Annales de l'institut Fourier

Paul Godin

Propagation des singularités pour les opérateurs différentiels de type principal localement résolubles à coefficients analytiques en dimension 2

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 2 (1979), p. 223-245
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_2_223_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 2 (1979),223-245.

PROPAGATION DES SINGULARITÉS POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DE TYPE PRINCIPAL, LOCALEMENT RÉSOLUBLES, A COEFFICIENTS ANALYTIQUES, EN DIMENSION 2

par Paul GODIN

Introduction.

Soit Ω une variété analytique paracompacte de dimension 2. Soit P un opérateur différentiel de type principal, d'ordre m, à coefficients analytiques, sur Ω. Soit p_m son symbole principal. Treves [11] et Nirenberg-Treves [8] ont donné une condition nécessaire et suffisante pour que P soit localement résoluble. Cette condition s'exprime ainsi :

($\mathscr{P}$) pour tout $(x_0,\xi^0) \in \mathrm{T}^*\Omega\backslash 0$, il existe un voisinage conique Γ de (x_0,ξ^0) tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$ satisfaisant $d_\xi \operatorname{Re} zp_m \neq 0$ dans Γ, la fonction $\operatorname{Im} zp_m$ ne change pas de signe le long des bandes bicaractéristiques nulles de $\operatorname{Re} zp_m$ dans Γ.

Le but de cet article est d'étudier la propagation des singularités des solutions de l'équation $\mathrm{P}v = f, f \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

En dimension quelconque, Duistermaat et Hörmander [2] ont donné, sans hypothèse d'analyticité, des résultats de propagation qui supposent que $p_m^{-1}(0)$ est une variété ayant de « bonnes » propriétés symplectiques. On pourra se passer ici de telles hypothèses grâce au fait que p_m est analytique et que $\dim \Omega = 2$.

Si q est une fonction C^∞ complexe définie sur $\mathrm{T}^*\Omega\backslash 0$, on désignera par H_q le champ hamiltonien associé à q. Si x_1, x_2 sont des coordonnées locales de Ω et si ξ_1, ξ_2 sont les coordonnées duales, alors

$$\mathrm{H}_q = \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial q}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right).$$

En vertu du théorème 1 de Nagano [7], $T^*\Omega\backslash 0$ est partitionné en feuilles intégrales maximales pour le système différentiel engendré par $H_{\mathrm{Re}\, p_m}$ et $H_{\mathrm{Im}\, p_m}$.

Si $\rho_0 \in p_m^{-1}(0)$, soit F_{ρ_0} la feuille passant par ρ_0. Définissons le propagateur de P par ρ_0, E_{ρ_0}, comme le cône engendré par la composante connexe de $F_{\rho_0} \cap p_m^{-1}(0)$ contenant ρ_0. Si Q est un opérateur pseudo-différentiel classique elliptique, alors P, PQ, QP ont les mêmes propagateurs. Soient Γ un voisinage conique de ρ_0 et E'_{ρ_0} la composante connexe de $E_{\rho_0} \cap \Gamma$ passant par ρ_0. On va prouver le

THÉORÈME 1. — *Si* P *satisfait* $(\mathscr{P})$, *si* $v \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *si* $\rho_0 \in \mathrm{WF}(v)$ *et si* $\mathrm{WF}(Pv) \cap \Gamma = \varnothing$, *alors* $\rho_0 \in p_m^{-1}(0)$ *et* $E'_{\rho_0} \cap \Gamma \subset \mathrm{WF}(v)$.

Ici WF représente le wave-front set de Hörmander [4].

En d'autres mots, le théorème 1 affirme que si z est un symbole elliptique dans Γ, positivement homogène de degré 0, si $\frac{\partial}{\partial\xi} \mathrm{Re}\, zp_m \neq 0$ dans Γ, et si γ est la bande bicaractéristique de $\mathrm{Re}\, zp_m$ passant par ρ_0, on a $\tilde{\gamma} \subset \mathrm{WF}(v)$, où $\tilde{\gamma}$ est la composante connexe de $\gamma \cap \Gamma \cap p_m^{-1}(0)$ passant par ρ_0.

Remarques.

1) Si $(\mathscr{P})$ n'est pas satisfaite, il existe un point où le théorème 1 n'est pas vrai (Hörmander [5], proposition 3.3.5.)

2) On peut construire des solutions singulières par application du théorème 3.4.3. de Hörmander [5].

Le plan de cet article est le suivant : au § 1, on ramène le problème à l'étude des facteurs du premier ordre de P. Au § 2, on introduit une variable supplémentaire suivant la méthode de Helffer [3]. Au § 3, on montre que le théorème 1 est conséquence d'une inégalité (inégalité (3.1)). Au § 4, on démontre une inégalité de type Carleman. Au § 5, on utilise la méthode de Sjöstrand [9] pour prouver l'inégalité (3.1).

1. Réduction aux facteurs du premier ordre.

On peut supposer que Ω est un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^2$. Comme P est de type principal, on peut aussi supposer que les droites t = constante ne sont pas caractéristiques et que

$$p_m(x,t,\xi,\tau) = q(x,t,\xi,\tau) \prod_{j=1}^{r} (\tau - \lambda_j(x,t)\xi),$$

où $(x,t) \in \Omega \subset \mathrm{R}^2$. (ξ,τ) sont les variables duales de (x,t), q est elliptique et homogène en ξ et τ, les λ_j sont analytiques et $\lambda_j(x,t) \neq \lambda_k(x,t)$ si $j \neq k$ et $(x,t) \in \Omega$. Comme P satisfait $(\mathscr{P})$, on a $\forall j = 1, \ldots, r$: $\mathrm{Im}\,\lambda_j$ ne change pas de signe le long des courbes bicaractéristiques de $\dfrac{\partial}{\partial t} - \mathrm{Re}\,\lambda_j(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Si $p_m(x_0,t_0,\xi_0,\tau_0) = 0$ et $(\xi_0,\tau_0) \in \mathbf{R}^2\backslash\{0\}$, alors il existe un et un seul j tel que $\tau_0 = \lambda_j(x_0,t_0)\xi_0$.

LEMME 1. — *Il existe un voisinage conique* Γ *de* (x_0,t_0,ξ_0,τ_0) *et un opérateur pseudo-différentiel* $\mathrm{Q} \in \mathrm{L}^{m-1}$ *elliptique dans* Γ, *ainsi qu'un opérateur pseudo-différentiel* R *dont le symbole principal est une fonction* $r_0(x,t)$ *tels que :*

$$\mathrm{P} \equiv (\mathrm{D}_t - \lambda_j(x,t)\mathrm{D}_x + \mathrm{R})\mathrm{Q} \text{ dans } \Gamma,$$

le signe $\equiv$ *désignant l'égalité modulo un noyau* C^∞.

Preuve du lemme 1. — On commence par déterminer $\mathrm{S} \sim \sum_0^\infty s_{-k}(x,t,\xi)$, où s_{-k} est positivement homogène de degré $(-k)$, et

$$\mathrm{Q}' \sim q_{m-1}(x,t,\xi,\tau) + \sum_0^\infty q_{m-2-k}(x,t,\xi,\tau),$$

où q_{m-2-k} est un polynôme en τ de degré $m-2$ et est positivement homogène de degré $m-2-k$ par rapport à ξ et τ, tels que

$$\sum_0^m p_{m-j} = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha\,!}\,\partial^\alpha_{\xi\tau}(\tau - \lambda_j\xi + \Sigma s_{-k})\mathrm{D}^\alpha_{xt}(\Sigma q_{m-k}) \bmod \mathrm{S}^{-\infty}(\Gamma),$$

où Γ est un voisinage conique de (x_0,t_0,ξ_0,τ_0) dans lequel $|\tau| \leqslant c|\xi|$. On détermine $s_0, q_{m-2}, s_{-1}, q_{m-3}, \ldots, s_{-k}, q_{m-2-k}, \ldots$ par les équations $(\tau - \lambda_j\xi)q_{m-k-1} - s_{-(k-1)}q_{m-1} =$ quantité connue.

