ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE DAZORD

Invariants homotopiques attachés aux fibres symplectiques

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 2 (1979), p. 25-78

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_2_25_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 2 (1979), 25-78.

INVARIANTS HOMOTOPIQUES ATTACHÉS AUX FIBRES SIMPLECTIQUES

par Pierre DAZORD

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les développements récents de la théorie des équations aux dérivées partielles ont fait apparaître les invariants attachés à des immersions lagrangiennes que sont la classe de cohomologie de Maslov-Arnold, l'indice des lacets ([1], [8], [9], [10]) et l'indice des chemins ([9], [10]) qui lui sont associés. Si une immersion lagrangienne est $2q$-orientée, on peut construire un indice qui intervient dans le calcul lagrangien de J. Leray [9].

Le but de cet article est de présenter une construction géométrique de ces invariants. Dans [11*b*] on trouvera une construction analytique de l'indice de Maslov-Arnold-Leray d'une immersion lagrangienne dans $\mathbf{T^*R}^n$.

Dans une première partie on construit des invariants homotopiques dans une situation très générale : un fibré (F,p,X) est un triple où p est une surjection continue de l'espace topologique F sur l'espace topologique X, localement sectionnable ; G étant un groupe topologique, à tout G-cocycle sur F est associé un fibré G-principal, une classe de cohomologie (non abélienne) et si G est abélien discret un indice des lacets, tandis qu'à tout G-diviseur est associé un G-cocycle, le couple formé d'un fibré G-principal et d'une section globale (non continue en général) et si G est discret un indice des chemins. Ces notions sont fonctorielles en G et pour l'image réciproque des chemins ce qui sera souvent utilisé par la suite. Les classes d'équivalences de G-diviseurs sur un fibré sont des diviseurs topologiques au sens de [4] et [5] : cependant la notion d'indice est attachée au diviseur et non au diviseur topologique associé.

Enfin si d est un diviseur sur F tel que $\mathrm{ind}_{\partial d}(\pi_1 X) = 0$, se trouve définie sur X une application h de X dans G continue sur X_d complémentaire du support de d, nulle sur une composante connexe de X_d, telle que pour tout chemin γ, $\mathrm{ind}_d\gamma = h(\gamma(o)) - h(\gamma(1))$. Ceci permettra dans la troisième partie de construire l'indice de Maslov-Arnold-Leray.

Ces résultats complètent des résultats antérieurs ([3*b*, [3*c*]).

Dans la deuxième partie ces résultats généraux sont appliqués au cas d'un fibré symplectique (E,p,X). Si E est équipé de deux sous-fibrés lagrangiens L et L', le formalisme algébrique de [4] permet de construire un $\mathbf{Z}$-cocycle

$\sigma_{k,k'}$ sur le fibré $\Lambda_{k,k'}(E)$ des lagrangiens de E coupant L (resp. L′) suivant un sous-espace de dimension k (resp. k'). Cette construction est toujours possible pour $k = 0 = k'$. Alors $\sigma_{0,0}$ est le cocycle de Hörmander [8]. Les **Z**-fibrés principaux associés aux cocycles $\sigma_{k,k'}$ sont tous isomorphes. Leur classe d'isomorphisme est la classe de Maslov-Arnold. $\Lambda_{k,k'}(E)$ est également muni d'un **Z**-diviseur $d_{k,k'}$. En fait tous ces diviseurs sont la restriction d'une même application définie sur la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(E)$, le diviseur de Maslov D. Ils ont tous même support et définissent le même indice de chemin, l'indice de Maslov-Arnold des chemins. En particulier sur $\Lambda^2(E)$, carré fibré de la grassmannienne lagrangienne, on construit par image réciproque de E par la projection sur X un fibré symplectique $\mathscr{E}$ qui est muni de deux sous-fibrés lagrangiens $\mathscr{L}_1 : (\lambda,\mu) \to (\lambda,\mu,\mu)$ et $\mathscr{L}_2 :$ $(\lambda,\mu) \to (\lambda,\mu,\lambda)$. On obtient ainsi une classe de Maslov-Arnold sur $\Lambda^2(E)$ universelle en ce sens que la classe de Maslov-Arnold de (E,L,L′) s'obtient pour tout couple (L,L′) par image réciproque, ce qui permet d'obtenir diverses propriétés de la classe de Maslov-Arnold de (E,L,L′) (cf. [3*b*], [3*c*], [4], [5]).

Le cadre de la troisième partie est celui de la géométrie q-symplectique. Un fibré q-symplectique (E,σ,q) est un fibré symplectique (E,σ) dont le groupe structural est élargi à $Sp_q(n)$ revêtement à q feuillets de $Sp(n)$. Un tel élargissement n'est possible que sous certaines conditions topologiques [7]. Un sous-fibré lagrangien L de E est $2q$-orientable s'il existe une section continue de $\Lambda_{2q}(E)$ fibré des $2q$-lagrangiens de E relevant L. Si L est $2q$-orientable, L′ est $2q$-orientable si et seulement si l'indice de Maslov-Arnold, relatif à L et L′, des lacets de X est nul modulo $2q$. D'autre part L est 2-orientable si et seulement si L est orientable au sens ordinaire. En fait à tout sous-fibré lagrangien orientable d'un fibré symplectique E, on peut associer une géométrie ∞-symplectique de E et deux telles géométries sont isomorphes si et seulement si l'indice de Maslov-Arnold, relatif à L et L′, des lacets de X est nul. Tout ceci généralise un résultat de Souriau [11*a*].

Si $(E,\sigma\Lambda q)$ est un fibré q-symplectique, $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$ désignant le carré fibré de $\Lambda_{2q}(E)$, le fibré $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E) \boxtimes E \to \overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$ est un fibré q-symplectique muni naturellement de deux $2q$-orientations $\mathscr{L}_1 : (\lambda_{2q},\mu_{2q}) \to (\lambda_{2q},\mu_{2q},\mu_{2q})$ et $\mathscr{L}_2(\lambda_{2q},\mu_{2q}) \to (\lambda_{2q},\mu_{2q},\lambda_{2q})$. L'indice de Maslov-Arnold modulo $2q$ des lacets de $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$ est nul. On peut donc construire une fonction m_{2q} sur $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_{2q}$ continue sur les paires transverses. m_{2q} est l'indice de Maslov-Arnold-Leray du fibré q-symplectique (E,σ,q). On est alors à même d'étendre aux fibrés q-symplectiques les résultats de [9].

Dans un dernier paragraphe est étudié le rapport entre l'indice de Morse et l'indice de Maslov-Arnold. Ce rapport est naturel dans la mesure où la formulation covariante des problèmes variationnels est en fait une formulation symplectique. Si h est un hamiltonien sur T^*M, l'application ψ_* de $\mathbf{R} \times T^*M$ dans $T^*(\mathbf{R} \times M \times M)$ définie par $(t,v) \to \psi_*(t,v)$ où

$$\psi_*(t,v) = ((t, -h(v)),\ \varphi_{*t}(v), -v)$$

où φ_* est le flot hamiltonien de h est une immersion lagrangienne dont l'indice de Maslov-Arnold des lacets est nul, ce qui permet de construire une application de $\mathbf{R} \times T^*M$ dans $\mathbf{Z}\,\mu_\psi(t,v)$ qui d'une part est l'image réciproque de l'indice de Maslov-Arnold-Leray du fibré ∞-symplectique naturellement associé à ψ_* et d'autre part s'identifie à l'indice de Morse de la géodésique $u \to \gamma(u,v)$, $u \in [0,t]$, tangente à l'origine à v. La méthode suivie pour réaliser cette identification diffère de celle de [2] et s'apparente à celle de [6]. Les résultats de la première partie permettent de retrouver le théorème de Morse exprimant l'indice de Morse comme somme des ordres de conjugaison des points conjugués de 0. Le cadre de cette étude est la géométrie finslérienne qui, au demeurant, s'introduit naturellement chaque fois que l'on considère sur une variété M un opérateur pseudo-différentiel du 2^e ordre elliptique et autoadjoint.

CHAPITRE PREMIER

INVARIANTS HOMOTOPIQUES

1. Cocycles et diviseurs.

Par fibré on entend un triple (F,p,X), noté F par abus de notations, où F et X sont deux espaces topologiques, X connexe et p une surjection continue de F sur X localement sectionnable, ce qui signifie que pour tout x de X il existe une section de p, continue, définie dans un voisinage de x.

Un morphisme du fibré $F' = (F',p',X')$ dans le fibré F est un couple $(f,\tilde{f})$ d'applications continues telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Soit G un groupe topologique, noté multiplicativement, d'élément neutre e. Un G-cocycle sur F est une application σ continue du carré fibré $\overset{2}{\boxtimes} F$ dans G telle que $\sigma(z_1,z_2)\sigma(z_2,z_3)\sigma(z_1,z_3)^{-1} = e$ dès que

$$p(z_1) = p(z_2) = p(z_3).$$

Plus généralement on définit l'ensemble $C^q(F,G)$ des q-cochaînes sur F à valeurs dans G comme l'ensemble des applications continues de $\overset{q+1}{\boxtimes} F$ dans $G (q \geqslant 0)$. Pour $q = 0$ et 1 on définit une application cobord ∂ :

$$C^0(F,G) \to C^1(F,G) : \gamma_0 \to \partial\gamma_0 : (z,z') \to \gamma_0(z)\gamma_0(z')^{-1}$$

$$C^1(F,G) \to C^2(F,G) : \gamma_1 \to \partial\gamma_1 : \ (z,z',z'') \to \gamma_1(z,z')\gamma_1(z',z'')\gamma_1(z,z'')^{-1}.$$

∂ est un opérateur de cohomologie ce qui permet de construire, en dimension 0 et 1, un ensemble de cohomologie noté $H^q(F,G)$. cf. [3*b*].

Soit $H^1(X,G)$ le premier ensemble de cohomologie non abélienne de X à coefficients dans G. $H^1(F,G)$ et $H^1(X,G)$ sont des ensembles pointés respectivement par la classe des cobords et par la classe du fibré trivial notées e.

Soit σ un G-cocycle. Le quotient de $F \times G$ par la relation d'équivalence $(z,g) \sim (z',g')$ si et seulement si $p(z) = p(z')$ et $g' = \sigma(z',z)g$ est un G-fibré principal localement trivial noté $F(\sigma)$. L'application $\sigma \to F(\sigma)$ définit par passage au quotient une application $h : H^1(F,G) \to H^1(X,G)$ qui est un morphisme injectif d'ensembles pointés, c'est-à-dire que $h(\xi) = e$ équivaut à $\xi = e$.

Ces constructions sont fonctorielles pour l'image réciproque : soit $f : X' \to X$ une application continue. Soit $(f,\hat{f})$ le morphisme naturel de $F' = f^{-1}F$ dans F. A tout G-cocycle sur F est associé le cocycle $\sigma' = f^{-1}\sigma$ sur F' défini par

$$(z,z') \to f^{-1}\sigma(z,z') = \sigma(\hat{f}(z),\hat{f}(z')).$$

Alors $F'(\sigma') = (f^{-1}F)(f^{-1}\sigma) = f^{-1}(F(\sigma))$ ce qui définit par passage au quotient une application f^* telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,G) & \xrightarrow{f^*} & H^1(f^{-1}F,G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X,G) & \xrightarrow[f^*]{} & H^1(X',G) \end{array}$$

soit un diagramme commutatif de morphismes d'ensembles pointés.

Si F_1 est un sous-fibré de F (ce qui signifie que la restriction de p à la partie $F_1 \subset F$ fait de $(F_1,p|F_1,X)$ un fibré) on a un diagramme commutatif de morphismes injectifs d'ensembles pointés :

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,G) & \longrightarrow & H^1(X,G) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & H^1(F_1,G) & \end{array}$$

Il résulte en particulier de cette remarque que si F est muni d'une section (continue) globale $H^1(F,G) = e$ pour tout groupe G.

Plus généralement si $(f,\hat{f})$ est un morphisme de F' dans F, pour tout G-cocycle σ sur F, $\tilde{f}^*\sigma$ désignant le G-cocycle $\sigma \circ \tilde{f}$ sur F', $f^{-1}(F(\sigma))$ est naturellement isomorphe à $F'(\tilde{f}^*\sigma)$. En effet $(f,\tilde{f})$ se factorise à travers $f^{-1}F$:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & f^{-1}F \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ & X' \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

D'une part $f^{-1}(F(\sigma)) = f^{-1}F(f^{-1}\sigma)$ et, comme $\varphi(F')$ est un sous-fibré de $f^{-1}F$, $f^{-1}(F(\sigma)) = \varphi(F')(f^{-1}\sigma)$. D'autre part l'application de $F' \times G$ dans $(f^{-1}F) \times G : (z,g) \to (\varphi(z),g)$ est compatible avec les relations d'équivalence définies par $\tilde{f}^*\sigma$ et $f^{-1}\sigma$ et définit donc un isomorphisme de $F'(\tilde{f}^*\sigma)$ sur $\varphi(F')(f^{-1}\sigma)$ ce qui achève la démonstration.

Par passage au quotient $(f,\tilde{f})$ définit une application de $H^1(F,G)$ dans $H^1(F',G)$ de façon que le diagramme suivant de morphisme d'ensembles pointés soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^1(F,G) \arrow[r] \arrow[d] & H'(F',G) \arrow[d] \\ H^1(X,G) \arrow[r, "f^*"] & H^1(X',G) \end{tikzcd}$$

Enfin on a la factorisation :

$$\begin{tikzcd} H^1(F,G) \arrow[rr] \arrow[dr, "f^*"'] & & H^1(F',G) \\ & H^1(f^{-1}F,G) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si G est abélien les morphismes construits deviennent des homomorphismes injectifs de groupes. Si de plus G est discret, $H^1(X,G)$ est le premier groupe de cohomologie de Čech de X à coefficients dans G et dans ces conditions à tout G-cocycle σ est associé un homomorphisme de groupes noté $\mathrm{ind}_\sigma : \pi_1 X \to G$. Si γ est un lacet au point de base, $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ dans $F(\sigma)$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)g$ et $\mathrm{ind}_0[\gamma] = g$ où $[\gamma]$ est la classe de γ dans $\pi_1 X$. Si γ possède – ce qui n'est pas le cas en général – un relevé Γ dans F, $\mathrm{ind}_\sigma \gamma = \sigma(\Gamma(1), \Gamma(0))$. On notera $\mathrm{ind}_\sigma \gamma$ par abus de notation la valeur de $\mathrm{ind}_\sigma\gamma$ sur $[\gamma]$. $\mathrm{ind}_\sigma\gamma$ est l'indice du lacet γ relativement au G-cocycle σ. Si $(f,\tilde{f})$ est un morphisme de F' dans F, $\mathrm{ind}_{\tilde{f}^*\sigma} = \mathrm{ind}_\sigma \circ f(f(\gamma)$ est le lacet $f \circ \gamma)$.

Les constructions effectuées sont également fonctorielles en G. De plus si $0 \to H \to G \xrightarrow{\rho} G_1 \to 0$ est une suite exacte de groupes, σ un G-cocycle sur F, $F(\rho(\sigma))$ est isomorphe à $F(\sigma)/H$. En effet ρ définit un morphisme de fibrés principaux de $F(\sigma)$ dans $F(\rho(\sigma))$ qui est surjectif car $\rho(G) = G_1$ et on vérifie que deux éléments de $F(\sigma)$ de même image dans $F(\rho(\sigma))$ se déduisent par l'action à droite d'un élément de H.

On appelle G-*diviseur* de X relativement à F toute application d de F dans G (d non nécessairement continue) telle que l'application $\hat{d}$ définie sur $\overset{2}{\boxtimes} F$ par $\hat{d}(z,z') = d(z)d(z')^{-1}$ soit un G-cocycle. On dit que d est un diviseur associé à $\hat{d}$. On notera que si d est continue sur F, $\hat{d}$ est alors un cobord : $\hat{d} = \partial d$. Même si d n'est pas continue sur F, on notera $\hat{d} = \partial d$ par abus de notation.

On associe à d le fibré principal $F(\partial d)$ et la section (non nécessairement continue) de $F(\partial d)$, $\tilde{d}$, qui, à tout x de X, associe la classe d'équivalence dans $F(\partial d)$ de $(z,d(z))$ où $z \in p^{-1}(x)$. Réciproquement si σ est un G-cocycle et s une section (quelconque) de F, pour tout $z \in F$, il existe un unique élément $d(z)$ de G tel que $s(x)$ appartienne à la classe de $(s,d(z))$ dans $F(\sigma)$. d est un diviseur associé à σ.

On note $\mathscr{D}(F,G)$ l'ensemble des G-diviseurs de X relativement à F. $\mathscr{D}(F,G)$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des couples formés d'un G-cocycle σ et d'une section (quelconque) de $F(\sigma)$.

Pour tout diviseur d l'ensemble de ses points de continuité est de la forme $p^{-1}A$ où $A \subset X$. $X\text{-}A = \Sigma_d$ s'appelle le support de d. Si G est munie de la topologie discrète, A est ouvert et le support de d est le plus petit fermé B de X tel que la restriction de d à $p^{-1}(X-B)$ soit continue.

L'ensemble $C^\circ(F,G)$ des 0-cochaînes de F opère à gauche dans $\mathscr{D}(F,G)$:

$$C^\circ(F,G) \times \mathscr{D}(F,G) \to \mathscr{D}(F,G)(c,d) \to cd : z \to c(z)\,d(z)$$

$\partial(cd)$ et ∂d sont deux G-cocycles de même image dans $H^1(F,G)$. d et cd sont deux diviseurs de même support.

L'ensemble $\mathscr{F}(F,G)$ de toutes les applications de X dans G (continues ou non) opère à droite dans $\mathscr{F}(F,G)$:

$$\mathscr{D}(F,G) \times \mathscr{F}(X,G) \to \mathscr{D}(F,G) \quad (d,\varphi) \to d.\varphi : z \to d(z)\varphi(p(z)).$$

$\partial(d.\varphi) = \partial d$. Par contre d et $d.\varphi$ n'ont pas même support en général.

L'ensemble des *diviseurs topologiques* de X relativement à F, noté div(F,G) est l'ensemble quotient de $\mathscr{D}(F,G)$ par l'action à gauche de $C^{o}(F,G)$. Comme d et cd ont même support on peut parler du support d'un diviseur topologique.

$\Gamma^{o}(X,G)$ désignant l'ensemble des applications continues de X dans G, il résulte de [3*b*] que l'on a une suite exacte d'ensembles pointés :

$$(1) \qquad e \to \Gamma^{o}(X,G) \to \mathscr{F}(X,G) \to \operatorname{div}(F,G) \to H^{1}(F,G) \to e$$

$\Gamma^{o}(X,G)$ et $\mathscr{F}(X,G)$ qui sont des groupes sont pointés par l'élément neutre noté e.

Soit $\mathscr{H}$ (resp. $\underset{\sim}{\mathscr{H}}$) le faisceau des germes d'applications continues (resp. quelconques) de X dans G. On a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \to & \Gamma^{o}(X,G) & \to & \mathscr{F}(X,G) & \to & \operatorname{div}(F,G) & \to & H^{1}(F,G) \to e \\ & & \| & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\ e & \to & H^{o}(X,\mathscr{H}) & \to & H^{o}(X,\underset{\sim}{\mathscr{H}}) & \to & H^{o}(X,\underset{\sim}{\mathscr{H}}/\mathscr{H}) & \to & H^{1}(X,G) \end{array}$$

où les bijections sont notées $\equiv$ et où toutes les flèches sont des morphismes injectifs d'ensembles pointés.

Si G est abélien, les morphismes deviennent des morphismes de groupes et div(F,G) s'identifie à un sous-groupe de $H^{o}(X,\underset{\sim}{\mathscr{H}}/\mathscr{H})$. On retrouve les diviseurs topologiques au sens de [4] et [5].

La notion de diviseur est fonctorielle pour l'image réciproque. Le morphisme naturel $(f,\hat{f})$ de $f^{-1}F$ dans F induit une application $d \to f^{-1}d$ de $\mathscr{D}(F,G)$ dans $\mathscr{D}(f^{-1}F,G)$. $f^{-1}d = d \circ \hat{f}$ et $\partial f^{-1}d = f^{-1}\,\partial d$. Donc $f^{-1}(F(\partial d)) = (f^{-1}F)(\partial f^{-1}d)$.

Par passage au quotient de $d \to f^{-1}d$ on définit une application notée encore f^{*} de div(F,G) dans $\operatorname{div}(f^{-1}F,G)$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{div}(F,G) & \xrightarrow{f^{*}} & \operatorname{div}(f^{-1}F,G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{1}(F,G) & \xrightarrow{f^{*}} & H^{1}(f^{-1}F,G) \end{array}$$

Pour tout diviseur d, le support de f^*d est contenu dans l'image réciproque par f du support de $d : f^{-1}(\Sigma_d) \supset \Sigma_{f^*d}$.

Plus généralement si $(f,\hat{f})$ est un morphisme de fibrés de F' dans F, $\tilde{f}^*d = d \circ f$ est un G-diviseur sur F' associé au G-cocycle $\partial\tilde{f}^*d = \tilde{f}^*\partial d$. Tout ceci se transporte aux diviseurs topologiques et on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{div}(F,G) \arrow[rr] \arrow[dr, "f^*"'] & & \mathrm{div}(F',G) \\
& \mathrm{div}(f^{-1}(F,G)) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
H^1(F,G) \arrow[rr] \arrow[dr, "f^*"'] & & H^1(F',G) \\
& H^1(f^{-1}F,G) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Enfin les supports sont reliés par les relations d'inclusion :

$$\Sigma_{\tilde{f}^*d} \subset \Sigma_{f^*d} \subset f^{-1}\Sigma_d .$$

Si $\tilde{f}$ est ouverte ces trois sous-ensembles des X' coïncident.

