les $\partial^\mu f oa$, $\mu \in \mathbf{N}^p$. Il suffit de montrer que la dimension de V sur A est $\leq s = \nu(f)$. En effet, soient $g_1, \dots, g_{s+1} \in E_f$; il existe une relation $\sum_{i=1}^{s+1} \theta_i g_i = 0$ avec $\theta_i \in \mathbf{C}[y]$ (y paramètre de \mathbf{R}^p) et l'un des θ_i est $\neq 0$. Soit $\mu \in \mathbf{N}^p$ un multi-indice tel que : i) il existe un indice i avec $\partial^\mu \theta_i oa \neq 0$ ii) pour tout i et tout $\omega \in \mathbf{N}^p$, $|\omega| < |\mu|$, $\partial^\omega \theta_i oa = 0$ (un tel μ existe certainement). Visible-ment :

$$0 = \partial^\mu \left(\sum_{i=1}^{s+1} \theta_i g_i \right) oa = \sum_{i=1}^{s+1} (\partial^\mu \theta_i oa) (g_i oa).$$

Ainsi, $g_1 oa, \dots, g_{s+1} oa$ sont linéairement dépendants sur A , c.q.f.d.

LEMME 1.7. — Soient K un compact de \mathbf{R}^n ; U un voisinage ouvert de K . Il existe $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\varphi = 1$ au voisinage de K ; $\varphi = 0$ sur $\mathbf{C}U$; $0 \leq \varphi \leq 1$.

Preuve. — La fonction f , $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, appartient à $\mathcal{B}(\mathbf{R})$; il en est de même de $g(x) = f(x) f(1-x)$ et de $h(x) = \int_{-\infty}^x g(x) dx / \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$; on a $0 \leq h \leq 1$, $h(x) = 0$, si $x \leq 0$, $h(x) = 1$ si $x \geq 1$.

Pour démontrer 1.7, on peut supposer U relativement compact. Soit V un voisinage compact de \bar{U} . D'après Stone-Weierstrass, il existe $P \in \mathbf{C}[x]$ tel que $P > 1$ sur K et $P < 0$ sur $V \setminus U$. Alors $hoP \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, d'après 1.6; $hoP = 1$ au voisinage de K ; $hoP = 0$ sur $V \setminus U$; $0 \leq hoP \leq 1$. La fonction φ égale à hoP sur V et à 0 sur $\mathbf{R}^n \setminus U$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ et satisfait aux conditions de la proposition.

Soit $\mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des distributions localement Bernstein dans Ω : $T \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$ si tout point de Ω possède un voisinage ouvert U tel que $T|U \in \mathcal{B}'(U)$; de même, soit $\mathcal{B}_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ dans Ω localement Bernstein. D'après 1.5, si $T \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$ et si U est un ouvert relativement compact de Ω , $T|U \in \mathcal{B}'(U)$.

Soit \mathcal{B}_Ω le faisceau d'anneaux sur Ω engendré par les germes de fonctions de Bernstein complexes C^∞ : pour tout ouvert U de Ω , $\mathcal{B}_\Omega(U) = \mathcal{B}_{\text{loc}}(U)$. Plus généralement, si X est une variété de Nash, on sait définir grâce à 1.6, l'anneau $\mathcal{B}_{\text{loc}}(X)$ des fonctions localement Bernstein dans X et le faisceau \mathcal{B}_X des germes de fonctions de Bernstein C^∞ . D'après 1.7 et [3] :

PROPOSITION 1.8. — *Le faisceau \mathcal{B}_X est un faisceau fin d'anneaux sur la variété de Nash X (supposée paracompacte). Si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X , il existe une partition de l'unité dans \mathcal{B}_X subordonnée à ce recouvrement.*

PROPOSITION 1.9. — *Soit T une distribution tempérée appartenant à $\mathcal{B}'(\mathbb{R}^n)$; alors sa transformée de Fourier \hat{T} appartient à $\mathcal{B}'(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. — Evident, car la transformation de Fourier établit un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire de $\Gamma_V \cdot T$ sur $\Gamma_V \cdot \hat{T}$.

PROPOSITION 1.10. — *Soit $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ une fonction à support compact et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction*

$$\int_\alpha^{x_1} f : x \longrightarrow \int_\alpha^{x_1} f(t_1, x_2, \dots, x_n) dt_1$$

appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. — Posons $f_\lambda(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 - \lambda, x_2, \dots, x_n)$; si $\lambda > 0$ est assez grand, il existe b tel que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{supp } f, x_1 \leq b - 1,$$

et $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{supp } f_\lambda, x_1 \geq b$. La transformée de Fourier de $F = \int_{-\infty}^{x_1} (f - f_\lambda)$ est $\hat{f} \frac{(1 - e^{-2\pi i \lambda \xi_1})}{2\pi i \xi_1}$; d'après 1.9 et 1.4, $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; il en est de même de

$$F(b, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^b f(t_1, x_2, \dots, x_n) dt,$$

d'après 1.6. La fonction $\int_{-\infty}^{x_1} f$ est donc de Bernstein dans l'ouvert $x_1 < b$ et de Bernstein dans l'ouvert $x_1 > b - 1$; donc

$$\int_{-\infty}^{x_1} f \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^{x_1} f \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n),$$

toujours d'après 1.6.

D'après 1.10, le théorème de Poincaré habituel s'étend aux formes différentielles à coefficients germes de fonctions de Bernstein C^∞ et l'on a d'après 1.8 le résultat suivant :

PROPOSITION 1.11. — *Soit X une variété de Nash paracompacte et de dimension n . Soit $\mathcal{B}_X^{(p)}$ le faisceau des germes de formes différentielles de degré p dans X à coefficients dans \mathcal{B}_X . Alors :*

(i) *Le complexe*

$$\mathcal{B}_X^* = 0 \longrightarrow \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_X^{(0)} \xrightarrow{d} \mathcal{B}_X^{(1)} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{B}_X^{(n)} \longrightarrow 0$$

est une résolution fine du faisceau constant \mathbf{R} sur X .

(ii) *Pour tout $p \geq 0$ $H^p(X, \mathbf{R}) \simeq H^p(\mathcal{B}_X^*)$.*

2. Familles de Bernstein et ensembles semi-Nash.

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit Λ un ouvert non vide de \mathbf{R}^p paramétré par λ . Considérons l'ensemble $\mathcal{O}'_\Lambda(\Omega)$ de toutes les applications continues de Λ dans $\mathcal{O}'(\Omega)$. L'anneau $A_n(\mathbf{C}[\lambda])$ des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{C}[x; \lambda]$ opère à gauche sur $\mathcal{O}'_\Lambda(\Omega)$ et $A_n(\mathbf{C}(\lambda))$ opère à gauche sur $\mathbf{C}(\lambda) \otimes_{\mathbf{C}[\lambda]} \mathcal{O}'_\Lambda(\Omega)$. On a une injection canonique : $\mathcal{O}'_\Lambda(\Omega) \longrightarrow \mathbf{C}(\lambda) \otimes_{\mathbf{C}[\lambda]} \mathcal{O}'_\Lambda(\Omega)$, car tout élément différent de 0 de $\mathbf{C}[\lambda]$ n'est pas diviseur de zéro dans $\mathcal{O}'_\Lambda(\Omega)$. Nous dirons que la famille $(T_\lambda) \in \mathcal{O}'_\Lambda(\Omega)$ est une *famille de Bernstein* si $A_n(\mathbf{C}(\lambda)) \cdot (T_\lambda)$ est un module de Bernstein sur $A_n(\mathbf{C}(\lambda))$. On note $\mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$ l'ensemble de telles familles de Bernstein ; $\mathcal{B}_\Lambda(\Omega)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$ formé des applications continues : $\Lambda \ni \lambda \longrightarrow f_\lambda \in \mathcal{E}(\Omega)$; $\mathcal{B}^\omega_\Lambda(\Omega)$ celui formé des applications continues : $\Lambda \ni \lambda \longrightarrow f_\lambda \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Posons $\mathcal{B}^c(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{B}(\Omega)$; $\mathcal{B}'^c(\Omega) = \mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{B}'(\Omega)$; ($\mathcal{O}(\Omega)$: anneau des fonctions complexes C^∞ dans Ω à support compact ; $\mathcal{E}'(\Omega)$: module des distributions dans Ω à support compact). On définit comme précédemment $\mathcal{O}_\Lambda(\Omega)$, $\mathcal{E}'_\Lambda(\Omega)$, $\mathcal{B}^c_\Lambda(\Omega)$, $\mathcal{B}'^c_\Lambda(\Omega)$.

PROPOSITION 2.1. — Soit $(T_\lambda) \in \mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$ une famille de Bernstein et soit $\lambda_0 \in \bar{\Lambda}$ vérifiant la condition suivante : il existe un cône ouvert non vide de sommet λ_0 tel que toute demi-droite de ce cône ait en commun avec Λ un intervalle non vide $]x, \lambda_0[$. Si $T_\lambda \rightarrow T$ dans $\mathcal{O}'(\Omega)$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda \in \Omega$, on a $T \in \mathcal{B}'(\Omega)$; en particulier, pour chaque λ fixé, $T_\lambda \in \mathcal{B}'(\Omega)$.

Preuve. — L'entier positif v étant fixé, soit s la dimension sur $\mathbf{C}(\lambda)$ de $\Gamma_v^\lambda \cdot (T_\lambda)$ (Γ_v^λ : ensemble des opérateurs différentiels de $A_n(\mathbf{C}(\lambda))$ de degré total $\leq v$). Posons

$$T_\lambda^1 = x^{\mu_1} D^{\omega_1} T_\lambda, \dots, T_\lambda^{s+1} = x^{\mu_{s+1}} D^{\omega_{s+1}} T_\lambda,$$

$\mu_i, \omega_i \in \mathbf{N}^n$ et pour tout $i, |\mu_i| + |\omega_i| \leq v$. Alors il existe une relation non triviale entre les $T_\lambda^i : \sum_{i=1}^{s+1} P_i(\lambda) T_\lambda^i = 0$ avec $P_i(\lambda) \in \mathbf{C}[\lambda]$.

Faisons décrire à λ un intervalle : $\lambda - \lambda_0 = \rho V$ (V : vecteur fixé de \mathbf{R}^q ; $0 < \rho < \epsilon$) tel que les polynômes en $\rho, P_i(\lambda_0 + \rho V)$, ne soient pas tous identiquement nuls. Alors on a une relation non triviale :

$$\sum_{i=1}^{s+1} P_i(\lambda_0 + \rho V) T_{\lambda_0 + \rho V}^i = 0.$$

Quitte à diviser par une puissance de ρ , on voit que :

$$\sum_{i=1}^{s+1} Q_i(\rho) T_{\lambda_0 + \rho V}^i = 0$$

les Q_i étant des polynômes en ρ non tous nuls à l'origine. La relation $\sum_{i=1}^{s+1} Q_i(0) T_{\lambda_0}^i$ est donc une relation non triviale entre les $T_{\lambda_0}^i$ à coefficients dans \mathbf{C} . Ainsi $\dim_{\mathbf{C}} \Gamma_v \cdot T_{\lambda_0} \leq \dim_{\mathbf{C}(\lambda)} \Gamma_v^\lambda \cdot (T_\lambda)$, et T_{λ_0} est une distribution de Bernstein.

Remarque 2.2. — Posons $\Lambda = \Lambda' \times \Lambda''$, Λ' ouvert non vide \mathbf{R}^q , Λ'' ouvert non vide de $\mathbf{R}^{q''}$, $q' + q'' = q$. Soit $(T_\lambda) \in \mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$ et soit $\lambda_0'' \in \Lambda''$. Supposons que Λ'' et λ_0'' vérifient la condition géométrique de 2.1 et supposons que pour tout $\lambda' \in \Lambda', T_{\lambda', \lambda''}$ tende vers une distribution $T_{\lambda'}$, quand $\lambda'' \rightarrow \lambda_0'', \lambda'' \in \Lambda''$. Alors, si la famille $(T_{\lambda'})$ est continue, $(T_\lambda) \in \mathcal{B}'_{\Lambda'}(\Omega)$. Ce résultat généralise le précédent et la démonstration est analogue.