Ces équations permettent de trouver $s_{-(k-1)}(x,t,\xi)$ en posant $\tau = \lambda_j\xi$, et d'en déduire q_{m-k-1}. On trouve en particulier :

$$s_0(x,t,\xi) = -\frac{\mathrm{D}_t q_{m-1} - \lambda_j \mathrm{D}_x q_{m-1} - p_{m-1}}{q_{m-1}}(x,t,\xi,\lambda_j(x,t)\xi).$$

Ensuite, si $\varphi(\xi,\tau)$ est une fonction C^∞ à support dans $|\tau| \leqslant c|\xi|$, positivement homogène de degré 0 si $|\xi| + |\tau| \geqslant 1$, et vaut 1 si $|\tau| \leqslant \frac{c}{2}|\xi|$ et $|\xi| + |\tau| \geqslant 1$, il suffit de poser

$$R \sim r_0 + \sum_1^\infty s_{-k}\varphi, \qquad \text{où} \qquad r_0(x,t) = s_0\left(x,t,\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right)$$

$$Q \sim q_{m-1} + \sum_0^\infty q_{m-k-2}\varphi. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On est donc ramené au problème de propagation pour l'opérateur

$$L = D_t - \lambda_j(x,t)D_x + r_0(x,t) + \tilde{R}, \qquad \text{avec} \qquad \tilde{R} \in L^{-1}.$$

On va redresser les bicaractéristiques de $D_t - \mathrm{Re}\,\lambda_j D_x$: il existe des coordonnées locales (analytiques) qu'on va encore désigner par (x,t), dans lesquelles $L = D_t - ib(x,t)D_x + c(x,t) + T, T \in L^{-1}$, où b est analytique, à valeurs réelles et satisfait la condition suivante :

($\mathscr{P}$) Pour tout x_0 assez proche de 0, la fonction $t \to b(x_0,t)$ ne change pas de signe si $|t| < T$.

Définition. — *Si* $g \in C^\infty$ *pour* $|x| < M$ *et* $|t| < T$, *introduisons la condition suivante (cf. Treves [12]) :*

(Q) : *Pour tout* $x_0 \in (-M,+M)$, *la fonction* $t \to g(x_0,t)$ *ne s'annule identiquement sur aucun intervalle ouvert situé dans la bande* $\{t,|t|<T\}$.

On a alors le

Théorème 2. — *Si* b *est analytique et satisfait* ($\mathscr{P}$) *dans un voisinage* V_1 *de* $(0,0)$, *alors il existe une fonction analytique* $g(x,t)$ *telle que l'on ait :*

$$b(x,t) = x^k g(x,t)$$

dans un voisinage V_2 *de* $(0,0)$, *où* $k \in \mathbf{Z}^+$ *et* g *satisfait* ($\mathscr{P}$) *et* (Q) *dans* V_2.

Démonstration du théorème 2. — On suppose que $V_1 = (-M,+M)^2$ et que $b \not\equiv 0$.

a) Soit $N = \{x \in (-M,+M) : \forall t \in (-M,+M), b(x,t)=0\}$. Alors N est un ensemble de points isolés car si x_0 était un point d'accumulation de points de N, on aurait

$$\forall t \in (-\mathrm{M},+\mathrm{M}), \qquad \forall \alpha,\beta : \partial_x^\beta \partial_t^\alpha b(x_0,t) = 0.$$

b) Donc ou bien il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(-\varepsilon,+\varepsilon)\cap \mathrm{N} = \varnothing$, dans ce cas le théorème 2 est démontré avec $k = 0$

ou bien $0 \in \mathrm{N}$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(-\varepsilon,+\varepsilon)\cap\mathrm{N}=\{0\}$

dans ce cas, il existe $k > 0$:

$$\partial_x^j b(0,t) \begin{cases} \equiv 0 & \text{si } j < k \\ \not\equiv 0 & \text{si } j = k \end{cases}, \qquad |t| < \mathrm{T}.$$

Dès lors $b(x,t) = x^k g(x,t)$ avec $g(x,t) = \dfrac{1}{k\,!}\partial_x^k b(0,t) + 0(|x|)$. Si $x \neq 0$ est petit, b satisfait $(\mathscr{P})$ et (Q), donc g aussi. g satisfait (Q) en x_0 ; g satisfait $(\mathscr{P})$ en $x = 0$ car sinon b ne vérifierait pas $(\mathscr{P})$.

C.Q.F.D.

On est donc ramené à prouver le théorème 1 pour l'opérateur

$$\mathrm{L} = \mathrm{D}_t - ix^k g(x,t)\mathrm{D}_x + c(x,t) + \mathrm{T}, \qquad \mathrm{T} \in \mathrm{L}^{-1},$$

où $k \in \mathbf{Z}^+$ et g est une fonction analytique à valeurs réelles vérifiant les conditions $(\mathscr{P})$ et (Q) pour $|x| < \mathrm{M}$, $|t| < \mathrm{M}$.

Si $g \equiv 0$, le théorème de propagation est connu (Duistermaat-Hörmander [2], théorème 6.1.1.). On peut donc supposer que $g \not\equiv 0$. Si $k = 0$, L est sous-elliptique (Treves [12]) et le phénomène de propagation est trivial. On peut donc supposer que $k > 0$. L est alors sous-elliptique si $x \neq 0$, et le propagateur $\mathrm{E}(0,t_0,\xi_0,0)$ est la variété $\tau = x = 0$, $\operatorname{sgn} \xi = \operatorname{sgn} \xi_0$.

2. Introduction d'une variable supplémentaire.

On va utiliser la méthode de Helffer [3] et ajouter une variable z. Soit $\Psi \in \mathrm{L}^0$ un opérateur proprement supporté dont le symbole complet est

$$\Psi(\xi,\tau,\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\zeta| \leqslant c(|\xi|+|\tau|) \quad \text{et} \quad |\xi| + |\tau| + |\zeta| \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } |\zeta| \geqslant 2c(|\xi|+|\tau|) \quad \text{et} \quad |\xi| + |\tau| + |\zeta| \geqslant 1 \end{cases}$$

c étant un nombre strictement positif.

Soit $\tilde{L} = D_t - ig(x,t)(x^k D_x + D_z) + c(x,t) + \Psi T$. C'est un opérateur pseudo-différentiel dans $\{(x,t,z) \in \mathbf{R}^3, |x|<M, |t|<M\}$. On va prouver le

THÉORÈME 1'. — *Si* $v \in \mathscr{D}'_{xt}$ *et si*

$$\tilde{\rho}_0 = (x_0,t_0,z_0,\xi_0,\tau_0,0) \in WF(w)\backslash WF(\tilde{L}w),$$

où $w = v \otimes 1_z$, *alors la parallèle à* $\frac{\partial}{\partial t}$ *par* $\tilde{\rho}_0$ *reste dans* $WF(w)$ *jusqu'à ce qu'elle atteigne* $WF(\tilde{L}w)$.

Le théorème 1' implique le théorème 1 car si $\rho_0 = (x_0,t_0,\xi_0,0) \in WF(v)$ et $WF(Lv)$ ne rencontre pas un voisinage conique Γ de ρ_0 (donc obligatoirement $x_0 = 0$), alors pour tout $z : (x_0,t_0,z,\xi_0,0,0) \in WF(v \otimes 1_z)$ et

$$WF((Lv)\otimes 1_z) \cap \{(x,t,z,\xi,\tau,\zeta), (x,t,\xi,\tau) \in \Gamma\} = \varnothing.$$

Donc $WF(\Psi L(v \otimes 1_z)) \cap \{(x,t,z,\xi,\tau,\zeta), (x,t,\xi,\tau) \in \Gamma\} = \varnothing$ et donc

$$WF(\tilde{L}(v\otimes 1_z)) \cap \{(x,t,z,\xi,\tau,0), (x,t,\xi,\tau) \in \Gamma\} = \varnothing.$$

Alors $WF(v\otimes 1_z)$ est invariant sous ∂_t et on en déduit le théorème 1.

La suite de cet article, jusqu'à la fin du § 5, est consacrée à la preuve du théorème 1'.

On termine ce paragraphe en faisant un changement de variables qui va mettre $\tilde{L}$ sous une forme bien adaptée à l'étude qui va suivre.

On va travailler dans l'ouvert

$$V = \{(x,t,z) \in \mathbf{R}^3, |x|<M, |t|<M, |z-z_0|<M\},$$

et on peut supposer que $z_0 = 0$. On peut trouver, dans un voisinage de l'origine, des coordonnées locales analytiques

$$\bar{x} = \bar{F}(x,z), \qquad \bar{z} = \bar{G}(x,z) \qquad \text{avec} \qquad \bar{F}(0,0) = \bar{G}(0,0) = 0,$$

telles que $x^k \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. On prend par exemple $\bar{G}(x,z) = z$ et

$$\bar{F}(x,z) \begin{cases} = xe^{-z} & \text{si} \quad k = 1 \\ = x(1 + (k-1)zx^{k-1})^{-\frac{1}{k-1}} & \text{si} \quad k \geqslant 2. \end{cases}$$

Quitte à diminuer M, on peut supposer que le difféomorphisme

$$f : (x,t,z) \to (\bar{x},t,\bar{z}) = (\bar{F}(x,z),t,\bar{G}(x,z))$$

est défini sur tout V. Soit U l'image de V par f. Soit

$$\mathscr{L} = D_t - ih(\bar{x},t,\bar{z})D_{\bar{z}} + r(\bar{x},t,\bar{z}) + A$$

l'image de $\tilde{L}$ par f. On a $h(\bar{x},t,\bar{z}) = g(F(\bar{x},\bar{z}),t)$, $r(\bar{x},t,\bar{z}) = c(F(\bar{x},\bar{z}),t)$, où (F,G) désigne l'application inverse de $(\bar{F},\bar{G})$, et $A \in L^{-1}$.

