

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN DUFRESNOY

Sur l'opérateur d'' et les fonctions différentiables au sens de Whitney

Annales de l'institut Fourier, tome 29, n° 1 (1979), p. 229-238

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_229_0

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'OPÉRATEUR d'' ET LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES AU SENS DE WHITNEY

par Alain DUFRESNOY

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

0. Introduction.

Si Γ désigne un fermé de \mathbf{C}^n , on désigne par $W(\Gamma)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables au sens de Whitney sur Γ , qui s'identifie au quotient $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)/\mathfrak{I}(\Gamma)$ où $\mathfrak{I}(\Gamma)$ désigne l'idéal des fonctions identiquement nulles sur Γ ainsi que toutes leurs dérivées.

Si on note $W^{(p,q)}(\Gamma)$ l'espace des formes différentielles de type (p, q) à coefficients dans $W(\Gamma)$, on a le complexe

$$W^{(p,0)}(\Gamma) \xrightarrow{d''} W^{(p,1)}(\Gamma) \xrightarrow{d''} W^{(p,2)}(\Gamma) \longrightarrow \dots \longrightarrow W^{(p,n)}(\Gamma) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Nous nous proposons de montrer un résultat (théorème 1 ci-dessous) qui entraîne en particulier que si Γ est un fermé convexe le complexe précédent est acyclique.

Pour des raisons techniques, on dira qu'un fermé Γ de \mathbf{C}^n possède la propriété (λ) si pour tout $R > 0$, il existe une suite $\{\Omega_\nu^R\}_\nu$ d'ouverts pseudo-convexes de \mathbf{C}^n telle que :

i) $\bigcap_{\nu \in \mathbf{N}} \Omega_\nu^R = \Gamma_R$ ⁽¹⁾

ii) il existe p (dépendant éventuellement de R) tel que, pour tout $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$, il existe ν avec

$$\{z \in \mathbf{C}^n ; d(z, \Gamma_R) < \epsilon^p\} \subset \Omega_\nu^R \subset \{z \in \mathbf{C}^n ; d(z, \Gamma_R) < \epsilon\} ;$$

⁽¹⁾ Où Γ_R désigne $\{z \in \Gamma ; |z| \leq R\}$.

iii) Si $R' > R$, pour tout μ , il existe ν_0 tel que, si $\nu > \nu_0$, Ω_ν^R est holomorphiquement convexe dans $\Omega_\mu^{R'}$.

Le résultat que nous obtenons est alors :

THEOREME. — Soit Γ un fermé de \mathbf{C}^n possédant la propriété (λ) . Alors pour toute forme $w \in W^{(p,q)}(\Gamma)$ ($q \geq 1$) telle que $d''w = 0$, il existe $\alpha \in W^{(p,q-1)}(\Gamma)$ telle que $d''\alpha = w$.

Nous montrerons tout d'abord (§ 1) un lemme technique sur l'opérateur d'' , puis (§ 2) nous montrerons le théorème dans le cas où Γ est supposé de plus borné. Enfin (§ 3) nous donnerons un lemme d'approximation qui permet d'obtenir le théorème. En appendice, nous donnerons des exemples d'ensembles Γ vérifiant la condition (λ) .

Remarque. — Ce résultat ne contient pas le résultat de J.J. Kohn [2] pour les ouverts pseudo-convexes à frontière régulière.

1. Un lemme technique.

Si s est un entier positif (ou nul) et si V est un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{V})$ on pose

$$\|u\|_{(s,V)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_V |D^\alpha u|^2 d\lambda.$$

Rappelons que si φ est une fonction continue à valeurs réelles, on désigne par L_φ^2 l'espace des fonctions f qui appartiennent localement à L^2 et telles que $\int |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty$. On désigne par $\|f\|_\varphi = (\int |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda)^{1/2}$ enfin θ désigne l'opérateur adjoint formel de d'' .

Nous nous proposons de montrer, en utilisant la solution de Hörmander pour l'opérateur d'' le lemme suivant :

LEMME 1. — Soit U un ouvert pseudo-convexe borné de \mathbf{C}^n et désignons pour tout $\epsilon > 0$ par $U^\epsilon = \{z \in U ; d(z, \mathbf{C} \setminus U) > \epsilon\}$. Pour toute forme f de type (p, q) à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{U})$ telle que $d''f = 0$, il existe u de type $(p, q-1)$ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(U)$ telle que, pour tout $s \in \mathbf{N}$ et tout $\epsilon > 0$

$$\|u\|_{(s+1, U^\epsilon)} \leq \frac{M_s}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{(s, U)}$$

où M_s ne dépend que du diamètre de U .