Les notions de diviseur et de diviseur topologique sont également fonctorielles en G.

2. Indice associé à un diviseur.

G est ici un groupe discret, d un G-diviseur sur F. On note X_d l'ouvert complémentaire du support Σ_d de d, F_d la restriction de F à X_d, $C^\circ(X)$ (resp. $C^\circ(X,X_d)$) l'espace des chemins de X (resp. et dont les extrémités appartiennent à X_d) paramétrés – sauf mention du contraire – sur $[0,1]$.

La restriction de ∂d à F_d est un cobord de F_d. Donc $F_d(\partial d)$ est trivial. A d est associé une section $\tilde{d}$ de $F(\partial d)$ continue au-dessus de X_d, et une bijection G-fibrée de $F(\partial d)$ sur $X \times G$, ψ, dont la restriction au-dessus de X_d est un isomorphisme de fibrés G-principaux de $F_d(\partial d)$ sur $X_d \times G$: si $\rho \in F(\partial d)$, $\psi(\rho) = (p(\rho),a)$ où a est tel que $\rho = \tilde{d}(p(\rho)).a$. Soit $\theta : F(\partial d) \to G$ l'application $\rho \to \theta(\rho) = a$. Si φ désigne l'application quotient de $F \times G$ sur $F(\partial d)$ $\theta \circ \varphi(z,g) = d(z)^{-1}.g$. Il résulte de ce qui précède que la classe de $F(\partial d)$ appartient à $H^1(X,X_d;G)$ premier ensemble de cohomologie non abélienne relative de X modulo X_d.

Soit γ un chemin de X, $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ dans $F(\partial d)$. Comme G est discret $\theta(\tilde{\gamma}(0)).\theta(\tilde{\gamma}(1))^{-1}$ ne dépend que de γ.

DÉFINITION 2.1. — *Pour tout chemin* γ *de* X, *la quantité*

$$\theta(\tilde{\gamma}(0)).\theta(\tilde{\gamma}(1))^{-1}$$

s'appelle indice de γ *relativement à* d *et se note* $\mathrm{ind}_d\,\gamma$.

Remarque. — Cette notion n'est pas invariante par l'action à gauche de $C^o(F,G)$ dans $\mathcal{D}(F,G)$ et n'est donc pas relative au diviseur topologique associé à d même si G est abélien !

PROPOSITION 2.1. — (i) $\mathrm{ind}_d\,\gamma = e$ *si l'image de* γ *est contenue dans* X_d.

(ii) *Si* γ *possède un relevé* Γ *dans* F, $\mathrm{ind}_d\,\gamma = d(\Gamma(0))^{-1}.d(\Gamma(1))$.

(iii) ind_d *est « additif » au sens suivant : si* γ_1 *et* γ_2 *sont deux chemins de* X *modulo* X_d *tels que* $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$

$$\mathrm{ind}_d\,(\gamma_1 . \gamma_2) = \mathrm{ind}_d\,\gamma_1 . \mathrm{ind}_d\,\gamma_2$$

(iv) $\mathrm{ind}_d\,(\gamma^{-1}) = (\mathrm{ind}_d\,\gamma)^{-1}$.

(v) *Si* γ_1 *et* γ_2 *sont deux chemins de* X *homotopes à extrémités fixées* $\mathrm{ind}_d\,\gamma_1 = \mathrm{ind}_d\,\gamma_2$.

(vi) *Si* γ_1 *et* γ_2 *sont deux chemins de* $C^o(X,X_d)$ *homotopes dans* $C^o(X,X_d)$, $\mathrm{ind}_d\,\gamma_1 = \mathrm{ind}_d\,\gamma_2$.

(*Ceci signifie que s'il existe une homotopie* H *de* γ_0 *sur* γ_1 *telle que pour tout* α $(t \to H(t,\alpha)) \in C^o(X,X_d)$, $\mathrm{ind}_d\,\gamma_0 = \mathrm{ind}_d\,\gamma_1$).

(vii) *Si* $(f,\tilde{f})$ *est un morphisme de* $F' = (F',p',X')$ *dans* $F = (F,p,X)$ *et si* γ *est un chemin de* X',

$$\mathrm{ind}_{\tilde{f}^* d}\,\gamma = \mathrm{ind}_{\tilde{f}^{-1} d}\,\gamma = \mathrm{ind}_d f \circ \gamma .$$

Démonstration. — (i) Si γ est contenu dans X_d, $t \to \tilde{\gamma}(t) = \psi_d^{-1}(\gamma(t),e)$ est un relevé de γ et $\theta(\tilde{\gamma}(t)) = e$. D'où le résultat.

(ii) Si Γ est un relevé de γ dans F, $t \to \varphi(\Gamma(t),e)$ est un relevé de γ dans $F(\partial d)$ et $\theta(\varphi(\Gamma(t),e) = d(\Gamma(t))^{-1}$, donc $\mathrm{ind}_d\,\gamma = d(\Gamma(0))^{-1}\,d(\Gamma(1))$.

(iii), (iv) et (v) se déduisent de la définition de ind_d.

(vi) soit γ'_2 le chemin composé des chemins

$$\alpha \to H(0,\alpha), \qquad \gamma_2, \qquad \alpha \to H(1,1-\alpha)$$

le premier et le dernier de ces chemins étant contenus dans X_d

$$\mathrm{ind}_d\,\gamma'_2 = \mathrm{ind}_d\,\gamma_2 .$$

Comme γ'_2 et γ_1 sont homotopes à extrémités fixées le résultat découle de (v).

(vii) découle de ce que l'isomorphisme $F'(\partial \tilde{f}^*d) = f^{-1}(F(\partial d))$ échange les sections associées à $\tilde{f}^*d$ et $f^{-1}d$.

COROLLAIRE. — *Si* $\operatorname{ind}_d \gamma \neq e$, $\gamma \cap \Sigma_d \neq \varnothing$.

PROPOSITION 2.2. — *Si* G *est abélien, les indices relativement à* d *et* ∂d *d'un lacet sont égaux.*

Démonstration. — Soit γ un lacet d'origine x_0, $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ.

$$\operatorname{ind}_{\partial d} \gamma = g \quad \text{où} \quad \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)g .$$

D'autre part, $\operatorname{ind}_d \gamma = \theta(\tilde{\gamma}(0)).\theta(\tilde{\gamma}(1))^{-1} = \theta(\tilde{\gamma}(1)).g.\theta(\tilde{\gamma}(1))^{-1}$ qui vaut g si G est abélien.

Remarque. — Il résulte de ce qui précède que si G est abélien discret (sa loi est alors notée $+$, l'élément neutre 0) les indices des lacets relativement à d_1 et d_2 coïncident si $\partial d_1 = \partial d_2$. C'est en général faux pour les indices de chemins. En fait, G étant discret, $\operatorname{ind}_{d_1} = \operatorname{ind}_{d_2}$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $d_1 = d_2 + g$.

Soit γ un chemin de X ne rencontrant le support de d qu'en un nombre fini de points. L'indice de γ s'exprime en terme de saut de d sur γ : soit $t \in \gamma^{-1}\Sigma_d$. F possède au voisinage de $\gamma(t)$ une section s continue. Comme G est discret la quantité $d(s(\gamma(t-h)))^{-1}d(s(\gamma(t+h)))$ si $0 < t < 1$ (resp. $d(s(\gamma(0)))^{-1}d(s(\gamma(h)))$, $d(s(\gamma(1-h)))^{-1}ds(\gamma(1))))$ a une limite quand $h \to 0$, $h > 0$, et cette limite, indépendante de s s'appelle le saut de d sur γ en t (resp. 0,1) : $\langle \gamma, d\rangle_t$. La quantité $\prod_{t \in \gamma^{-1}\Sigma_d} \langle \gamma, d\rangle_t$ est notée $\langle \gamma, d\rangle$.

PROPOSITION 2.3. — *Si* γ *ne rencontre* Σ_d *qu'en un nombre fini de points,* $\operatorname{ind}_d \gamma = \langle \gamma, d\rangle$.

Démonstration. — $\gamma^{-1}\Sigma_d = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_k\}$; $0 \leqslant t_0 < t_k \leqslant 1$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que γ_i désignant la restriction de γ à $[0,1] \cap [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]$, $\operatorname{ind}_d \gamma = \prod_{i=0}^{k} \operatorname{ind}_d \gamma_i$, ε peut être choisi assez petit pour que γ_i soit contenu dans un ouvert de section locale s_i de F. $s_i \circ \gamma_i$ relève γ_i dans F ce qui permet de calculer $\mathrm{ind}_d \gamma_i$ grâce à la proposition 2.1. (ii). Il en résulte que $\mathrm{ind}_d \gamma_i = \langle \gamma, d \rangle_{t_i}$. D'où le résultat.

On considère dans la fin de ce paragraphe un G-diviseur d sur F (G discret abélien) tel que $\mathrm{ind}_{\partial d} = 0$, c'est-à-dire que l'indice de tout lacet est nul. Pour tout chemin γ, $\mathrm{ind}_d \gamma$ ne dépend que de $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. On désigne par $\mu_d : X^2 \to G$ la fonction définie par $\mu_d(x,y) = \mathrm{ind}_d \gamma$ où $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. D'autre part $\mathrm{ind}_{\partial d}(\pi_1 X) = 0$ implique que $F(\partial d)$ est trivial. ∂d est donc un cobord. Soit c une 0-cochaîne sur F telle que $\partial d = \partial c$. $d = c + p^* h$ où h est une application de X dans G continue sur X_d. c étant une cochaîne, $\mathrm{ind}_c = 0$, ce qui implique que

$$\mathrm{ind}_d \gamma = h(\gamma(0)) - h(\gamma(1)).$$

Deux cochaînes définissant le même cobord diffèrent d'une constante. On peut donc toujours supposer que h vaut 0 en un point x_0 que l'on prend hors du support de d. Comme G est discret, h vaut 0 sur la composante connexe X_d° de x_0 dans X_d. Pour tout chemin d'extrémité $\gamma(1) \in X_d^\circ$, $\mathrm{ind}_d \gamma = h(\gamma(0))$ et $h(x) = \mu_d(x,x)$. Finalement :

PROPOSITION 2.4. — *Soit d un G-diviseur de F tel que* $\mathrm{ind}_{\partial d}\, \pi_1 X) = 0$. *Soit X_d° une composante connexe de X_d. Il existe une unique fonction $h : X \to G$ telle que $\mathrm{ind}_d \gamma = h(\gamma(0))$ pour tout chemin γ d'extrémité $\gamma(1) \in X_d^\circ$. h est continue sur X_d, vaut 0 sur X_d°. De plus pour tout chemin γ de X,*

$$\mathrm{ind}_d \gamma = \mu_d(\gamma(0),\gamma(1)) = h(\gamma(0)) - h(\gamma(1)).$$

Remarque. — On peut étendre les remarques précédentes à un couple de diviseurs d_1 et d_2 tels que $\partial d_1 = \partial d_2$. Il existe alors h : X → G continue sur $X_{d_1} \cap X_{d_2}$ valant 0 sur une composante connexe de $X_{d_1} \cap X_{d_2}$ telle que $\mathrm{ind}_{d_1} \gamma - \mathrm{ind}_{d_2} = h(\gamma(0))$ pour tout γ dont l'extrémité $\gamma(1)$ est prise dans cette composante connexe. Pour tout chemin γ

$$\mathrm{ind}_{d_1} \gamma - \mathrm{ind}_{d_2} \gamma = h(\gamma(0)) - h(\gamma(1)).$$

CHAPITRE II

CLASSE DE MASLOV-ARNOLD D'UN FIBRE SYMPLECTIQUE

1. Préliminaires algébriques [4].

Dans tout ce paragraphe (E,σ) désigne un espace vectoriel (réel) symplectique de dimension $2n$. A tout triple (μ,μ',μ'') de lagrangiens de E on associe deux entiers relatifs $\sigma(\mu,\mu',\mu'')$ et $i(\mu,\mu',\mu'')$ respectivement la signature et l'indice de la forme bilinéaire symétrique définie, sur le sous-espace vectoriel $\mu\mu'\mu''$ de $\mu \times \mu' \times \mu''$ formé des triples (ξ,ξ',ξ'') tels que $\xi + \xi' + \xi'' = 0$, par

$$B_{\mu\mu'\mu''}[(\xi,\xi',\xi''),\ (\eta,\eta',\eta'')] = \sigma(\xi,\eta').$$

Si μ' est transverse à μ et μ'', $\sigma(\mu,\mu',\mu'')$ sera noté $\sigma^{\mu'}(\mu,\mu'')$. C'est alors la signature de la forme quadratique sur μ définie par $(\xi,\eta) \to \sigma(\xi,P_{\mu''}\eta)$ où $P_{\mu''}$ est la projection de μ sur μ'' parallèlement à μ'. Le noyau de cette forme est $\mu \cap \mu''$. Si μ' est transverse à μ (resp. à μ'') $\sigma(\mu,\mu',\mu'')$ est la signature de la forme quadratique sur μ'' (resp. μ) $(\xi'',\eta'') \to -\sigma(\xi'',P_{\mu}\eta'')$ (resp. $(\xi,\eta) \to -\sigma(\xi,P_{\mu'}\eta)$), où P_μ (resp. $P_{\mu'}$) désigne la projection sur μ (resp. μ'), et dont le noyau est $\mu'' \cap \mu + \mu'' \cap \mu'$ (resp. $\mu \cap \mu' + \mu \cap \mu''$). On a des résultats identiques pour l'indice.

Si F est un sous-espace involutif de E, c'est-à-dire contenant son orthogonal symplectique F^σ, $\tilde{F} = F/F^\sigma$ est muni naturellement d'une structure symplectique $\tilde{\sigma}$. (On affectera d'un tilde les analogues sur F/F^σ des notions introduites sur E.) Si λ est un lagrangien de E, $\tilde{\lambda} = \lambda \cap F/\lambda \cap F^\sigma$ est un lagrangien de $\tilde{F}$. $\lambda \to \tilde{\lambda}$ est une correspondance biunivoque entre les lagrangiens de E contenus dans F et les lagrangiens de $\tilde{F}$. La projection π de F sur $\tilde{F}$ induit une application surjective de $\lambda\lambda'\lambda''$ sur $\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}'\tilde{\lambda}''$ quand λ et λ' sont contenus dans F et alors $B_{\lambda\lambda'\lambda''} = \tilde{B}_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}'\tilde{\lambda}''} \circ \pi$. Il en résulte que $\sigma(\lambda,\lambda',\lambda'') = \tilde{\sigma}(\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}',\tilde{\lambda}'')$ et que $i(\lambda,\lambda',\lambda'') = i(\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}',\tilde{\lambda}'')$.

En particulier si on applique ce qui précède en prenant $F = \lambda + \lambda'$, alors $F^\sigma = \lambda \cap \lambda'$, $\tilde{\lambda} \cap \tilde{\lambda}' = \{0\}$ et $\tilde{\lambda}' \cap \tilde{\lambda}'' = \pi(\lambda' \cap \lambda'')$. Il en résulte que le noyau de $\tilde{B}_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}'\tilde{\lambda}''}$ est égal à $\tilde{\lambda}'' \cap \tilde{\lambda} \oplus \tilde{\lambda}'' \cap \tilde{\lambda}$, et donc que

$$\frac{1}{2}\dim \tilde{F} - \tilde{\sigma}(\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}',\tilde{\lambda}'') = 2\tilde{i}(\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}',\tilde{\lambda}'') + \dim(\tilde{\lambda}'' \cap \tilde{\lambda}') + \dim(\tilde{\lambda}'' \cap \tilde{\lambda})$$

ce qui entraîne la :

PROPOSITION 1.1. – *Pour tout triple* $\lambda\lambda'\lambda''$ *de lagrangiens de* E,

$$\sigma(\lambda,\lambda',\lambda'') = n - (\dim(\lambda \cap \lambda') + \dim(\lambda' \cap \lambda'') + \dim(\lambda'' \cap \lambda)) - 2(i(\lambda,\lambda',\lambda'') - \dim(\lambda \cap \lambda' \cap \lambda'')).$$

PROPOSITION 1.2. – (i) $\sigma(\lambda,\lambda',\lambda'')$ *et* $i(\lambda,\lambda',\lambda'')$ *sont invariantes par permutation circulaire.*

(ii) $\sigma(\lambda,\lambda',\lambda'')$ *est alternée.*

(iii) $i(\lambda,\lambda',\lambda'') + i(\lambda'',\lambda',\lambda) =$
$= n - \{\dim(\lambda \cap \lambda') + \dim(\lambda' \cap \lambda'') + \dim(\lambda'' \cap \lambda)\} + \dim(\lambda \cap \lambda' \cap \lambda'')\}$.

En particulier si $\lambda\lambda'\lambda''$ sont deux à deux transverses,

$$i(\lambda,\lambda',\lambda'') + i(\lambda'',\lambda',\lambda) = n.$$

Pour toute fonction définie f sur les triples de lagrangiens on pose

$$\partial f(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} f(\lambda_1, \ldots \hat{\lambda}_i \ldots, \lambda_4).$$

THÉORÈME 1.1. [4]. –

$\partial\sigma = 0$. *En particulier si* λ_4 *est transverse à* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

$$-\sigma(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sigma^{\lambda_4}(\lambda_1,\lambda_2) + \sigma^{\lambda_4}(\lambda_2,\lambda_3) - \sigma^{\lambda_4}(\lambda_1,\lambda_3).$$

COROLLAIRE 1. – *Si* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, *sont quatre lagrangiens tels que*

$$\lambda_1 \cap \lambda_3 = 0 = \lambda_2 \cap \lambda_4,$$

$$i(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) - i(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_4) + i(\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4) - i(\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = 0.$$

Pour tout triple $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ de lagrangien on définit

$$d(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = -i(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) + \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2 \cap \lambda_3) - \dim(\lambda_1 \cap \lambda_3).$$

$$d(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \frac{1}{2}(-n + \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2) + \dim(\lambda_2 \cap \lambda_3) - \dim(\lambda_1 \cap \lambda_3) + \sigma(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)).$$

COROLLAIRE 2. — $\partial d = 0$.

Soient L et L′ deux lagrangiens de E. On définit ainsi deux applications S et D :

$$(1)\quad S(\lambda,\lambda') = \frac{1}{2}\{\sigma(L,\lambda,L') - \sigma(L,\lambda',L') + \dim(L\cap\lambda) + \dim(\lambda\cap L') - \dim(L\cap\lambda') - \dim(\lambda'\cap L')\}$$

pour tout couple (λ,λ') de lagrangiens,

$$(2)\qquad D(\lambda) = d(L,\lambda,L') \text{ pour tout lagrangien } \lambda.$$

Si F est involutif et contient L, on considère les lagrangiens $\tilde{L}$ et $\tilde{L}'$ de $\tilde{F}$ et on définit $\tilde{S}$ et $\tilde{D}$ de manière analogue.

PROPOSITION 1.2. — (i) S *et* D *sont à valeurs entières;*

$$S(\lambda,\lambda') = D(\lambda) - D(\lambda')$$

(ii) $\tilde{D}(\tilde{\lambda}) = D(\lambda)$ *si* $\lambda \subset F$. $\tilde{S}(\tilde{\lambda},\tilde{\lambda}') = S(\lambda,\lambda')$ *si* $\lambda \subset F$, $\lambda' \subset F$.

2. Fibré, classe et diviseur de Maslov-Arnold.

Un espace fibré symplectique $(E,p,X;\sigma)$, noté (E,σ) par abus de notation, est un espace fibré vectoriel localement trivial de rang fini pair $2n$ muni d'une 2-forme symplectique σ.

$\Lambda(n)$ désigne la grassmannienne symplectique (ensemble des lagrangiens) de l'espace vectoriel symplectique canonique $Z(n) = (\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^{n*},\sigma_0)$. $Sp(n)$ désignant le groupe symplectique réel, $Sp(n)$ et $U(n)$ agissent naturellement sur $\Lambda(n)$, le stabilisateur de $\mathbf{R}^{n*}$ étant respectivement $St(n)$ et $0(n)$. $\Lambda(n)$ est donc isomorphe à $Sp(n)/St(n)$ et à $U(n)/0(n)$.

L'ensemble des lagrangiens de E, noté $\Lambda(E)$, est un espace fibré localement trivial sur X de fibre type $\Lambda(n)$, appelé grassmannienne symplectique de E. (E,σ) a pour fibré principal associé, un $Sp(n)$-fibré principal noté $E(Sp(n))$. $\Lambda(E)$ est isomorphe canoniquement à $E(Sp(n))/St(n)$. On peut toujours réduire à $U(n)$ le groupe structural de E ce qui revient à se donner une structure hermitienne subordonnée à la structure symplectique. $\Lambda(E)$ est donc isomorphe à $E(U(n))/0(n)$. On notera que $E(U(n))/0(n)$ dépend de la structure hermitienne considérée.

Convention de notation : p désignera la projection *pour tous les fibrés qui interviendront,* $\boxtimes$ *le produit fibré.*

Soient L et L′ deux sous-fibrés lagrangiens de E. Pour tout couple (k,k') d'entiers on note $\Lambda_{k,k'}(E)$ le sous-ensemble de $\Lambda(E)$ formé des lagrangiens μ rencontrant $L_{p(\mu)}$ (resp. $L'_{p(\mu)}$) suivant un sous-espace de dimension k (resp. k').

$\Lambda_{k,k'}(E)$ n'est un fibré (au sens du paragraphe I) que pour certains couples (k,k') *auxquels on se restreint*. En particulier $\Lambda_{0,0}(E)$, noté $\mathscr{L}(E)$, est toujours un fibré.