Soit u l'image de w par f.

3. Preuve du théorème 1'.

On peut se restreindre au cas où $g(0,0) = 0$. Car si $g(0,0) \neq 0$, alors $H_{\mathrm{Re}\,\sigma_1(\tilde{L})}$, $H_{\mathrm{Im}\,\sigma_1(\tilde{L})}$ et l'axe du cône sont linéairement indépendants sur $\sigma_1^{-1}(\tilde{L})(0)$ si $x = t = 0$ et $\{\mathrm{Re}\,\sigma_1(\tilde{L}), \mathrm{Im}\,\sigma_1(\tilde{L})\} = 0$ sur $\sigma_1^{-1}(\tilde{L})(0)$ si $x = t = 0$. (On a désigné par $\sigma_1(\tilde{L})$ le symbole principal de $\tilde{L}$ et par $\{\ ,\ \}$ les crochets de Poisson). Or dans ce cas la propagation est connue (Duistermaat-Hörmander [2] corollaire 7.2.2).

On désignera par l le plus petit entier > 0 tel que les zéros de h vue comme fonction de t soient d'ordre $\leqslant 2l$ dans U.

On va prouver que si $\tilde{\rho}_0 = (0,t_0,\bar{z}_0,\xi_0,\tau_0,\zeta_0) \notin \mathrm{WF}(u)$ et

$$\{(0,t,\bar{z}_0,\xi_0,\tau_0,\zeta_0), |t-t_0|<a\} \cap \mathrm{WF}(\mathscr{L}u) = \varnothing,$$

alors

$$\{(0,t,\bar{z}_0,\xi_0,\tau_0,\zeta_0), |t-t_0|<a\} \cap \mathrm{WF}(u) = \varnothing \quad \text{où} \quad a > 0.$$

On peut supposer que $t_0 \neq 0$, car si $t_0 = 0$, la propagation s'obtient (microlocalement) par simple application du corollaire (7.2.2) de Duistermaat-Hörmander [2].

Comme $\mathscr{L}$ est elliptique dans la région $\tau \neq 0$ et strictement hypoelliptique dans la région $\bar{\zeta} \neq 0$, on peut supposer que $\tau_0 = 0 = \bar{\zeta}_0$ (et $\zeta_0 \neq 0$). Donc

$$\tilde{\rho}_0 = (0,t_0,\bar{z}_0,\xi_0,0,0).$$

On peut aussi supposer que $\mathrm{WF}(u) \subset \Sigma = \{\zeta=\tau=0\}$, car si Δ est un petit voisinage conique ouvert de $\mathscr{E} = \{(0,t,\bar{z}_0,\xi_0,0,0), |t-t_0|<a\}$, alors $\mathrm{WF}(\mathscr{L}u) \cap \Delta = \varnothing$ et donc $\mathrm{WF}(u) \cap \Delta \subset \Sigma \cap \Delta$. Si alors $\chi \in S^0$ est positivement homogène loin de la section nulle, vaut 1 dans un voisinage conique de $\mathscr{E}$ et a son support dans Δ, et si $\tilde{\chi}$ est un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté de symbole χ, on a : $\mathrm{WF}(\tilde{\chi}u) \subset \Sigma$ et $\mathrm{WF}(\mathscr{L}\tilde{\chi}u)$ ne rencontre pas un voisinage conique de $\mathscr{E}$.

Comme h satisfait ($\mathscr{P}$) et (Q), h est localement de signe constant. Commençons par supposer que $h \geqslant 0$. On peut supposer que $|t| \leqslant N$, et que $g(0,t)$ a, dans $|t| \leqslant N$ (t réel), le seul zéro $t = 0$, et que $N < M$. (M a été introduit au § 2). Supposons que, dans les coordonnées $\bar{x}$, t, $\bar{z}$, on ait $(0,t_0,0,\xi_0,0,0) \notin WF(u)$, avec $0 < t_0 < N$. Le cas où $t_0 < 0$ se traite de façon analogue. Supposons également que

$$\{(0,t,\bar{z},\xi_0,0,0), \sup(|t|,|\bar{z}|) \leqslant N\} \cap WF(\mathscr{L}u) = \varnothing .$$

Le corollaire 7.2.2 de Duistermaat-Hörmander [2] implique que

$$(0,t,\bar{z},\xi_0,0,0) \notin WF(u) \quad \text{si} \quad 0 < t < N \quad \text{et} \quad |\bar{z}| < N .$$

Il faut donc montrer que la régularité se propage à travers $t = 0$.

Définissons 3 fonctions φ, $\tilde{\varphi}$ et ψ qui joueront un rôle important par la suite. Soit $\varphi(\bar{x},t,\bar{z}) = -\bar{z}^2 + \int_0^t h(\bar{x},s,\bar{z})e^s\,ds$. Elle a la propriété suivante : $\forall r \in (0,N)$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon' > 0$, $\exists \eta > 0$, tels que :

$$||\bar{z}| - r| \leqslant \eta, \qquad |\varphi(0,t,\bar{z})| \leqslant \varepsilon, \qquad |t| \leqslant N \Rightarrow t \geqslant \varepsilon' .$$

Choisissons $r < N$, $\eta < M - r$, puis ε donné par la propriété précédente. On prend r assez petit, puis ε et η suffisamment petits pour que

$$|\bar{z}| \leqslant r + \eta \qquad \text{et} \qquad |\varphi(0,t,\bar{z})| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |t| < N .$$

Posons $\tilde{\varphi} = \dfrac{\varphi}{\varepsilon}$.

Soit $\psi(t,\bar{z}) \in C_0^\infty$ ayant son support dans

$$\left\{(t,\bar{z}) : |\bar{z}| < r + \eta,\ -\varepsilon < \varphi(0,t,\bar{z}) < \frac{\varepsilon}{2l+1}\right\}$$

et valant 1 dans $\left\{(t,\bar{z}) : |\bar{z}| \leqslant r,\ \varphi(0,t,\bar{z}) \geqslant -\dfrac{\varepsilon}{2} \text{ et } t \leqslant 0\right\}$.

Afin de simplifier l'écriture, il est commode d'introduire les notations

$$y = (\bar{x},t,\bar{z}), \qquad y' = \bar{x}, \qquad y'' = (t,\bar{z})$$
$$y = (y',y'')$$
$$\eta = (\xi,\tau,\zeta), \qquad \eta' = \xi, \qquad \eta'' = (\tau,\zeta)$$
$$\eta = (\eta',\eta'')$$

et $S_u(y,\eta) = \sup\{s \in \mathbf{R} : u \in H_s \text{ microlocalement près de } (y,\eta)\}$. Avec ces notations, $\xi_0 = \eta'_0$.

Supposons que $\eta'_0 > 0$ et que $S_u(y,\eta',0) > -\mu$ si $(y,\eta') \in \mathscr{R}$, où

$$\mathscr{R} = \{(y,\eta') : |y'| < \varepsilon, \eta' > 0, |\bar{z}| < N, |\varphi| \leqslant \varepsilon\}.$$

Pour démontrer le théorème 1′, il suffit de montrer (et ce sera l'objet du § 5) que si ω_0 et ε_0 sont assez petits, alors, pour tout entier positif λ, on a :

$$S_u(y,\eta',0) > \lambda\left(\tilde{\varphi}(y) + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) - \mu \tag{3.1}$$

dès que $(y,\eta') \in \mathscr{R}$ et $|y'| < \omega_0$.

Nous terminons ce paragraphe en montrant comment l'inégalité (3.1) implique le théorème 1′.

Preuve de l'implication (3.1) $\Rightarrow$ *théorème* 1′.

$$\text{Comme } \tilde{\varphi}(\bar{x},t,\bar{z}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\left(-|\bar{z}|^2 + \displaystyle\int_0^t g(F(\bar{x},\bar{z}),s)e^s\,ds\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\left(-|\bar{z}|^2 - \displaystyle\int_t^0 g(F(\bar{x},\bar{z}),s)e^s\,ds\right) & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

l'inégalité (3.1) implique que $((0,t,0),(1,0,0)) \notin WF(u)$ si $t \geqslant -\varepsilon'$ (avec $\varepsilon' > 0$). Appliquant le corollaire 7.2.2 de Duistermaat-Hörmander [2] au point $((0,-\varepsilon',0),(1,0,0))$, on en déduit que pour tout $t \in (-N,t_0)$, on a :

$$((0,t,0),(1,0,0)) \notin WF(u).$$

On vient de voir que l'inégalité (3.1) implique la propagation de la régularité dans le sens des t décroissants pour $D_t - ihD_{\bar{z}} + r + A$ $(h \geqslant 0)$. Avec le même poids $\tilde{\varphi}$ on obtient la même propagation pour $D_t + ihD_{\bar{z}} + r + A$: cela ressortira clairement de la preuve de l'inégalité (3.1) qui sera donnée au § 5. Finalement le changement de variable $t \to -t$ permet de conclure à la propagation de la régularité dans le sens des t croissants.