2.3. La plupart des résultats du paragraphe précédent s'étendent avec des modifications évidentes aux familles de Bernstein. Signalons les suivantes : (2.3.1) $\mathcal{B}_\Lambda(\Omega)$ est un sous-anneau de l'anneau des applications continues de Λ dans $\mathcal{E}(\Omega)$. $\mathcal{B}_\Lambda(\Omega)$ est stable par dérivation et contient toutes les sommes finies $\sum_i C_i(\lambda) f_i(x)$, où $C_i : \Lambda \rightarrow \mathbf{C}$ est continue et $f_i \in \mathcal{B}(\Omega)$.

(2.3.2) Soient Ω_n un ouvert de \mathbf{R}^n ; Ω_p un ouvert de \mathbf{R}^p ; $a : \Omega_n \times \Lambda \rightarrow \Omega_p$ une application C^∞ dont chaque composante peut s'écrire sous la forme d'une somme finie $\sum_i C_i(\lambda) Q_i(x)$, avec $C_i \in \mathbf{C}(\lambda)$ et $Q_i \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$. Alors si $(f_\lambda) \in \mathcal{B}_\Lambda(\Omega_p)$, $(f_\lambda \circ a) \in \mathcal{B}_\Lambda(\Omega_n)$.

(2.3.3) Soit (T_λ) une famille de Bernstein de distributions tempérées, i.e. $\Lambda \ni \lambda \rightarrow T_\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ est continue et la famille est de Bernstein. Alors (\hat{T}_λ) est une famille de Bernstein de distributions tempérées.

DEFINITION 2.4. — *Un sous-ensemble A de Ω est un ensemble semi-Nash dans Ω si A est une réunion finie d'ensembles de la forme : $\{x \in \Omega \mid \varphi_0(x) = 0, \varphi_1(x) > 0, \dots, \varphi_s(x) > 0\}$ où $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ sont des fonctions de Nash dans Ω . Le sous-ensemble A de Ω est localement semi-Nash si tout point de Ω admet un voisinage ouvert U tel que $A \cap U$, soit semi-Nash dans U . Si A est localement semi-Nash et ouvert dans Ω , A peut être défini localement par des inégalités strictes (ceci est démontré, pour les ensembles semi-analytiques, dans [5]; la démonstration dans le cas semi-Nash est analogue).*

LEMME 2.5. — *Soient $f \in \mathcal{B}^\omega(\Omega)$ et $T \in \mathcal{B}'(\Omega)$. Alors $f \cdot T \in \mathcal{B}'(\Omega)$.*

Preuve. — D'après 1.1 (preuve de (iii) \implies (i)), il existe $b \in \mathbf{C}[x] \setminus \{0\}$, des $b_{\mu, \omega} \in \mathbf{C}[x]$ et un entier q_0 tels que pour tout multi-indice μ , $|\mu| \leq v$ et $v \geq q_0$:

$$b^{v-q_0+1} \cdot \partial^\mu f = \sum_{|\omega| < q_0} b_{\mu, \omega} \partial^\omega f. \quad (2.5.1)$$

En outre : $d^0 b_{\mu, \omega} \leq C \cdot v$ (C constante).

Montrons qu'il existe une application $v \rightarrow P(v)$, polynomiale de degré n en v , telle que pour tout v et tout ouvert U relativement compact dans Ω :

$$\dim_{\mathbf{C}} \Gamma_v \cdot (f|U.T|U) \leq P(v) \tag{2.5.2}$$

(Γ_v désigne l'ensemble des opérateurs différentiels de $A_n(\mathbf{C})$ de degré total $\leq v$).

Alors : $\dim_{\mathbf{C}} \Gamma_v \cdot (f.T) = \sup_U \dim_{\mathbf{C}} \Gamma_v \cdot (f|U.T|U) \leq P(v)$, ce qui démontrera le lemme.

Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et si g est une fonction définie dans Ω , on note g_λ la translatée par λ de g : $g_\lambda(x) = g(x - \lambda)$; g_λ est définie dans U pour $|\lambda| < \epsilon$, $\epsilon > 0$ assez petit.

D'après (2.5.1), pour tous multi-indices $\alpha, \mu, \nu (|\alpha|, |\mu|, |\nu| \leq v)$, on a :

$$b_\lambda^{v-q_0+1} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\mu f_\lambda \cdot \partial^\nu T|U = \sum_{|\omega| < q_0} \partial^\omega f_\lambda (x^\alpha \cdot b_{\mu, \omega, \lambda} \cdot \partial^\nu T|U).$$

Puisque T est de Bernstein et $d^0 b_{\mu, \omega} \leq C.v$, les $x^\alpha \cdot b_{\mu, \omega, \lambda} \cdot \partial^\mu T|U$ engendrent sur $\mathbf{C}(\lambda)$ un espace vectoriel dont la dimension est majorée par un polynôme de degré n en v . Il en sera de même de l'espace vectoriel engendré par les $b_\lambda^{v-q_0+1} \cdot x^\alpha \cdot \partial^\mu f_\lambda \cdot \partial^\nu T|U$, et aussi de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbf{C}(\lambda)$ par les $x^\alpha \cdot \partial^\mu f_\lambda \cdot \partial^\nu T|U$, à condition cependant que b_λ ne soit pas diviseur de zéro pour l'espace des applications holomorphes : $\{\lambda \in \mathbf{R}^n \mid |\lambda| < \epsilon\} \rightarrow \mathcal{O}'(U)$ (on rappelle que f est holomorphe).

Or soit (T_λ) une famille holomorphe de distributions dans U , telle que $b_\lambda \cdot T_\lambda = 0$. Soit $x \in U$; il existe un voisinage ouvert U_x assez petit de x et un ouvert non vide de l'espace des paramètres tels que si λ appartient à cet ouvert, b_λ ne s'annule en aucun point de U_x . La famille holomorphe $T_\lambda|U_x$ s'annule pour ces valeurs de λ : par prolongement analytique, $T_\lambda|U_x = 0$ et donc $T_\lambda = 0$.

Ainsi, la dimension sur $\mathbf{C}(\lambda)$ de l'espace vectoriel engendré par les $x^\alpha \cdot \partial^\mu f_\lambda \cdot \partial^\nu T|U$ ($|\alpha|, |\mu|, |\nu| \leq v$) est majorée par un polynôme $P(v)$ de degré n en v , indépendant de U . A fortiori (cf. 2.1), la dimension sur \mathbf{C} de l'espace vectoriel engendré par $x^\alpha \cdot \partial^\mu f \cdot \partial^\nu T|U$ est majorée par $P(v)$. Cet espace vectoriel contenant $\Gamma_v(f|U.T|U)$, on a (2.5.2) c.q.f.d.

Remarque 2.6. — Soient Λ un ouvert non vide de \mathbf{R}^q ; $(f_\lambda) \in \mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$ et $(T_\lambda) \in \mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$. Alors $(f_\lambda T_\lambda) \in \mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$ (la preuve est analogue à la précédente).

LEMME 2.7. — Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^n et soit $T \in \mathcal{B}'(\Omega)$. Soit U un voisinage ouvert de $\bar{\Omega}$ dans \mathbf{R}^n et soit $f \in \mathcal{B}(U)$. Alors $f \cdot T \in \mathcal{B}'(\Omega)$.

Preuve. — On peut supposer que $f \in \mathcal{B}^c(\mathbf{R}^n)$. Posons $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R}, \lambda > 0\}$ et pour tout λ réel > 0 ,

$$\theta_\lambda(x) = (\lambda\sqrt{\pi})^{-n} e^{-|x|^2/\lambda^2}; f * \theta_\lambda \longrightarrow f$$

dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ quand $\lambda \longrightarrow 0$. La famille $f * \theta_\lambda$ est analytique, i.e c'est une application continue de Λ dans $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$. En outre, elle est de Bernstein, i.e $f * \theta_\lambda \in \mathcal{B}'_\Lambda(\mathbf{R}^n)$ (car $\widehat{f * \theta_\lambda} = \hat{f} \cdot \hat{\theta}_\lambda$; \hat{f} et $\hat{\theta}_\lambda$ sont analytiques et de Bernstein, et leur produit est de Bernstein, d'après (2.3.1); il suffit alors d'appliquer (2.3.3)). D'après 2.6, $(f * \theta_\lambda) \cdot T \in \mathcal{B}'_\Lambda(\Omega)$ et d'après 2.2 : $f \cdot T = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (f * \theta_\lambda) \cdot T \in \mathcal{B}'(\Omega)$.

LEMME 2.8. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit A un ouvert de Ω localement semi-Nash dans Ω . Soit $T \in \mathcal{B}'(A)$ et supposons que le support de T est relativement compact dans Ω . Si $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda > 0\}$, il existe une famille de Bernstein $(T_\lambda) \in \mathcal{B}'_\Lambda(A)$ telle que $T_\lambda \longrightarrow T$ quand $\lambda \longrightarrow 0$.

Preuve. — On peut recouvrir $\overline{\text{supp } T}$, adhérence de $\text{supp } T$ dans Ω , par un nombre fini d'ouverts $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ relativement compacts et tels que pour tout i , $A \cap \Omega_i$ soit une réunion finie d'ensembles de la forme : $\{x \in \Omega_i \mid \varphi_1(x) > 0, \dots, \varphi_t(x) > 0\}$, avec $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in \mathcal{P}(\Omega_i)$. A l'aide d'une partition de l'unité dans \mathcal{B}_Ω subordonnée au recouvrement de Ω formé par les Ω_i et $\Omega \setminus \overline{\text{supp } T}$, on voit (d'après 2.7) que $T = \sum_{i=1}^s T_i$ avec $T_i \in \mathcal{B}'(A)$, $\text{supp } T_i \subset \Omega_i$, $\text{supp } T_i$ relativement compact dans Ω_i . Il suffit de démontrer le lemme pour chaque T_i . Ainsi on peut supposer que A est une réunion finie d'ensembles :

$$A_i = \{x \in \Omega \mid \varphi_{i1}(x) > 0, \dots, \varphi_{it_i}(x) > 0\},$$

où $\varphi_{ij} \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour tout i, j .

Soit $h \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ telle que $0 \leq h \leq 1$, $h(x) = 0$ si $x \leq \frac{1}{2}$ et $h(x) = 1$ si $x \geq 1$; posons $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda > 0\}$; pour tout $\lambda \in \Lambda$, $h_\lambda(x) = h\left(\frac{x}{\lambda}\right)$; enfin, pour tout

$$i = 1, \dots, s : g_{i\lambda}(x) = \prod_{j=1}^{i_i} h_\lambda \circ \varphi_{ij}.$$

Soit $\xi \in \mathcal{B}^c(\Omega)$, $\xi = 1$ au voisinage de $\overline{\text{supp } T}$. Posons :

$$\xi_\lambda = \xi \left(\sum_i g_{i\lambda} - \sum_{i_1 < i_2} g_{i_1\lambda} g_{i_2\lambda} + \sum_{i_2 < i_2 < i_3} g_{i_1\lambda} g_{i_2\lambda} g_{i_3\lambda}, \dots \right. \\ \left. + (-1)^{s+1} g_{1\lambda} g_{2\lambda}, \dots, g_{s\lambda} \right).$$

D'après 2.3, la famille (ξ_λ) appartient à $\mathcal{B}_\Lambda^c(A)$; en outre $\xi_\lambda \rightarrow \xi|_A$ dans $\mathcal{E}(A)$ quand $\lambda \rightarrow 0$, donc $\xi_\lambda \cdot T \rightarrow T$.

Reste à vérifier que la famille $(\xi_\lambda \cdot T) = (T_\lambda)$ est de Bernstein. Or, avec les notations de la preuve de 2.7, la famille $(\xi_\lambda * \theta_\nu)$, $\lambda > 0$, $\nu > 0$, est de Bernstein (transformer par Fourier et appliquer 2.3); d'après 2.6, la famille $(\xi_\lambda * \theta_\nu) \cdot T$ est de Bernstein. Faisant tendre ν vers 0, il en sera de même de la famille $(\xi_\lambda \cdot T)$, d'après la remarque 2.2, c.q.f.d.

COROLLAIRE 2.9. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit A un ouvert de Ω localement semi-Nash dans Ω . Soit $T \in \mathcal{B}'(A)$ telle que $\text{supp } T$ soit relativement compact dans Ω . Si $f \in \mathcal{B}(A)$, $f \cdot T \in \mathcal{B}'(A)$.