On note $\overset{2}{\Lambda}(E)$ (resp. $\overset{2}{\Lambda}_{k,k'}(E)$) le carré fibré de $\Lambda(E)$ (resp. $\Lambda_{k,k'}(E)$). Soient S et D les fonctions que définissent sur les fibrés les formules (1) et (2) du paragraphe précédent. De la continuité de $\sigma^{\lambda}(\mu,\mu')$ sur les sous-ensembles où $\mu \cap \mu'$ a une dimension constante et du théorème II.1.1 on déduit que la restriction de S au produit fibré $\Lambda_{k_1,k'_1}(E) \times \Lambda_{k_2,k'_2}(E)$ est continue. En particulier $\sigma_{k,k'}$ restriction de S à $\Lambda^2_{k,k'}(E)$ est un Z-cocycle sur $\Lambda_{k,k'}(E)$; $\sigma_{0,0}$ noté σ est un **Z**-cocycle sur $\mathscr{L}(E)$ le cocycle de Hörmander [8]. La restriction $D_{k,k'}$ de D à $\Lambda_{k,k'}(E)$ est un **Z**-diviseur associé à $\sigma_{k,k'}$.

S définit dans $\Lambda(E) \times \mathbf{Z}$ une relation d'équivalence, $(\lambda,n) \sim (\lambda',n')$ si, et seulement si $n = S(\lambda,\lambda') + n'$, dont la restriction à $\Lambda_{k,k'}(E) \times \mathbf{Z}$ est la relation d'équivalence associée à $\sigma_{k,k'}$. Il existe donc une bijection canonique d'ensembles fibrés de $\Lambda_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$ sur le quotient de $\Lambda(E) \times \mathbf{Z}$. Comme la restriction de S à $\Lambda_{k_1,k'_1}(E) \times \Lambda_{k_2,k'_2}(E)$ est continue, on en déduit un isomorphisme canonique de **Z**-fibrés principaux de $\Lambda_{k_1,k'_1}(E)(\sigma_{k_1,k'_1})$ sur $\Lambda_{k_2,k'_2}(E)(\sigma_{k_2,k'_2})$.

DÉFINITION 2.1. — *On appelle fibré de Maslov-Arnold de* (E,L,L′), *le* **Z**-*fibré principal* $\mathscr{L}(E)(\sigma)$ *que l'on notera dorénavant* $\mathscr{M}(E,L,L')$. *La classe de Maslov-Arnold, notée* $M(E,L,L')$ *est l'image de* $\mathscr{M}(E,L,L')$ *dans* $H^1(X,\mathbf{Z})$. *L'indice des lacets associés est appelé indice de Maslov-Arnold des lacets et noté* $\mathrm{ind}_{LL'}$.

THÉORÈME 2.1. [3*c*]. — *Pour tout couple* (k,k') *tel que* $\Lambda_{k,k'}(E)$ *soit un fibré,* $\Lambda_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$ *est canoniquement isomorphe au fibré de Maslov-Arnold.*

En particulier $\Lambda_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'}) \in M(E,L,L')$.

Cette construction permet d'obtenir des conditions de nullité de $M(E,L,L')$. Par exemple :

COROLLAIRE [4]. — *Si* E *possède un sous-fibré lagrangien* N *tel que* $\dim(L_x \cap N_x)$ *et* $\dim(L'_x \cap N_x)$ *soient constantes sur* X, $M(E,L,L') = 0$.

Démonstration. — $\Lambda_{k,k'}(E)$ (où $k = \dim(L_x \cap N_x)$, $k' = \dim(L'_x \cap N)$) est un fibré puisqu'il possède une section globale N. On peut donc construire $M(E,L,L')$ comme classe d'isomorphismes de $\Lambda_{k,k'}(E)(\sigma_{k,k'})$ qui est trivial puisque $\Lambda_{k,k'}(E)$ possède une section globale.

On appelle *diviseur de* S toute application $d : \Lambda(E) \to \mathbf{Z}$ telle que $S(\lambda,\lambda') = d(\lambda) - d(\lambda')$. La restriction de d à $\Lambda_{k,k'}(E)$ est un diviseur associé à $\sigma_{k,k'}$, $d_{k,k'}$ et l'isomorphisme canonique de $\Lambda_{k_1,k'_1}(E)(\sigma_{k_1,k'_1})$ sur $\Lambda_{k_1,k'_2}(E)(\sigma_{k_2,k'_2})$ échange les sections associées à d_{k_1,k'_1} et d_{k_2,k'_2}. Les diviseurs d_{k_1,k'_1} et d_{k_2,k'_2} ont donc même support et définissent le même indice de chemins, ce qui permet de parler du *support de* d et de *l'indice des chemins associé à* d que l'on note ind_d.

DÉFINITION 2.2. — *On appelle diviseur de Maslov de* (E,L,L') *le diviseur* D *de* S *défini par* $D(\lambda) = d(L,\lambda,L')$. *L'indice des chemins associés est l'indice de Maslov-Arnold des chemins et est noté également* $\mathrm{ind}_{LL'}$. *On appelle contour apparent le support de* D.

La restriction de D à $\mathscr{L}(E)$ est l'application définie sur $\mathscr{L}(E_x)$ par : $D(\lambda) = -i(L_x,\lambda,L'_x) - \dim(L_x \cap L'_x)$. Il en résulte que le support de D est contenu dans l'ensemble des x tels que

$$\dim(L_x \cap L'_x) > k \quad \text{où} \quad k = \inf_{x\in X} \dim(L_x \cap L'_x).$$

Remarque. — Si $\gamma \in C^{\circ}(X,X_D)$ possède un relèvement dans $\mathscr{L}(E)$,

$$\mathrm{ind}_{LL'}\,\gamma = i(L,\Gamma(0),L') - i(L,\Gamma(1),L').$$

Plus généralement si γ ne rencontre Σ_D qu'en un nombre fini de points, la proposition I.2.3 implique que l'indice de Maslov est lié à la somme des sauts de l'indice d'inertie le long de γ. C'est la définition originelle de Maslov [10].

Soit $f : X' \to X$. Par image réciproque par f on construit sur X' un fibré symplectique $(f^{-1}E,f^{-1}\sigma)$. La fonctorialité pour l'image réciproque décrite au paragraphe 1 se traduit par les relations :

$$f^{-1}\mathscr{M}(E,L,L') = \mathscr{M}(f^{-1}E,f^{-1}L,f^{-1}L')\,;$$
$$f^{*}M(E,L,L') = M(f^{-1}E,f^{-1}L,f^{-1}L')\,;$$
$$\mathrm{ind}_{LL'} \circ f = \mathrm{ind}_{f^{-1}L,f^{-1}L'}.$$

Il résulte de ceci que tout automorphisme symplectique de (E,σ) qui laisse invariant L et L' induit un automorphisme du fibré de Maslov-Arnold et laisse invariant la classe et l'indice de Maslov.

On peut reprendre cette étude « modulo q ». Si (E,σ) est un fibré symplectique muni de deux sous-fibrés lagrangiens L et L', σ_q l'image du cocycle de Hörmander par la projection de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}_q$ (σ_q est le cocycle de Hörmander modulo q) le fibré $\mathscr{L}(E)(\sigma_q)$ noté $\mathscr{M}(E,L,L';q)$ s'appelle le fibré de Maslov-Arnold modulo q ; la fonctorialité par rapport au groupe entraîne que $\mathscr{M}(E,L,L';q)$ est isomorphe canoniquement à $\mathscr{M}(E,L,L')/q\mathbf{Z}$. On construit une classe modulo q $M(E,L,L';q)$ et un indice modulo q $\operatorname{ind}^q_{LL'}$. Pour tout chemin γ, $\operatorname{ind}^q_{LL'}\gamma = \operatorname{ind}_{LL'}\gamma$ modulo q.

Soit F un sous-fibré involutif de E (i.e. $F^\sigma \subset F$). On suppose que F contient L. Soit k le rang de F^σ.

$\tilde{F} = F/F^\sigma$ est naturellement muni d'une structure de fibré symplectique de 2-forme $\tilde{\sigma}$, de sous-fibrés lagrangiens $\tilde{L}$ et $\tilde{L}'$ (notations de II.1). Soit $\Lambda^F(E)$ le sous-ensemble des lagrangiens de E contenus dans F. L'application P de $\Lambda^F(E)$ dans $\Lambda(\tilde{F})$ définie par $P(\lambda) = \tilde{\lambda}$ est une bijection, qui est un isomorphisme topologique si $\dim(L'_x \cap F^\sigma_x)$ est une constante, ce que l'on suppose désormais ; on pose $k' = \dim(L_x \cap F^\sigma_x)$. On se restreint aux couples (r,r') tels que $\Lambda_{r-k,r'-k'}(\tilde{F})$ soit un fibré. Pour ces couples $\Lambda^F_{r,r'}(E) = \Lambda^F(E) \cap \Lambda_{r,r'}(E)$ est un sous-fibré de $\Lambda_{r,r'}(E)$ isomorphe par P à $\Lambda_{r-k,r'-k'}(\tilde{F})$. On notera que $\Lambda^F_{k,k'}(E)$ est un fibré isomorphe à $\mathscr{L}(\tilde{F})$. Comme $P^*\tilde{S} = S|_{\Lambda^F_{r,r'}(E)}$ et que $P^*\tilde{D}$ s'étend en le diviseur D de S, il résulte de I le :

THÉORÈME 2.2. — *Si* $\dim(L_x \cap F^\sigma_x)$ *est constante sur* X :

(i) $\mathscr{M}(E,L,L')$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathscr{M}(\tilde{F},\tilde{L},\tilde{L}')$; *en particulier* $M(E,L,L') = M(\tilde{F},\tilde{L},\tilde{L}')$.

(ii) $\operatorname{ind}_{LL'} \equiv \operatorname{ind}_{\tilde{L}\tilde{L}'}$.

La première partie de ce théorème est due à Demazure [4].

Exemple. — $\psi : X \to T^*M$ est une immersion lagrangienne dans une variété cotangente muni de sa structure symplectique canonique. Soit $E = \psi^{-1}TT^*M$; c'est un fibré symplectique muni de deux sous-fibrés lagrangiens, l'un est l'image dans E du fibré tangent à X, TX, l'autre image réciproque $\mathscr{V}$ du fibré des vecteurs verticaux VT^*M de T^*M. L'indice de Maslov-Arnold $\operatorname{ind}_{TX,\mathscr{V}}$ noté ind_ψ s'appelle l'indice de Maslov-Arnold de l'immersion lagrangienne ψ.

3. $\Lambda(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ et leurs revêtements.

On considère les fibrés symplectique triviaux $\Lambda(n) \times \mathbf{Z}(n) \to \Lambda(n)$, $\mathrm{Sp}(n) \times \mathbf{Z}(n) \to \mathrm{Sp}(n)$ et $\mathrm{U}(n) \times \mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Z}(n)$ munis des sous-fibrés lagrangiens notés par abus de notations $\hat{\mathrm{A}}$ et $\mathscr{L}$ constitués respectivement par $\lambda \to \lambda \times \mathrm{A}$, $\lambda \to \lambda \times \lambda$, respectivement $\mathrm{S} \to \mathrm{S} \times \mathrm{A}$ et $\mathrm{S} \to \mathrm{S} \times \mathrm{SA}$ où $\mathrm{A} = \mathbf{R}^{n*}$. Le fibré de Maslov relatif à $\Lambda(n)$ est son revêtement universel [3b]. On le note $\Lambda_\infty(n)$ et ind l'indice correspondant. On notera $\widetilde{\mathrm{ind}}$ l'indice relatif à $\mathrm{Sp}(n)$ ou $\mathrm{U}(n)$; le fibré de Maslov-Arnold de $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathscr{M}(\mathrm{Sp}(n))$ (resp. de $\mathrm{U}(n)$, $\mathscr{M}(\mathrm{U}(n))$) est l'image réciproque par φ de $\Lambda_\infty(n)$ où φ est l'application de $\mathrm{Sp}(n)$ (resp. $\mathrm{U}(n)$) dans $\Lambda(n) : \mathrm{S} \to \varphi(\mathrm{S}) = \mathrm{S}\mathbf{R}^{n*}$.

ind est un isomorphisme de $\pi_1\Lambda(n)$ sur $\mathbf{Z}$. $\mathscr{M}(\mathrm{Sp}(n))$ (resp. $\mathscr{M}(\mathrm{U}(n))$) a deux composantes connexes isomorphes à $\mathrm{Sp}_\infty(n)$ (resp. $\mathrm{U}_\infty(n)$) revêtement universel de $\mathrm{Sp}(n)$ (resp. $\mathrm{U}(n)$). $\varphi : \pi_1\mathrm{Sp}(n) \to \pi_1\Lambda(n)$ est une injection dont l'image est un sous-groupe d'indice 2, ce qui se traduit par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi_1\mathrm{Sp}(n) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{ind}}"'] & \pi_1\Lambda(n) \arrow[d, "\mathrm{ind}"] \\ 2\mathbf{Z} \arrow[r] & \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

On note α (resp. β) le générateur de $\pi_1\mathrm{Sp}(n)$ ou $\pi_1\mathrm{U}(n)$ (resp. $\pi_1\Lambda(n)$) d'indice 2 (resp. 1).

Le fibré de Maslov-Arnold modulo q relatif à $\Lambda(n)$ est noté $\Lambda_q(n)$. $\Lambda_q(n)$ est isomorphe à $\Lambda_\infty(n)/q\mathbf{Z}$. C'est un revêtement principal connexe à q feuillets de $\Lambda(n)$. L'indice modulo q est noté ind^q (resp. $\widetilde{\mathrm{ind}}^q$).

Soit $\mathrm{Sp}_q(n)$ (resp. $\mathrm{U}_q(n)$) le revêtement à q feuillets de $\mathrm{Sp}(n)$ (resp. $\mathrm{U}(n)$).

THÉORÈME 3.1. — (i) $\mathrm{SO}(n)$ *se plonge naturellement dans* $\mathrm{U}_\infty(n)$ *et* $\mathrm{U}_q(n)$;

$$\Lambda_\infty(n) = \mathrm{U}_\infty(n)/\mathrm{SO}(n), \quad \Lambda_{2q}(n) = \mathrm{U}_q(n)/\mathrm{SO}(n).$$

(ii) Stn *a deux composantes connexes. Soit* $\mathrm{SSt}(n)$ *la composante connexe de l'identité.* $\mathrm{SSt}(n)$ *se plonge naturellement dans* $\mathrm{Sp}_\infty(n)$ *et* $\mathrm{Sp}_q(n)$ *et*

$$\Lambda_\infty(n) = \mathrm{Sp}_\infty(n)/\mathrm{SSt}(n), \quad \Lambda_{2q}(n) = \mathrm{Sp}_q(n)/\mathrm{SSt}(n).$$

Démonstration. — La démonstration de la partie (ii) est analogue à celle de (i). On n'examine donc que le cas de $U(n)$ et on note $i : 0(n) \to U(n)$. Les sous-fibrés lagrangiens de $0(n) \times \mathbf{Z}(n) \to 0(n)$ $i^{-1}\hat{A}$ et $i^{-1}\mathscr{L}$ coïncident car $0(n)$ est le stabilisateur de $\mathbf{R}^{n*}$. Donc $i^{-1}\mathscr{M}(U(n))$ est trivial, ce qui implique que $\mathrm{ind} \circ i = 0$ et comme ind est un isomorphisme, $i = 0$.

$SO(n)$ étant connexe, il en résulte que pour tout $S \in SO(n)$ les chemins de $SO(n)$ joignant l'identité I à S sont tous homotopes dans $U(n)$. Donc $SO(n)$ se plonge dans $U_\infty(n)$.

Soit G_∞ le stabilisateur de A_∞ dans l'action transitive de $U_\infty(n)$ sur $\Lambda_\infty(n)$. A_∞ est un point de $\Lambda_\infty(n)$ de projection A dans $\Lambda(n)$. Il est clair que $SO(n) \subset G_\infty$ et que p désignant la projection de $U_\infty(n)$ sur $U(n)$, $p(G_\infty) \subset 0(n)$.

Soit $S_\infty \in G_\infty$, S_∞ est la classe d'homotopie d'un chemin S de $U(n)$ d'origine $S(0) \in 0(n)$ et d'extrémité I. $t \to S(t)A$ est un lacet de $\Lambda(n)$ dont la classe d'homotopie ne dépend que de S_∞. On a donc construit une application ψ de G_∞ dans $\pi_1\Lambda(n)$. Par définition de l'indice

$$A_\infty . \psi(S_\infty) = A_\infty \beta^{\mathrm{ind}\,\psi(S_\infty)}.$$

Comme $S_\infty \in G_\infty$, $A_\infty . \psi(S_\infty) = A_\infty$. Il en résulte que $\mathrm{ind}\,\psi(S_\infty) = 0$ et donc que $\psi(G_\infty) = I$. Pour prouver que $G_\infty = SO(n)$ il suffit donc de prouver que $p(G_\infty) = SO(n)$. Soit donc S_∞ tel que $S(0) \in 0(n)\backslash SO(n)$. Comme $SO(n)$ se plonge dans G_∞ on peut se ramener au cas où

$$S(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \quad I_{n-1} \text{ unité de } GL(n-1, R)$$

Soit γ le chemin de $U(n)$: $t \to \begin{pmatrix} e^{i\pi t} & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$.

Le chemin $\gamma A : t \to \gamma(t)A$ est un lacet de $\Lambda(n)$ d'indice 1 (cf. 3*b* par ex.). Soit γ_∞ la classe de γ. Comme $p(\gamma_\infty) = p(S_\infty)$ il existe un entier r tel que $S_\infty = \alpha^r \gamma_\infty$ et $S_\infty . A_\infty = A_\infty \beta^{2r+1}$ ce qui est impossible puisque $S_\infty \in G_\infty$, ce qui achève la démonstration.

Le résultat modulo q s'en déduit compte tenu de la remarque suivante : si $\lambda_\infty \in \Lambda_\infty(n)$, et si $S_\infty = S'_\infty \alpha^q$, $S_\infty \lambda_\infty = (S'_\infty \lambda_\infty)\beta^{2q}$, ce qui implique que $U_q(n)$ opère dans $\Lambda_{2q}(n)$.

Considérons le fibré symplectique trivial sur $\Lambda_q(n)$,

$$\Lambda_q(n) \times \mathbf{Z}(n) \to \Lambda_q(n)$$

et les sous-fibrés lagrangiens obtenus par image réciproque par la projection de $\Lambda_q(n)$ sur $\Lambda(n)$. Soit $\mathscr{M}(\Lambda_q(n))$ et $\mathrm{Ind}_q : \pi_1\Lambda_q(n) \to \mathbf{Z}$ le fibré et l'indice de Maslov associés. $\mathrm{ind} \circ p = \mathrm{Ind}_q$. On a des notions analogues pour $\mathrm{U}_q(n)$ indiquées par un tilde.

La suite exacte d'homotopie de $\Lambda_q(n) \to \Lambda(n)$ permet d'écrire :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1\Lambda_q(n) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{Ind}_q"] & \pi_1\Lambda(n) \arrow[r, "\mathrm{ind}^q"] \arrow[d, "\mathrm{ind}"] & \mathbf{Z}_q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & q\mathbf{Z} \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "\rho_q"] & \mathbf{Z}_q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ce qui implique que Ind_q est un isomorphisme de $\pi_1\Lambda_q(n)$ sur $q\mathbf{Z}$.

PROPOSITION 3.1. — (i) Ind_q *est un isomorphisme de* $\pi_1\Lambda_q(n)$ *sur* $q\mathbf{Z}$.

(ii) $\widetilde{\mathrm{Ind}}_q : \pi_1\mathrm{U}_q(n) \to 2q\mathbf{Z}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Reste à prouver (ii) qui se déduit de ce que

$$\pi_1\mathrm{U}_q(n) = \pi_1\Lambda_{2q}(n).$$

Remarque. — $\mathrm{U}(n)$ qui opère transitivement sur $\Lambda(n)$ opère également sur $\Lambda_2(n)$ qui est son revêtement à 2 feuillets, $\Lambda_2(n)$ est l'ensemble des lagrangiens de $\mathrm{Z}(n)$ orientés. C'est la grassmannienne symplectique orientée, qui est un revêtement à 2 feuillets de $\Lambda(n)$: $\Lambda_2(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)$. On notera que $\widetilde{\mathrm{Ind}}_1 \equiv \widetilde{\mathrm{ind}}$.

4. Classe de Maslov-Arnold universelle d'un fibré symplectique.

Soit $\overset{q}{\Lambda}\mathrm{E}$ la puissance $q^{\text{ième}}$ fibrée de $\Lambda\mathrm{E}$. Le fibré $\overset{2}{\Lambda}\mathrm{E} \boxtimes \mathrm{E} \to \overset{2}{\Lambda}\mathrm{E}$ qui est l'image réciproque, par la projection de $\overset{2}{\Lambda}\mathrm{E}$ sur X, du fibré E est un fibré symplectique $(\mathscr{E},\sigma)$ muni de deux sous-fibrés lagrangiens

$$\mathscr{L}_1 : \overset{2}{\Lambda}\mathrm{E} \to \Lambda(\mathscr{E}) = \overset{3}{\Lambda}\mathrm{E} \quad (\lambda,\mu) \to (\lambda,\mu,\mu)$$
$$\mathscr{L}_2 : \overset{2}{\Lambda}\mathrm{E} \to \overset{3}{\Lambda}\mathrm{E} \qquad\qquad (\lambda,\mu) \to (\lambda,\mu,\lambda).$$

DÉFINITION 4.1. — *On appelle fibré (resp. classe, indice) de Maslov-Arnold universel du fibré symplectique* (E,σ) *le fibré (resp. la classe, l'indice) de Maslov-Arnold de* $(\mathscr{E},\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)$, *noté* $\mathscr{M}(\mathrm{E})$ (*resp.* $\mathrm{M}(\mathrm{E})$, ind_0).