Au paragraphe suivant, nous démontrons une estimation à poids du type inégalité de Carleman qui sera utile dans la preuve de l'inégalité (3.1).

4. Estimations à poids.

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathscr{L}_1$ *la partie d'ordre* $\geqslant 0$ *de* $\mathscr{L}$, *c'est-à-dire*

$$\mathscr{L}_1 = D_t - ih(\bar{x},t,\bar{z})D_{\bar{z}} + r(\bar{x},t,\bar{z}).$$

Soient $\varphi_0(\bar{x},\bar{z})$ *et* $\varphi_1(t,\bar{z})$ *deux fonctions* C^∞. *Posons*

$$\varphi(\bar{x},t,\bar{z}) = \varphi_0(\bar{x},\bar{z}) + \int_0^t h(\bar{x},s,\bar{z})\varphi_1(s,\bar{z})\,ds.$$

Si $\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(h\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right)\right]\operatorname{sgn} h \geqslant c_0 > 0$ *pour* $\bar{x} \in \mathrm{I} \subset\subset \mathbf{R}$ *et* $(t,\bar{z}) \in \mathrm{K} \subset\subset \mathbf{R}^2$, *alors il existe 2 constantes positives* σ_0 *et* C, *telles que pour tout* $\bar{x} \in \mathrm{I}$ *et tout* $\sigma \geqslant \sigma_0$, *l'on ait :*

$$(4.1)\qquad \sigma^{\frac{1}{4(l+1)}}\iint e^{2\sigma\varphi}|u(\bar{x},t,\bar{z})|^2\,d\bar{z}\,dt \leqslant \mathrm{C}\iint e^{2\sigma\varphi}|\mathscr{L}_1 u(\bar{x},t,\bar{z})|^2\,d\bar{z}\,dt$$

si $u \in C^\infty$ *et si, pour tout point* $\bar{x}$ *de* I, $u(\bar{x},t,\bar{z})$, *considérée comme fonction de* $\bar{z}$ *et* t, *a son support dans* K.

Le théorème 3 sera une conséquence de la démonstration du théorème 3'.

THÉORÈME 3'. — *Soit dans un voisinage* X *de* $(0,0)$ *dans* $\mathbf{R}^2$, *l'opérateur*

$$\mathrm{T} = \mathrm{D}_t - ih(x,t)\mathrm{D}_x.$$

On suppose que h *est* C^∞, *à valeurs réelles, et satisfait dans* X *les conditions* $(\mathscr{P})$ *et* (Q) *définies au* § 1, *c'est-à-dire que comme fonction de* t, h *ne change pas de signe et n'est pas identiquement nulle si* $(x,t) \in \mathrm{X}$. *Supposons que* $t \to h(0,t)$ *a un zéro d'ordre* $2l$ *en* 0 *et que les zéros de* $t \to h(x,t)$ *sont d'ordre* $\leqslant 2l$ *si* $(x,t) \in \mathrm{X}$. *Soit* $\varphi(x,t) = \varphi_0(x) + \int_0^t h(x,s)\varphi_1(s)\,ds$. *On suppose que* $[\varphi_1'(t) + (h\varphi_x)_x]\operatorname{sgn} h \geqslant c_0 > 0$ *dans* X.

Alors pour tout ouvert relativement compact $\mathrm{X}' \subset\subset \mathrm{X}$ *il existe 2 constantes positives* σ_0 *et* c, *telles que l'on ait :*

$$(4.2)\qquad \sigma^{\frac{1}{2(l+1)}}\|e^{\sigma\varphi}u\| \leqslant \mathrm{C}\|e^{\sigma\varphi}\mathrm{T}u\|$$

si $u \in \mathrm{C}_0(\mathrm{X}')$ *et* $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\|\ \|$ *désignant la norme de* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$.

Remarque. — La fonction φ dont il est question dans le théorème 3' a été introduite par Strauss et Treves [10].

Il ressortira de la preuve du théorème 3' que si φ et les coefficients de T dépendent continûment d'un paramètre $\bar{x}$ parcourant une partie compacte de $\mathbf{R}$, on peut choisir C et σ_0 indépendants de ce paramètre. Ceci fait du théorème 3 une conséquence du théorème 3', puisqu'une perturbation de $\mathscr{L}_1$ par $r(\bar{x},t,\bar{z})$ ne modifie pas l'inégalité (4.1) (à condition d'augmenter σ_0).

Preuve du théorème 3'. — Il est équivalent de démontrer (4.2) avec φ remplacé par

$$\varphi^*(x,t) = \varphi(x,t) + i\int_0^t (h\varphi_x)(x,s)\,ds.$$

Utilisant la méthode de Trevès [13], théorème 1.4, on voit que (4.2) est une conséquence de l'estimation

$$|||(1+|D_s|)^{\frac{1}{2(l+1)}} v||| \leqslant C|||\mathcal{C}v||| \tag{4.3}$$

si $v \in C_0^\infty(Y)$, où $Y = X' \times (-S,+S) \subset \mathbf{R}^3$, et

$$\mathcal{C} = D_t + i\varphi_t^*|D_s| - ih(D_x + i\varphi_x^*|D_s|) = D_t - ih(D_x - \gamma|D_s|),$$

avec

$$\gamma(x,t) = \varphi_1(t) + \int_0^t (h\varphi_x)_x(x,s)\,ds.$$

$|||\ \ |||$ désigne la norme de $L^2(\mathbf{R}^3)$.

Notations. — $|||\ \ |||_\theta$ désignera la norme de $H_\theta(\mathbf{R}^3)$, s la variable de $(-S,+S)$, et (ξ,τ,σ) les variables duales de (x,t,s).

Preuve de (4.3). — Supposons par exemple que $h(x,t) \geqslant 0$. On traiterait de même dans le cas $h(x,t) \leqslant 0$. Multipliant φ_0 et φ_1 par une même constante strictement positive, on peut supposer que $|\gamma(0,0)| \leqslant 1$. On peut également supposer que $(0,0) \in X'$. En rétrécissant X', (ce qui n'est pas une restriction puisque si (4.2) est vraie sur un nombre fini d'ouverts X'_k, (4.2) est vraie sur leur réunion à condition d'augmenter éventuellement σ_0), on peut supposer que l'oscillation de γ sur X' est inférieure à un nombre positif ε arbitrairement petit.

La sphère unité de l'espace $\xi\tau\sigma$ est la réunion des 4 parties ouvertes :

$$O_1 = \left\{|\sigma| > \frac{1}{4}\right\}$$

$$O_2 = \left\{|\sigma| < \frac{1}{3} \text{ et } |\xi| < \frac{2\sqrt{2}}{3} - \varepsilon\right\}$$

$$O_3 = \left\{|\sigma| < \frac{1}{3}, |\xi| > \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\varepsilon \text{ et } \xi < 0\right\}$$

$$O_4 = \left\{|\sigma| < \frac{1}{3}, |\xi| > \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\varepsilon \text{ et } \xi > 0\right\},$$

où $\varepsilon > 0$ est petit. Soit Γ_j le cône engendré par O_j dans $\mathbf{R}^3\backslash\{0\}$.

Soient g_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$, des fonctions C^∞, positivement homogènes de degré 0 si $\xi^2 + \tau^2 + \sigma^2 \geqslant 1$, ayant leur support dans Γ_j, et telles que

$$\Sigma g_j^2 = 1 \quad \text{si} \quad \xi^2 + \tau^2 + \sigma^2 \geqslant 1 .$$

Dans $Y \times \Gamma_1$, $\mathscr{C}$ est un opérateur pseudo-différentiel sous-elliptique ayant un degré de sous-ellipticité égal à $2l + 1$, et par les résultats de Cardoso-Treves [1], on a :

$$(4.4) \qquad |||g_1(D_x,D_t,D_s)v|||_{\frac{1}{2(l+1)}} \leqslant C(|||g_1(D_x,D_t,D_s)\mathscr{C}v|||+|||v|||)$$

si $v \in C_0^\infty(Y)$.

(Cf. Treves [13] et Menikoff [6] pour un raisonnement semblable).

Dans $Y \times \Gamma_2$, $\mathscr{C}$ est « elliptique » et on a :

$$(4.5) \qquad |||g_2(D_x,D_t,D_s)v|||_1 \leqslant C(|||g_2(D_x,D_t,D_s)\mathscr{C}|||+|||v|||)$$

si $v \in C_0^\infty(Y)$.

Enfin, montrons que l'on a :

$$(4.6) \quad |||(1+|D_s|)^{\frac{1}{2l+1}} g_j(D_x,D_t,D_s)v||| \leqslant C(|||g_j(D_x,D_t,D_s)\mathscr{C}v|||+|||v|||)$$

si $j = 3$ ou 4 et $v \in C_0^\infty(Y)$.