Preuve. — Soit $(T_\lambda) \in \mathcal{B}_\Lambda^c(A)$ telle que $T_\lambda \rightarrow T$ quand $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda > 0$. Avec les notations de la preuve de 2.7, la famille $(T_\lambda * \theta_\nu)$, $\lambda > 0$, $\nu > 0$, est de Bernstein (transformer par Fourier et appliquer 2.3). Toujours d'après 2.3, il en sera de même de la famille $f \cdot (T_\lambda * \theta_\nu)$. Faisant tendre λ et ν vers 0, il en sera de même de $f \cdot T$, d'après 2.1.

COROLLAIRE 2.10. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit A un ouvert de Ω localement semi-Nash dans Ω . Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que $\text{supp } f \cap A$ soit relativement compact dans Ω et telle que $f|_A \in \mathcal{B}'(A)$. Alors $\chi_A \cdot f \in \mathcal{B}'(\Omega)$.

Preuve. — Soit $(f|A)_\lambda$ la famille de Bernstein associée à $f|A$ par le lemme 2.8. Il suffit de remarquer que $(f|A)_\lambda \longrightarrow \chi_A \cdot f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$ quand $\lambda \longrightarrow 0$.

Remarque 2.11. — Soit A un sous-ensemble localement semi-Nash de Ω . D'après 2.10, $\chi_A \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$. Visiblement, $\text{supp } \chi_A = \overset{\circ}{A}$ et $\text{supp sing } \chi_A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$; les deux sont des sous-ensembles localement semi-Nash de Ω . Plus généralement, si $T \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$, $\text{supp } T$ est localement semi-Nash (je ne sais pas si cela est toujours vrai pour le support singulier).

PROPOSITION 2.12. — *Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit A un ouvert de Ω localement semi-Nash dans Ω . Soit $T \in \mathcal{B}'(A)$ telle que $\text{supp } T$ soit relativement compact dans Ω . Enfin, soit Ω_p un ouvert de \mathbf{R}^p et soit $a : A \longrightarrow \Omega_p$ un morphisme propre et de Nash. Alors $a_* T \in \mathcal{B}'(\Omega_p)$.*

Preuve. — Soit $(T_\lambda) \in \mathcal{B}'_\lambda(A)$ la famille de Bernstein associée à T par le lemme 2.8. Bien entendu $a_* T_\lambda \longrightarrow a_* T$ quand $\lambda \longrightarrow 0$ et il suffit de montrer que $(a_* T_\lambda)$ est une famille de Bernstein.

On peut supposer que $\Omega_p = \mathbf{R}^p$. L'application a est la composée de trois morphismes : $a = p \circ u \circ i$, avec

$$i : A \ni x \longrightarrow (x, 0) \in A \times \mathbf{R}^p ;$$

$$u : A \times \mathbf{R}^p \ni (x, y) \longrightarrow (x, y + a(x)) \in A \times \mathbf{R}^p ;$$

$$p : A \times \mathbf{R}^p \ni (x, y) \longrightarrow y \in \mathbf{R}^p .$$

Il suffit de montrer que l'image d'une famille de Bernstein (T_λ) de distributions à support compact par l'application p , ou u , ou i , est encore de Bernstein.

Cas de l'application i : évident et laissé au lecteur.

Cas de l'application u : u est un difféomorphisme de Nash. Soit $\theta \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p)$, $\theta \geq 0$ et à support compact, avec $\int \theta = 1$. Pour $\nu > 0$, posons $\theta_\nu = \frac{1}{\nu^{n+p}} \theta \left(\frac{x}{\nu}, \frac{y}{\nu} \right)$. Alors, pour $0 < \nu < \nu_\lambda$ ($\nu_\lambda > 0$ dépendant de λ), $T_\lambda * \theta_\nu$ est une distribution à support compact dans $A \times \mathbf{R}^p$ et $T_\lambda * \theta_\nu \longrightarrow T_\lambda$ quand $\nu \longrightarrow 0$; donc

$u_* T_\lambda * \theta_\nu \longrightarrow u_* T_\lambda$ quand $\nu \longrightarrow 0$. La famille en λ et ν ($T_\lambda * \theta_\nu$) appartient à $\mathcal{B}'_\Lambda(A \times \mathbf{R}^p)$ où Λ est un ouvert convenable de l'espace des paramètres. Il en sera de même de $(u_* T_\lambda * \theta_\nu)$: en effet, $u_* T_\lambda * \theta_\nu = ((T_\lambda * \theta_\nu) \circ u^{-1}) J^{-1}(u)$ ($J(u)$: Jacobien de u) et l'on applique les remarques 2.3. Faisons tendre ν vers zéro ; la famille $(u_* T_\lambda)$ sera de Bernstein d'après 2.2.

Cas de l'application p : On peut supposer que $A = \mathbf{R}^n$. Si $\hat{T}_\lambda(x_1, \dots, x_n; Y_1, \dots, Y_p)$ désigne la transformée de Fourier de T , la transformée de Fourier de $p_* T_\lambda$ est, à un coefficient multiplicatif près, $\hat{T}_\lambda(0, \dots, 0; Y_1, \dots, Y_p)$; d'où le résultat d'après 2.3.

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n . Si $f \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$ et si $T \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$, $f \cdot T \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$, d'après 2.7. La somme de deux distributions de Bernstein étant une distribution de Bernstein, on voit que $\mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$ est un module sur $\mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$. Si Ω_p est un ouvert de \mathbf{R}^p et si $a : \Omega \longrightarrow \Omega_p$ est un morphisme propre et de Nash, $a_* T \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega_p)$, d'après 2.12.

Soit X une variété de Nash paracompacte. D'après les remarques précédentes, on peut définir sur X le faisceau \mathcal{B}'_X des germes de distributions tordues qui appartiennent à la classe de Bernstein. On a aussi le résultat suivant :

PROPOSITION 2.13. — \mathcal{B}'_X est un faisceau de modules sur \mathcal{B}_X . Si Y est une seconde variété de Nash paracompacte et si $a : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de Nash, $a^* \mathcal{B}'_Y \subset \mathcal{B}'_X$; si, en plus, a est propre, $a_* \mathcal{B}'_X \subset \mathcal{B}'_Y$.

3. Le théorème de prolongement.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du résultat suivant :

THEOREME 3.1. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit A un ouvert de Ω localement semi-Nash dans Ω . Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\text{supp } T \cap A$ soit relativement compact dans Ω et telle que $T|_A \in \mathcal{B}'(A)$. Alors, il existe $\tilde{T} \in \mathcal{B}'(\Omega)$ telle que $\text{supp } \tilde{T} \subset \bar{A}$ et $\tilde{T}|_A = T|_A$.

Ce théorème est déjà démontré (corollaire 2.10) lorsque $T \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sa démonstration nécessite quelques lemmes préliminaires.

LEMME 3.2. — Soit $T \in \mathcal{O}'(\mathbf{R}^n)$ et soit Q un quadrant ouvert de \mathbf{R}^n , par exemple $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1 < 0, \dots, x_q < 0\}$. Supposons que $\text{supp } T \cap Q$ soit borné dans \mathbf{R}^n et que $T|_Q \in \mathcal{B}'(Q)$. Alors il existe $\tilde{T} \in \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n)$ telle que $\text{supp } T \subset \overline{Q}$ et $\tilde{T}|_Q = T|_Q$.

Preuve. — Soit $\epsilon \in \mathcal{B}^c(\mathbf{R}^n)$, $\epsilon = 1$ au voisinage de $\overline{\text{supp } T \cap Q}$. Si S est une distribution à support compact dans \mathbf{R}^n , on définit une distribution

$$\int_{-\infty}^{x_i} S \quad \text{par :} \quad \left\langle \int_{-\infty}^{x_i} S, \varphi \right\rangle = \left\langle S, \int_{x_i}^{+\infty} \varphi \right\rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$. Visiblement, la dérivée par rapport à x_i de cette distribution est égale à S .

D'après 2.8, il existe une famille de Bernstein $(T_\lambda) \in \mathcal{B}'_c(Q)$ telle que $T_\lambda \rightarrow T|_Q = \epsilon T|_Q$ quand $\lambda \rightarrow 0$. Procédant comme dans 1.10, on voit que $\int_{-\infty}^{x_i} T_\lambda$ (i fixé) est une famille de Bernstein. Visiblement, $\int_{-\infty}^{x_i} T_\lambda \rightarrow \int_{-\infty}^{x_i} \epsilon T|_Q$ quand $\lambda \rightarrow 0$ et cette dernière distribution est donc de Bernstein.

Posons $T^i = \int_{-\infty}^{x_i} \epsilon T$, puis $T^{ij} = \int_{-\infty}^{x_j} \epsilon T^i$; en itérant, on définit une distribution T^{i_1, \dots, i_p} pour toute suite d'entiers i_1, \dots, i_p compris entre 1 et n . Si la suite i_1, \dots, i_p est convenablement choisie, $\epsilon T^{i_1, \dots, i_p} \in L^1(\mathbf{R}^n)$; en outre, $\epsilon T^{i_1, \dots, i_p}|_Q \in \mathcal{B}'(Q)$. D'après 2.10, $\chi_Q \cdot \epsilon T^{i_1, \dots, i_p} = T^* \in \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n)$. Posons $\tilde{T} = \frac{\partial^p T^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}$; visiblement, \tilde{T} vérifie les conditions du lemme, c.q.f.d.

LEMME 3.3. — Soit $T \in \mathcal{O}'(\mathbf{R}^n)$ et soient Q_1, \dots, Q_s des quadrants ouverts de \mathbf{R}^n . Posons $Q = \bigcup_{i=1}^s Q_i$ et supposons que Q_i est défini par des inégalités $x_{j_1} > 0, \dots, x_{j_p} > 0, x_{j_{p+1}} < 0, \dots, x_{j_q} < 0$. Soit I_i l'ensemble des entiers j_1, \dots, j_q et soit Σ_Q la réunion des hyperplans $x_j = 0$ ($j \in \bigcup_{i=1}^s I_i$). Supposons que $T|_Q \setminus \Sigma_Q$ soit de Bernstein et à support relativement compact dans \mathbf{R}^n . Alors

il existe $T \in \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n)$ telle que $\tilde{T}|Q \setminus \Sigma_Q = T|Q \setminus \Sigma_Q$ et $\text{supp } \tilde{T} \subset Q \cup \Sigma_Q$.

Preuve. — Visiblement $Q \setminus \Sigma_Q$ est une réunion finie de quadrants ouverts disjoints deux à deux, $Q'_1, \dots, Q'_{s'}$. D'après 3.2, il existe $T_i \in \mathcal{B}'(\mathbf{R}^n)$ telle que $T_i|Q'_i = T|Q'_i$ et $\text{supp } T_i \subset \overline{Q'_i}$. Il suffit alors de choisir $\tilde{T} = T_1 + \dots + T_{s'}$.

LEMME 3.4. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit A un ouvert semi-Nash de Ω réunion d'ensembles A_i définis chacun par des inégalités $\theta_{i,1} > 0, \dots, \theta_{i,j_i} > 0$, où les $\theta_{i,j}$ sont des fonctions de Nash dans Ω . Soit Σ_A la réunion des hypersurfaces $\theta_{i,j} = 0$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq j_i$. Soit $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$ telle que $T|A \setminus \Sigma_A$ soit de Bernstein et à support relativement compact dans Ω . Alors il existe $\tilde{T} \in \mathcal{B}'(\Omega)$ telle que $\tilde{T}|A \setminus \Sigma_A = T|A \setminus \Sigma_A$ et $\text{supp } \tilde{T} \subset A \cup \Sigma_A$.