$M(E) \in H^1(\overset{2}{\Lambda}E, \mathbf{Z})$. ind_0 induit un homomorphisme de $\pi_1 \overset{2}{\Lambda}E$ dans $\mathbf{Z}$.

Le contour apparent du diviseur de Maslov universel D_0 est le sous-ensemble de $\overset{2}{\Lambda}E$ formé des couples de lagrangiens non transverses ce que l'on voit en utilisant la restriction de D_0 à $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. On note $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E$ le complémentaire du contour apparent de D_0. $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E : \{(\lambda,\tau) \in \overset{2}{\Lambda}E | \lambda \pitchfork \tau\}$.

PROPOSITION 4.1. — $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}(E)$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. — Soient (λ,τ) et (λ',τ') deux points de $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}(E)$. Comme $\Lambda(E)$ est connexe, il existe un chemin γ reliant λ à λ' dans $\Lambda(E)$. Soit $\mathcal{I}$ une structure presque complexe adaptée à σ telle que $\mathcal{I}\lambda = \tau$; $\gamma \times \mathcal{I}\gamma$ est un chemin de $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E$ reliant (λ,τ) à $(\lambda',\mathcal{I}\lambda')$. $(\lambda',\mathcal{I}\lambda')$ et (λ',τ') sont deux points de la restriction au-dessus de x de $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E : (\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E)_x$. Donc $\mathcal{I}\lambda'$ et τ' sont deux lagrangiens de E_x transverses à λ'. Comme l'ensemble des lagrangiens de $\Lambda(n)$ transverses à un même lagrangien est une cellule, on en conclut que $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E$ est connexe.

$\overset{2}{\Lambda}E \to X$ est muni d'une involution $\mathcal{J} : (z_1,z_2) \to (z_2,z_1)$ qui échange $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. $\mathcal{J}$ change donc σ en $-\sigma$ et la restriction de D_0 à $\mathcal{L}(\mathcal{E})_{(\lambda,\mu)}$ en $n - D_0 - \dim(\lambda \cap \mu)$. Donc :

PROPOSITION 4.2.

$$\mathrm{ind}_0(\gamma_1 \times \gamma_2) = \mathrm{ind}_0(\gamma_2 \times \gamma_1) + \dim(\gamma_1(0) \cap \gamma_2(0) - \dim(\gamma_1(1) \cap \gamma_2(1))$$

où $\gamma_1 \times \gamma_2$ *est un chemin de* $\overset{2}{\Lambda}E$. *En particulier pour tout chemin à extrémités dans* $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E$ *et pour tout lacet de* $\overset{2}{\Lambda}E$, $\mathrm{ind}_0 \circ \mathcal{J} = -\mathrm{ind}_0$.

Si (E,σ) est muni d'un sous-fibré lagrangien L, le fibré image réciproque de E par la projection de ΛE sur X, $\Lambda E \boxtimes E \to \Lambda E$ est muni de deux sous-fibrés lagrangiens :

$$\hat{L} : \Lambda E \to \overset{2}{\Lambda} E, \qquad \lambda \to \lambda \times L(p(\lambda)) \quad \mathscr{L} : \Lambda E \to \overset{2}{\Lambda} E, \quad \lambda \to \lambda \times \lambda$$

On notera $\mathscr{M}(E,L)$, $M(E,L)$, ind_L respectivement le fibré, la classe, l'indice de Maslov correspondants.

$M(E,L) \in H^1(\Lambda E,\mathbf{Z})$, ind_L induit un homomorphisme de $\pi_1 \Lambda E$ dans $\mathbf{Z}$.

Le fibré symplectique $\Lambda E \boxtimes E \to \Lambda E$ est l'image réciproque par $\hat{L}$ de $\mathscr{E}$. De plus $\hat{L} = \hat{L}^{-1}\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L} = \hat{L}^{-1}\mathscr{L}_2$. Donc le cocycle de Hörmander de $(\Lambda E \boxtimes E, \hat{L}, \mathscr{L})$ est l'image réciproque par $\hat{L}$ du cocycle de Hörmander de $(\mathscr{E},\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)$. Compte tenu de la fonctorialité par image réciproque (cf. § I) :

Proposition 4.3.

$$\begin{aligned} \mathscr{M}(E,L) &= \hat{L}^{-1}\mathscr{M}(E) \\ M(E,L) &= \hat{L}^{*}M(E) \\ \mathrm{ind}_L &= \mathrm{ind}_0 \circ \hat{L}. \end{aligned}$$

Si (E,σ) est muni de deux sous-fibrés lagrangiens L_1 et L_2, soit L_1L_2 l'application de X dans $\overset{2}{\Lambda} E$ définie par

$$X \ni x \to L_1L_2(x) = (L_2(x),\ L_1(x)) \in \overset{2}{\Lambda} E.$$

(E,L_1,L_2) est l'image réciproque par L_1L_2 de $(\mathscr{E},\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)$ et par L_2 de $(\Lambda E \boxtimes E, \hat{L}_1, \mathscr{L})$, donc

Théorème 4.1. —

$$\begin{aligned} \mathscr{M}(E,L_1,L_2) &= (L_1L_2)^{-1}\mathscr{M}(E) = L_2^{-1}\mathscr{M}(E,L_1) \\ M(E,L_1,L_2) &= (L_1L_2)^{*}M(E) = L_2^{*}M(E,L_1) \\ \mathrm{ind}_{L_1L_2} &= \mathrm{ind}_0 \circ (L_1L_2) = \mathrm{ind}_{L_1} \circ L_2. \end{aligned}$$

Du rôle universel de $\mathscr{M}(E)$ on déduit aisément que

$$M(E,L_1,L_2) = -\ M(E,L_2,L_1)$$

et que $M(E,L_1,L_2) = 0$ si L_1 et L_2 sont homotopes parmi les sous-fibrés lagrangiens. Enfin il résulte du théorème 4.1. que $\mathrm{ind}_L \circ L \equiv 0$.

Proposition 4.4. — *Si* L *et* L' *sont deux sous-fibrés lagrangiens de* E, $M(E,L) = M(E,L')$ *si et seulement si* $M(E,L,L') = 0$.

$\mathcal{M}(E,L)$ et $\mathcal{M}(E,L')$ étant des $\mathbf{Z}$-revêtements principaux sont caractérisés par les indices ind_L et $\mathrm{ind}_{L'}$. La proposition 4.4. est donc une conséquence de :

PROPOSITION 4.5. — $\mathrm{ind}_L - \mathrm{ind}_{L'} = \mathrm{ind}_{LL'} \circ p$ *pour tout lacet de* $\Lambda(E)$.

Démonstration. — Soit $\gamma \in \pi_1 \Lambda E$. Comme γ et $L'(p(\gamma))$ se projettent dans $\pi_1 X$ sur $p(\gamma)$ il existe $\Gamma \in \pi_1 \Lambda(E_x)$ tel que $\gamma \sim L'(p(\gamma)).i(\Gamma)$.

Donc $\quad \mathrm{ind}_{L'} \gamma = \mathrm{ind}\, \Gamma, \ \mathrm{ind}_L \gamma = \mathrm{ind}_{LL'} p(\gamma) + \mathrm{ind}\, \Gamma$

soit $$\mathrm{ind}_L \gamma - \mathrm{ind}_{L'} \gamma = \mathrm{ind}_{LL'} p(\gamma) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

COROLLAIRE 1. — *Si* $\pi_1 X$ *est fini,* $M(E,L)$ *est indépendante du sous-fibré lagrangien choisi.*

En effet $\mathrm{ind}_{LL'} \gamma = 0$ pour tout couple (L,L') et tout $\gamma \in \pi_1 X$. Dans ce cas on a une application naturelle $\mathrm{ind} : \pi_1 \Lambda E \to \mathbf{Z}$. C'est en particulier ce qui se passe si X est réduit à un point. E est alors un espace vectoriel symplectique, ind est un isomorphisme de $\pi_1 \Lambda E$ sur $\mathbf{Z}$, et $M(E)$ est la classe du revêtement universel de E [3*b*]. Par contre l'indice des chemins dépend de L. On continuera à le noter ind_L.

COROLLAIRE 2. — *Pour tout triple* $LL'L''$ *de sous-fibrés lagrangiens de* E

(i) $\mathrm{ind}_{LL'} + \mathrm{ind}_{L'L''} - \mathrm{ind}_{LL''} = 0$ *pour tout lacet de* X.

(ii) $M(E,L,L') + M(E,L',L'') - M(E,L,L'') = 0$.

Démonstration. — (i) et (ii) sont équivalents. Sous la forme (ii) ce résultat a été donné dans [3*b*]. On le déduit ici de la proposition 4.5 appliquée à $L''(a)$: pour $a \in \pi_1 X$.

COROLLAIRE 3. — *Si* E *possède un sous-fibré lagrangien* L_2,

$$\mathrm{ind}_0 (\gamma_1 \times \gamma_2) = \mathrm{ind}_L \gamma_1 - \mathrm{ind}_L \gamma_2$$

pour tout lacet $\gamma_1 \times \gamma_2$ *de* $\overset{2}{\Lambda} E$.

Démonstration. — Soit L par abus de notation le sous-fibré lagrangien $(\lambda,\mu) \to (\lambda,\mu,L_{p(\lambda)})$ de $\mathscr{E} = \overset{2}{\Lambda}(E) \boxtimes E \to \overset{2}{\Lambda} E$.

$$\mathrm{ind}_0(\gamma_1 \times \gamma_2) = \mathrm{ind}_{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2}(\gamma_1 \times \gamma_2) = \mathrm{ind}_{\mathscr{L}_1 L}(\gamma_1 \times \gamma_2) + \mathrm{ind}_{L\mathscr{L}_2}(\gamma_1 \times \gamma_2).$$

Mais $(\mathscr{E},\mathscr{L}_1,\mathrm{L})$ est l'image réciproque par $(\lambda,\mu)\to\mu$ du fibré $\Lambda\mathrm{E}\boxtimes\mathrm{E}\to\Lambda\mathrm{E}$ et des sous-fibrés lagrangiens $\mathscr{L}$ et $\hat{\mathrm{L}}$. Donc

$$\mathrm{ind}_{\mathscr{L}_1\mathrm{L}}(\gamma_1\times\gamma_2) = \mathrm{ind}_{\mathscr{L}\hat{\mathrm{L}}}(\gamma_2) = -\,\mathrm{ind}_{\hat{\mathrm{L}}\mathscr{L}}(\gamma_2) = -\,\mathrm{ind}_{\mathrm{L}}\,\gamma_2\,.$$

De même $\mathrm{ind}_{\mathrm{L},\mathscr{L}_2}(\gamma_1\times\gamma_2) = \mathrm{ind}_{\mathrm{L}}\,\gamma_1$, d'où le résultat.

En particulier ceci implique que si $\gamma_1\times\gamma_2$ est un lacet de $(\Lambda(n))^2$, $\mathrm{ind}\,(\gamma_1\times\gamma_2) = \mathrm{ind}\,\gamma_1 - \mathrm{ind}\,\gamma_2$.

Les propriétés multiplicatives de la classe de Maslov-Arnold (cf. [5]), se retrouvent aisément grâce au corollaire 2. Soient $(\mathrm{E}_i\to\mathrm{X}_i)\sigma_i)(i=1,2)$ un fibré symplectique muni de deux sous-fibrés lagrangiens L_i et L'_i. Soit $(\mathrm{E}\to\mathrm{X},\sigma)$ le fibré symplectique produit :

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\,,\quad \mathrm{X} = \mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\,,\quad \sigma = p_1^*\sigma_1 + p_2^*\sigma_2$$

où p_i est la projection de E sur E_i. $\mathrm{N} = \mathrm{L}_1\times\mathrm{L}_2$ et $\mathrm{N}' = \mathrm{L}'_1\times\mathrm{L}'_2$ sont deux sous-fibrés lagrangiens de E.

Proposition 4.6. — *Pour tout lacet* $\gamma_1\times\gamma_2$ *de* $\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2$,

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{NN}'}\,\gamma_1\times\gamma_2 = \mathrm{ind}_{\mathrm{L}_1\mathrm{L}'_1}\,\gamma_1 + \mathrm{ind}_{\mathrm{L}_2\mathrm{L}'_2}\,\gamma_2\,.$$

Corollaire. — *Si* $(\mathrm{E}_i,\sigma_i)(i=1,2)$ *sont deux fibrés symplectiques de même base* X, $(\mathrm{L}_i,\mathrm{L}'_i)$ *deux sous-fibrés lagrangiens de* E_i,

$$\mathrm{N} = \mathrm{L}_1\boxtimes\mathrm{L}_2\,,\quad \mathrm{N}' = \mathrm{L}'_1\boxtimes\mathrm{L}'_2$$

sont deux fibrés lagrangiens de $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1\boxtimes\mathrm{E}_2$ *et pour tout lacet* γ *de* X,

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{NN}'}\,\gamma = \mathrm{ind}_{\mathrm{L}_1\mathrm{L}'_1}\,\gamma + \mathrm{ind}_{\mathrm{L}_2\mathrm{L}'_2}\,\gamma\,.$$

Démonstration. — En prenant l'image réciproque des données par $\gamma_1\times\gamma_2$ (resp. γ) la démonstration de la proposition (resp. du corollaire) se ramène à celle du corollaire dans le cas particulier où la base est S^1 et le lacet considéré l'application identique de S^1 notée Id.

Soit N″ le sous-fibré lagrangien $\mathrm{L}'_1\boxtimes\mathrm{L}_2$.

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{NN}'}\,\mathrm{Id} = \mathrm{ind}_{\mathrm{NN}''}\,\mathrm{Id} + \mathrm{ind}_{\mathrm{N}''\mathrm{N}'}\,\mathrm{Id}\,.$$

Reste à calculer $\mathrm{ind}_{\mathrm{NN}''}\,\mathrm{Id}$. Un calcul analogue donnerait $\mathrm{ind}_{\mathrm{N}''\mathrm{N}}\,\mathrm{Id}$. On considère $\mathrm{E}_1\boxtimes\mathrm{L}_2 = \mathrm{F}$. C'est un sous-fibré involutif d'orthogonal $\mathrm{F}^\sigma = 0\boxtimes\mathrm{L}_2$. F contient N et N″. Pour calculer $\mathrm{ind}_{\mathrm{NN}''}\,\mathrm{Id}$ on peut donc utiliser le fibré réduit F/F^{σ} qui est isomorphe au fibré symplectique (E_1,σ_1). Les images de N et N″ étant isomorphes à L_1 et L'_1,

$$\mathrm{ind}_{NN''}\,\mathrm{Id} = \mathrm{ind}_{L_1L'_1}\,\mathrm{Id}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME 4.2. :

(i) *Le fibré principal* $\mathscr{M}(E)$ *est un* **Z**-*revêtement connexe de* $\overset{2}{\Lambda}E$. M(E) *est donc une classe de cohomologie entière toujours non triviale.*

(ii) $\pi_1\mathscr{M}(E) = \pi_1\Lambda E$.

(iii) $\pi_1\overset{2}{\Lambda}E = \pi_1\Lambda E \times \mathbf{Z}$.

Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Si* (E,σ) *est un fibré symplectique muni d'un sous-fibré lagrangien* L :

(i) *Le fibré principal* $\mathscr{M}(E,L)$ *est un* **Z**-*revêtement de* ΛE, *connexe.*

(ii) $\pi_1\mathscr{M}(E,L) = \pi_1 X$.

(iii) $\pi_1\Lambda E = \pi_1 X \times \mathbf{Z}$.

Le théorème 4.2 s'obtient en appliquant le théorème 4.3 au fibré symplectique $\Lambda E \boxtimes E \to \Lambda E$ et au sous-fibré lagrangien $\mathscr{L} : \lambda \to \lambda \times \lambda$.

Démonstration du théorème 4.3. — Soit $x \in X$. $\Lambda(E)$ a pour fibre en x la grassmanienne symplectique de l'espace vectoriel symplectique (E_x,σ_x). Si μ est un lagrangien quelconque de E_x et $\hat{\mu}$ le sous-fibré lagrangien de $\Lambda(E_x) \times E_x \to \Lambda(E_x) : \lambda \to \lambda \times \mu$, $\mathscr{L}_x$ la restriction de $\mathscr{L}$ à $\Lambda(E_x)$, la classe de Maslov-Arnold associée à $\mathscr{L}_x$ et $\hat{\mu}$ est indépendante de μ.

Considérons la fibration : $\Lambda(E_x) \overset{i}{\rightarrowtail} \Lambda(E) \overset{p}{\twoheadrightarrow} X$. Par image réciproque par i de $(\Lambda(E)\times E \to \Lambda(E),\mathscr{L},\hat{L})$ on obtient $(\Lambda(E_x)\times E_x,\mathscr{L}_x,\hat{L}_x)$. Donc $\mathscr{M}(E,L)$ a pour image réciproque par i $\mathscr{M}(E_x,L_x)$ et $\mathrm{ind} = \mathrm{ind}_L \circ i$ sur $\pi_1\Lambda(E_x)$. Donc $\mathrm{ind}_L : \pi_1\Lambda(E) \to \mathbf{Z}$ est surjective et $i : \pi_1\Lambda(E_x) \to \pi_1\Lambda(E)$ injective. Comme $\Lambda(E_x)$ est connexe, de la suite exacte d'homotopie de $\Lambda E \to X$ on déduit :

$$(1) \qquad 0 \to \pi_1\Lambda(E_x) \xrightarrow{\ i\ } \pi_1\Lambda(E) \xrightarrow{\ p\ } \pi_1 X \to 0.$$

Soit $F : \pi_1\Lambda(E) \to \pi_1 X \times \mathbf{Z}$ $F = (p, \mathrm{ind_L})$. De (1) et de l'injectivité de ind on déduit que F est (un homéomorphisme de groupes) injectif. D'autre part si $(a,n) \in \pi_1 X \times \mathbf{Z}$ et si $\Gamma = L(a).i((\mathrm{ind})^{-1}(n))$, $p(\Gamma) = a$ et $\mathrm{ind_L} \circ \Gamma = n$ car $\mathrm{ind_L} \circ L = 0$. Donc F est surjectif. C'est donc un isomorphisme. Donc $\pi_1\Lambda E = \pi_1 X \times \mathbf{Z}$.

De la suite d'homotopie de $\mathscr{M}(E,L) \to \Lambda E$ on tire alors :

$$0 \to \pi_1\mathscr{M}(E,L) \to \pi_1\Lambda E \xrightarrow{\mathrm{ind_L}} \mathbf{Z} \to \pi_0\mathscr{M}(E,L) \to 0$$

car ΛE est connexe. Comme $\mathrm{ind_L}$ est surjectif, $\pi_0\mathscr{M}(E,L) = 0$. Donc $\mathscr{M}(E,L)$ est un revêtement $\mathbf{Z}$-principal connexe de ΛE. Donc $M(E,L) \neq 0$.

Enfin on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \pi_1\mathscr{M}(E,L) & \longrightarrow & \pi_1\Lambda E & \xrightarrow{\mathrm{ind_L}} & \mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & \\
0 \longrightarrow & \pi_1 X & \longrightarrow & \pi_1 X \times \mathbf{Z} & \xrightarrow{pr_2} & \mathbf{Z} & \to 0
\end{array}$$

pr_2 est la deuxième projection, Id l'identité de $\mathbf{Z}$; F étant un isomorphisme il en résulte que $F|\pi_1\mathscr{M}(E,L)$ est un isomorphisme sur $\pi_1 X$. C.Q.F.D.

On peut effectuer des constructions analogues en partant de l'espace des repères symplectiques $E(Sp(n))$ (ou d'une de ses réductions $E(U(n))$ au lieu de $\Lambda(E)$. $\overset{2}{E}(Sp(n))$ (resp. $\overset{2}{E}(U(n))$) désigne le carré fibré

$$\overset{2}{\boxtimes} E(Sp(n)) \text{ (resp. } \overset{2}{\boxtimes} E(U(n))).$$

On n'envisage que le cas de $Sp(n)$, celui de $U(n)$ se traitant pareillement.

$\overset{2}{E}(Sp(n)) \boxtimes E \to \overset{2}{E}(Sp(n))$ est un fibré symplectique muni naturellement de deux sous-fibrés lagrangiens :

$$\tilde{\mathscr{L}}_1 : (z_1,z_2) \to (z_1,z_2,z_2^{-1}\mathbf{R}^{n*})$$
$$\tilde{\mathscr{L}}_2 : (z_1,z_2) \to (z_1,z_2,z_1^{-1}\mathbf{R}^{n*})$$

(Si $z \in E(Sp(n))$, z est un isomorphisme symplectique de (E_x,σ_x) (où $x = pz$) sur $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^{n*}$ muni de la structure symplectique canonique).

On note $\tilde{\mathscr{M}}(E)$, $\tilde{M}(E)$, $\tilde{\mathrm{ind}}_0$ respectivement le fibré, la classe, l'indice associés à $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. $\tilde{M}(E) \in H^1(\overset{2}{E}(Sp(n)),\mathbf{Z})$. $\tilde{\mathscr{J}}$ désignant l'involution naturelle de $\overset{2}{\mathrm{E}}(\mathrm{Sp}(n))$, $\mathrm{ind}_0 \circ \tilde{\mathscr{J}} = -\,\mathrm{ind}_0$ sur les chemins d'extrémité hors du contour apparent et sur les lacets.

Si E est muni d'un sous-fibré lagrangien L, on notera $\tilde{\mathscr{M}}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ le fibré de Maslov-Arnold associé au fibré symplectique $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n)) \boxtimes \mathrm{E} \to \mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n))$ et aux sous-fibrés lagrangiens $\tilde{\mathrm{L}} : z \to z \times \mathrm{L}_{p(z)}$ et $\tilde{\mathscr{L}} : z \to z \times z^{-1}\mathbf{R}^{n*}$, $\tilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ et $\tilde{\mathrm{ind}}_{\mathrm{L}}$ les indices correspondants.