(4.3) s'obtiendra en additionnant les carrés des inégalités (4.4), (4.5), (4.6), et en diminuant éventuellement S.

Preuve de l'inégalité (4.6). — Examinons le cas $j = 3$. Le cas $j = 4$ se traite de façon analogue.

Soit $\tilde{\mathscr{C}}$ l'opérateur de symbole

$$\tilde{\mathscr{C}}(x,t,\xi,\tau,\sigma) = \tau + ic(x,t,\xi,\sigma)$$

où $c(x,t,\xi,\sigma) = h(x,t)\psi(x,t)q(x,t,\xi,\sigma)$, ψ étant une fonction $\geqslant 0$, appartenant à $C_0^\infty(X')$, et

$$q(x,t,\xi,\sigma) = (\gamma|\sigma|-\xi)m(\xi,\sigma) + (\xi^2+\sigma^2)^{1/2}\beta(\xi,\sigma)(1-m(\xi,\sigma)),$$

$m(\xi,\sigma)$ étant une fonction C^∞ positivement homogène de degré 0 si $\xi^2 + \sigma^2 \geqslant 1$, valant 1 si $-\xi > 2(\sqrt{2}-3\varepsilon)|\sigma|$ et $\xi^2 + \sigma^2 \geqslant 1$, ayant son support dans $\{(\xi,\sigma) : 10|\sigma|<9|\xi|, \xi<0\}$, et telle que $0 \leqslant m \leqslant 1$, $\beta(\xi,\sigma)$ étant une fonction C^∞ valant 1 si $\xi^2 + \sigma^2 \geqslant 1$ et 0 si $\xi^2 + \sigma^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

On va démontrer que si $\tilde{\chi}(\xi,\sigma)$ est C^∞, positivement homogène de degré 0 si $\xi^2 + \sigma^2 \geqslant 1$, et a son support dans le cône $|\sigma| \leqslant c|\xi|$ $(c>0)$, on a l'estimation

$$|||(1+|D_s|)^{\frac{1}{2l+1}}\tilde{\chi}(D_x,D_s)v||| \leqslant C(|||\tilde{\mathscr{C}}v|||+|||v|||) \tag{4.7}$$

si $v \in C_0^\infty(Y)$.

En appliquant cette inégalité à la fonction $\theta\, g_3\zeta w$, où $w \in C_0^\infty(Y')$, $Y' \subset\subset Y$, $\zeta \in C_0^\infty(Y)$ valant 1 sur Y' et $\theta \in C_0^\infty(Y)$ valant 1 sur un voisinage de $\operatorname{supp}\zeta$, on déduit facilement l'inégalité (4.6) pour w.

Il reste donc à démontrer l'inégalité (4.7).

Preuve de l'inégalité (4.7). — On va suivre point par point la démonstration des §§ 4 et 5 de Menikoff [6]. Cependant comme Menikoff suppose une factorisation de la forme $c(x,t,\xi,\sigma) = |\sigma|\, \dot{b}(x,t,\xi,\sigma)$ non réalisée ici, il faut modifier légèrement sa démonstration à 2 endroits. Donnons brièvement les grandes lignes de la démonstration en renvoyant à Menikoff [6] pour plus de détails, et indiquons les modifications à apporter.

Posons $M = D_t - ic(x,t,D_x,D_s)$ et

$$\mathscr{H}_\rho = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^3_{xts}), (1+|D_s|)^\rho u \in L^2(\mathbf{R}^3)\}$$

que nous munissons de sa topologie hilbertienne évidente.

On va construire une paramétrixe K pour $\mathscr{C}^*$ ayant les propriétés suivantes :

(1) K est bornée : $\mathscr{H}_{-\frac{1}{2l+1}} \to L^2(\mathbf{R}^3)$

(2) si $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, alors $\operatorname{supp} Kv \subset \{(x,t,s),(x,t) \in X'\}$

(3) si $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$, alors $MK_v = \omega(x,t)\tilde{\chi}(D_x,D_s)v + Rv$, où $\omega \in C_0^\infty(X')$ et R est un opérateur de type (1).

Tout comme dans Menikoff [6], de l'existence de K on peut déduire (4.7).

On pose $B(x,t,t',\xi,\sigma) = \displaystyle\int_t^{t'} c(x,\theta,\xi,\sigma)\, d\theta$

$$Kv(x,t,s) = (2\Pi)^{-2}\int e^{i(x\xi+s\sigma)}\tilde{\chi}(\xi,\sigma)\omega(x,t)(K_0\hat{v})(x,t,\xi,\sigma)\, d\xi\, d\sigma$$

où

$$K_0\hat{v}(x,t,\xi,\sigma) = -i\int_t^\infty \chi(t')e^{-B(x,t,t',\xi,\sigma)}\hat{v}(\xi,t',\sigma)\, dt'.$$

Alors $\mathrm{MK}v(x,t,s) = \omega(x,t)\tilde{\chi}(\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_s)v + \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_4$, avec

$$\mathrm{I}_1 = (2\Pi)^{-2}\mathrm{D}_t\omega(x,t). \int e^{i(x\xi+s\sigma)}\tilde{\chi}(\xi,\sigma)\mathrm{K}_0\hat{v}(x,t,\xi,\sigma)\,d\xi\,d\sigma$$

$$\mathrm{I}_2 = -(2\Pi)^{-2}\int_{\substack{|\xi|>1\\ t'\geqslant t}} \chi(t')e^{i(x\xi+s\sigma)-\mathrm{B}(x,t,t',\xi,\sigma)}\tilde{\chi}(\xi,\sigma)k_\mathrm{N}(x,t,t',\xi,\sigma)\,d\xi\,d\sigma\,dt'$$

$$\mathrm{I}_3 = -(2\Pi)^{-2}\int_{\substack{|\xi|\leqslant 1\\ t'\geqslant t}} [c(x,t,\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_s)(e^{i(x\xi+s\sigma)-(\mathrm{B}(x,t,t',\xi,\sigma)}\omega(x,t))$$
$$-\ \omega(x,t)e^{i(x\xi+s\sigma)-\mathrm{B}(x,t,t',\xi,\sigma)}c(x,t,\xi,\sigma)]\ \tilde{\chi}(\xi,\sigma)\chi(t')\hat{v}(\xi,t',\sigma)\,d\xi\,d\sigma\,dt'$$

$$\mathrm{I}_4 = -(2\Pi)^{-2}\int_{\substack{|\xi>1\\ t\geqslant t}} \chi(t')r_\mathrm{N}(x,t,t',\xi,\sigma)\tilde{\chi}(\xi,\sigma)\,\hat{v}(\xi,t',\sigma)\,d\xi\,d\sigma\,dt'$$

où

$$k_\mathrm{N}(x,t,t',\xi,\sigma) = e^\mathrm{B}\sum_{0<|\alpha|\leqslant\mathrm{N}}\frac{1}{\alpha\,!}\,c^{(\alpha)}(x,t,\xi,\sigma)\mathrm{D}_x^\alpha(\omega e^{-\mathrm{B}})\,,$$
$$r_\mathrm{N}(x,t,t',\xi,\sigma) = 0((|\xi| + |\sigma|)^{-\mathrm{N}}) \quad (\mathrm{N}\ \text{entier positif arbitraire}),$$

$\hat{v}$ représentant la transformée de Fourier partielle de v par rapport à x. I_3 et I_4 définissent des opérateurs bornés $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^3) \to \mathscr{H}_{\frac{1}{2l+1}}$; il en est de même pour I_2 si l'on intègre uniquement sur $|\sigma| \leqslant 1$. Voir Menikoff, *loc. cit.*

En vertu du théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange, on a, si X' est assez petit, la factorisation $h(x,t) = f(x,t)k(x,t)$, où

$$f(x,t) = t^{2l} + \sum_{j=1}^{2l}\mathrm{A}_j(x)t^{2l-j},$$

$k(x,t) > 0$ si $(x,t)\in\mathrm{X}'$, et $\mathrm{A}_j(0) = 0$. Donc si $\Psi = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp}\omega$, on a

$$c(x,t,\xi,\sigma) = f(x,t)\tilde{c}(x,t,\xi,\sigma),$$

avec

$$0 < c_1 \leqslant \frac{\tilde{c}(x,t,\xi,\sigma)}{|\xi| + |\sigma|} \leqslant c_2$$

si (x,t) appartient à un voisinage de $\operatorname{supp}\omega$.