Preuve. — Posons $\theta = \prod_{i,j} \theta_{i,j}$. Le problème étant de nature locale, on peut supposer (Hironaka, [4]) qu'il existe une variété de Nash V et un morphisme propre et de Nash $\Pi : V \rightarrow \Omega$ tel que : i) Π est un isomorphisme de $V \setminus \Pi^{-1}\Sigma_A$ sur $\Omega \setminus \Sigma_A$ ii) au voisinage de tout point M de $\Pi^{-1}\Sigma_A$, on a $\theta \circ \Pi = y_1^{\alpha_1}, \dots, y_n^{\alpha_n}$, où les y_i désignent un système de coordonnées locales en M . Il en résulte que M admet un voisinage ouvert V_M tel que $\Pi^{-1}A \cap V_M = Q \cap V_M$ où Q est une réunion finie de quadrants ouverts de V_M (pour une certaine paramétrisation de V_M). La distribution tordue $\Pi_*^{-1}T$ définie dans l'ouvert $V \setminus \Pi^{-1}\Sigma_A$ est prolongeable à V (cf. appendice, proposition 7.8); soit S un prolongement à V . D'après 2.12, $S|\Pi^{-1}A \setminus \Pi^{-1}\Sigma_A = \Pi_*^{-1}(T|A \setminus \Sigma_A)$ est de Bernstein. D'après 3.3, il existe une distribution de Bernstein S_M dans V_M telle que

$$S_M|(\Pi^{-1}A \setminus \Pi^{-1}\Sigma_A) \cap V_M = S|(\Pi^{-1}A \setminus \Pi^{-1}\Sigma_A) \cap V_M$$

et $\text{supp } S_M \subset \Pi^{-1}A \cup \Pi^{-1}\Sigma_A$. Une partition de l'unité par des fonctions de Bernstein dans V permet alors de construire une distribution tordue et de Bernstein \tilde{S} dans V telle que

$$\tilde{S}|\Pi^{-1}A \setminus \Pi^{-1}\Sigma_A = S|\Pi^{-1}A \setminus \Pi^{-1}\Sigma_A \text{ et } \text{supp } \tilde{S} \subset \Pi^{-1}A \cup \Pi^{-1}\Sigma_A.$$

La distribution $\Pi_*\tilde{S} = \tilde{T}$ appartient à $\mathcal{B}'(\Omega)$ d'après 2.12 et vérifie les conditions du lemme.

COROLLAIRE 3.5. — Soit Σ un sous-ensemble de Nash de Ω , i.e Σ est défini par des égalités $\theta_1 = 0, \dots, \theta_s = 0$, où les θ_i sont des fonctions de Nash dans Ω . Soit $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$ telle que $T|_{\Omega \setminus \Sigma}$ soit de Bernstein, à support relativement compact dans Ω . Alors il existe $\tilde{T} \in \mathcal{B}'(\Omega)$ telle que $\tilde{T}|_{\Omega \setminus \Sigma} = T|_{\Omega \setminus \Sigma}$.

Preuve. — Posons

$$\theta = \theta_1^2 + \dots + \theta_s^2; A = \Omega \setminus \Sigma = \{x \in \Omega \mid \theta(x) > 0 \text{ ou } \theta(x) < 0\}.$$

Il suffit d'appliquer 3.4 à $A = A \setminus \Sigma_A$.

COROLLAIRE 3.6. — Soient $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ des sous-ensembles de Nash de Ω et soit $T \in \mathcal{B}'^c(\Omega)$ à support dans $\bigcup_{i=1}^s \Sigma_i$. Alors il existe $T_1, \dots, T_s \in \mathcal{B}'^c(\Omega)$ telles que $\text{supp } T_i \subset \Sigma_i$ et $\sum_{i=1}^s T_i = T$.

Preuve. — On peut supposer $s = 2$. Soit $\epsilon \in \mathcal{B}(\Omega, \Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ (cf. appendice) telle que $\epsilon = 1$ au voisinage de $\Sigma_1 \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ et $\epsilon = 0$ au voisinage de $\Sigma_2 \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. D'après 2.9,

$$\epsilon \cdot T|_{\Omega \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2} \in \mathcal{B}'(\Omega \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

et est prolongeable (cf. appendice). D'après 3.5, il existe $T_1 \in \mathcal{B}'(\Omega)$ telle que $T_1|_{\Omega \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2} = \epsilon \cdot T|_{\Omega \setminus \Sigma_1 \cap \Sigma_2}$. Visiblement, $\text{supp } T_1 \subset \Sigma_1$ et $\text{supp } T_2 \subset \Sigma_2$, avec $T_2 = T - T_1$.

Le théorème 3.1 résulte alors facilement de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.7. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n ; X un sous-ensemble de Nash de Ω ; A un ouvert semi-Nash de Ω réunion d'ensembles A_i définis chacun par des inégalités $\theta_{i,1} > 0, \dots, \theta_{i,i_i} > 0$, où les $\theta_{i,j}$ sont des fonctions de Nash dans Ω ; M un point de X . Soit $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$ telle que $T|_A \in \mathcal{B}'(A)$ et $\text{supp } T|_A \subset X$. Alors il existe un voisinage ouvert V_M de M dans Ω ; un sous-espace de Nash Y de $V_M \cap X$ tel que $\dim_M Y < \dim_M X$; une distribution $\tilde{T} \in \mathcal{B}'(V_M)$ à support dans $X \cap V_M$ telle que

$$T|(A \cap V_M) \setminus Y = \tilde{T}|(A \cap V_M) \setminus Y.$$

En effet, admettons provisoirement 3.7 et démontrons 3.1. Dans 3.1, A est défini localement par des inégalités strictes. Soit

$M \in \Omega$; des applications successives de 3.7 permettent de construire un voisinage ouvert V_M de M ; une distribution $\tilde{T}_M \in \mathcal{B}'(V_M)$ telle que $T|A \cap V_M = \tilde{T}|A \cap V_M$. Une partition de l'unité par des fonctions de Bernstein, subordonnée au recouvrement de Ω par les V_M , fournit alors une distribution $\tilde{T} \in \mathcal{B}'_{loc}(\Omega)$ telle que $\tilde{T}|A = T|A$. En fait, on peut supposer que $\tilde{T} \in \mathcal{B}'^c(\Omega)$, car $\text{supp } T \cap A$ est relativement compact dans Ω . On peut enfin supposer que $\text{supp } \tilde{T} \subset \bar{A}$. En effet (cf. lemme 3.2), $\tilde{T} = D^\omega \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{B}'^c(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ pour un certain multi-indice $\omega \in \mathbf{N}^n$. D'après 2.10, $\chi_A \cdot \varphi \in \mathcal{B}'^c(\Omega) \cap L^1(\Omega)$. Il suffit alors de remplacer \tilde{T} par $D^\omega(\chi_A \cdot \varphi)$.

Preuve de 3.7. — Le problème étant local en M , on peut supposer que $X = X_1 \cup \dots \cup X_s$, où les X_i sont des ensembles de Nash dans Ω , irréductibles en M . Supposons le théorème démontré pour chaque X_i . Remplaçant A par $A \setminus \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$ (i fixé), on voit qu'il existe V_M^i voisinage de M ; un sous-espace de Nash Y_i de $V_M^i \cap X_i$ tel que $\dim_M Y_i < \dim_M X_i$; une distribution $\tilde{T}_i \in \mathcal{B}'(V_M^i)$ à support dans $X_i \cap V_M^i$ telle que $\tilde{T}_i|(A \cap V_M^i) \setminus (Y_i \cup \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j)) = T|(A \cap V_M^i) \setminus (Y_i \cup \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j))$. Il suffit alors de choisir $V_M = \bigcap_{i=1}^s V_M^i$; $Y = \left(\bigcup_{i=1}^s Y_i \cup \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j) \right) \cap V_M$; $\tilde{T} = \sum_{i=1}^s \tilde{T}_i|V_M$.

On peut donc supposer que X est irréductible en M ; on peut aussi supposer que chaque $\theta_{i,j}$ ne s'annule pas identiquement sur X au voisinage de M . Soit Σ_A la réunion des hypersurfaces $\theta_{i,j} = 0$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq j_i$; on a $\dim_M \Sigma_A \cap X < \dim X$. D'après le lemme 3.4, il existe un voisinage ouvert V_M de M et $T^* \in \mathcal{B}'(V_M)$ telle que $T^*|(A \cap V_M) \setminus \Sigma_A = T|(A \cap V_M) \setminus \Sigma_A$ et $\text{supp } T^* \subset A \cup \Sigma_A$, donc $\text{supp } T^* \subset X \cup \Sigma_A$. D'après 3.6, et quitte à diminuer V_M si nécessaire, $T^* = \tilde{T} + T^{**}$ avec $\tilde{T}, T^{**} \in \mathcal{B}'(V_M)$ et $\text{supp } \tilde{T} \subset X$, $\text{supp } T^{**} \subset \Sigma_A$. Posons $Y = X \cap \Sigma_A \cap V_M$; visiblement, 3.7 est vérifiée pour ce choix de V_M , Y et \tilde{T} , c.q.f.d.

COROLLAIRE 3.8. — Soient A_1, \dots, A_s des fermés de Ω localement semi-Nash dans Ω et soit $T \in \mathcal{B}'^c(\Omega)$ à support dans $\bigcup_{i=1}^s A_i$. Alors il existe $T_1, \dots, T_s \in \mathcal{B}'^c(\Omega)$ telles que $\text{supp } T_i \subset A_i$ et $\sum_{i=1}^s T_i = T$.

Preuve. — Elle est analogue à celle de 3.6 et utilise 3.1, 2.9 et l'appendice.

4. Le théorème de division.

Soient \mathcal{X}_n l'anneau des germes de fonctions de Nash complexes à l'origine de \mathbf{R}^n ; \mathcal{E}_n l'anneau des germes de fonctions C^∞ complexes à l'origine de \mathbf{R}^n ; \mathcal{B}'_n l'ensemble des germes de distributions de Bernstein à l'origine de \mathbf{R}^n ; $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}'_n \cap \mathcal{E}_n$. D'après 2.7, \mathcal{B}'_n est un module sur l'anneau \mathcal{B}_n , donc sur \mathcal{X}_n .

THEOREME 4.1. — \mathcal{B}'_n est un module injectif sur \mathcal{X}_n .

Cela signifie que pour tout module M sur \mathcal{X}_n , avec $M = \mathcal{X}_n^p | (\theta_1, \dots, \theta_q)$, les conditions suivantes équivalentes sont satisfaites :

$$\text{EXT}_{\mathcal{X}_n}^1(M, \mathcal{B}'_n) = 0. \quad (4.1.1)$$

(4.1.2) Soient $T_1, \dots, T_q \in \mathcal{B}'_n$ telles que la condition $\sum_{i=1}^q \xi_i \theta_i = 0$, $\xi_i \in \mathcal{X}_n$, implique toujours $\sum_{i=1}^q \xi_i T_i = 0$. Alors il existe $U_1, \dots, U_p \in \mathcal{B}'_n$ telles que, $\forall i = 1, \dots, q$, $T_i = \sum_{j=1}^p \theta_{i,j} U_j$ (les $\theta_{i,j}$ désignent les composantes de θ_i).

Preuve de 4.1. — La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème de division des distributions de B. Malgrange (cf. [7] ou [11]). La seule difficulté est de montrer à chaque pas de la démonstration que les distributions obtenues sont de Bernstein, mais ceci est facile, compte tenu des résultats précédents. Nous ne ferons donc qu'esquisser la démonstration ; en particulier, nous ne vérifierons pas que les diverses distributions obtenues sont prolongeables (cela résulterait facilement des remarques de l'appendice).

Pour démontrer (4.1.2) ou (4.1.1), on raisonne par récurrence sur la dimension de Krull du module M . Si $\dim M = -1$, i.e. $M = 0$, le résultat est trivial. Supposons le théorème démontré lorsque $\dim M < p$, $0 \leq p \leq n$, et démontrons le pour un module de dimension p . On peut alors supposer que $M = \mathcal{X}_n | (\theta_1, \dots, \theta_q)$,

où $(\theta_1, \dots, \theta_q)$ est un idéal premier \mathfrak{P} de hauteur $n - p$ de \mathcal{O}_n . Nous devons résoudre le système :

$$\theta_1 \cdot U = T_1, \dots, \theta_q \cdot U = T_q \tag{4.1.3}$$

sachant que toute relation à coefficients dans \mathcal{O}_n entre les θ_i fournit une relation entre les T_i . Soit Σ le germe des zéros de \mathfrak{P} ; visiblement, en dehors de Σ le système (4.1.3) admet une solution unique et de Bernstein. Cette distribution étant prolongeable, on peut la prolonger d'après 3.1 en un germe de distribution $U_0 \in \mathcal{O}'_n$. On ramène à la résolution du système :

$$\theta_1 \cdot U = T_1 - \theta_1 \cdot U_0, \dots, \theta_q \cdot U = T_q - \theta_q \cdot U_0$$

i.e il suffit de résoudre (4.1.3) lorsque les T_i ont leur support dans Σ . Soit (x_1, \dots, x_n) un système linéaire de coordonnées à l'origine de \mathbf{R}^n adapté à \mathfrak{P} . Posons $\mathbf{R}^p = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_{p+1} = \dots = x_n = 0\}$ et soit $\Pi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ la projection canonique. Soit \mathcal{O}_p l'anneau des germes de fonctions de Nash à l'origine de \mathbf{R}^p . L'application $\Pi^* : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n / \mathfrak{P}$ est injective et $\mathcal{O}_n / \mathfrak{P}$ est un module de type fini sur \mathcal{O}_p . Il existe $\delta \in \mathcal{O}_p$, $\delta \neq 0$, donc $\delta \notin \mathfrak{P}$, vérifiant entre autres les conditions suivantes :

(i) Soit Γ le germe des zéros de δ dans \mathbf{R}^p et soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s$, les germes composantes connexes de $\mathbf{R}^p \setminus \Gamma$. Alors $\Pi^{-1}(\Gamma_j) \cap \Sigma$ est formé d'un nombre fini de composantes connexes $\Sigma_{j,1}, \dots, \Sigma_{j,k_j}$, qui sont des germes de variétés de Nash, chacun étant difféomorphe par Π à Γ_j .