On peut enfin mélanger les deux points de vue et considérer le fibré symplectique $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n)) \boxtimes \Lambda(\mathrm{E}) \boxtimes \mathrm{E} \to \mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n)) \boxtimes \Lambda(\mathrm{E})$ et les sous-fibrés lagrangiens $(z,\lambda) \to (z,\lambda,\lambda)$ et $(z,\lambda) \to (z,\lambda,z^{-1}\mathbf{R}^{n*})$. On construit ainsi un fibré de Maslov-Arnold, une classe et un indice.

Soit f le morphisme de fibrés sur X de $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n))$ dans $\Lambda(\mathrm{E})$ défini par $z \to z^{-1}\mathbf{R}^{n*}$, F son carré fibré, F_1 le morphisme de $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n)) \boxtimes \Lambda(\mathrm{E})$ dans $\Lambda\mathrm{E} : (z,\lambda) \to (z^{-1}\mathbf{R}^{n*},\lambda)$ et L, par abus de notation, le morphisme de $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n))$ dans $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n)) \boxtimes \Lambda(\mathrm{E})$ défini par $z \to (z,\mathrm{L}_{p(z)})$. En utilisant les propriétés fonctorielles relatives à l'image réciproque, on prouve

PROPOSITION 4.7. —

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathscr{M}}(\mathrm{E}) = \mathrm{F}^{-1}(\mathscr{M}(\mathrm{E}))\\
&\mathscr{M}(\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n)) \times \Lambda(\mathrm{E})) = \mathrm{F}_1^{-1}\mathscr{M}(\mathrm{E})\\
&\tilde{\mathscr{M}}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) = \mathrm{L}^{-1}\mathscr{M}(\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n) \times \Lambda(\mathrm{E}))\\
&\tilde{\mathscr{M}}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) = f^{-1}\mathscr{M}(\mathrm{E},\mathrm{L}).
\end{aligned}
$$

Ceci se traduit par des relations analogues sur les classes et les indices. En particulier :

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{ind}}_0 &= \mathrm{ind}_0 \circ \mathrm{F}.\\
\tilde{\mathrm{ind}}_{\mathrm{L}} &= \mathrm{ind}_{\mathrm{L}} \circ f.
\end{aligned}
$$

Sur $\overset{2}{\Lambda}(\mathrm{E})$, on peut construire un fibré, une classe, un indice de Maslov universels, modulo q, notés respectivement $\mathscr{M}(\mathrm{E},q)$, $\mathrm{M}(\mathrm{E},q)$, ind_0^q.

$$\mathscr{M}(\mathrm{E},q) = \mathscr{M}(\mathrm{E})/q\mathbf{Z}\,; \quad \mathrm{ind}_0^q = \rho_q \circ \mathrm{ind}_0 .$$

On peut procéder de même sur $\overset{2}{\mathrm{E}}(\mathrm{Sp}(n))$.

CHAPITRE III

INDICE DE MASLOV-ARNOLD-LERAY D'UN FIBRE q-SYMPLECTIQUE

1. $2q$-orientation symplectique.

DÉFINITION 1.1. — *On appelle grassmannienne* 2*-symplectique du fibré symplectique* (E,σ), $\Lambda_2(E) = E(Sp(n))/SSt n$. *Une* 2*-orientation de* E *est une section du fibré* $\Lambda_2 E \to X$.

$\Lambda_2 E$ est un revêtement à deux feuillets de ΛE.

Soit h une structure hermitienne subordonnée à σ, L un sous-fibré lagrangien de E. Pour tout $x \in X$, L_x est une forme réelle et $h|_{L_x}$ une forme quadratique définie positive. h définit une $U(n)$-réduction de $E(Sp(n))$ et L définit une $0(n)$-réduction de $E(U(n))$. D'après un théorème d'Ehresmann, l'existence d'une section de $E(U(n))/SO(n) \simeq \Lambda_2 E$ est équivalente à l'existence d'une $SO(n)$-réduction de $E(U(n))$ on a donc prouvé :

PROPOSITION 1.1. — (E,σ) *possède une* 2*-orientation symplectique si, et seulement si,* E *possède un sous-fibré lagrangien orientable* (*au sens euclidien*).

DÉFINITION 1.2. — *Munir l'espace fibré symplectique* (E,σ) *d'une géométrie q-symplectique, c'est se donner un* $Sp_q(n)$*-élargissement du groupe structural* $Sp(n)$ *de* E. *On dit alors que* (E,σ) *est un fibré q-symplectique.*

Remarque. — Il n'existe pas forcément de géométrie q-symplectique sur E. Il y a des conditions topologiques à remplir [7]. D'autre part deux géométries q-symplectiques ne sont pas en général isomorphes. Cependant pour les géométries q-symplectiques introduites on aura des conditions simples d'isomorphisme.

Si (E,σ,q) est un fibré q-symplectique, de fibré principal associé $E(Sp_q(n))$, on définit :

$$\Lambda_{2q}(E) = E(Sp_q(n))/SSt n.$$

DÉFINITION 1.3. — *$\Lambda_{2q}(E)$ est la grassmannienne 2q-symplectique, un élément de $\Lambda_{2q}(E)$ est un 2q-lagrangien. Une section globale de $\Lambda_{2q}(E)$ est une 2q-orientation. Si L_{2q} est une section de $\Lambda_{2q}(E)$ se projetant sur le sous-fibré lagrangien L de E, on dit que L est 2q-orientable et que L_{2q} est une 2q-orientation de L.*

Compte tenu de la proposition 1.1, cette définition est compatible avec la notion usuelle d'orientation.

DÉFINITION 1.4. — *Un fibré symplectique est q-orientable si, et seulement si :*

(i) *on peut le munir d'une géométrie q-symplectique.*

(ii) *$\Lambda_{2q}(E)$ possède une section globale.*

Si (E,σ) est q-orientable, (E,σ) est q'-orientable pour q', $1 \leqslant q' \leqslant q$. En particulier (E,σ) possède un sous-fibré lagrangien orientable et on peut réduire à $SSt(n)$ le groupe structural $Sp(n)$ de E.

Réciproquement si E possède un sous-fibré lagrangien orientable, $E(Sp(n))$ peut être réduit à $SSt(n)$. Mais $SSt(n)$ étant un sous-groupe de $Sp_\infty(n)$ on peut élargir le groupe structural de E à $Sp_\infty(n)$.

Soit $L_\infty : X \to \Lambda_\infty(E)$ l'application qui à x associe la classe de $L(SSt(n))$ dans le quotient de $E(Sp_\infty(n))$ par $SSt(n)$. L_∞ est une ∞-orientation relevant la 2-orientation L.

THÉORÈME 1.1. — (i) *Soit (E,σ) un fibré symplectique. A tout sous-fibré lagrangien orientable L est associé naturellement une géométrie ∞-symplectique de fibré principal noté $E(Sp_\infty(n),L)$ dans laquelle L possède une ∞-orientation naturelle.*

(ii) *Si (E,σ,q) est un fibré q-symplectique possédant une 2q-orientation L_{2q}, le fibré principal $E(Sp_q(n))$ est naturellement isomorphe à*

$$E(Sp_\infty(n),L)/q\mathbf{Z}.$$

Un fibré symplectique est donc ∞-orientable si et seulement si il possède un sous-fibré lagrangien orientable.

Soit p la projection $\Lambda_{2q}(E) \to \Lambda(E)$ et p encore, son carré fibré : $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E) \to \overset{2}{\Lambda} E$. L'image réciproque par p du fibré symplectique

$\overset{2}{\Lambda} E \boxtimes \to \overset{2}{\Lambda} E$ et des sous-fibrés lagrangiens $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ permet de définir un fibré (resp. une classe, un indice) de Maslov-Arnold noté $\mathscr{M}_{2q}(E)$ (resp. $M_{2q}(E)$, Ind_{2q}^{E})

$$M_{2q}(E) \in H^1(\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E), \mathbf{Z}).$$

Si E possède un sous-fibré lagrangien L, l'image réciproque par p du fibré symplectique $\Lambda E \boxtimes E \to \Lambda E$ et des sous-fibrés lagrangiens L et $\mathscr{L}$ permet de construire un fibré, une classe, un indice de Maslov-Arnold notés respectivement $\mathscr{M}_{2q,L}(E)$, $M_{2q,L}(E)$, $\mathrm{ind}_{2q,L}$. Si L est $2q$-orientable et L_{2q} une $2q$-orientation de L on les notera respectivement : $\mathscr{M}_{L_{2q}}(E)$, $M_{L_{2q}}(E)$, $\mathrm{Ind}_{L_{2q}}$.

$$\mathrm{Ind}_{2q,L} = \mathrm{ind}_L \circ p$$

Si $\hat{L}_{2q}$ est le morphisme de fibrés sur X défini pour tout $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(E)$, par $\hat{L}_{2q}(\lambda_{2q}) = \lambda_{2q} \times (L_{2q} \circ p(\lambda_{2q}))$:

$$\mathrm{Ind}_{L_{2q}} = \mathrm{Ind}_{2q}^{E} \circ \hat{L}_{2q}.$$

THÉORÈME 1.2. — (i) Ind_{2q}^{E} *envoie* $\pi_1 \overset{2}{\Lambda}_{2q} E$ *sur* $2q\mathbf{Z}$ (*resp.* 0 *si* $q = +\infty$).

(ii) $\mathrm{Ind}_{L_{2q}}$ *envoie* $\pi_1 \Lambda_{2q} E$ *sur* $2q\mathbf{Z}$ (*resp.* 0 *si* $q = +\infty$).

Démonstration. — (i) Considérons la fibration

$$\Lambda_{2q}(n) \xrightarrow{\ i\ } \overset{2}{\Lambda}_{2q}(E) \longrightarrow \Lambda_{2q}(E)$$

$i^{-1}\mathscr{M}_{2q}(E) = \mathscr{M}_{2q}(n)$, fibré de Maslov-Arnold naturel de $\Lambda_{2q}(n)$ (*cf.* II.3). Donc $\mathrm{Ind}_{2q}^{E} \circ i = \mathrm{Ind}_{2q}$.

Comme Ind_{2q} est un isomorphisme de $\pi_1 \Lambda_{2q}(n)$ sur $2q\mathbf{Z}$,

$$i : \pi_1 \Lambda_{2q}(n) \to \pi_1 \overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$$

est injectif. $\Lambda_{2q}(n)$ étant connexe on a donc la suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to \pi_1 \Lambda_{2q}(n) \to \pi_1 \overset{2}{\Lambda}_{2q}(E) \to \pi_1 \Lambda_{2q}(E) \to 0.$$

Soit $\Delta_{2q} : \Lambda_{2q}(E) \to \overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$, $\lambda_{2q} \to \lambda_{2q} \times \lambda_{2q}$.

De la suite exacte (1) il résulte que pour tout $\gamma \in \pi_1 \overset{2}{\Lambda}_{2q}\mathrm{E}$ il existe $\Gamma \in \pi_1 \Lambda_{2q}(n)$ tel que

$$\gamma = (\Delta_{2q} \circ p(\gamma)).i(\Gamma).$$

Donc $\mathrm{Ind}_{2q}^{\mathrm{E}}\, \gamma = (\mathrm{Ind}_{2q}^{\mathrm{E}} \circ \Delta_{2q})p(\gamma) + \mathrm{Ind}_{2q}\, \Gamma$.

Or $\Delta_{2q}^{-1}\mathscr{M}_{2q}(\mathrm{E})$ est trivial, les sous-fibrés lagrangiens $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ coïncidant sur la diagonale de $\overset{2}{\Lambda}_{2q}\mathrm{E}$. Donc

$$\mathrm{Ind}_{2q}^{\mathrm{E}} \circ \Delta_{2q} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ind}_{2q}^{\mathrm{E}}(\pi_1 \overset{2}{\Lambda}_{2q}\mathrm{E}) = \mathrm{Ind}_{2q}\, \pi_1 \Lambda_{2q}(n) = 2q\mathbf{Z}.$$

C.Q.F.D.

(ii) Considérons la fibration

$$\Lambda_{2q}(n) \xrightarrow{\ i\ } \Lambda_{2q}(\mathrm{E}) \to \mathrm{X}\,;$$

la démonstration est analogue, L_{2q} jouant le rôle de Δ_{2q}.

COROLLAIRE. — *Si* L_{2q}, L'_{2q} *sont deux* $2q$*-orientations de* (E,σ,q) *relevant* L *et* L′ *respectivement, l'indice de Maslov modulo* $2q$, $\mathrm{ind}_{\mathrm{LL}'}^{2q}$ *est nul sur les lacets.*

Démonstration. — De la relation $\mathrm{Ind}_{\mathrm{L}_{2q}} = \mathrm{ind}_{\mathrm{L}} \circ p$ et de la proposition II.4.5. on déduit que $\mathrm{Ind}_{\mathrm{L}_{2q}} - \mathrm{Ind}_{\mathrm{L}'_{2q}} = \mathrm{ind}_{\mathrm{LL}'} \circ p$, d'où le résultat.

THÉORÈME 1.3. — *Soit* (E,σ,q) *un fibré* q*-symplectique possédant une* $2q$*-orientation* L_{2q}. $(1 \leqslant q \leqslant +\infty)$. *Un sous-fibré lagrangien* L′ *de* E *est* $2q$*-orientable si, et seulement si, tout lacet de* X *a un indice de Maslov relatif à* (E,L,L′) *nul si* $q = +\infty$, *nul modulo* $2q$ *si* $1 \leqslant q < +\infty$.

Démonstration. — Compte tenu du corollaire précédent, il ne reste à prouver que la réciproque. On se limite au cas $q = +\infty$, les autres cas s'en déduisant.

Pour ceci on va prouver que $\tilde{\mathrm{L}}'$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda_\infty(\mathrm{E}) \arrow[rr, "\tilde{\mathrm{L}}'"] \arrow[dr, "p"'] & & \Lambda(\mathrm{E}) \\ & \mathrm{X} \arrow[ur, "\mathrm{L}'"'] & \end{tikzcd}$$

se relève en une application $\mathscr{L}'$ de $\Lambda_\infty(\mathrm{E})$ dans $\Lambda_\infty(\mathrm{E})$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Lambda_\infty(\mathrm{E}) \arrow[r, "\mathscr{L}'"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\tilde{\mathrm{L}}'"] & \Lambda_\infty(\mathrm{E}) \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{L}'"] & \Lambda(\mathrm{E}) \end{tikzcd}$$

Il suffira alors de poser $\mathrm{L}'_\infty = \mathscr{L}' \circ \mathrm{L}_\infty$.

Soit γ_∞ un lacet de $\Lambda_\infty(\mathrm{E})$ d'origine λ_∞. $\tilde{\mathrm{L}}'(\gamma_\infty)$ est un lacet de $\Lambda(\mathrm{E})$ d'origine $\tau_0 = \mathrm{L}'(x_0)$ où $x_0 = p(\lambda_\infty)$. Soit τ_∞ une ∞-orientation de τ_0. $\Lambda_\infty(\mathrm{E})$ étant un $\mathbf{Z}$-revêtement de $\Lambda\mathrm{E}$, $\tilde{\mathrm{L}}'(\gamma_\infty)$ se relève en un unique chemin C_∞ issu de τ_∞ et d'extrémité τ'_∞ qui est une ∞-orientation de τ_0. $\Lambda_\infty(\mathrm{E}_{x_0})$ étant connexe il existe un chemin Γ de $\Lambda_\infty(\mathrm{E}_{x_0})$ reliant τ_∞ à τ'_∞.

$\mathrm{C}_\infty . \Gamma^{-1}$ est un lacet de $\Lambda_\infty(\mathrm{E})$; $p(\mathrm{C}_\infty)$ et $p(\Gamma)$ étant des lacets de $\Lambda(\mathrm{E})$ on a la suite d'égalités

$$0 = \mathrm{Ind}_{\mathrm{L}_x}(\mathrm{C}_\infty . \Gamma^{-1}) = \mathrm{ind}_{\mathrm{L}}\, p(\mathrm{C}_\infty) - \mathrm{ind}_{\mathrm{L}}\, p(\Gamma).$$

Mais $p(\mathrm{C}_\infty) = \mathrm{L}' \circ p(\gamma_\infty)$. Donc $\mathrm{ind}_{\mathrm{L}}\, p(\mathrm{C}_\infty) = \mathrm{ind}_{\mathrm{LL}'}\, p(\gamma_\infty) = 0$. Comme $p(\Gamma)$ est un lacet de $\Lambda(\mathrm{E}_{x_0})$

$$0 = \mathrm{ind}_{\mathrm{L}}\, p(\Gamma) = \mathrm{ind}\, p(\Gamma).$$

ind étant injectif il en résulte que $p(\Gamma)$ est homotope à 0 et donc que $\tau'_\infty = \tau_\infty$ ce qui assure que $\tilde{\mathrm{L}}'(\gamma_\infty)$ se relève en un lacet de $\Lambda_\infty(\mathrm{E})$.

Soit b_∞ un point de $\Lambda_\infty(\mathrm{E})$ et B_∞ une ∞-orientation de $\tilde{\mathrm{L}}'(b_\infty)$. Soit $\lambda_\infty \in \Lambda_\infty(\mathrm{E})$. Il résulte de ce qui précède que tous les chemins reliant b_∞ à λ_∞ ont une image par $\tilde{\mathrm{L}}'$ dont le relevé d'origine B_∞ a une extrémité qui ne dépend que de λ_∞ et que l'on note $\mathscr{L}'(\lambda_\infty)$. $\lambda_\infty \to \mathscr{L}'(\lambda_\infty)$ est l'application cherchée.

COROLLAIRE 1. — *Si* L *est un sous-fibré lagrangien de* (E,σ,q), L *est* $2q$-*orientable si, et seulement si,* $\mathrm{Ind}_{2q,\mathrm{L}}$ *est nul modulo* $2q$ *sur les lacets de* $\Lambda_{2q}(\mathrm{E})$.

Démonstration. — (1) Si L est $2q$-orientable $\mathrm{Ind}_{2q,\mathrm{L}} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{L}2q}$ qui est nul modulo $2q$.

(2) Réciproquement, $\mathrm{Ind}_{2q,\mathrm{L}}$ est l'indice de Maslov relatif aux sous-fibrés lagrangiens $\hat{\mathrm{L}} : \lambda_{2q} \to \lambda_{2q} \times \mathrm{L}(p(\lambda_{2q}))$ et $\mathscr{L} : \lambda_{2q} \to \lambda_{2q} \times \lambda$ qui est $2q$-orientable. $\hat{\mathrm{L}}$ est donc $2q$-orientable. Soit $\hat{\mathrm{L}}_{2q}$ une $2q$-orientation de $\hat{\mathrm{L}}$. Il reste à prouver que $\hat{\mathrm{L}}_{2q}(\lambda_{2q})$ ne dépend que de $p(\lambda_{2q}) = x$. Or $\hat{\mathrm{L}}_{2q}(\lambda_{2q})$ est,

pour tout $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\mathrm{E}_x)$, une $2q$-orientation de $\mathrm{L}(x)$. Comme $\Lambda_{2q}(\mathrm{E}_x)$ est connexe, $\hat{\mathrm{L}}_{2q}(\Lambda_{2q}(\mathrm{E}_x))$ est réduit à un point. CQFD.

COROLLAIRE 2. — *Soit* (E,σ) *un fibré symplectique. Les géométries q-symplectiques associées à deux sous-fibrés lagrangiens orientables sont isomorphes si, et seulement si, l'indice de Maslov relatif à ces sous-fibrés de tout lacet de* X *est nul modulo* $2q$ (*resp. nul si* $q = +\infty$).

Démonstration. — $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n),\mathrm{L})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n),\mathrm{L}')$ sont isomorphes si, et seulement si, on peut plonger $\mathrm{L}'(\mathrm{SSt}(n))$ dans $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n),\mathrm{L})$, c'est-à-dire si, et seulement si, L' définit une $\mathrm{SSt}(n)$ réduction de $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n),\mathrm{L})$, ce qui revient à dire que L' est $2q$-orientable dans la géométrie $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n),\mathrm{L})$ ce qui, d'après le théorème, a lieu si, et seulement si, $\mathrm{ind}^{2q}_{\mathrm{LL}'}(\pi_1 \mathrm{X}) = 0$. C.Q.F.D.

Considérons alors l'espace $\mathrm{H}^\circ(\mathrm{X},\Lambda_2\mathrm{E})$ des sections globales de $\Lambda_2\mathrm{E}$. La relation $\mathrm{L} \sim \mathrm{L}'$ si, et seulement si, $\mathrm{ind}^{2q}_{\mathrm{LL}'}(\pi_1\mathrm{X}) = 0$ est une relation d'équivalence d'après la proposition II.4.5. Soit $\mathrm{H}^\circ(\mathrm{X},\Lambda_2,\mathrm{E})/\mathrm{ind}^{2q}$ l'ensemble quotient et $\mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathrm{Sp}_q(n))$ le premier groupe de cohomologie non abélienne de X à coefficients dans $\mathrm{Sp}_q(n)$. Le corollaire 2 signifie qu'on a la factorisation suivante de l'application ε_q, qui, à L, associe la classe d'isomorphisme de $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n),\mathrm{L})$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^\circ(\mathrm{X},\Lambda_2\mathrm{E}) \arrow[rr, "\varepsilon_q"] \arrow[dr] & & \mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathrm{Sp}_q(n)) \\
& \mathrm{H}^\circ(\mathrm{X},\Lambda_2\mathrm{E})/\mathrm{ind}^{2q} \arrow[ur, "\tilde{\varepsilon}_q"] &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\varepsilon}_q$ étant injective.