Pour estimer I_1, I_2 et K, on les considère comme des opérateurs pseudo-différentiels à valeurs vectorielles : on montre que si les S_j sont les opérateurs de $C_0^\infty(R^2_{xs}, L^2_t)$ dans $C^\infty(R^2_{xs}, L^2_t)$ de symboles

$$S_1(x,\xi,\sigma) : h(t) \to \omega(x,t) \int_t^\infty e^{-B(x,t,t',\xi,\sigma)} \chi(t') h(t')\, dt'$$

$$S_2(x,\xi,\sigma) : h(t) \to \omega'_t(x,t) \int_t^\infty e^{-B(x,t,t',\xi,\sigma)} \chi(t') h(t')\, dt'$$

$$S_3(x,\xi,\sigma) : h(t) \to \int_t^\infty e^{-B(x,t,t',\xi,\sigma)} k_N(x,t,t',\xi,\sigma) \chi(t') h(t')\, dt'$$

on a :

$$(4.8) \qquad \|D_\xi^r D_x^q S_j(x,\xi,\sigma)\|_{\mathscr{L}(L_t^2)} \leqslant c_{j,\alpha,\beta}(1+|\sigma|)^{-\delta}(1+|\xi|)^{\frac{|q|-|r|}{2}} ;$$

$\| \quad \|_{\mathscr{L}(L_t^2)}$ représente la norme sur l'espace $\mathscr{L}(L_t^2)$ des opérateurs bornés dans L_t^2 et $\delta = \dfrac{1}{2l+1}$.

Cela se démontre en suivant point par point la démonstration de Menikoff [6], § 5. Cependant comme Menikoff suppose une factorisation

$$c(x,t,\xi,\sigma) = |\sigma| \dot{b}(x,t,\xi,\sigma),$$

il faut modifier légèrement sa démonstration à 2 endroits :

1) pour passer de son inégalité (5.15) à son inégalité (5.16), il faut utiliser

$$e^{-\frac{1}{2}B} \leqslant e^{-c(|\xi|+|\sigma|)\int_t^{t'} f(x,\lambda)\, d\lambda}$$

et appliquer son lemme (5.2) à $f(x,\lambda)$ avec le poids $c(|\xi|+|\sigma|)$ en prenant $\theta = \theta' = 0$, $d = 2l$.

2) pour estimer son terme (5.4) (au bas de la page 131) on estime la quantité $\mathscr{M}$ comme lui (en tenant compte de la modification 1) si $|\alpha| + |q'| + |r'| > 1$. Si $|\alpha| = 1$ et $q' = r' = 0$, on obtient :

$$|\mathscr{M}| \leqslant C|t' - t|^{\frac{1}{2}(|q_0|+|r_0|+J+L)} |\xi|^{\frac{|q|-|r|}{2}} f^{\frac{1}{2}}(x,t)(|\xi|+|\sigma|)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{B}{2}}.$$

On applique alors son lemme 5.2 à $f(x,\lambda)$ avec le poids $c(|\xi|+|\sigma|)$ et $\theta = \dfrac{1}{2}$, $\theta' = 0$, $d = 2l$, ce qui achève la démonstration de (4.8).

5. Démonstration de l'inégalité (3.1).

La démonstration de l'inégalité 3.1 est basée sur le résultat suivant (cf. Sjöstrand [9], lemme 2.2).

LEMME 2. — *Si* $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ *et* $\eta = (\eta',\eta'') \in \mathbf{R}^n$, $\eta'' \in \mathbf{R}^d$, *si* $\mathrm{WF}(u) \subset \{\eta''=0\}$ *et si* $0 < \gamma < 1$, *on définit*

$$\mathrm{T}\chi u(y,\eta') = \int \chi(y,\tilde{y}',\eta') e^{i\langle y-\tilde{y}',\eta'\rangle} u(\tilde{y}',y'')\, d\tilde{y}'$$

où $\chi(y,\tilde{y}',\eta') \in \mathrm{S}_{1,\gamma}^{m+\frac{\gamma}{2}(n-d)}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^{n-d}) \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\mathrm{K}}^m$ *a son support dans* $|y'-\tilde{y}'| \leqslant \mathrm{C}$ *et appartient à* $\mathrm{S}^{-\infty}$ *hors de* $|y'-\tilde{y}'| \leqslant \mathrm{C}'|\eta'|^{-\gamma}$.

$\mathrm{T}_\chi u$ *est une fonction* C^∞, *et l'on a les propriétés suivantes :*

1) *Si* $m = 0$ *et si* $u \in \mathrm{H}_s$ *autour de* $(y_0,\eta'_0,0)$, *alors il existe un voisinage conique* $\mathrm{V} \subset \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^{n-d}\backslash\{0\})$ *de* (y_0,η'_0) *tel que*

$$(1+|\eta'|)^s \mathrm{T}_\chi u(y,\eta') \in \mathrm{L}^2(\mathrm{V})$$

2) *Si* $\chi(y,y',\eta') = \psi((y'-\tilde{y}')|\eta'|^\gamma)|\eta'|^{\frac{\gamma}{2}(n-d)}$ *pour* $|\eta'| \geqslant 1$ (*et est convenablement définie pour* $|\eta'| < 1$ *de sorte que* $\chi \in \mathrm{C}^\infty$) *et s'il existe un voisinage conique* $\mathrm{V} \subset \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^{n-d}\backslash\{0\})$ *de* (y_0,η'_0) *tel que*

$$(1+|\eta'|)^s \mathrm{T}_\chi u(y,\eta') \in \mathrm{L}^2(\mathrm{V}),$$

alors $u \in \mathrm{H}_s$ *autour de* $(y_0,\eta'_0,0)$

$$(0 \not\equiv \psi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^{n-d})).$$

Ce lemme est prouvé par Sjöstrand (*loc. cit.*) dans le cas $\gamma = \frac{1}{2}$. Mais la même preuve est valable si $0 < \gamma < 1$.

On utilisera aussi le lemme suivant qui se démontre comme le lemme 2.1 de Sjöstrand [9].

LEMME 3. — *Si* $\chi \in \tilde{\mathrm{K}}^0$ *et si* $a(y)$ *est une fonction* C^∞, *alors :*

$$\mathrm{T}_\chi(a(y)u)(y,\eta') = a(y)\mathrm{T}_\chi u(y,\eta') + \mathrm{T}_{\chi_a} u(y,\eta'),$$

où $\chi_a \in \tilde{\mathrm{K}}^{-\gamma}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n-d} \times \mathbf{R}^{n-d})$.

L'idée de la démonstration de l'inégalité (3.1) est la suivante : le lemme 2 nous montre que la régularité de u est équivalente à la finitude de certaines intégrales. Nous allons établir la finitude des intégrales en utilisant les estimations à poids du § 4 et le lemme suivant, qui sera utile dans l'estimation d'un certain commutateur.

LEMME 4. — *Si* $u \in \mathscr{D}'(\mathrm{U})$ *et* $\rho \notin \mathrm{WF}(\mathscr{L}u)$, *alors*

$$S_{D_{y''}u}(\rho) \geqslant S_u(\rho) - \frac{2l}{2l+1}$$

(*où* $D_{y''}$ *est soit* $D_{\bar{z}}$, *soit* D_t).

La preuve du lemme 4 est basée sur le

LEMME 5. — *Si* K *est un compact de* U, *alors, pour tout* s *réel, il existe une constante positive* $C_{K,s}$ *telle que*

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha}u\|_{s-\frac{2l}{2l+1}} \leqslant C_{K,s}(\|\mathscr{L}u\|_s + \|u\|_s)$$

si $u \in \mathscr{E}'(\mathrm{K}) \cap H_s$.

Preuve du fait que le lemme 5 *implique le lemme* 4. — Si $\chi(y,\eta) \in S^0$ est positivement homogène pour $|\eta|$ grand, vaut 1 autour de $\lambda\rho$ si λ est grand et a un petit support conique et si $\tilde{\chi}$ désigne un opérateur proprement supporté de symbole χ, alors $\tilde{\chi}u \in \mathscr{E}'$ et $\mathscr{L}\tilde{\chi}u = [\mathscr{L},\tilde{\chi}]\,u$ modulo C^{∞}. Donc si $S_u \geqslant s$ près de ρ, on a pour $\varepsilon > 0$ arbitraire : $\tilde{\chi}u \in H_{s-\varepsilon} \cap \mathscr{E}'$ et $\mathscr{L}\tilde{\chi}u \in H_{s-\varepsilon}$.

Donc par le lemme 5, on conclut que $D_{y''}(\tilde{\chi}u) \in H_{s-\frac{2l}{2l+1}-\varepsilon}$, ce qui démontre le lemme 4.

Preuve du lemme 5.

a) Il suffit de le prouver pour les fonctions C^{∞} à support compact. En effet $u_\varepsilon = u * \theta_\varepsilon \to u$ dans H_s^{comp} et $\theta_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-3}\theta\left(\dfrac{y}{\varepsilon}\right)$, où $\theta \in C_0^{\infty}$ a son support dans $|y| \leqslant 1$ et $\displaystyle\int \theta\, dy = 1$.