(ii) Au voisinage d'un $\Sigma_{j,k}$, \mathfrak{P} engendre l'idéal de la variété $\Sigma_{j,k}$. Soit $\sigma_{j,k} : \Gamma_j \rightarrow \mathbf{R}^{n-p}$ l'unique germe de Nash tel que $\forall x' \in \Gamma_j, (x', \sigma_{j,k}(x')) \in \Sigma_{j,k}$. Soit $T_i^{j,k}$ le germe de distribution dans $\Pi^{-1}(\Gamma_j)$ égal à T_i au voisinage de $\Sigma_{j,k}$ et nul sur $\Pi^{-1}(\Gamma_j) \setminus \Sigma_{j,k}$. Il est facile de résoudre dans $\Pi^{-1}(\Gamma_j)$ le système :

$$\theta_1 \cdot U = T_1^{j,k}, \dots, \theta_q \cdot U = T_q^{j,k} \tag{4.1.4}$$

En effet, soit $i_{j,k}$ l'isomorphisme :

$$\Pi^{-1}(\Gamma_j) \ni (x', x'') \rightarrow (x', x'' - \sigma_{j,k}(x')) \in \Pi^{-1}(\Gamma_j);$$

d'après 2.12, il suffit de résoudre dans $\Pi^{-1}(\Gamma_j)$ le système :

$$\begin{aligned} (\theta_1 \circ i_{j,k}^{-1}) \cdot U &= i_{j,k}^* T_1^{j,k} \\ (\theta_q \circ i_{j,k}^{-1}) \cdot U &= i_{j,k}^* T_q^{j,k} \end{aligned}$$

Mais l'idéal engendré au voisinage de Γ_j par les $\theta_i \circ i_{j,k}^{-1}$ est le même que celui engendré par $x_{\rho+1}, \dots, x_n$, d'après (ii); en outre, les distributions $i_{j,k*} T_i^{j,k}$ ont leur support dans l'hyperplan $x_{\rho+1} = \dots = x_n = 0$ et sont chacune combinaison linéaire d'un nombre fini de couches, chacune de ces couches étant une distribution de Bernstein. Diviser de telles distributions par $x_{\rho+1}, \dots, x_n$ est une opération purement formelle et fournit une distribution de Bernstein.

Soit U^{jk} la solution de Bernstein du système (4.1.4) ainsi obtenue et soit U_1^* le germe de distribution de Bernstein dans $\mathbf{R}^n \setminus \Pi^{-1}\Gamma$ tel que $U_1^* | \Pi^{-1}\Gamma_j = \sum_k U^{jk}$, pour $j = 1, \dots, s$. Un tel germe de distribution est prolongeable et d'après 3.1, il se prolonge en un germe $U_1 \in \mathcal{B}'_n$. Il suffit de résoudre le système :

$$\theta_1 \cdot U = T_1 - \theta_1 \cdot U_1, \dots, \theta_q \cdot U = T_q - \theta_q \cdot U_1$$

i.e il suffit de résoudre (4.1.3) lorsque les T_i ont leur support dans $\Pi^{-1}(\Gamma)$. Si $\nu \in \mathbf{N}$ est assez grand, on a $\delta^\nu \cdot T_i = 0$ pour $i = 1, \dots, q$. Le germe δ n'étant pas diviseur de zéro dans $\mathcal{X}_n/\mathfrak{B}$, toute relation à coefficients dans \mathcal{X}_n entre $\theta_1, \dots, \theta_q$ et δ^ν est une relation entre T_1, \dots, T_q et 0; en outre, $\dim \mathcal{X}_n/\mathfrak{B} > \dim \mathcal{X}_n/\mathfrak{B} + \delta^\nu \cdot \mathcal{X}_n$. Par hypothèse de récurrence, le système :

$$\theta_1 \cdot U = T_1, \dots, \theta_q \cdot U = T_q, \delta^\nu \cdot U = 0$$

admet une solution $U \in \mathcal{B}'_n$, ce qui achève la preuve de 4.1.

La démonstration de 4.1 fournit aussi une démonstration du théorème suivant, qui utilise pleinement le théorème de prolongement 3.1 :

THEOREME 4.2. — *Soit Ω un voisinage ouvert de l'origine de \mathbf{R}^n et soit A un ouvert semi-Nash dans Ω adhérent à l'origine. Alors $\mathcal{B}'_n | A$ est un module injectif sur \mathcal{X}_n .*

Enfin, on déduit de 4.2 (cas où $A = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$) les conséquences suivantes (cf. [8], ch. VII, la démonstration est analogue).

COROLLAIRE 4.3. — *$\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ opérant sur $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ par $X_j \cdot T = x_j \cdot T$, $j = 1, \dots, n$, le module $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ est injectif sur $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$.*

COROLLAIRE 4.4. — $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$ opérant sur $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ par $X_j \cdot T = \frac{\partial T}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, le module $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ est injectif sur $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]$.

5. Le théorème de préparation.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du résultat suivant :

THEOREME 5.1. — Posons $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$ et soit

$$P(\xi, y) = y^p + \xi_1 y^{p-1} + \dots + \xi_p$$

le polynôme générique de degré p . Si $\varphi(x, \xi, y) \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R})$, il existe $q(x, \xi, y) \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R})$ et

$$h_1(x, \xi), \dots, h_p(x, \xi) \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p)$$

tels que : $\varphi = P \cdot Q + \sum_{i=1}^p h_i y^{p-i}$. Si φ est plate sur $F \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ (F fermé de \mathbf{R}^n), on peut supposer que Q est plate sur $F \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ et que les h_i sont plates sur $F \times \mathbf{R}^p$.

La démonstration suit à peu près celle de Łojasiewicz ([6] ou [11]) et nécessite quelques lemmes. \mathbf{R}^N étant plongé comme d'habitude dans \mathbf{C}^N , on pose $Z_j = X_j + i Y_j$, $j = 1, \dots, N$.

LEMME 5.2. (cf. J. Mather, [9]). — Soit $\varphi \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$. Alors il existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^N)$ telle que :

- (i) $\tilde{\varphi}|_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N} = \varphi$.
- (ii) pour tout $j = 1, \dots, N$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial Z_j}$ est plate sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$.
- (iii) si φ est plate sur $F \times \mathbf{R}^N$ (F fermé de \mathbf{R}^n), $\tilde{\varphi}$ est plate sur $F \times \mathbf{C}^N$.

Preuve. — Le résultat étant de nature locale, on peut supposer que $\varphi \in \mathcal{B}^c(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$. Soit $\hat{\varphi}_x$ la transformée de Fourier de $\varphi(x, \cdot) = \varphi_x$ et soit $\rho \in \mathcal{B}^c(\mathbf{R}^N)$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\rho = 1$ au voisinage de zéro. Posons :

$$\tilde{\varphi}(x, Z) = \int_{\mathbf{R}^N} \rho(\langle Y, \xi \rangle) e^{2\pi i \langle Z, \xi \rangle} \hat{\varphi}_x(\xi) d\xi.$$

Le lecteur vérifiera les conditions (i), (ii) et (iii) ; les arguments développés aux paragraphes 1 et 2, montrent facilement que $\tilde{\varphi} \in \beta(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

Un plan réel Π de \mathbf{C}^N , de dimension réelle N , est *réellement situé* s'il existe un isomorphisme \mathbf{C} -linéaire $L: \mathbf{C}^N \simeq \mathbf{C}^N$ tel que $L(\Pi) = \mathbf{R}^n$.

LEMME 5.3. — Soient K un fermé semi-Nash de \mathbf{C}^N et soient Π_1, \dots, Π_s , des plans réellement situés dans \mathbf{C}^N . Soit $\varphi \in \beta_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^N)$ telle que les $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{Z}_j}$, $j = 1, \dots, N$, soient plates sur $\mathbf{R}^n \times K$. Alors il existe $\hat{\varphi} \in \beta_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^N)$ telle que :

- (i) $\tilde{\varphi} - \varphi$ est plate sur $\mathbf{R}^n \times K$.
- (ii) Les $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \bar{Z}_j}$, $j = 1, \dots, N$, sont plates sur $\mathbf{R}^n \times \Pi$ ($\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \dots \cup \Pi_s$).
- (iii) Si φ est plate sur $F \times \mathbf{C}^N$ (F fermé de \mathbf{R}^n), $\tilde{\varphi}$ est plate sur $F \times \mathbf{C}^N$.

Preuve. — On peut supposer $s = 1$, et quitte à effectuer une transformation \mathbf{C} -linéaire, $\Pi = \mathbf{R}^n$. D'après 5.2, il existe $\varphi' \in \beta_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^N)$ telle que $\varphi' | \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \varphi | \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, les $\frac{\partial \varphi'}{\partial \bar{Z}_j}$ étant plates sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Visiblement, $\varphi - \varphi'$ est plate sur $\mathbf{R}^n \times (K \cap \mathbf{R}^n)$. D'après 7.5, $\varphi - \varphi' = \Psi - \Psi'$, avec $\Psi, \Psi' \in \beta_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^N)$, Ψ plate sur $\mathbf{R}^n \times K$, Ψ' plate sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. La fonction $\tilde{\varphi} = \varphi - \Psi = \varphi' - \Psi'$ vérifie les conditions du lemme, c.q.f.d. (remarquer que si φ est plate sur $F \times \mathbf{C}^n$, φ' est plate sur $F \times \mathbf{C}^n$, d'après 5.2 (iii)).

Un champ taylorien γ sur $\mathbf{R}^n \times K \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^N$ (K fermé de \mathbf{C}^N) sera dit *formellement holomorphe* si $\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{Z}_j} = 0$, $j = 1, \dots, N$. Dans ce cas, γ engendre un module de Bernstein sur

$$\mathbf{C}[x, X, Y] \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y} \right]$$

si et seulement si γ engendre un module de Bernstein sur

$$\mathbf{C}[x, Z] \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial Z} \right]$$

(vérification immédiate).

Posons $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$ et soient $s_1(\eta), \dots, s_p(\eta)$ les fonctions symétriques élémentaires de η telles que l'on ait identiquement :

$$y^p + s_1 y^{p-1} + \dots + s_p = \prod_{i=1}^p (y - \eta_i).$$

Soit S l'application propre et polynomiale :

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C} \ni (x, \eta, y) \longrightarrow (x, s(\eta), y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$$

$$(s = (s_1, \dots, s_p)).$$

Un fermé $\mathbf{R}^n \times X$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$ sera symétrique en η si $\mathbf{R}^n \times X = S^{-1} S(\mathbf{R}^n \times X)$.

LEMME 5.4. — Avec les notations précédentes, soit $\mathbf{R}^n \times X$ un fermé symétrique de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$. Soit γ un champ taylorien formellement holomorphe sur $S(\mathbf{R}^n \times X)$ tel que $\gamma \circ S$ soit de Bernstein sur $\mathbf{R}^n \times X$. Alors γ est de Bernstein.

Preuve. — Par hypothèse, les $D^\omega(\gamma \circ S)$ ($\omega \in \mathbf{N}^{n+p+1}$) engendrent un espace vectoriel de dimension finie, soit q , sur le corps des fractions rationnelles dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$. Cet espace vectoriel est le même que celui engendré par les $D^\omega \gamma \circ S$. Il suffit de montrer que la dimension de l'espace vectoriel engendré par les $D^\omega \gamma$ est $\leq q$. Soient $\gamma_1 = D^{\omega_1} \gamma, \dots, \gamma_{q+1} = D^{\omega_{q+1}} \gamma$; il existe des polynômes P_i non tous nuls (par exemple $P_1 \neq 0$) tels que :

$$\sum_{i=1}^{q+1} P_i(\gamma_i \circ S) = 0.$$

Il existe un entier $r \leq p$ tel que le symétrisé en η de P_1^r soit $\neq 0$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{q+1} \text{Sym}(P_i P_1^{r-1})(\gamma_i \circ S) = 0.$$

D'après le théorème de Newton, il existe des polynômes Q_i , $Q_1 \neq 0$, tels que $\sum_{i=1}^{q+1} Q_i \gamma_i = 0$, c.q.f.d.