Remarque. — L'inclusion de $\mathrm{SSt}n$ dans $\mathrm{Sp}_q(n)$ est homotope à 0. Il en résulte que $\pi_1\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n)) = \pi_1\Lambda_{2q}(\mathrm{E})$. D'autre part F_q désignant l'application naturelle de $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n))$ dans $\Lambda_{2q}(\mathrm{E})$ définie par $z_q \to z_q^{-1}\mathrm{A}_{2q}$ (A_{2q} est une $2q$-orientation (fixée) de $\mathbf{R}^{n*}$, L un sous-fibré lagrangien de E, les indices $\tilde{\mathrm{Ind}}_{2q,\mathrm{L}}$ et $\mathrm{Ind}_{2q,\mathrm{L}}$ sur $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n))$ et $\Lambda_{2q}(\mathrm{E})$ sont reliés par la relation

$$\tilde{\mathrm{Ind}}_{2q,\mathrm{L}} = \mathrm{Ind}_{2q,\mathrm{L}} \circ \mathrm{F}.$$

Si $\mathscr{M}_{2q,\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ désigne le fibré de Maslov construit sur $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n))$ à partir des sous-fibrés lagrangiens $z_q \to z_q^{-1}\mathrm{A}_{2q}$ et $z_q \to \mathrm{L}_0 p(z_q)$, on déduit de la suite exacte d'homotopie et du théorème précédent que L est $2q$-orientable si, et seulement si, $\pi_0\mathscr{M}_{2q,\mathrm{L}}(\mathrm{E}) = \mathbf{Z}_{2q}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\mathscr{M}_{2q,\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ a $2q$ composantes connexes distinctes.

Exemple. — Soit $\psi : X \to T^*M$ une immersion lagrangienne; si M est orientée, le fibré vertical $VT^*M \to T^*M$ est orienté et on considère la géométrie ∞-symplectique associée. $E = \psi^{-1}TT^*M$ est alors un fibré ∞-symplectique muni d'une ∞-orientation $\mathscr{V}_\infty$ de $\mathscr{V} = \psi^{-1}VT^*M$. On dit que ψ est $2q$-orientable si TX, considéré comme sous-fibré lagrangien de E, est $2q$-orientable.

COROLLAIRE 3. — *L'immersion lagrangienne ψ est $2q$-orientable si, et seulement si, l'indice de Maslov-Arnold de ses lacets est un multiple de $2q$.*

En particulier, si on prend $q = 1$, la condition ne porte plus que sur X. L'indice de Maslov-Arnold de ψ est pair si, et seulement si, X est orientable. Dans le cas où $M = \mathbf{R}^n$, ce résultat est dû à Souriau [11*a*].

2. Indice de Maslov-Arnold-Leray.

Soit (E,σ,q) un fibré q-symplectique muni de deux $2q$-orientations L_{2q} et L'_{2q} se projetant sur les sous-fibrés lagrangiens L et L'. L'indice de tout lacet de X est nul modulo $2q$: $\mathrm{ind}^{2q}_{LL'}(\pi_1 X) = 0$. Il existe donc (cf. I.2) une application $M_{L_{2q}L'_{2q}}$ de X^2 dans Z_{2q} continue sur $X_D \times X_D$ telle que $\mathrm{ind}^{2q}_{LL'}\,\gamma = M_{L_{2q}L'_{2q}}(\gamma(0),\ \gamma(1))$ pour tout chemin γ de X. Soit X^o_D une composante connexe de X_D; il existe une unique application $m_{L_{2q}L'_{2q}}$ de X dans Z_{2q} nulle sur X^o_D, continue sur X_D telle que

$$m_{L_{2q}L'_{2q}}(x) = M_{L_{2q}L'_{2q}}(x,x_0) \qquad x_0 \in X^o_D .$$

En particulier $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$ est muni de deux $2q$-orientations naturelles $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$: $\mathscr{L}_1(\lambda_{2q},\tau_{2q}) = (\lambda_{2q},\tau_{2q},\tau_{2q})$ et $\mathscr{L}_2(\lambda_{2q},\tau_{2q}) = (\lambda_{2q},\tau_{2q},\lambda_{2q})$. Ceci permet de définir une application notée M_{2q} de $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E) \times \overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$ dans $\mathbf{Z}_{2q}$ continue sur $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}_{2q}(E) \times \overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}_{2q}(E)$ où $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}_{2q}(E)$, complémentaire du contour apparent, est l'ouvert des paires de $2q$-lagrangiens transverses.

Pour poursuivre il faut choisir une composante connexe de $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}_{2q}(E)$. Soit $\mathscr{U}_{2q}$ l'ouvert de $\Lambda_{2q}(E) \boxtimes \Lambda(E)$ formé des couples (a_{2q},b) où a_{2q} est une $2q$-orientation d'un lagrangien a et b un lagrangien transverse à a. Soit (e_{i*}) une base de a et (e_i) l'unique base de b telle que $\sigma(e_{i*},e'_j) = \delta_{ij}$. On dit que (e_i) est la base de b associée à (e_{i*}). Soit $(\bar{e}_{i*})$ une autre base de a, P la matrice de changement de base. La matrice de changement de base de (e_i) à $(\bar{e}_1)$ base associée à $(\bar{e}_{i*})$ est ${}^t\mathrm{P}^{-1}$. Pour tout couple $((e_{i*}),(e_i))$ de bases associées, on considère le chemin $\mathrm{C}(e_{i*},e_j)$ où $\mathrm{C}(e_{i*},e_j)(t)$ est le lagrangien engendré par

$$\left(e_{i*}\cos\frac{\pi}{2}t - e_i\sin\frac{\pi}{2}t\right).$$

Toute composante connexe de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ contenant une matrice orthogonale, les chemins $\mathrm{C}(e_{i*},e_j)$ sont homotopes. Les extrémités de leurs relèvements dans $\Lambda_{2q}(\mathrm{E})$ d'origine a_{2q} coïncident donc. Soit b_{2q} cette extrémité. On définit une application $\mathrm{Q}_{2q} : \mathscr{U}_{2q} \to \Lambda_{2q}(\mathrm{E})$ en posant $\mathrm{Q}_{2q}(a_{2q},b) = b_{2q}$ qui est une $2q$-orientation de b. Soit $\tilde{\mathrm{Q}}_{2q} : \mathscr{U}_{2q} \to \overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$ l'application définie par

$$\tilde{\mathrm{Q}}_{2q}(a_{2q},b) = (a_{2q},\mathrm{Q}_{2q}(a_{2q},b)).$$

En adaptant le raisonnement de la proposition II.4.1 on prouve que $\mathscr{U}_{2q}$ est connexe par arcs. $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$ étant un revêtement de $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}\mathrm{E}$, $\tilde{\mathrm{Q}}_{2q}$ est un homéomorphisme de $\mathscr{U}_{2q}$ sur une composante connexe de $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$. On désigne par m_{2q} l'application de $\overset{2}{\Lambda}{}_{2q}\mathrm{E}$ dans $\mathbf{Z}_{2q}$ définie par

$$m_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q}) = \mathrm{M}_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q},a_{2q},\mathrm{Q}(a_{2q},b)).$$

DÉFINITION 2.1. — m_{2q} *est l'indice de Maslov-Arnold-Leray du fibré q-symplectique* (E,σ,q).

PROPOSITION 2.1. — (i) m_{2q} *ne dépend pas du couple* (a_{2q},b) *choisi.*

(ii) m_{2q} *est continue sur* $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$.

(iii) *pour tout chemin* γ *de* $\overset{2}{\Lambda}{}_{2q}(\mathrm{E})$ *d'extrémité dans* $\tilde{\mathrm{Q}}_{2q}(\mathscr{U}_{2q})$

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{E}}_{2q}(\gamma) = m_{2q}(\gamma(0)) \pmod{2q}$$

PROPOSITION 2.2. — (i) M_{2q} *est continue sur* $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E}) \times \overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$.

(ii) *si* u *est un isomorphisme q-symplectique de* (E,σ,q) *sur* (E',σ',q') $u^*\mathrm{M}'_{2q} = \mathrm{M}_{2q}$.

(iii) $M_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q},\lambda'_{2q},\tau'_{2q}) = - M_{2q}(\tau_{2q},\lambda_{2q},\tau'_{2q},\lambda'_{2q}) + \dim(\tau \cap \lambda) - \dim(\tau' \cap \lambda')$.

(iv) $M_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q},\lambda'_{2q},\tau'_{2q}) + M_{2q}(\lambda'_{2q},\tau'_{2q},\lambda''_{2q},\tau''_{2q}) - M_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q},\lambda''_{2q},\tau''_{2q}) = 0$.

Ces propositions découlent des définitions et de la proposition II.4.2. Si $q = +\infty$ on notera M_{2q} et m_{2q} respectivement M et m.

Si $E(Sp_q(n))$ désigne le fibré principal de (E,σ,q) on peut de même construire un indice de Maslov-Arnold-Leray $\tilde{m}_{2q}$ sur le carré fibré $\overset{2}{E}(Sp_q(n))$: le fibré q-symplectique $\overset{2}{E}(Sp_q(n)) \boxtimes E$ est muni de deux $2q$-orientations

$$\mathscr{L}_1 : (z_q,z'_q) \to (z_q,z'_q,z'^{-1}_q A_{2q}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathscr{L}}_2 : (z_q,z'_q) \to (z_q,z'_q,z_q^{-1}A_{2q})$$

où A_{2q} est une $2q$-orientation fixée de $A = \mathbf{R}^{n*}$. On a de même une application $\tilde{M}_{2q} : \overset{2}{E}(Sp_q(n)) \times \overset{2}{E}(Sp_q(n)) \to \mathbf{Z}_{2q}$.

Si E possède une $2q$-orientation L_{2q} des considérations du même ordre peuvent être faites : le fibré

$$\Lambda_{2q}(E) \boxtimes E \to \Lambda_{2q}(E) \ (\text{resp. } E(Sp_q(n)) \boxtimes E \to E(Sp_q(n)))$$

est muni de deux $2q$-orientations

$$\hat{L}_{2q} : \lambda_{2q} \to \lambda_{2q} \times L_{2q}(p(\lambda_{2q})) \quad \text{et} \quad \mathscr{L} : \lambda_{2q} \to \lambda_{2q} \times \lambda_{2q},$$

(resp. $\hat{L}_{2q} : z_{2q} \to z_{2q} \times L_{2q}(p(z_q))$, $\mathscr{L} : z_q \to z_q \times z_q^{-1}A_{2q}$) ce qui permet de construire un indice de Maslov-Arnold-Leray noté $m_{L_{2q}}$ (resp. $\tilde{m}_{L_{2q}}$) et une application $M_{L_{2q}}$ (resp. $\tilde{M}_{L_{2q}}$).

Soit (F_q (resp. $\overset{2}{F}_q$) le morphisme de fibrés sur X défini par $F_q(z_q) = z_q^{-1}A_{2q}$ (resp. son carré fibré). La fonctorialité des constructions entraîne les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{2q} &= M_{2q} \circ (\overset{2}{F}_q,\overset{2}{F}_q) \\
\tilde{M}_{L_{2q}} &= M_{L_{2q}} \circ (F_q,F_q) \\
M_{L_{2q}} &= M_{2q} \circ \hat{L}_{2q} \\
M_{L_{2q}L'_{2q}} &= M_{L_{2q}} \circ (L'_{2q})^2 = M_{2q} \circ ((L_{2q}L'_{2q}))^2
\end{aligned}$$

(où $L_{2q}L'_{2q}$ est l'application $x \to (L'_{2q}(x),L_{2q}(x))$).

Choisissant de façon naturelle à partir de $\tilde{Q}(\mathscr{U}_{2q})$ les différentes composantes connexes sur lesquelles les indices de Maslov-Arnold-Leray sont nuls on a les relations analogues :

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{2q} &= m_{2q} \circ \mathrm{F}_q, \tilde{m}_{\mathrm{L}_{2q}} = m_{\mathrm{L}_{2q}} \circ \mathrm{F}_q, \\ m_{\mathrm{L}_{2q}} &= m_{2q} \circ \hat{\mathrm{L}}_{2q}, \\ m_{\mathrm{L}_{2q}\mathrm{L}'_{2q}} &= m_{\mathrm{L}_{2q}} \circ \hat{\mathrm{L}}_{2q} = m_{2q} \circ (\mathrm{L}_{2q}\mathrm{L}'_{2q}). \end{aligned}$$

On peut enfin construire un indice mixte en considérant le fibré q-symplectique $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n)) \boxtimes \Lambda_{2q}(\mathrm{E}) \boxtimes \mathrm{E} \to \mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n)) \boxtimes \Lambda_{2q}(\mathrm{E})$ muni des $2q$-orientations $(z_q,\lambda_{2q}) \to (z_q,\lambda_{2q},\lambda_{2q})$ et $(z_q,\lambda_{2q}) \to (z_q,\lambda_{2q},z_q^{-1}\mathrm{A}_{2q})$. On construit ainsi un indice de Maslov-Arnold-Leray mixte $\bar{m}_{2q}$. Si $\bar{\mathrm{F}}_{2q}$ est l'application à valeurs dans $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(\mathrm{E})$ définie par

$$\bar{\mathrm{F}}_q(z_q,\lambda_{2q}) = (z_q^{-1}\mathrm{A}_{2q},\lambda_{2q}), \quad \bar{m}_{2q} = m_{2q} \circ \bar{\mathrm{F}}_q.$$

La fonctorialité par rapport au groupe se traduit par la relation suivante : si $q' \leqslant q$ et si on note $(\lambda_{2q'},\tau_{2q'})$ les projections dans $\Lambda_{2q}(\mathrm{E})$ des $2q$-lagrangiens (λ_{2q},τ_{2q})

$$m_{2q'}(\lambda_{2q'},\tau_{2q'}) = m_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q}) \quad (\mathrm{mod.}\ 2q').$$

En particulier $m_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q}) = m(\lambda_\infty,\tau_\infty)$ (mod. $2q$); on n'effectuera donc les démonstrations ultérieures que pour m et M, les égalités étant alors à lire dans $\mathbf{Z}$.

PROPOSITION 2.3. — (i) *a) Si* $(\lambda_{2q},\lambda'_{2q})$ *est une paire transverse,* $m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q}) = 0$ *si et seulement si* $\lambda'_{2q} = \mathrm{Q}_{2q}(\lambda_{2q},\lambda')$.

b) $m_{2q}(\mathrm{Q}(\lambda_{2q},\lambda'),\lambda_{2q}) = n$ *(mod* $2q$*) où* $2n$ *est le rang de* E.

(ii) *Si* (z_q,z'_q) *sont deux* q*-repères en* x, *et si* $(\lambda_{2q},\lambda'_{2q})$ *est une paire transverse,* $m_{2q}(z_q^{-1}z'_q\lambda_{2q},z_q^{-1}z'_q\lambda'_{2q}) = m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q})$.

(iii) *pour toute paire* $(\lambda_{2q},\lambda'_{2q})$:

$$m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q}) + m_{2q}(\lambda'_{2q},\lambda_{2q}) = n + \dim(\lambda \cap \lambda') \quad (\mathrm{modulo}\ 2q).$$

Démonstration :

(i) *a*) découle de la définition, (ii) de la continuité de m_{2q} sur $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}_{2q}(\mathrm{E})$.

Compte tenu des propriétés de M,

$$\begin{aligned} m(\lambda_\infty,\lambda'_\infty) &+ m(\lambda'_\infty,\lambda_\infty) \\ &= \mathrm{M}(\lambda_\infty,\lambda'_\infty,a_\infty,b_\infty) + \mathrm{M}(b_\infty,a_\infty,\lambda_\infty,\lambda'_\infty) + \dim(\lambda \cap \lambda') \\ &= m(b_\infty,a_\infty) + \dim(\lambda \cap \lambda') \end{aligned}$$

où $b_\infty = \mathrm{Q}(a_\infty,b)$. Donc (iii) découle de (i) b.

(i) *b*) Signifie que $M(\lambda'_\infty,\lambda_\infty,\lambda_\infty,\lambda'_\infty) = n$ où $\lambda'_\infty = Q(\lambda_\infty,\lambda)$; soit (e_{i*}) une base de λ, (e'_i) la base de λ' associée et γ le chemin $C(e_{i*},e'_i)$.

$$M(\lambda'_\infty,\lambda_\infty,\lambda_\infty,\lambda'_\infty) = \mathrm{Ind}^E_\infty \Gamma_\infty = \mathrm{ind}_0(\gamma^{-1} \times \gamma)$$

où Γ_∞ est le relevé de $\Gamma = \gamma^{-1} \times \gamma$ d'origine $(\lambda'_\infty,\lambda_\infty)$ qui, par construction, a pour extrémité $(\lambda_\infty,\lambda'_\infty)$. Soit ν le lagrangien engendré par $(e_{i*}+e'_i)$. Le chemin $\tilde{\Gamma} : t \to \Gamma(t) \times \nu$ est un relèvement de Γ dans le fibré $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ ($\mathscr{E} = (\overset{2}{\Lambda} E \boxtimes E \to \overset{2}{\Lambda} E)$).

Il en résulte que

$$\mathrm{ind}_0 \Gamma = D(\tilde{\Gamma}(1)) - D(\tilde{\Gamma}(0)) = i(\lambda,\nu,\lambda') - i(\lambda',\nu,\lambda)$$

soit

$$\mathrm{ind}_0 \Gamma = n - 2i(\lambda',\nu,\lambda).$$

De la relation $e'_i - \nu_i + e^*_i = 0$ il résulte que $i(\lambda',\nu,\lambda) = 0$ ce qui achève la démonstration.

Le lemme suivant va permettre de définir une action naturelle de $\pi_1\Lambda(n)$ dans $\Lambda_{2q}(E)$.

LEMME. — *Soit* $X = G/H$ *un espace homogène,* G *étant connexe. Soient* G_∞ *et* X_∞ *respectivement les revêtements universels de* G *et* X. *L'action naturelle de* G_∞ *dans* X_∞ *commute à l'action de* $\pi_1 X$.

Autrement dit G_∞ se représente comme groupe d'isomorphisme du π_1X-fibré principal $X_\infty \to X$.

Démonstration du lemme. — C'est une adaptation de la démonstration prouvant que $\pi_1 G$ est commutatif.

Soit $x_0 \in X$ le point de base de X. $\bar{x}$ (resp. $\bar{g}$) est un chemin de X (resp. G) d'origine x (resp. g) et d'extrémité x_0 (resp. e élément neutre de G). x_∞ (resp. g_∞) est la classe d'homotopie de $\bar{x}$ (resp. $\bar{g}$). Soit Γ le chemin de gx à x $t \to g(t)x$. $g_\infty . x_\infty$ est la classe d'homotopie du chemin $\bar{g}.\bar{x} : t \to g(t)x(t)$ qui est homotope à $(\Gamma.\bar{x})$. D'autre part si $\alpha_\infty \in \pi_1 X$ est la classe d'homotopie du lacet $\bar{\alpha}$ en x_0, $x_\infty . \alpha_\infty$ est la classe d'homotopie de $\bar{x}.\bar{\alpha}$. Il résulte de tout ceci que

$$g_\infty.(x_\infty.\alpha_\infty) = (\bar{g}.(\bar{x}.\alpha))_\infty = (\Gamma.(\bar{x}.\bar{\alpha}))_\infty = ((\Gamma.\bar{x}).\bar{\alpha})_\infty = (g_\infty.x_\infty).\alpha_\infty.$$

C.Q.F.D.

Pour tout couple $(\alpha_\infty,\lambda_\infty) \in \pi_1\Lambda(n) \times \Lambda_\infty(E)$ on pose

$$\lambda_\infty.\alpha_\infty = z_\infty^{-1}(z_\infty(\lambda_\infty).\alpha_\infty)$$

où z_∞ est un repère ∞-symplectique en $p(\lambda_\infty)$. Du lemme il résulte que $\lambda_\infty . \alpha_\infty$ ne dépend pas de z_∞ et définit une action à droite de $\pi_1\Lambda(n)$ dans $\Lambda_\infty(E)$. Cette action induit une action à droite dans

$$\overset{2}{\Lambda}_\infty(E) : (\lambda_\infty,\mu_\infty) \to (\lambda_\infty . \alpha_\infty,\mu_\infty . \alpha_\infty)$$

qui est un symplectoisomorphisme du fibré $\overset{2}{\Lambda}_\infty(E) \times E \to \overset{2}{\Lambda}_\infty(E)$ laissant invariants $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. Il en résulte que

$$M(\lambda_\infty . \alpha_\infty,\tau_\infty . \alpha_\infty,\lambda'_\infty . \alpha_\infty,\tau'_\infty . \alpha_\infty) = M(\lambda_\infty,\tau_\infty . \lambda'_\infty,\tau'_\infty).$$

Proposition 2.4. — *(E,σ,q) étant un fibré q-symplectique,*

(i) *$\pi_1\Lambda(n)$ agit naturellement à droite dans le fibré $\Lambda_{2q}(E) \to X$.*
A cette action est associée une représentation naturelle de $\pi_1\Lambda(n)$ dans les symplectoisomorphismes du fibré $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(E) \boxtimes E \to \overset{2}{\Lambda}_{2q}(E)$ conservant $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ et donc M_{2q}.

(ii) *Si γ_1 et γ_2 sont deux éléments de $\pi_1\Lambda(n)$,*

$$m_{2q}(\lambda_{2q}\gamma_1,\tau_{2q}\gamma_2) = m_{2q}(\lambda_{2q},\tau_{2q}) + \operatorname{ind}^{2q}\gamma_1 - \operatorname{ind}^{2q}\gamma_2 .$$

ind^{2q} est l'indice, à valeurs dans $\mathbf{Z}_{2q}$, de $\Lambda(n)$. Si $q = +\infty$, $\operatorname{ind}^{2q} = \operatorname{ind}$.