Si l'on a pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} u_\varepsilon\|_{s-\frac{2l}{2l+1}} \leqslant C(\|\mathscr{L} u_\varepsilon\|_s + \|u_\varepsilon\|_s),$$

on déduit :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} u_\varepsilon\|_{s-\frac{2l}{2l+1}} \leqslant C(\|\mathscr{L} u * \theta_\varepsilon\|_s + \|[\mathscr{L}, * \theta_\varepsilon]u\|_s + \|u_\varepsilon\|_s)$$
$$\leqslant \tilde{C}(\|\mathscr{L} u\|_s + \|u\|_s).$$

Donc si $\varepsilon \to 0$, on en déduit le lemme 4.

b) Il suffit de le prouver pour $s = 0$, car si Λ désigne un opérateur pseudo-différentiel proprement supporté de symbole $(1+|\eta|^2)^{1/2}$, on a :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} u\|_{s-\frac{2l}{2l+1}} \leqslant C_{s,K}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|\Lambda^s D_{y''}^{\alpha} u\|_{-\frac{2l}{2l+1}} + \|u\|_{s-\frac{2l}{2l+1}}\right)$$
$$\leqslant C_{s,K}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} \Lambda^s u\|_{-\frac{2l}{2l+1}} + \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|[\Lambda^s, D_{y''}^{\alpha}]u\|_{-\frac{2l}{2l+1}} + \|u\|_{s-\frac{2l}{2l+1}}\right)$$
$$\leqslant C_{s,K}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} \Lambda^s u\|_{-\frac{2l}{2l+1}} + \|u\|_{s-\frac{2l}{2l+1}}\right).$$

Si le noyau-distribution de Λ^s a son support assez près de la diagonale, alors $\operatorname{supp} u \subset K \Rightarrow \sup \Lambda^s u \subset K' \subset\subset U$. Or, supposant le lemme 5 prouvé pour $s = 0$, on a :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} w\|_{-\frac{2l}{2l+1}} \leqslant C_{K'} (\|\mathscr{L} w\|_0 + \|w\|_0), \quad w \in C_0^\infty(K').$$

Appliquant ce résultat à $w = \Lambda^s u$, on obtient que :

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} u\|_{s-\frac{2l}{2l+1}} \leqslant C_{s,K}(\|\mathscr{L}\Lambda^s u\|_0 + \|u\|_s)$$
$$\leqslant C_{s,K}(\|\mathscr{L} u\|_s + \|u\|_s).$$

c) Soient $\tilde{K} \subset\subset \mathbf{R}^2_{t\bar{z}}$ et $I \subset\subset \mathbf{R}^2_{\bar{x}}$ tels que $(0,(0,0)) \in I \times \tilde{K} \subset U$. Si $\bar{x} \in I$ est fixé et $(t,\bar{z})$ appartient à un petit voisinage de $\tilde{K}$, alors $\mathscr{L}_1$ (la partie de $\mathscr{L}$ d'ordre $\geqslant 0$) est sous-elliptique en t et $\bar{z}$. La démonstration des inégalités de Treves [12] montre qu'il existe une constante positive C, indépendante de $\bar{x}$, telle que si u est une fonction C^∞ ayant la propriété que pour tout $\bar{x} \in I$, le support de la fonction $(t,\bar{z}) \to u(\bar{x},t,\bar{z})$ est inclus à $\tilde{K}$, l'on a :

$$\iint |(1+|D_{\bar z}|+|D_t|)^{\frac{1}{2l+1}} u(\bar x,t,\bar z)|^2\, d\bar z\, dt$$
$$\leqslant C\left(\iint |\mathscr{L}_1 u(\bar x,t,\bar z)|^2\, d\bar z\, dt + \iint |u(\bar x,t,\bar z)|^2\, d\bar z\, dt\right).$$

Intégrant cette inégalité par rapport à $\bar x$, on obtient :

$$\|(1+|D_{\bar z}|+|D_t|)^{\frac{1}{2l+1}} u\|_0^2 \leqslant C(\|\mathscr{L}_1 u\|_0^2 + \|u\|_0^2).$$

En remarquant que

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \|D_{y''}^{\alpha} u\|_{-\frac{2l}{2l+1}} \leqslant C\|(1+|D_{\bar z}|+|D_t|)^{\frac{1}{2l+1}} u\|_0^2,$$

on en déduit facilement le lemme 5.

Pour démontrer l'inégalité (3.1), on va démontrer que si ω et $\tilde\varepsilon > 0$ sont assez petits (mais indépendants de $\lambda \in \mathbf{Z}^+$), alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}^+$, on a :

$$(5.1) \qquad \int_0^{\infty} \|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi(y)+\tilde\varepsilon)-\mu} T_\chi(\psi u)(y,\eta')\|^2_{L^2\{y,|y'|\leqslant\omega\}}\, d\eta' < \infty$$

si $\chi(y,\tilde y',\eta') = \psi((y'-\tilde y')|\eta'|^{\gamma})|\eta'|^{\frac{\gamma}{2}}$ (où $0 \not\equiv \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$) pour $|\eta'| \geqslant 1$, γ étant un nombre réel appartenant à l'intervalle (0,1) qui sera déterminé par la suite et $\langle\eta'\rangle = (1+|\eta'|^2)^{1/2}$.

Si on pose $\mathscr{A} = -T_\chi A u$, l'estimation (4.1) pour $\mathscr{L}_1$ appliquée à $\psi T_\chi u$ avec $\sigma = \ln\langle\eta'\rangle^\lambda$ ($|\eta'| \geqslant T$) et le poids $\tilde\varphi$ introduit au § 3 donne :

$$(5.2) \quad (\ln\langle\eta'\rangle^\lambda)^{\frac{1}{4(l+1)}} \|\langle\eta'\rangle^{\lambda\tilde\varphi} T_\chi u(y,\eta')\|^2_{L^2_{y''}}$$
$$\leqslant C\|\langle\eta'\rangle^{\lambda\tilde\varphi}\mathscr{L}_1(\psi T_\chi u)(y,\eta')\|^2_{L^2_{y''}}.$$

En tenant compte du fait que

$$\mathscr{L}_1(\psi T_\chi u) = \psi T_\chi \mathscr{L} u + [\mathscr{L}_1,\psi]T_\chi u + \psi\mathscr{A} u + \psi[\mathscr{L}_1,T_\chi]u,$$

il vient, si $|\eta'| \geqslant T$

$$C(\ln\langle\eta'\rangle^\lambda)^{\frac{1}{4(l+1)}}\|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi+\tilde\varepsilon)-\mu}\psi T_\chi u(y,\eta')\|^2_{L^2_{y''}} \leqslant ① + ② + ③ + ④,$$

où

$$\text{①} = \|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi+\tilde\varepsilon)-\mu}\psi T_\chi \mathscr{L}u\|^2_{L^2_{y''}}$$
$$\text{②} = \|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi+\tilde\varepsilon)-\mu}[\mathscr{L}_1,\psi]\,T_\chi u\|^2_{L^2_{y''}}$$
$$\text{③} = \|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi+\tilde\varepsilon)-\mu}\psi\,\mathscr{A}u\|^2_{L^2_{y''}}$$
$$\text{④} = \|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi+\tilde\varepsilon)-\mu}\psi[\mathscr{L}_1,T_\chi]u\|^2_{L^2_{y''}}.$$

On va montrer qu'il existe $\omega > 0$ tel que chacune de ces quatre expressions soit sommable en y' et η' sur $\{(y',\eta'),|y'|<\omega,\eta'>T\}$.

Remarque. — Pour prouver le théorème 1, il suffit de considérer des distributions qui, dans le système de coordonnées x, t, z, sont de la forme $v_{xt}\otimes 1_z$ (cf § 2). Pour ces distributions-là, on a, en diminuant éventuellement N :

$$\text{(5.3)}\quad \{((\bar x,t,\bar z),(1,0,0)),0<|\bar x|<N,\sup(|t|,|\bar z|)<N\}\cap WF(u) = \varnothing$$

En effet, repassant aux coordonnées x, t, z, on a bien que

$$((x,t,z)(1,0,\bar F_z/\bar F_x)) \notin WF(v_{xt}\otimes 1_z)$$

si (x,t,z) est proche de $(0,0,0)$ et $x \neq 0$. Comme le changement de coordonnées $\bar x = \bar F(x,z)$, $\bar z = \bar G(x,z)$ choisi au § 2 fait localement se correspondre les régions $\bar x \neq 0$ et $x \neq 0$, on en tire (5.3).