Preuve de 5.1. — Soit $\varphi \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R})$. D'après 5.2 ($\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$), il existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C})$ tel que $\tilde{\varphi}|_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}} = \varphi$ et le champ taylorien induit par $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$ soit formellement holomorphe. La fonction $\tilde{\varphi} \circ S$

appartient à $\mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C})$ et $\tilde{\varphi} \circ S$ induit un champ formellement holomorphe sur $S^{-1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{K}$. Posons $\Pi_i = \tau_i^{-1}(\mathbf{K})$, où τ_i désigne la bijection : $(\eta, y) \longrightarrow (\eta, y - \eta_i)$; $\Pi = \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_p$; \mathbf{K} et Π sont des réunions finies de plans réellement situés dans $\mathbf{C}^N = \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$. D'après 5.3, il existe $\phi \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C})$ tel que ϕ induise un champ formellement holomorphe sur $\mathbf{R}^n \times X$ ($X = \mathbf{K} \cup \Pi$) et $\phi = \tilde{\varphi} \circ S$ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{K}$. Quitte à le symétriser, on peut supposer que ϕ est symétrique.

D'après [11], ch. IX, § 2, il existe des champs formellement holomorphes Q sur $\mathbf{R}^n \times X$ et H_1, \dots, H_p sur $\pi(\mathbf{R}^n \times X)$ ($\pi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p$ désigne la projection canonique; $\pi(\mathbf{R}^n \times X)$ est plongé dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^p$) tels que :

$$\phi | \mathbf{R}^n \times X = Q \cdot P \circ S + \sum_{i=1}^p H_i \circ \pi \cdot y^{p-i}.$$

Cette division est la division triviale par $P \circ S = (y - \eta_1) \dots (y - \eta_p)$; ϕ étant localement de Bernstein, il en est de même de Q et des H_i (vérification immédiate). Quitte à la symétriser, on peut supposer que les H_i et Q sont symétriques en η .

D'après 5.4 et [11], ch. IX, il existe des champs formellement holomorphes et localement de Bernstein, $\dot{q}, \dot{\varphi}$ sur $S(\mathbf{R}^n \times X)$; \dot{h}_i sur $\pi \circ S(\mathbf{R}^n \times X)$, tels que : $\dot{q} \circ S = Q$; $\dot{\varphi} \circ S = \phi | \mathbf{R}^n \times X$; $\dot{h}_i \circ S | \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p = H_i, i = 1, \dots, p$. Visiblement :

$$\dot{\varphi} = \dot{q} \cdot p + \sum_{i=1}^p \dot{h}_i \circ \pi \cdot y^{p-i}.$$

D'où le théorème de division en se restreignant à

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R} \subset S(\mathbf{R}^n \times X).$$

Si ϕ est plate sur $F \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$, $\tilde{\varphi}$ est plate sur $F \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$, d'après 5.2 (iii); $\tilde{\varphi} \circ S$ et ϕ sont plates sur $F \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$, d'après 5.3 (iii); il en résulte facilement que les h_i sont plates sur $F \times \mathbf{R}^p$ et que q est plate sur $F \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}$.

COROLLAIRE 5.5. — Posons $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$; soient $\xi_1(x'), \dots, \xi_p(x')$ des fonctions de Nash dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^{n-1} et posons $P = x_n^p + \sum_{i=1}^p \xi_i(x') x_n^{p-i}$.

Si $\varphi \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbf{R})$, il existe $q \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbf{R})$ et $h_1, \dots, h_p \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\Omega)$ tels que : $\varphi = P \cdot q + \sum_{i=1}^p h_i x_n^{p-i}$. En outre, si φ est plate sur $F \times \mathbf{R}$ (F fermé de Ω), q est plate sur $F \times \mathbf{R}$ et les h_i sont plates sur F .

Preuve. — Immédiate d'après 5.1, car la composée d'une fonction de Bernstein et d'une fonction de Nash est une fonction de Bernstein.

COROLLAIRE 5.6. — Soit $f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ un germe de Nash. Soit M un module de type fini sur \mathcal{X}_n tel que $f_* M$ soit de type fini sur \mathcal{X}_p . Alors $f_*(M \otimes_{\mathcal{X}_n} \mathcal{B}_n)$ est de type fini sur \mathcal{B}_p .

Preuve. — Elle est standard et laissée au lecteur.

6. Le théorème de platitude.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

THEOREME 6.1. — $\mathcal{E}_n/\mathcal{B}_n$ est un module plat sur \mathcal{X}_n .

Pour cela, nous devons préciser le théorème de préparation précédent. Avec les notations de 5.1, soit r un entier, $0 \leq r \leq p + 1$. Soit Σ_r le fermé de \mathbf{R}^p formé des ξ tels que le nombre de racines réelles (chacune étant comptée avec sa multiplicité) de $P(\xi, \cdot)$ soit $\geq r$; les Σ_r sont des ensembles semi-algébriques et $\Sigma_{p+1} = \emptyset \subset \Sigma_p \subset \Sigma_{p-1} \subset \dots \subset \Sigma_0 = \mathbf{R}^p$. Soit $\Pi : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$ la projection canonique.

LEMME 6.2. — Soit $\varphi \in \mathbf{C}[y]$ et soit r un entier, $0 \leq r \leq p$. Il existe un voisinage ouvert semi-algébrique V de $\Sigma_r \setminus \Sigma_{r+1}$ dans $\mathbf{R}^p \setminus \Sigma_{r+1}$; des fonctions de Nash :

$$q \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}}(V \times \mathbf{R}, \Sigma_{r+1} \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{X}(V \times \mathbf{R});$$

$h_1, \dots, h_p \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}^p}(V, \Sigma_{r+1}) \cap \mathcal{X}(V)$, telles que :

$$\varphi|_{V \times \mathbf{R}} = (P|_{V \times \mathbf{R}}) \cdot q + \sum_{i=1}^r h_i \circ \Pi \cdot y^{r-i}$$

(cf. appendice pour les notations).

Preuve. — On conserve les notations utilisées dans les preuves de 5.3 et 5.4, avec $n = 0$. Soit S l'application :

$$\mathbf{C}^p \times \mathbf{C} \ni (\eta, y) \longrightarrow (s(\eta), y) \in \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}.$$

Si ω est un sous-ensemble de $\{1, \dots, p\}$, on pose $\gamma_\omega = \prod_{j \in \omega} \eta_j$ imaginaire ; $\Gamma_\omega = \gamma_\omega^{-1}(0) \cap s^{-1}(\mathbf{R}^p)$. Soit E_r l'ensemble des parties à r éléments de $\{1, \dots, p\}$. Alors : $\Gamma_r = s^{-1}(\Sigma_r) = \bigcup_{\omega \in E_r} \Gamma_\omega$.

Si $\omega \in E_r$, en tout point de $\Gamma_\omega \setminus \Gamma_{r+1}$, on a $\gamma_{\mathbf{C}\omega} \neq 0$. Soit U_ω le voisinage ouvert de $\Gamma_\omega \setminus \Gamma_{r+1}$ dans $s^{-1}(\mathbf{R}^p)$ intersection des ouverts $\{\eta \in s^{-1}(\mathbf{R}^p) \mid \gamma_{\mathbf{C}\omega}^2(\eta) > \gamma_{\mathbf{C}\omega'}^2(\eta)\}$, $\omega' \in E_r \setminus \{\omega\}$. Les U_ω sont semi-algébriques et ont une intersection vide deux à deux. Dans $U_\omega \times \mathbf{R} \subset \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$,

$$\varphi \circ S = P \circ S \cdot Q_\omega + \sum_{i=1}^r H_{i,\omega} y^{r-i} \tag{6.2.1}$$

(en effet, diviser par $P \circ S = (y - \eta_1) \dots (y - \eta_p)$ revient à diviser par $(y - \eta_{\omega_1}) \dots (y - \eta_{\omega_r})$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$, car les $y - \eta_j$, $j \neq \omega_1, \dots, \omega_r$, sont inversibles dans $U_\omega \times \mathbf{R}$). Bien entendu, Q_ω est une fraction rationnelle en η, y ; les $H_{i,\omega}$ des fractions rationnelles en η .

Posons $U = \bigcup_{\omega \in E_r} U_\omega$; $V = s(U)$, et soient Q le champ taylorien formellement holomorphe sur $U \times \mathbf{R}$ tel que $Q = Q_\omega$ sur $U_\omega \times \mathbf{R}$, pour tout ω ; H_i le champ taylorien formellement holomorphe sur U tel que $H_i = H_{i,\omega}$ sur U_ω , pour tout ω . Bien entendu, Q et les H_i , ainsi que U , sont symétriques ; donc $Q = q \circ S$, $H_i = h_i \circ s$; q est une fonction de Nash dans $V \times \mathbf{R}$; h_i une fonction de Nash dans V . D'après (6.2.1) :

$$\varphi \mid V \times \mathbf{R} = P \cdot q + \sum_{i=1}^r h_i y^{r-i}.$$

L'image par une application algébrique d'un ensemble semi-algébrique étant semi-algébrique, $V = s(U)$ est un voisinage ouvert semi-algébrique de $\Sigma_r \setminus \Sigma_{r+1}$ dans $\mathbf{R}^p \setminus \Sigma_{r+1}$. On vérifie facilement (c'est une conséquence facile d'un théorème de Glaeser, [2]) que $q \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}}(V \times \mathbf{R}, \Sigma_{r+1} \times \mathbf{R})$ et $h_i \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}^p}(V, \Sigma_{r+1})$, $i = 1, \dots, p$.

LEMME 6.3. — *Posons $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$; soient $\xi_1(x'), \dots, \xi_p(x')$, des fonctions de Nash dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^{n-1} et posons $P = x_n^p + \sum_{i=1}^p \xi_i(x') x_n^{p-i}$. Soit Σ_r le fermé de Ω formé des points*

x' tels que le nombre de racines réelles de $P(x', \cdot)$ soit $\geq r$. Si $\varphi \in \mathbf{C}[x_n]$, il existe un voisinage ouvert semi-Nash V de $\Sigma_r \setminus \Sigma_{r+1}$ dans $\Omega \setminus \Sigma_{r+1}$, des fonctions de Nash

$$q \in \mathcal{E}_{\Omega \times \mathbf{R}}(V \times \mathbf{R}, \Sigma_{r+1} \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{H}(V \times \mathbf{R});$$

$h_1, \dots, h_p \in \mathcal{E}_\Omega(V, \Sigma_{r+1}) \cap \mathcal{H}(V)$, telles que :

$$\varphi|V \times \mathbf{R} = (P|V \times \mathbf{R}) \cdot q + \sum_{i=1}^r h_i \cdot x_n^{r-i}.$$

Preuve. — Immédiate d'après 6.2 et 7.2.

LEMME 6.4. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^{n-k} paramétré par $x' = (x_1, \dots, x_{n-k})$. Pour tout entier ν , $1 \leq \nu \leq k$, soit $P_\nu(x'; x_{n-k+\nu}) = x_{n-k+\nu} + \dots$ un polynôme unitaire en $x_{n-k+\nu}$ à coefficients fonctions de Nash dans Ω . Soit $\varphi \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ telle que : $\varphi = \sum_{\nu=1}^k \theta_\nu P_\nu$ avec $\theta_\nu \in \mathcal{E}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$; alors il existe des $\theta'_\nu \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ telles que $\varphi = \sum_{\nu=1}^k \theta'_\nu P_\nu$.