Démonstration. — Reste à prouver (ii). Soit $b_\infty = Q(a_\infty,b)$

$$m(\lambda_\infty\gamma_1,\tau_\infty\gamma_2) = M(\lambda_\infty\gamma_1,\tau_\infty\gamma_2).\lambda_\infty,\tau_\infty) + m(\lambda_\infty,\tau_\infty).$$

Soit $x = p(\lambda_\infty)$. $\Lambda_\infty(E_x)$ étant connexe, il existe un chemin $\Gamma_\infty = C_\infty \times C'_\infty$ reliant $(\lambda_\infty\gamma_1,\tau_\infty\gamma_2)$ à $(\lambda_\infty,\tau_\infty)$. Comme le lacet C (resp. C′) de ΛE_x projection de C_∞ (resp. C'_∞) appartient à la classe d'homotopie γ_1 (resp. γ_2) le corollaire 3 de la proposition II.4.5. permet d'écrire

$$M(\lambda_\infty\gamma_1,\tau_\infty\lambda_2,\lambda_\infty,\tau_\infty) = \operatorname{ind}_0(C\times C') = \operatorname{ind}\gamma_1 - \operatorname{ind}\gamma_2 .\text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire. — *Si $p(\bar\lambda'_{2q}) = p\lambda'_{2q}$, $m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q}) = m_{2q}(\lambda_{2q},\bar\lambda'_{2q})$ si et seulement si $\lambda'_{2q} = \bar\lambda'_{2q}$.*

Notation. — ∂m_{2q} désigne l'application de $\overset{3}{\Lambda}_{2q}(E)$ dans $\mathbf{Z}_{2q}$ définie par $\partial m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q},\lambda''_{2q}) = m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q}) + m_{2q}(\lambda'_{2q},\lambda''_{2q}) - m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda''_{2q})$.

THÉORÈME 2.1. — (i) $\partial m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q},\lambda''_{2q}) = n + d(\lambda'',\lambda',\lambda)$ $(mod\ 2q)$,

(ii) *La restriction de* m_{2q} *à* $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$ *est l'unique fonction continue sur* $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$ *à valeurs dans* $\mathbf{Z}_{2q}$ *telle que pour tout triple* $(\lambda_{2q},\lambda'_{2q},\lambda''_{2q})$ *de* $2q$-*lagrangiens deux à deux transverses,*

$$\partial m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q},\lambda''_{2q}) = i(\lambda,\lambda',\lambda'').$$

Ce théorème généralise aux fibrés symplectiques un résultat de J. Leray [9].

Démonstration. — (ii) résulte de (i) en remarquant que la seule fonction continue φ sur $\overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}{}_{2q}(\mathrm{E})$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_{2q}$ telle que $\partial\varphi = 0$ est la fonction nulle.

Pour prouver (i) on suppose que λ est transverse à λ' et λ''. Le cas général résultera de ce cas particulier, compte tenu de la propriété de cocycle de d, en introduisant un $2q$-lagrangien λ'''_{2q} transverse à λ_{2q}, λ'_{2q}, λ''_{2q}.

LEMME. — *Si* $(\lambda,\lambda',\lambda'')$ *sont trois lagrangiens en* x, λ *étant transverse à* λ' *et* λ'', *il existe une base* (e_{i*}) *de* λ *telle que,* (e'_i) *et* (e''_i) *désignant les bases de* λ' *et* λ'' *associées à* (e_{i*})

$$e'_i - e''_i = \rho_i e_{i*} \qquad \textit{où} \qquad \rho_i \in \mathbf{R}.$$

En effet, si $(\bar{e}_{i*})$ est une base de λ, $(\bar{e}'_i)$ et $(\bar{e}''_i)$ les bases associées de λ' et λ'', $\bar{e}'_i - \bar{e}''_i = \mathrm{A}_{ij}\bar{e}_{j*}$ où (A_{ij}) est une forme quadratique. Si P est une matrice orthogonale diagonalisant A, $e_{i*} = \mathrm{P}_{ij}\bar{e}_{j*}$ répond à la question.

$\partial m(\lambda_\infty,\lambda'_\infty,\lambda''_\infty)$ ne dépendant que de λ, λ', λ'' d'après la proposition 2.4. (i), on peut supposer que $\lambda'_\infty = \mathrm{Q}(\lambda_\infty,\lambda)$, $\lambda''_\infty = \mathrm{Q}(\lambda_\infty,\lambda'')$, $\partial m(\lambda_\infty,\lambda'_\infty,\lambda''_\infty)$ se réduit alors à $m(\lambda'_\infty,\lambda''_\infty)$. Soit Γ le chemin $\mathrm{C}(e_{i*},e'_j)$. Le relèvement Γ_∞ de Γ d'origine λ_∞ a pour extrémité λ'_∞. $\Gamma^{-1} \times \lambda''_\infty$ reliant $(\lambda'_\infty,\lambda''_\infty)$ à $(\lambda_\infty,\lambda''_\infty)$ qui appartient à $\bar{\mathrm{Q}}(\mathscr{U}_\infty)$,

$$m(\lambda'_\infty,\lambda''_\infty) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{E}}_\infty(\Gamma^{-1}\times\lambda''_\infty) = -\,\mathrm{Ind}^{\mathrm{E}}_\infty(\Gamma\times\lambda''_\infty) = \mathrm{Ind}_{\lambda''}\Gamma.$$

Soit ν le lagrangien engendré par $(\nu_i = e'_i + a_i e_{i*})$ où $a_i = 1$ si $\rho_i = 0$, $a_i = \rho_i$ si $\rho_i > 0$, $a_i = -2\rho_i$ si $\rho_i < 0$. ν est transverse à λ'' et à $\Gamma(t)$ donc l'application constante ν'' est un relèvement de Γ dans $\mathscr{L}(\mathscr{E})$. Il en résulte que

$$m(\lambda'_\infty,\lambda''_\infty) = d(\lambda'',\nu,\lambda) - d(\lambda'',\nu,\lambda')$$

ce qui s'écrit encore $m(\lambda'_\infty,\lambda''_\infty) = d(\lambda'',\lambda',\lambda) - d(\nu,\lambda',\lambda)$.

Or $-\ d(\nu,\lambda',\lambda) = i(\nu,\lambda',\lambda)$ et de la relation $\nu_i - e'_i - a_i\dot{e}_{i*} = 0$ il résulte que $i(\nu,\lambda',\lambda) = n$ ce qui achève la démonstration.

Soit $\hat{m}_{2q}$ l'application de $\overset{2}{\Lambda}_{2q}(\mathrm{E})$ dans $\mathbf{Z}_{2q}$ définie par

$$\hat{m}_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q}) = n + \dim(\lambda \cap \lambda') - 2m_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q})$$

$\hat{m}_{2q}$ est antisymétrique, continue sur $\underset{0}{\overset{2}{\Lambda}}_{2q}(\mathrm{E})$.

COROLLAIRE 1. — $\partial\hat{m}_{2q}(\lambda_{2q},\lambda'_{2q},\lambda''_{2q}) = \sigma(\lambda,\lambda',\lambda'')$.

Pour l'indice de Maslov-Arnold-Leray de $\overset{2}{\mathrm{E}}(\mathrm{Sp}_q(n))$ et l'indice mixte sur $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_q(n)) \boxtimes \Lambda_{2q}(\mathrm{E})$ on a un résultat analogue au théorème 2.1. Soit σ (resp. i, resp. d) par abus de notation l'application définie sur $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n))$ en posant $\sigma(z_1,z_2,z_3) = \sigma(z_1^{-1}\mathrm{A},z_2^{-1}\mathrm{A},z_3^{-1}\mathrm{A})$

$$(\text{resp. } i(z_1,z_2,z_3) = i(z_1^{-1}\mathrm{A},z_2^{-1}\mathrm{A},z_3^{-1}\mathrm{A})$$

resp. $d(z_1,z_2,z_3) = d(z_1^{-1}\mathrm{A},z_2^{-1}\mathrm{A},z_3^{-1}\mathrm{A}))$ où $\mathrm{A} = \mathbf{R}^{n*}$.

THÉORÈME 2.1'. — (i) $\partial\tilde{m}_{2q}(z_q,z'_q,z''_q) = n + d(z'',z',z)$,

(ii) $\tilde{m}_{2q}$ *a pour restriction à* $\underset{0}{\overset{2}{\mathrm{E}}}(\mathrm{Sp}_q(n))$ *l'unique fonction continue à valeurs dans* $\mathbf{Z}_{2q}$ *telle que* $\partial\hat{m}_{2q} = i$.

$\underset{0}{\overset{2}{\mathrm{E}}}(\mathrm{Sp}_q(n))$ est l'espace des couples de repères en un même point (z_1,z_2) tels que $z_1^{-1}\mathrm{A} \cap z_2^{-1}\mathrm{A} = 0$.

Sur $\overset{2}{\mathrm{E}}(\mathrm{Sp}(n)) \boxtimes \dot{\Lambda}(\mathrm{E})$ on définit σ en posant

$$\sigma(z_1,z_2,\lambda) = \sigma(z_1^{-1}\mathrm{A},z_2^{-1}\mathrm{A},\lambda).$$

On définit de même i et d.

THÉORÈME 2.1''. — $\tilde{m}_{2q}(z_q,z'_q) + m_1(z'_q,\lambda_{2q}) - m_1(z_q,\lambda_{2q}) = n + d(\lambda,z',z)$.

Exemples.

1. Soit $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ une immersion lagrangienne orientée dans une variété symplectique (M,σ). Soit $\mathrm{E} = \psi^{-1}\mathrm{TM}$. X étant orientée E est munie d'une structure ∞-symplectique canonique définie par TX, de fibré principal $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}_\infty(n),\mathrm{TX})$. On peut donc construire un indice de Maslov-Arnold-Leray $\tilde{m}_\psi$ (resp, m_ψ) sur $\mathrm{E}_{\mathrm{TX}}(\mathrm{Sp}_\infty(n),\mathrm{TX})$ {resp. $\Lambda_{\mathrm{T}_x\mathrm{X}}\mathrm{E}$

où $T_\infty X$ est l'orientatoon ∞-symplectique canonique de TX et $\Lambda_\infty E = E(Sp_\infty(n),TX)/SStn\}$ $\tilde{m}_\psi(z_\infty) = m(z_\infty^{-1}A_\infty,T_\infty X)$ (resp. $\tilde{m}_\psi(\lambda_\infty) = m(\lambda_\infty,T_\infty X))$. $\tilde{m}_\psi$ (resp. m_ψ) est l'indice de Maslov-Arnold-Leray de l'immersion lagrangienne orientée $\psi : X \to M$.

2. Soit $\psi : X \to \tilde{M}$ une immersion lagrangienne dans une variété $(\tilde{M},\tilde{\sigma})$ ∞-symplectique. (C'est-à-dire que le fibré $(T\tilde{M},\tilde{\sigma})$ est ∞-symplectique). $E = \psi^{-1}T\tilde{M}$ est un fibré ∞-symplectique. On dit que ψ est $2q$-orientée si TX considéré comme sous-fibré lagrangien de E est $2q$-orientable (ce qui implique que X est orientée). On peut construire sur $E_{T_{2q}X}(Sp_{2q}(n))$ (resp. $\Lambda_{T_{2q}X}(E))$ où $T_{2q}X$ est une $2q$-orientation de TX, une application $\tilde{m}_\psi^{2q}$ (resp. m_ψ^{2q}) à valeurs dans $\mathbf{Z}_{2q}$.

$$\tilde{m}_\psi^{2q}(z_{2q}) = m_{2q}(z_{2q}^{-1}A_{2q},T_{2q}X) \text{ (resp. } m_\psi^{2q}(\lambda_{2q}) = m_{2q}(\lambda_{2q},T_{2q}X)).$$

$\tilde{m}_\psi^{2q}$ et m_ψ^{2q} s'appellent indice de Maslov-Arnold-Leray de l'immersion lagrangienne $2q$-orientée ψ. Changer d'orientation de TX revient à ajouter une constante.

3. Soit $\psi : X \to T^*M$ une immersion lagrangienne dans le fibré cotangent d'une variété orientée M. On munit T^*M de la structure ∞-symplectique définie par VT^*M. Si X est orientée, les géométries ∞-symplectiques de $E = \psi^{-1}TT^*M$ associée à $\mathscr{V} = \psi^{-1}VT^*M$ et à TX sont isomorphes si et seulement si l'indice de Maslov-Arnold des lacets de X, ind_ψ est nul. Les indices de Maslov-Arnold-Leray construits par l'un ou l'autre procédé ci-dessus coïncident alors. De plus, soit D le diviseur de Maslov de $(E,TX,\mathscr{V})$, et $\mu_D : X^2 \to \mathbf{Z}$ l'application correspondante. Soit $x_0 \in X_D$; choisissons l'orientation de $\mathscr{V}$ de façon que $m(\mathscr{V}_\infty(x_0),T_\infty X(x_0)) = 0$ et définissons $\mu_\psi : X \to \mathbf{Z}$, $\mu_\psi(x) = \mu_D(x,x_0)$. Alors

$$\mu_\psi = m \circ (T_\infty X \mathscr{V}_\infty) = m_\psi \circ \mathscr{V}_\infty.$$

Dans le cas où $M = \mathbf{R}^n$ les indices construits sont ceux utilisés dans [9].

3. Interprétation cohomologique.

Soit $K_n(X)$ le sous-ensemble ouvert de $\Lambda^{n+1}(E)$ formé des $(n+1)$-uples de lagrangiens deux à deux transverses. A partir de $K_n(X)$ on forme de façon naturelle des groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Z}_{2q}$) en considérant les applications γ_n de $K_n(X)$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Z}_{2q}$)

continues sur $K_n(X)$ et alternées, et le cobord $\partial\gamma_n$ défini par :

$$\partial\gamma_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \gamma_n(\lambda_0, \hat{\lambda}_i, \lambda_{n+1}).$$

Le théorème II.1.1. signifie que la signature $(\lambda,\lambda',\lambda'') \to \sigma(\lambda,\lambda',\lambda'')$ est un 2-cocycle entier. On associe ainsi naturellement à tout fibré symplectique une 2-classe de cohomologie entière (resp. modulo $2q$) $[\sigma]$ (resp. $[\sigma]_{2q}$).

Cette classe n'est jamais nulle car $K_1(X) = \overset{2}{\underset{0}{\Lambda}}E$ est connexe et la seule fonction continue et alternée est la fonction nulle !

Supposons E muni d'une géométrie q-symplectique et soit $K_n^{2q}(X)$ l'ensemble des $(n+1)$-uples de $2q$-lagrangiens deux à deux transverses. Recommençant ce qu'on a fait précédemment, on peut construire à partir de $K_n^{2q}(X)$ des groupes de cohomologie entière (resp. modulo $2q$). Soit P_{2q} l'application naturelle de $K_n^{2q}(X)$ sur $K_n(X)$ et P_{2q}^* l'application qui s'en déduit entre les groupes de cohomologie de $K_n(X)$: $H^n(X)$ et ceux de $K_n^{2q}(X)$, $H_{2q}^n(X)$. On notera $H^n(X,\mathbf{Z}_{2q})$ et $H_{2q}^n(X,\mathbf{Z}_{2q})$ les groupes de cohomologie modulo $2q$.

THÉORÈME 3.1. — $[\sigma]_{2q}$ *appartient au noyau de* P_{2q}^* :

$$H^n(X,\mathbf{Z}_{2q}) \to H_{2q}^n(X,\mathbf{Z}_{2q}). \qquad (q \geqslant 1)$$

Démonstration. — Les résultats du paragraphe précédent s'interprètent ainsi : $\hat{m}_{2q}$ est une 1-cochaîne et $\partial\hat{m}_{2q} = \sigma \circ P_{2q}$ modulo $2q$, ce qui prouve le théorème 3.1.

4. Relation avec l'indice de Morse.

Dans ce paragraphe M est une variété C^∞ de dimension n, $\pi : TM \to M$ le fibré tangent, $\pi_* : T^*M \to M$ le fibré cotangent et on note $\pi_0 : T_0M \to M$ (respectivement $\pi_{0*} : T_0^*M \to M$) le fibré tangent (resp. cotangent) privé de la section nulle.

Une structure finslérienne sur M est définie par la donnée sur T^*M d'un hamiltonien $h : T^*M \to \mathbf{R}$ tel que

(i) h est C^1 sur T^*M, C^∞ sur T_0^*M.

(ii) h est positivement homogène de degré 2.

(iii) h vérifie la condition de Legendre qui s'exprime ainsi :

$\pi_{0*}^{-1}TM \to T_0^*M$ est un fibré euclidien dont le produit scalaire g_* s'écrit en coordonnées locales naturelles :

$$g_{*ij}(x^i,v_i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 h(x^i,v_i)}{\partial v_i \partial v_j}$$

en tout point (x^i,v_i) de T_0^*M.

Sous ces hypothèses la transformation de Legendre $\mathscr{E} : T^*M \to TM$ $\omega \to \mathscr{E}(\omega) = dh|_{V_\omega T^*M}$, où $V_\omega T^*M$ est la fibre en ω du fibré vertical VT^*M, est un homomorphisme de T^*M sur TM dont la restriction à T_0^*M est un C^∞-difféomorphisme sur T_0M. $\mathscr{E}^{-1*}h : TM \to \mathbf{R}$ est l'énergie. $\mathscr{E}^{-1*}g_* = g$ est un produit scalaire sur le fibré $\pi_0^{-1}TM \to T_0M$, on notera $\|\eta\| = g(\eta,\eta)^{1/2}$ la norme associée. On retrouve ainsi la définition usuelle (cf. [3*a*] par exemple) des variétés finslériennes.

Soit H le champ globalement hamiltonien de h. $i_H d\lambda = -dh$ où λ est la 1-forme de Liouville. $\mathscr{E}^T H = G$ est la gerbe finslérienne. Soit φ_{*t} (resp. φ_t) le flot de H (resp. G). C_v, où $C_v(t) = \pi_* \circ \varphi_{*t}(v) = \pi \circ \varphi^t(\mathscr{E}(v))$, est la géodésique issue de $\pi_*(v)$ tangente à l'origine à $\mathscr{E}(v)$. Les géodésiques sont les extrémales du problème de calcul des variations à extrémités fixées défini par l'énergie $\mathscr{E}^{-1*}(h)$.

Soit $N_* = T^*(\mathbf{R}\times M\times M)$ et $(p_1,p_2,p_3) : N \to \mathbf{R}\times M\times M$ la fibration de N_* sur $\mathbf{R}\times M\times M$. On munit N_* de la structure symplectique définie par la 2-forme $\sigma_* = p_1^*(d\tau \wedge dt) + p_2^* d\lambda - p_3^* d\lambda$. Dans de nombreux problèmes intervient l'immersion lagrangienne

$$\psi_* : \Omega_* \to N_*$$

où Ω_* est l'ensemble des couples $(t,v) \in \mathbf{R} \times T^*M$ tels que t appartienne à l'intervalle de définition de la géodésique issue de v, (Ω_* est un ouvert de $\mathbf{R} \times T^*M$, rétractable sur $0 \times T^*M$, égal à $\mathbf{R} \times T^*M$ si M est d-complète [3*a*]), et où ψ_* est définie par

$$\psi_*(t,v) = (t, -h(v), \varphi_{*t}(v), v)$$

ψ_* est C^1 sur Ω_*, C^∞ sur $\Omega_* \cap T_0{}^*M$.

TN_* possède un sous-fibré involutif $F_* = ((0\times\mathbf{R})\times TT^*M \times VT^*M)$; W_* désigne le fibré vertical de TN_*. On note (E_*,F_*,W_*) (par abus de notation) les images réciproques par ψ_* de (TN_*,F_*,W_*). Comme $W_* \subset F_*$, on pourra calculer l'indice de Maslov-Arnold de ψ_*, ind_{ψ^*} à l'aide du fibré symplectique réduit F_*/F_*^σ si $\psi_*^T T\Omega_*$ et F_*^σ ont une intersection de dimension constante ce qui est réalisé car

$$(\psi_*^T T\Omega_* \cap F_*^\sigma)_{(t,v)} = \{(0, -dh(X), \varphi_{*t}^T X, X) | X \in VT^*M\}$$

et donc $\dim(\psi_*^T T\Omega_* \cap F_*^\sigma) = n$.

(F_*/F_*^σ) s'identifie comme fibré symplectique à $(p_*^{-1}TT^*M, p_*^* d\lambda)$ où p_* est la projection de $\mathbf{R} \times T^*M$ sur T^*M, et $\mathscr{V}_* = p_*^{-1}VT^*M$ est l'image de W^*. Enfin $\mathscr{F}_*(t,v)$ image de $T_{(t,v)}\Omega_*$ est l'ensemble des $\varphi_{*t}^T X$ pour $X \in V_v T^*M$.

Il en résulte que $\mathscr{F}_*(o,v) \equiv \mathscr{V}_*(o,v)$. En restriction aux lacets de $0 \times T^*M$, l'indice de Maslov-Arnold est nul. Comme Ω_* se rétracte sur $0 \times T^*M$, l'indice de Maslov-Arnold des lacets de Ω_* est donc nul.

Quelques notions de géométrie finslérienne sont utiles pour poursuivre. ∇ désigne la loi de dérivation covariante finslérienne d'Élie Cartan dans le fibré $\pi_0^{-1}TM \to T_0M$. A la structure finslérienne est associée une scission γ de la suite exacte de fibrés sur TM :

$$0 \to \pi^{-1}TM \to TTM \underset{\gamma}{\overset{j}{\rightleftarrows}} \pi^{-1}TM \to 0$$

γ est C^∞ sur $\pi_0^{-1}TM$, C^0 sur $\pi^{-1}TM$. $(\xi,\eta) \to (\gamma(\xi) + i(\eta))$ est un isomorphisme de $\overset{2}{\boxtimes}\, \pi^{-1}TM$ sur TTM. Les lettres grecques désignent les éléments de $\pi^{-1}TM$.