*Étude de l'intégrale de*①. — Si ω est assez petit, on aura, vu la régularité de $\mathscr{L}u$:

$$\int_T^\infty d\eta' \int_{|y'|\leqslant\omega} \text{①}\, dy' = \int_T^\infty \|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi+\tilde\varepsilon)-\mu}\psi T_\chi\mathscr{L}u\|^2_{L^2\{y,|y'|\leqslant\omega\}}\, d\eta' < \infty$$

*Étude de l'intégrale de*②.

$$\int_T^\infty d\eta' \int_{|y'|\leqslant\omega} \text{②}\, dy' = \int_T^\infty \|\langle\eta'\rangle^{\lambda(\tilde\varphi+\tilde\varepsilon)-\mu}T_\chi[\mathscr{L}_1,\psi]u\|^2_{L^2\{y,|y'|\leqslant\omega\}}\, d\eta'.$$

Si $[\mathscr{L}_1,\psi]$ n'est pas localement nulle autour de $(0,t,\bar z)$, on a 2 cas possibles : ou bien $t > 0$, et alors $u \in C^\infty$ autour de $((0,t,\bar z),(1,0,0))$ par le corollaire 7.2.2 de Duistermaat-Hörmander [2]. Dans ce cas, la contribution au 2^e membre est $< \infty$; ou bien $\tilde\varphi(0,t,\bar z) \leqslant -\frac{1}{2}\cdot$ Mais alors si W est un petit voisinage (dans $\mathbf{R}^3$) de l'ensemble

$$\{(\bar x,t,\bar z)\in\mathbf{R}^3,\ \bar x = 0,\ t\leqslant 0,\ (\bar x,t,\bar z)\in \text{support de la fonction } [\mathscr{L}_1,\psi]\},$$

on a :

$$\tilde{\varphi}(\bar{x},t,\bar{z}) \leqslant -\frac{1}{2} + \varepsilon_1 \qquad \text{pour} \qquad (\bar{x},t,\bar{z}) \in \mathrm{W},$$

où ε_1 peut être rendu arbitrairement petit.

Si $\tilde{\varphi} + \tilde{\varepsilon} \leqslant 0$ pour $(\bar{x},t,\bar{z}) \in \mathrm{W}$, on a alors si ω est assez petit :

$$\int_{\mathrm{T}}^{\infty} d\eta' \int_{|y'| \leqslant \omega} ② \, dy' < \infty \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 1.$$

Il suffit donc de choisir $\tilde{\varepsilon} < \frac{1}{2} - \varepsilon_1$.

Étude de l'intégrale de ③. — Si $\tilde{\varphi} + \tilde{\varepsilon} \leqslant 1$ lorsque $(t,\bar{z}) \in \operatorname{supp} \psi$ et $|y'| \leqslant \omega$, et si $\lambda = 1$, alors

$$\int_{\mathrm{T}}^{\infty} d\eta' \int_{|y'| \leqslant \omega} ③ \, dy' \leqslant \int_{T}^{\infty} \|\langle \eta' \rangle^{-\mu+1} \psi \mathscr{A} u\|^2_{\mathrm{L}^2\{y,|y'| \leqslant \omega\}} \, d\eta' < \infty$$

puisque $\mathrm{S}_{\mathrm{A}u}(y,\eta',0) > -\mu + 1$ si $(y,\eta') \in \mathscr{R}$. Comme $\tilde{\varphi}(0,t,\bar{z}) < \frac{1}{2l+1}$ sur supp ψ par construction, il suffit de prendre $\tilde{\varepsilon} < \frac{2l}{2l+1}$ et ω petit.

Étude de l'intégrale de ④. — Puisque

$$[\mathscr{L}_1, \mathrm{T}_\chi] = -i[h,\mathrm{T}_\chi]\mathrm{D}_{\bar{z}} + [r,\mathrm{T}_\chi] = -i\mathrm{T}_{\chi_h}\mathrm{D}_{\bar{z}} + \mathrm{T}_{\chi_r}$$

avec χ_h et $\chi_r \in \tilde{\mathrm{K}}^{-\gamma}$, on a :

$$\int_{\mathrm{T}}^{\infty} d\eta' \int_{|y'| \leqslant \omega} ④ \, dy' \leqslant 2 \int_{\mathrm{T}}^{\infty} \|\langle \eta' \rangle^{\lambda(\tilde{\varphi}+\tilde{\varepsilon})-\mu} \psi \mathrm{T}_{\chi_h} \mathrm{D}_{\bar{z}} u\|^2_{\mathrm{L}^2\{y,|y'| \leqslant \omega\}} \, d\eta'$$
$$+ 2 \int_{\mathrm{T}}^{\infty} \|\langle \eta' \rangle^{\lambda(\tilde{\varphi}+\tilde{\varepsilon})-\mu} \psi \mathrm{T}_{\chi_r} u\|^2_{\mathrm{L}^2\{y,|y'| \leqslant \omega\}} \, d\eta' = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

En vertu du lemme 4, $\mathrm{I}_1 < \infty$ si $\lambda = 1$ dès que $\tilde{\varphi} + \tilde{\varepsilon} - \mu \leqslant -\mu - \frac{2l}{2l+1} + \gamma$ pour $(t,\bar{z}) \in \operatorname{supp} \psi$ et $|y'| \leqslant \omega$. Puisque

$$\tilde{\varphi}(0,t,\bar{z}) < \frac{1}{2l+1} \qquad \text{si} \qquad (t,\bar{z}) \in \operatorname{supp} \psi,$$

il suffit de prendre γ assez proche de 1 pour satisfaire cette condition. $I_2 < \infty$ si $\lambda = 1$ dès que $\tilde{\varphi} + \tilde{\varepsilon} - \mu \leqslant -\mu + \gamma$ pour $(t,\bar{z}) \in \operatorname{supp} \psi$ et $|y'| \leqslant \omega$. Puisque $\tilde{\varphi}(0,t,\bar{z}) < \dfrac{1}{2l+1}$ si $(t,\bar{z}) \in \operatorname{supp} \psi$, il suffit de prendre le γ déterminé pour I_1.

Donc si $\tilde{\varepsilon} \leqslant \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 > 0)$ et si γ est assez proche de 1, on déduit que

$$\int_0^\infty \|\langle\eta'\rangle^{\tilde{\varphi}+\tilde{\varepsilon}-\mu} T_\chi(\psi u)(y,\eta')\|^2_{L^2\{y,|y'|\leqslant\omega\}}\, d\eta' < \infty .$$

On en déduit qu'il existe $\omega_0 > 0$ tel que $S_u(y,\eta',0) > \tilde{\varphi} + \dfrac{\varepsilon_0}{2} - \mu$ si $(y,\eta') \in \mathscr{R}$, à condition que $(\bar{x},t,\bar{z},\eta') \in \mathscr{R}$ implique $|\bar{x}| < \omega_0$. (Si $\tilde{\varphi} \leqslant -\dfrac{\varepsilon_0}{2}$, c'est évident, et si $t > 0$, c'est impliqué par le corollaire 7.2.2 de Duistermaat-Hörmander [2]). En itérant le procédé, on conclut que, pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}^+$:

$$S_u(y,\eta',0) > \lambda\left(\tilde{\varphi}(y) + \frac{\varepsilon_0}{2}\right) - \mu \qquad \text{si} \qquad (y,\eta') \in \mathscr{R} \qquad \text{et} \qquad |y'| < \omega_0 .$$

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

Remerciements. — Ce travail a été rendu possible grâce à un mandat du F.N.R.S. (Belgique).

Je voudrais remercier B. Helffer et R. Lascar pour leurs remarques. Les conseils de M. L. Boutet de Monvel m'ont permis d'améliorer la présentation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Cardoso et F. Treves, Subelliptic Operators, dans Analyse fonctionnelle et applications, Hermann 1975, 161-169.

[2] J.-J. Duistermaat et L. Hörmander, Fourier Integral Operators II, *Acta Math.*, 128 (1972), 184-269.

[3] B. Helffer, Addition de variables et application à la régularité (Rennes, mai 1976).

[4] L. Hörmander, Fourier Integral Operators I, *Acta Math.*, 127 (1971), 79-183.

[5] L. Hörmander, On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, *L'Ens. Math.*, 17 (1971), 99-163.

[6] A. Menikoff, Carleman estimates for partial differential equations with real coefficients, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 54 (1974), 118-133.

[7] T. NAGANO, Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan*, 18, 4 (1966), 398-404.

[8] L. NIRENBERG et F. TREVES, On local solvability of linear partial differential equations. Part II. Sufficient conditions, *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970), 459-510.

[9] J. SJÖSTRAND, Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics, Report n° 11, Institut Mittag-Leffler (1974).

[10] M. STRAUSS et F. TREVES, First order linear partial differential equations and uniqueness in the Cauchy problem, *Journal Diff. Eq.*, 15 (1974), 195-209.

[11] F. TREVES, On the local solvability of linear partial differential equations in two independent variables, *Amer. Journ. Math.*, 92 (1970), 174-204.

[12] F. TREVES, A new method of proof of the subelliptic estimates, *Comm. Pure Appl. Math.*, 24 (1971), 71-115.

[13] F. TREVES, A link between solvability of linear pseudo-differential equations and uniqueness in the Cauchy problem, *Amer. J. Math.*, 94 (1972), 267-288.

Manuscrit reçu le 16 janvier 1978
Révisé le 18 avril 1978.

Paul GODIN,

Département de Mathématiques
Université Libre de Bruxelles
Campus de la Plaine
C.P. 214
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles (Belgique).