Preuve. — Soit $\Pi : \Omega \times \mathbf{R}^k \rightarrow \Omega$ la projection canonique. Soit Σ_r l'ensemble fermé semi-Nash des points de Ω en lesquels la fibre de $\Pi| \{P_1 = \dots = P_k = 0\}$ est de dimension réelle $\geq r$; on a des inclusions :

$$\Phi = \Sigma_{p_1 \dots p_{k+1}} \subset \Sigma_{p_1 \dots p_k} \subset \dots \subset \Sigma_0 = \Omega.$$

Soit Σ_{ν, r_ν} le fermé de Ω formé des points x' tels que le nombre de racines réelles de $P_\nu(x'; \cdot)$ soit $\geq r_\nu$ et posons :

$$\Gamma_{r_1, \dots, r_k} = (\Sigma_{1, r_1} \setminus \Sigma_{1, r_1+1}) \cap \dots \cap (\Sigma_{k, r_k} \setminus \Sigma_{k, r_k+1}).$$

Visiblement :

$$\Sigma_r \setminus \Sigma_{r+1} = \bigcup_{r_1 \dots r_k=r} \Gamma_{r_1, \dots, r_k}$$

et cette réunion est disjointe. Il suffit de démontrer le résultat suivant :

(*) soit $\varphi \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ telle que $\varphi = \sum_{\nu=1}^k \theta_\nu P_\nu$ avec $\theta_\nu \in \mathcal{E}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ et telle que φ soit plate sur $\Sigma_{r+1} \times \mathbf{R}^k$; alors il existe des $\theta'_\nu \in \mathcal{B}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$ telles que $\varphi - \sum_{\nu=1}^k \theta'_\nu P_\nu$ soit plate sur $\Sigma_r \times \mathbf{R}^k$.

Par applications successives du corollaire 5.5, on peut supposer que :

$$\varphi = \sum_{0 \leq i_\nu < r_\nu} \theta_{i_1, \dots, i_k}(x') x_{n-k+1}^{i_1}, \dots, x_n^{i_k}$$

avec $\theta_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{B}_{10c}(\Omega)$ et θ_{i_1, \dots, i_k} plate sur Σ_{r+1} . Au voisinage de chaque $\Sigma_{\nu, r_\nu} \setminus \Sigma_{\nu, r_\nu+1}$, on peut diviser d'après 6.3 $x_{n-k+\nu}^{i_\nu}$ par P_ν avec un reste qui est polynôme de degré $< r_\nu$ en $x_{n-k+\nu}$. Reportant dans l'égalité précédente, on voit qu'il existe un voisinage ouvert semi-Nash U_{r_1, \dots, r_k} de Γ_{r_1, \dots, r_k} , tel que :

$$\varphi|_{U_{r_1, \dots, r_k}} \times \mathbf{R}^k = \sum_{0 \leq i_\nu < r_\nu} \theta_{i_1, \dots, i_k}^{r_1, \dots, r_k}(x') x_{n-k+1}^{i_1}, \dots, x_n^{i_k} + \sum_{\nu=1}^k \varphi_\nu^{r_1, \dots, r_k} P_\nu$$

avec $\theta_{i_1, \dots, i_k}^{r_1, \dots, r_k} \in \mathcal{B}_{10c}(U_{r_1, \dots, r_k})$ et $\varphi_\nu^{r_1, \dots, r_k} \in \mathcal{B}_{10c}(U_{r_1, \dots, r_k} \times \mathbf{R}^k)$. Quitte à diminuer les U_{r_1, \dots, r_k} , on peut supposer que

$$\bar{U}_{r_1, \dots, r_k} \cap (\Sigma_{1, r_1+1} \cup \dots \cup \Sigma_{k, r_k+1}) \subset \Sigma_{r+1};$$

on peut aussi supposer que les U_{r_1, \dots, r_k} ($r_1 \dots r_k = r$) sont disjoints deux à deux.

D'après 7.4, il existe une fonction $\epsilon_{r_1, \dots, r_k} \in \mathcal{B}(\Omega, \Sigma_{r+1})$ telle que $\epsilon_{r_1, \dots, r_k} = 1$ au voisinage de Γ_{r_1, \dots, r_k} et $\text{supp } \epsilon_{r_1, \dots, r_k} \subset U_{r_1, \dots, r_k}$. Posons $\theta'_\nu = \sum_{r_1 \dots r_k = r} \epsilon_{r_1, \dots, r_k} \varphi_\nu^{r_1, \dots, r_k}$: θ'_ν est une fonction localement Bernstein dans $(\Omega \setminus \Sigma_{r+1}) \times \mathbf{R}^k$; les θ_{i_1, \dots, i_k} étant plates sur Σ_{r+1} , on voit facilement que θ'_ν se prolonge en une fonction (notée encore θ'_ν) de $\mathcal{B}_{10c}(\Omega \times \mathbf{R}^k)$, plate sur $\Sigma_{r+1} \times \mathbf{R}^k$.

Bien entendu, la fonction $\varphi - \sum_{\nu=1}^k \theta'_\nu P_\nu$ est plate sur $\Sigma_{r+1} \times \mathbf{R}^k$; au voisinage d'un point x'_0 de Γ_{r_1, \dots, r_k} ($r_1 \dots r_k = r$),

$$\varphi - \sum_{\nu=1}^k \theta'_\nu P_\nu = \sum_{0 \leq i_\nu < r_\nu} \theta_{i_1, \dots, i_k}^{r_1, \dots, r_k}(x') x_{n-k+1}^{i_1} \dots x_n^{i_k}$$

et ce dernier polynôme est donc une combinaison linéaire à coefficients C^∞ des P_ν . En particulier, ce polynôme s'annule sur la fibre en x'_0 de $\Pi\{P_1 = \dots = P_k = 0\}$, fibre de dimension réelle $r = r_1 \dots r_k$. Il en résulte facilement que $\theta_{i_1, \dots, i_k}^{r_1, \dots, r_k}(x'_0) = 0$ pour tous les (i_1, \dots, i_k) , puis que les $\theta_{i_1, \dots, i_k}^{r_1, \dots, r_k}$ sont plates sur Γ_{r_1, \dots, r_k} . Ainsi $\varphi - \sum_{\nu=1}^k \theta'_\nu P_\nu$ est plate sur $\Sigma_r \times \mathbf{R}^k$, c.q.f.d.

Le théorème 6.1 résulte facilement de 6.4 et du lemme algébrique suivant (cf. [11], ch. I, théorème 6.13) :

LEMME 6.5. — Soit A un anneau local régulier et soit M un A -module de type fini ou non. Supposons que pour tout idéal premier \mathfrak{P} de A , il existe une A -suite de A , $\{a_1, \dots, a_k\}$, telle que $k = ht \mathfrak{P}$, $(a_1, \dots, a_k) \subset \mathfrak{P}$ et $\text{Tor}_i^A(A/(a_1, \dots, a_k), M) = 0$ pour $i \geq 1$. Alors M est un A -module plat.

Preuve de 6.1. — Soit I un idéal de \mathcal{X}_n engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. L'anneau \mathcal{E}_n étant plat sur \mathcal{X}_n , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Tor}_1^A(\mathcal{X}_n/I, \mathcal{E}_n/\mathcal{B}_n) = 0$
- (ii) $(I \cdot \mathcal{E}_n) \cap \mathcal{B}_n = I \cdot \mathcal{B}_n$.

Supposons que I est engendré par k polynômes

$$\varphi_\nu = P_\nu(x'; x_{n-k+\nu}) = x_{n-k+\nu}^{p_\nu} + \dots$$

à coefficients dans \mathcal{X}_{n-k} , anneau des germes de fonctions de Nash en $x' = (x_1, \dots, x_{n-k})$. Alors d'après 6.4 et l'équivalence précédente : $\text{Tor}_1^A(\mathcal{X}_n/(\varphi_1, \dots, \varphi_\nu), \mathcal{E}_n/\mathcal{B}_n) = 0$ pour $\nu = 1, \dots, k$; il en résulte facilement que $\text{Tor}_i^A(\mathcal{X}_n/I, \mathcal{E}_n/\mathcal{B}_n) = 0$ pour $i \geq 1$. Si \mathfrak{P} est un idéal premier de \mathcal{X}_n de hauteur k et si le système de coordonnées est convenablement adapté, il existe des polynômes $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ comme précédemment tels que $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ soit une \mathcal{X}_n -suite de \mathcal{X}_n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \subset \mathfrak{P}$. Le théorème 6.1 résulte alors de 6.5.

COROLLAIRE 6.6. — Soit M un sous-module de \mathcal{X}_n^p . Alors $M \cdot \mathcal{E}_n \cap \mathcal{B}_n^p = M \cdot \mathcal{B}_n$.

COROLLAIRE 6.7. — \mathcal{B}_n est un module plat sur \mathcal{X}_n .

Remarque 6.8. — La méthode précédente permet de préciser le théorème classique de division des fonctions C^∞ par des fonctions analytiques. Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n et soit $\varphi : \mathcal{E}(\Omega)^q \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)^p$ une matrice à coefficients fonctions analytiques dans Ω . Alors il existe une application \mathbf{C} -linéaire continue $\Psi : \mathcal{Y}m\varphi \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)^q$ telle que $\varphi \circ \Psi = \text{identité}$ (par contre, je ne pense pas qu'il existe

de scission pour un tel morphisme φ). Cette méthode doit aussi permettre de démontrer le théorème de division des fonctions de classe C^μ par des fonctions analytiques, avec une perte de dérivation linéaire en μ (au voisinage d'un compact fixé de Ω).

Remarque 6.9. — Le théorème de préparation et le théorème de platitude sont vrais en formel et en analytique, cf. [12].

7. Appendice : multiplicateurs et distributions prolongeables.

DEFINITION 7.1. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , F un fermé de Ω ; U un ouvert de Ω . On note $\mathcal{E}_\Omega(U, F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}(U \setminus F)$ formé des fonctions f vérifiant la condition suivante : pour tout compact K de Ω et tout multi-indice $\nu \in \mathbf{N}^n$, il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, $\forall x \in (K \cap U) \setminus F, |f^\nu(x)| \leq C d(x, F)^{-\alpha(1)}$.

Visiblement, $\mathcal{E}_\Omega(U, F)$ est un sous-anneau unitaire de $\mathcal{E}(\Omega \setminus F)$. On note simplement $\mathcal{E}_\Omega(\Omega, F) = \mathcal{E}(\Omega, F)$ et l'on pose

$$\mathcal{B}_\Omega(U, F) = \mathcal{E}_\Omega(U, F) \cap \mathcal{B}(U \setminus F); \quad \mathcal{B}_\Omega(\Omega, F) = \mathcal{B}(\Omega, F).$$

Si $f \in \mathcal{E}(\Omega, F)$ et si $g \in \mathcal{E}(\Omega)$ est plate sur F , $f \cdot g \in \mathcal{E}(\Omega \setminus F)$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$, plate sur F .

LEMME 7.2. — Soient Ω_n un ouvert de \mathbf{R}^n ; Ω_p un ouvert de \mathbf{R}^p ; F un fermé semi-analytique de Ω_p ; U un ouvert de Ω_p ; $\varphi: \Omega_n \rightarrow \Omega_p$ une application analytique. Si $f \in \mathcal{E}_{\Omega_p}(U, F)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_{\Omega_n}(\varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(F))$. En particulier, si φ est de Nash et si $f \in \mathcal{B}_{\Omega_p}(U, F)$, $f \circ \varphi \in \mathcal{B}_{\Omega_n}(\varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(F))$.

Preuve. — On peut supposer F compact. Si $\varphi^{-1}(F) = \emptyset$, le résultat est évident. Sinon, soit K un compact semi-analytique de Ω_n tel que $K \cap \varphi^{-1}(F) \neq \emptyset$, et considérons l'application : $K \times F \ni (x, y) \rightarrow \varphi(x) - y \in \mathbf{R}^p$. D'après l'inégalité de Łojasiewicz, il existe des constantes $B > 0$ et $\beta > 0$ telles que $\forall (x, y) \in K \times F$:

 (1) On définit plus généralement $\mathcal{E}_\Omega(U, F)$ lorsque Ω est une variété quelconque.

$|\varphi(x) - y| \geq B(|x - x'| + |y - y'|)^\beta$ pour un $(x', y') \in K \times F$ tel que $x' \in \varphi^{-1}(y') \subset \varphi^{-1}(F)$. On en déduit l'inégalité, pour tout $x \in K$: $d(\varphi(x), F) \geq B d(x, \varphi^{-1}(F))^\beta$ quitte à diminuer B si nécessaire.