A tout champ de vecteur X le long d'un chemin C^1 on associe son relevé ξ dans $\pi^{-1}TM$: $\xi(t) = C(t) \times X(t)$ où $C(t)$ est le vecteur vitesse en t. Par abus de langage on dira que ξ est un champ de vecteurs le long du chemin. Avec cette convention les champs de Jacobi le long de la géodésique C_v sont les solutions de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\nabla^2\xi}{dt^2} = R(\dot{C}_v, \xi)\dot{C}_v$$

où $\dfrac{\nabla\xi}{dt} = \nabla_{\frac{d}{dt}}$, $\dot{C}_v = \dot{C}_v \times \dot{C}_v$, R est le premier tenseur de courbure de Cartan. Il y a, entre les champs de Jacobi le long de C_v et les champs de vecteur Z (resp. Z_*) invariants par φ_t (resp. φ_{*t}) une correspondance biunivoque :

$$\mathscr{E}^T Z_* = Z; \quad Z = \gamma(\xi) + i\left(\frac{\nabla\xi}{dt}\right), \quad \xi = jZ.$$

Il est plus commode d'écrire les choses au-dessus de TM en transportant les données par les isomorphismes naturels déduits de la transformation de Legendre, ce qui se traduit par la disparition de l'indice $*$. L'immersion lagrangienne ψ_* est donc isomorphe à l'immersion lagrangienne $\psi : \Omega \to \mathrm{N}$. L'indice de Maslov-Arnold de ψ se calcule à l'aide du fibré lagrangien $\mathrm{E} = p^{-1}\mathrm{TTM} \to \Omega$, des sous-fibrés lagrangiens $\mathscr{V} = p^{-1}\mathrm{VTM}$ et $\mathscr{C}$ image dans E de $\mathrm{T}\Omega$. (p est la projection de Ω ouvert de $\mathbf{R} \times \mathrm{TM}$ sur TM.) D'après ce qui précède $\mathscr{C}$ a pour fibre au point (t,v) :

$$\mathscr{C}(t,v) = \{\gamma(\eta(t)) + i\left(\frac{\nabla\eta(t)}{dt}\right),\ \eta \in \mathscr{J}_v\}$$

où $\mathscr{J}_v$ est l'espace des champs de Jacobi le long de C_v nuls à l'origine.

Soit Ω_ψ le complémentaire du support Σ_ψ du diviseur de Maslov D de $(\mathrm{E},\mathscr{C},\mathscr{V})$. Soit Ω_ψ° l'ensemble des points (t,v) tels que $0 < t < t^1(v)$ où $t^1(v)$ est le paramètre du premier point conjugué de 0 le long de C_v. Ω_ψ° est un ouvert connexe de Ω_ψ. Comme l'indice de Maslov-Arnold des lacets de Ω est nul, on peut définir une application $\mu_\psi : \Omega \to \mathbf{Z}$ continue sur Ω_ψ° en posant

$$\mu_\psi(t,v) = \mu_\mathrm{D}(t,v\,;t_0,v_0) \qquad 0 < t_0 < t^1(v_0)$$

μ_ψ ne dépend pas de (t_0,v_0) dans Ω_ψ°. On peut donc prendre $v_0 = v$ et alors $\mu_\psi(t,v) = -\operatorname{ind}_\psi \dot{\mathrm{C}}_v|_{[t_0,t]}$.

Ω étant d'autre part orientée, on considère la géométrie ∞-symplectique de E associée à $\mathscr{C}$. $\mathscr{V}$ est ∞-orientable dans cette géométrie puisque $\operatorname{ind}_\psi(\pi_1\Omega) = 0$. On choisit $\mathscr{V}_\infty$ de façon que

$$m(\mathscr{V}_\infty(t_0,x_0),\mathscr{C}_\infty(t_0,x_0)) = 0$$

sur Ω_ψ°, $\mathscr{C}_\infty$ désignant l'orientation naturelle de $\mathscr{C}$, m l'indice de Maslov-Arnold-Leray du fibré ∞-symplectique E. Dans ces conditions :

$$\mu_\psi = m \circ (\mathscr{C}_\infty \mathscr{V}_\infty) \text{ i.e. } \mu_\psi(t,v) = m(\mathscr{V}_\infty(t,v),\ \mathscr{C}_\infty(t,v)).$$

Pour calculer $\mu_\psi(t,v)$ c'est-à-dire $\operatorname{ind}_\psi \dot{\mathrm{C}}_v|_{[0,t]}$ on prend l'image réciproque par C_v de $(\mathrm{E},\mathscr{C},\mathscr{V})$ que l'on note $(\mathrm{E}',\mathscr{C}',\mathscr{V}')$. $\mu_\psi(t,v)$ est l'opposé de l'indice de l'application identique I de $[0,t]$. Les calculs sont explicités pour $t > 0$.

Le support Σ_D du diviseur de Maslov D de $(\mathrm{E},\mathscr{C},\mathscr{V})$ est contenu dans l'ensemble des couples (α,v) tels que α soit conjugué de 0 le long de C_v ou nul. Soit k_α l'ordre de conjugaison de α, $\mathscr{J}_v(\alpha)$ le sous-espace de $\mathscr{J}_v$ des champs de Jacobi nuls en 0 et α, $\mathrm{L}(t)$ le sous-espace isotope de E'_t

engendré par $\gamma(\eta(t))$, $\eta \in \mathscr{J}_v(\alpha)$, si $t \neq \alpha$ et $\gamma\left(\frac{\nabla\eta}{dt}(\alpha)\right)$, $\eta \in \mathscr{J}_v(\alpha)$, si $t = \alpha$. Soit $G(t) = \mathscr{V}'_t + L(t)$. Pour t assez voisin de α, $t \to L(t)$ est un sous-fibré isotrope de rang constant k_α et, G est un sous-fibré involutif de rang $n + k_\alpha$ contenant $\mathscr{V}'$. Comme les points conjugués sont isolés, $\mathscr{G}' \cap G^\sigma$ est réduit à 0 pour t voisin de α. On peut donc calculer le saut de D au voisinage de α à l'aide du fibré réduit G/G^σ, et des sous-fibrés lagrangiens images $\tilde{\mathscr{T}}$ et $\tilde{\mathscr{V}}$. Comme $\tilde{L}$ est un sous-fibré lagrangien transverse à $\tilde{\mathscr{T}}$ et $\tilde{\mathscr{V}}$, que $\tilde{\mathscr{T}}$ et $\tilde{\mathscr{V}}$ sont transverses pour t voisin de α $t \neq \alpha$, le diviseur réduit $\tilde{D}$, a pour valeur en t, $t \neq \alpha$, l'indice de la forme quadratique sur $\mathscr{J}_v(\alpha) : \eta \to \sigma(\gamma(\eta) + i\left(\frac{\nabla\eta}{dt}\right)$, $\gamma(\eta))(t)$, soit l'indice de $\eta \to g\left(\frac{\nabla\eta}{dt}(t), \eta(t)\right)$.

Or $g\left(\frac{\nabla\eta}{dt}, \eta\right)(\alpha) = 0$, $g\left(\frac{\nabla\eta}{dt}, \frac{\nabla\eta}{dt}\right)(\alpha) > 0$. Cet indice vaut donc k_α si $t < \alpha$, 0 si $t > \alpha$. Il en résulte que (α,v) appartient au support de D qui s'identifie donc à l'ensemble des couples (α,v) tels que α soit conjugué de 0 le long de C_v et que $\langle \dot{C}_v, D\rangle_{(\alpha,v)} = -k_\alpha$. Le même raisonnement prouve que $\langle \dot{C}_v, D\rangle_{(0,v)} = 0$ $\langle \dot{C}_v, D\rangle_{(t,v)} = -k_t$.

Il en résulte que $\mu_\psi(t,v)$ est la somme des ordres de conjugaison des points conjugués de 0 le long de $C_v|_{[0,t]}$.

Pour identifier $\mu_\psi(t,v)$ à l'indice de Morse élargi de la géodésique $C_v|[0,t]$, défini comme la somme des ordres de multiplicités des valeurs propres négatives ou nulles de la variation seconde, on considère $\hat{\Omega} = \mathbf{R} \times \Omega$ $\hat{E}$ et $\hat{\mathscr{V}}$ images réciproques de E et $\mathscr{V}$ par la projection de $\hat{\Omega}$ sur Ω. Soit $\hat{\mathscr{T}}$ le sous-fibré lagrangien de $\hat{E}$ de fibre au point (λ,t,v)

$$\hat{\mathscr{T}}(\lambda,t,v) = \left\{\gamma(\eta(t)) + i\left(\frac{\nabla\eta}{dt}(t)\right)\right\},$$

$\eta \in \mathscr{J}^\lambda_v$ où $\mathscr{J}^\lambda_v$ désigne l'espace des λ-champs de Jacobi le long de C_v nuls à l'origine, c'est-à-dire l'espace des solutions nulles à l'origine $(\lambda \in \mathbf{R})$ de

$$\frac{\nabla^2\eta}{dt^2} = R(\dot{C}_v,\eta)\dot{C}_v - \lambda\eta.$$

Ω se plonge dans $\hat{\Omega}$ par l'application $f : (t,v) \to (0,t,v)$ et $(E,\mathscr{T},v)$ est l'image réciproque de $(\hat{E},\hat{\mathscr{T}},\hat{\mathscr{V}})$ par f. Comme Ω est un rétracte de $\hat{\Omega}$, l'indice de Maslov-Arnold des lacets de $\hat{\Omega}$ est nul. Le support $\Sigma_{\hat{D}}$ du diviseur de Maslov $\hat{D}$ de $(\hat{E},\hat{\mathscr{T}},\hat{\mathscr{V}})$ est contenu dans l'ensemble des triples (λ,t,v) tels que λ · soit valeur propre de la variation seconde de $C_v|_{[0,t]}$. Donc $f(\Omega_\psi^\circ) \subset \hat{\Omega}_{\hat{D}} = \hat{\Omega} - \Sigma_{\hat{D}}$. Soit $\hat{\Omega}^\circ$ la composante connexe de $f(\Omega_\psi^\circ)$ dans $\hat{\Omega}_{\hat{D}}$. On définit $\hat{\mu} : \hat{\Omega} \to \mathbf{Z}$ en posant

$$\hat{\mu}(\lambda,t,v) = \hat{\mu}_{\hat{D}}(\lambda,t,v\,;\lambda_0,t_0,v_0)\,; \quad (\lambda_0,t_0,v_0) \in \hat{\Omega}^\circ.$$

$\hat{\mu}(0,t,v) = \mu_\psi(t,v)$ puisque $f^{-1}(\hat{E},\hat{\mathscr{E}},\hat{\mathscr{V}}) = (E,\mathscr{E},\mathscr{V})$.

Pour tout couple (t,v) il existe $\lambda_0 < 0$ tel que toute valeur propre de la variation seconde de $C_v|_{[0,t']}$ soit supérieure strictement à λ_0 si $0 \leqslant t' \leqslant t$. Donc $\hat{\mathscr{E}}(\lambda_0,t',v) \cap \hat{\mathscr{V}}(\lambda_0,t',v) = 0$ si $0 < t' \leqslant t$. Ceci permet d'écrire

$$\hat{\mu}(\lambda,t,v) = \hat{\mu}_{\hat{D}}(\lambda,t,v\,;\lambda_0,t,v).$$

Soit $\Gamma_{t,v}$ le chemin issu de 0 définie pour $0 \geqslant \lambda' \geqslant \lambda_0$ par

$$\Gamma_{t,v}(\lambda') = (\lambda',t,v).$$
$$\mu_\psi(t,v) = \hat{\mu}(0,t,v) = \operatorname{ind}_{\hat{D}} \Gamma_{t,v}.$$

On calcule $\operatorname{ind}_{\hat{D}} \Gamma_{t,v}$ par la méthode qui a permis de calculer $\operatorname{ind}_\psi \dot{C}_v$. Soient $(\hat{E}',\hat{\mathscr{E}}',\hat{\mathscr{V}}')$ les images réciproques par $\Gamma_{t,v}$ de $(\hat{E},\hat{\mathscr{E}},\hat{\mathscr{V}})$. Soit α une valeur propre de la variation seconde de $C_v|_{[0,t]}$ de multiplicité k_α et soit V^α le sous-espace de $T_{\pi v}M$ des vecteurs Y tels que le α-champ de Jacobi η de données initiales $\eta(0) = 0 \dfrac{\nabla\eta}{dt}(0) = v \times Y$ soit dans le sous-espace propre relatif à α, c'est-à-dire soit nul en t. On définit une application de $V^\alpha \times \mathbf{R}$ dans les champs de vecteurs le long de C_v : $(Y,\lambda) \to \eta_\lambda^Y$ où n_λ^Y est le λ-champ de Jacobi tel que $\eta_\lambda^Y(0) = 0$ et $\dfrac{\nabla\eta_\lambda}{dt}(0) = v \times Y$.

On désigne par N^λ l'ensemble des η_λ^Y pour $Y \in V^\alpha$. N^λ est de dimension k_α.

Pour λ voisin de α, soit $L(\lambda)$ le sous-espace isotrope de $\hat{E}_\lambda$ engendré par $\gamma(\eta_\lambda(t))$ pour $\eta_\lambda \in N$ si $\lambda \neq \alpha$ et par $\gamma\left(\dfrac{\partial\eta_\lambda}{\partial\lambda}(\alpha)\right)$ pour $\eta_\lambda \in N^\lambda$, si $\lambda = \alpha$.

LEMME 1. — *Pour λ voisin de α, $\lambda \to L(\lambda)$ est un sous-fibré involutif de rang, constant, k_α.*

Supposons le lemme prouvé et soit $G = \hat{\mathscr{V}} + L$. G est un sous-fibré involutif de rang constant pour λ voisin de α, et tel que G^σ soit transverse à $\hat{\mathscr{C}}$ pour λ voisin de α, car les valeurs propres sont isolées. On peut donc calculer le saut de $\hat{D}$ au point (α,v) grâce au fibré réduit G/G^{σ} et aux sous-fibrés lagrangiens images de $\hat{\mathscr{C}}$ et $\hat{\mathscr{V}}$; le saut de $\hat{D}$ est donc le saut de l'indice de la forme quadratique $\eta_\lambda \to g\left(\frac{\nabla\eta_\lambda}{dt}, \eta_\lambda\right)(t)$, $\eta_\lambda \in N^\lambda$, η voisin de α.

Lemme 2. — $$\frac{\partial}{\partial\lambda} g\left(\frac{\nabla\eta_\lambda}{dt}, \eta_\lambda\right)(\alpha) = \int_0^t \|\eta_\alpha\|^2\, dt.$$

Du lemme 2 et de la nullité pour $\lambda = \alpha$ de $g\left(\frac{\nabla\eta_\lambda}{dt}, \eta_\lambda\right)$ il résulte que le saut de $\hat{D}$ en α est égal à k_α. Le support de $\hat{D}$ est donc l'ensemble des triples (λ,t,v) tels que λ soit valeur propre de la variation seconde de $C_v|_{[0,t]}$ et des triples $(0,0,v)$. $(\lambda_0,t,v) \notin \Sigma_{\hat{D}}$. D'autre part $\langle \Gamma_{t,v},\hat{D}\rangle_0 = k_0$ ordre de 0 comme valeur propre. Donc $\hat{\mu}_\psi(0,t,v)$ est l'indice de Morse élargi de $C_v|_{[0,t]}$.

Preuve des lemmes 1 *et* 2. — Du lemme 2 il résulte que $\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial\lambda}(\alpha) = 0$ implique $\eta_\alpha \equiv 0$. Donc $L(\alpha)$ est de rang k_α. Il en est de même pour $L(\lambda)$ pour λ voisin de α. Le lemme 2 se déduit de la remarque suivante :

$$Q_\lambda(\eta_\lambda) = g\left(\frac{\nabla\eta_\lambda}{dt}, \eta_\lambda\right)(t)$$

peut s'écrire :

$$Q_\lambda(\eta_\lambda) = \int_0^t \left\{\left\|\frac{\nabla\eta_\lambda}{dt}\right\|^2 + g(R(\dot{C}_v,\eta_\lambda)\dot{C}_v,\eta_\lambda) - \lambda\|\eta_\lambda\|^2\right\} dt.$$

Donc $\frac{\partial}{\partial\lambda}(Q_\lambda(\eta_\lambda)) = \frac{\partial Q_\lambda}{\partial\eta_\lambda}(\eta_\lambda) + 2Q_\lambda\left(\eta_\lambda, \frac{\partial\eta_\lambda}{\partial\lambda}\right)$, soit

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(Q_\lambda(\eta_\lambda))_{\lambda=\alpha} = -\int_0^t \|\eta_\alpha\|^2\, dt + 2Q_\alpha\left(\eta_\alpha, \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial X}\right).$$

Or $\frac{\partial\eta_\lambda}{\partial\lambda}$ est solution de l'équation différentielle du deuxième ordre : $\frac{\nabla^2\xi}{dt^2} = R(\dot{C}_v,\xi)\dot{C}_v - \lambda\xi - \eta_\lambda$, nulle ainsi que sa dérivée première pour $t = 0$, ce qui implique que $Q_\alpha\left(\eta_\alpha, \frac{\partial\eta_\alpha}{\partial\alpha}\right) = \int_0^t \|\eta_\alpha\|^2 dt$ et achève la démonstration.

Conclusion. – L'immersion lagrangienne $\psi_* : \Omega_* \to T^*N_*$ a un indice des lacets nuls, ce qui permet de construire une application $\mu_{\psi_*} : \Omega_* \to \mathbf{Z}$, continue sur Ω_{ψ_*} ; au point (t,v), $\mu_{\psi_*}(t,v)$ est l'indice de Morse élargi de la géodésique $C_{v\,[0,t]}$ si $t \geqslant 0$. Si $t < 0$, on vérifie aisément que $\mu_{\psi_*}(t,v)$ est égal à n diminué de l'indice de Morse élargi de $C_{v\,[0,t]}$. Ω_* est muni naturellement d'une géométrie infinie symplectique car Ω_* est orientale. Pour un choix convenable de l'orientation ∞-symplectique du fibré vertical $\mathscr{V}_* = \psi_*^{-1}VT_*^*N_*$, μ_ψ est l'image réciproque de l'indice de Maslov-Arnold-Leray.

La méthode utilisée redonne le théorème de Morse : l'indice de Morse élargi est la *somme des ordres de conjugaison des points conjugués* de 0.

Remarque. – Si au lieu de prendre le diviseur de S, D défini par $D(L,\lambda,D') = d(L,\lambda,L')$ on avait pris le diviseur D_1 de S défini par $D_1(L,\lambda,D') = d_1(L,\lambda,L')$
où

$$d_1(L,\lambda,L') = d(L,\lambda,L') + \dim (L \cap L') = -\,i(L,\lambda,L') + \dim (L \cap \lambda \cap L')$$

on aurait construit une fonction μ_ψ qui s'identifierait à l'indice Morse strict (somme des valeurs propres strictement négatives de la variation seconde). La raison du choix de D se trouve dans la relation $\partial d = 0$ qui simplifie les calculs de la partie II.

N.B. : On n'a pas jugé utile de donner les démonstrations des deux résultats suivants : points conjugués et valeurs propres de la variation seconde sont isolés. La démonstration du premier est élémentaire, celle du second classique (cf. 3*a* ou 6 par exemple).

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Arnold, Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, en français dans Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod-Gauthier-Villars, 1972, p. 341-361.

[2] Y. Colin de Verdières, Paramétrix de l'équation des ondes et intégrales sur l'espace des Chemins, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz, 1974-75, Exposé n° XX.

[3] P. Dazord, *a*) Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler, Thèse Fac. Sc., Lyon 1969, n° 575. *b*) Une interprétation géométrique de la classe de Maslov, *J. Math. Pures et Appl.*, 56 (1977), 231-250. *c*) Quelques remarques sur la classe de Maslov-Arnold, *Publ. Dép. Math. Univ.* Lyon, fasc. IV (1977).

[4] M. DEMAZURE, Classe de Maslov II, Exposé n° 10, Séminaire sur le fibré cotangent, Orsay, 1975-76.

[5] A. DOUADY, Classe de Maslov I, Exposé n° 6 (ib).

[6] J. J. DUISTERMATT, L'indice de Morse dans le calcul variationnel, Séminaire Goulaouic, Lions-Schwartz, 1973-74, Exposé n° XXV et On the Morse index in variationnal calculus, *Advances in Math.*, 21 (1976), 173-195.

[7] A. HAEFFLIGER, Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 243 (1956), 558.

[8] L. HORMANDER, Fourier Integral Operators I, *Acta Math.*, 127 (1971), 79-183.

[9] J. LERAY, *a*) Solutions asymptotiques et groupe symplectique, Colloque sur les opérateurs intégraux de Fourier et les Équations aux dérivées partielles, Nice, *Lectures Notes*, Springer 1974. *b*) Solutions asymptotiques et Physique Mathématique, Colloque d'Aix-en-Provence, Géométrie Symplectique et Physique Mathématique, Édition du C.N.R.S., 24-28, Juin 1974. *c*) Analyse lagrangienne et Mécanique Quantique, Cours du Collège de France, 1976-1977.

[10] V. P. MASLOV, Théorie des perturbations et Méthodes asymptotiques, Dunod-Gauthier-Villars, 1972.

[11] J. M. SOURIAU, *a*) Indice de Maslov des variétés lagrangiennes orientables, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 276, Série A, 1025-1026. *b*) Construction explicite de l'indice de Maslov, Applications, 4th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Univ. of Nijmegen, 1975.

Manuscrit reçu le 10 mai 1978.

Pierre DAZORD,
Département de Mathématiques
Université Lyon I
43, bd du 11 novembre 1918
69621 Villeurbanne.