Soit $f \in \mathcal{E}_{\Omega_\rho}(U, F)$. On a des inégalités, pour tout

$$x \in (K \cap \varphi^{-1}(U)) \setminus \varphi^{-1}(F) : |f^\nu(\varphi(x))| \leq C_\nu d(\varphi(x), F)^{-\alpha_\nu}.$$

D'après les formules donnant les dérivées d'une fonction composée, on aura de même les majorations : $|(f \circ \varphi)^\nu(x)| \leq C'_\nu d(\varphi(x), F)^{-\alpha'_\nu}$ $C'_\nu > 0$, $\alpha'_\nu > 0$, constantes convenables. D'où pour tout

$$x \in (K \cap \varphi^{-1}(U)) \setminus \varphi^{-1}(F) : |(f \circ \varphi)^\nu(x)| \leq C'_\nu B^{-\alpha'_\nu} d(x, \varphi^{-1}(F))^{-\beta\alpha'_\nu},$$

c.q.f.d.

Rappelons qu'un quadrant de \mathbf{R}^n est un sous-ensemble de \mathbf{R}^n défini par certaines égalités ou inégalités $x_i > 0$, $x_j < 0$ ou $x_k = 0$, (x_1, \dots, x_n) désignant le système de coordonnées canoniques de \mathbf{R}^n .

LEMME 7.3. — Soient K et L deux fermés de \mathbf{R}^p , chacun étant une réunion finie de quadrants. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, K \cap L)$ telle que $f = 1$ au voisinage de $K \setminus (K \cap L)$ et $f = 0$ au voisinage de $L \setminus (K \cap L)$.

Preuve. — On procède par récurrence sur n . Si $n = 1$, le résultat est trivial ; supposons $n > 1$. Posons $K' = K \cap S^{n-1}$; $L' = L \cap S^{n-1}$. Soit M un point de S^{n-1} . Alors il existe un voisinage ouvert V_M de M tel que la projection stéréographique P_M de pôle M transforme $K' \cap V_M$ (resp. $L' \cap V_M$) en l'intersection de $P_M(V_M) = U_M$ avec une réunion finie K'_M (resp. L'_M) de quadrants de \mathbf{R}^{n-1} . Par hypothèse de récurrence, il existe $\xi_M \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^{n-1}, K'_M \cap L'_M)$ telle que $\xi_M = 1$ au voisinage de $K'_M \setminus (K'_M \cap L'_M)$ et $\xi_M = 0$ au voisinage de $L'_M \setminus (K'_M \cap L'_M)$. Soit V_{M_1}, \dots, V_{M_s} un recouvrement fini de S^{n-1} et ϵ_i une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement par des fonctions de Bernstein. Alors

$$\begin{aligned} \xi' &= \sum_{i=1}^s \epsilon_i (\xi_{M_i} \circ P_{M_i}) \in \mathcal{B}(S^{n-1}, K' \cap L') \\ &= \mathcal{B}(S^{n-1} \setminus K' \cap L') \cap \mathcal{E}(S^{n-1}, K' \cap L') \end{aligned}$$

et $\xi' = 1$ au voisinage de $K' \setminus (K' \cap L')$, $\xi' = 0$ au voisinage de

$L \setminus (K' \cap L')$. Visiblement, $f(x) = \xi' \left(\frac{x}{|x|} \right) \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n, K \cap L)$, $f = 1$ au voisinage de $K \setminus (K \cap L)$ et $f = 0$ au voisinage de $L \setminus (K \cap L)$.

PROPOSITION 7.4. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , K et L deux fermés semi-Nash de Ω . Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{B}(\Omega, K \cap L)$ telle que $f = 1$ au voisinage de $K \setminus (K \cap L)$ et $f = 0$ au voisinage de $L \setminus (K \cap L)$.

Preuve. — Par définition des ensembles semi-Nash, il existe un entier p et un morphisme de Nash $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^p$, des fermés K' et L' de \mathbf{R}^p , chacun réunion finie de quadrants, tels que $K = \varphi^{-1}(K')$; $L = \varphi^{-1}(L')$. D'après 7.3, il existe $f' \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^p, K' \cap L')$ telle que $f' = 1$ au voisinage de $K' \setminus (K' \cap L')$ et $f' = 0$ au voisinage de $L' \setminus (K' \cap L')$. Alors, d'après 7.2, $f = f' \circ \varphi$ vérifie les conditions de la proposition.

COROLLAIRE 7.5. — Soient K_1, \dots, K_p des fermés semi-Nash de Ω et soit $g \in \mathcal{B}(\Omega)$ une fonction plate sur $K_1 \cap \dots \cap K_p$. Alors $g = \sum_{i=1}^p g_i$ avec $g_i \in \mathcal{B}(\Omega)$, g_i plate sur K_i .

Preuve. — Il suffit de le démontrer pour $p = 2$. D'après 7.4, il existe $f \in \mathcal{B}(\Omega, K_1 \cap K_2)$ telle que $f = 1$ au voisinage de $K_1 \setminus (K_1 \cap K_2)$ et $f = 0$ au voisinage de $K_2 \setminus (K_1 \cap K_2)$. La fonction $fg \in \mathcal{B}(\Omega \setminus K_1 \cap K_2)$ se prolonge en une fonction f_2 plate sur K_2 . En outre, $f_1 = f - f_2$ est plate sur K_1 , c.q.f.d.

Nous terminons ce paragraphe par quelques remarques plus ou moins connues sur les distributions prolongeables.

Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , F un fermé de Ω . Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega \setminus F)$ est prolongeable en une distribution dans Ω si et seulement si pour tout compact K de Ω , il existe une constante $C > 0$ et un entier $m \geq 0$, tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus F)$, $\text{supp } \varphi \subset K$, on ait $|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_m$ (on pose

$$\|\varphi\|_m = \sum_{\substack{|\omega| \leq m \\ x \in \Omega \setminus F}} |D^\omega \varphi(x)|.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega, F)$ l'ensemble des distributions dans $\Omega \setminus F$ pro-

longeables en une distribution dans Ω . La remarque suivante est évidente, mais essentielle.

LEMME 7.6. — Soient F un fermé de l'ouvert Ω ; K un compact de Ω ; m un entier ≥ 0 . Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus F)$, $\text{supp } \varphi \subset K$, tout $\omega \in \mathbf{N}^n$, $|\omega| \leq m$, tout $x \in \Omega \setminus F$, on ait : $|D^\omega \varphi(x)| \leq C d(x, F)^{m-|\omega|} \|\varphi\|_m$.

PROPOSITION 7.7. — Avec les notations précédentes, $\mathcal{D}'(\Omega, F)$ est un module sur $\mathcal{E}(\Omega, F)$.

Preuve. — Immédiate, d'après 7.6 et la formule de Leibnitz.

PROPOSITION 7.8. — Soient Ω, Ω' des ouverts de \mathbf{R}^n et $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ une application analytique. Soit F l'ensemble des zéros dans Ω du jacobien $J(f)$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega')$, la distribution f^*T définie dans $\Omega \setminus F$ appartient à $\mathcal{D}'(\Omega, F)$.

Preuve. — Soit K un compact de Ω . D'après [11], il existe des constantes $A > 0$ et $\alpha \geq 1$ telles que, $\forall x \in K - F$, f induit un isomorphisme de la boule euclidienne ouverte B_x de centre x et de rayon $Ad(x, F)^\alpha$ sur $f(B_x)$. Construisons une partition C^∞ de l'unité par une famille localement finie de fonctions $\epsilon_i \in \mathcal{D}(\Omega \setminus F)$, partition subordonnée au recouvrement de $K \setminus F$ par les boules B_x . Si cette construction est faite judicieusement, elle vérifiera les conditions suivantes :

- (i) $\sum_i \epsilon_i = 1$ au voisinage de $K - F$.
- (ii) pour tout i , $\text{supp } \epsilon_i$ est contenu dans un boule B_{x_i} .
- (iii) si $\rho_i = d(\text{supp } \epsilon_i, F)$, il existe un entier positif p tel que la série $\sum_i \rho_i^p$ soit convergente.
- (iv) pour tout entier positif m , il existe une constante $C_m > 0$ et un entier $\beta_m \geq 0$ tels que $\forall i, \|\epsilon_i\|_m \leq C_m \rho_i^{-\beta_m}$.

Nous devons trouver $C > 0$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus F)$, $\text{supp } \varphi \subset K$:

$$|f^*T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_m. \tag{7.8.1}$$

Supposons tout d'abord que $\text{supp } \varphi$ est contenu dans une boule B_x . Soit $\Psi \in \mathcal{O}(\Omega')$ telle que $\Psi \circ f = \varphi$. On a $\text{supp } \Psi \subset f(K)$ et donc des inégalités :

$$|f^*T(\varphi)| = |T(\Psi)| \leq C' \|\Psi\|_{m'}. \quad (7.8.2)$$

Le jacobien J vérifie sur K une inégalité de Łojasiewicz par rapport à F . On en déduit l'existence de constantes $C'' > 0$ et $\alpha' > 0$ telles que :

$$\|\Psi\|_{m',f(x)} \leq C'' d(x, F)^{-\alpha'} \|\varphi\|_{m',x} \quad (7.8.3)$$

(si $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n)$ et si X est un sous-ensemble de \mathbf{R}^n , on pose $\|\varphi\|_{m,x} = \sum_{\substack{|\omega| \leq m \\ x \in X}} |D^\omega \varphi(x)|$). L'inégalité (7.8.1) résulte alors de

(7.8.2), (5.8.3) et 7.6. Soit $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega \setminus F)$, $\text{supp } \varphi \subset K$. D'après les remarques précédentes, la formule de Leibnitz et (iv) :

$$|T(\epsilon_i \varphi)| \leq C \|\epsilon_i \varphi\|_m \leq C''' \rho_i^{-\beta m} \|\varphi\|_{m, \text{supp } \epsilon_i}. \quad (7.8.4)$$

D'après 7.6 :

$$\|\varphi\|_{m, \text{supp } \epsilon_i} \leq C'''' \rho_i^{p+\beta m} \|\varphi\|_{m+\beta m+p}. \quad (7.8.5)$$

D'où le résultat, d'après (7.8.4), (7.8.5), (i) et (iii).

PROPOSITION 7.9. — Soient Ω_n un ouvert de \mathbf{R}^n ; Ω_p un ouvert de \mathbf{R}^p ; X un fermé de Ω_n ; Y un fermé de Ω_p et soit $f: \Omega_n \setminus X \rightarrow \Omega_p \setminus Y$ une application propre et C^∞ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) l'image réciproque par f d'un ensemble relativement compact dans Ω_p est relativement compacte dans Ω_n .
- (ii) Si K est un compact de Ω_p , il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha \geq 0$ telles que, $\forall x \in f^{-1}(K \setminus Y)$:

$$d(x, X) \geq C d(f(x), Y)^\alpha.$$

- (iii) Les composantes f_1, \dots, f_p de f appartiennent à $\mathcal{E}(\Omega_n, F)$.

Alors, si $T \in \mathcal{O}'(\Omega_n, X)$, $f_* T \in \mathcal{O}'(\Omega_p, Y)$.

Preuve. — Elle est standard et laissée au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.E. BJORK, The weyl algebra $A_n(\mathbf{C})$, Lecture notes from the summer school at Grebbestad, June 1975.
- [2] G. GLAESER, Fonctions composées différentiables, *Ann of Math.*, 77 (1963), 193-209.
- [3] R. GODEMENT, Théorie des faisceaux, *Actualités Scientifiques et Industrielles* 1252, Hermann (1958).
- [4] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, 79 (1964), 109-326.
- [5] S. ŁOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, Preprint (1965).
- [6] S. ŁOJASIEWICZ, Whitney fields and Malgrange-Mather preparation theorem, Liverpool symposium of singularities, Springer lecture notes 192.
- [7] B. MALGRANGE, Division des distributions, Séminaire L. Schwartz 1959/60, exposés 21/25.
- [8] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, 1966.
- [9] J. MATHER, On Nirenberg's proof of Malgrange's preparation theorem, Liverpool symposium of singularities, Springer lecture Notes 192.
- [10] J.J. RISLER, Sur l'anneau des fonctions de Nash globales, *C.R.A.S.*, t. 276 (1973), 1513-1516.
- [11] J.Cl. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, *Ergebnisse der Mathematik*, Band 71.
- [12] J.Cl. TOUGERON, Sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes qui appartiennent à la classe de Bernstein, *Bull. Soc. Math. de France*, 106 (1978), 207-224.

Manuscrit reçu le 5 décembre 1978

révisé le 27 février 1979.

Jean-Claude TOUGERON,

Université de Rennes, U.E.R. Mathématiques et Informatique

Avenue du Général Leclerc

35042 Rennes Cedex.