Nous utiliserons dans la suite une version très particulière du lemme 4.4.1 de [1], complété par la remarque de [1] page 87.

THEOREME 1. — Soit $\varphi = |z|^2$ et U un ouvert pseudo-convexe de \mathbf{C}^n ; si f est une forme de type (p, q) à coefficients dans $L^2(U)$ telle que $d''f = 0$, il existe une forme u de type $(p, q-1)$ telle que :

$$d''u = f; \quad \theta(e^{-\varphi}u) = 0; \quad \|u\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi.$$

Nous aurons aussi besoin dans la suite du lemme élémentaire suivant :

LEMME 2. — Soit F_1 et F_2 deux fermés de \mathbf{R}^n tels que $d(F_1, F_2) \geq \delta$. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que φ soit égale à 1 au voisinage de F_1 , φ soit nulle au voisinage de F_2 et vérifie de plus, pour tout multiindice α

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |D^\alpha \varphi(x)| \leq \frac{N_{|\alpha|}}{\delta^{|\alpha|}}$$

(où $N_{|\alpha|}$ ne dépend pas de F_1 et F_2).

Démonstration. — Soit ψ une fonction indéfiniment différentiable dans \mathbf{R}^n , à support dans la boule unité telle que $\int_{\mathbf{R}^n} \psi d\lambda = 1$ et désignons par $\psi_\delta = \left(\frac{3}{\delta}\right)^n \psi\left(\frac{3x}{\delta}\right)$. Soit d'autre part φ_1 la fonction définie dans \mathbf{R}^n par $\varphi_1(x) = 1$ si $d(x, F_1) < \epsilon/2$ et $\varphi_1(x) = 0$ sinon.

Posons $\varphi = \varphi_1 * \psi_\delta$; il est immédiat que φ est égale à 1 au voisinage de F_1 , égale à 0 au voisinage de F_2 ; soit D^α un monome de dérivation, alors

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq \int_{\mathbf{R}^n} |D^\alpha \psi_\delta(y)| dy \leq \left(\frac{3}{\delta}\right)^{|\alpha|} \sup_{y \in \mathbf{R}^n} |D^\alpha \psi(y)|,$$

et il suffit donc de prendre

$$N_{|\alpha|} = 3^{|\alpha|} \text{Max}_{|\beta|=|\alpha|} \left(\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |D^\beta \psi(x)| \right).$$

Démonstration du lemme 1. — Nous pouvons supposer, puisque d'' est à coefficients constants, que $0 \in U$ et nous noterons dans la suite $\|g\|_{(s,\epsilon)}$ [resp. $\|g\|_{(s)}$] au lieu de $\|g\|_{(s,U^\epsilon)}$ [resp. $\|g\|_{(s,U)}$].

a) *Le cas $s = 0$.*

On désigne par χ_ϵ une fonction égale à 1 au voisinage de U^ϵ et à support dans $U^{\epsilon/6}$ fournie par le lemme 2 ; et on désigne par u la solution de $d''u = f$ fournie par le théorème 1.

Si on remarque que $\|\chi_\epsilon u\|_{(1)} \geq \|u\|_{(1,\epsilon)}$ et que

$$\|\chi_\epsilon u\|_{(1)}^2 = \|\chi_\epsilon u\|^2 + \|d''\chi_\epsilon u\|^2 + \|\theta\chi_\epsilon u\|^2$$

il suffit de montrer que $\|\chi_\epsilon u\|^2 + \|d''\chi_\epsilon u\|^2 + \|\theta\chi_\epsilon u\|^2 \leq \frac{M_0^2}{\epsilon^2} \|f\|^2$.

Il existe des constantes μ et ν , ne dépendant que du diamètre de U telles que

$$\|\chi_\epsilon u\|^2 \leq \|u\|^2 \leq \mu \|u\|_\varphi^2 \leq \mu \|f\|_\varphi^2 \leq \nu \|f\|^2$$

donc

$$\|\chi_\epsilon u\|^2 \leq \|u\|^2 \leq \nu \|f\|^2$$

d'autre part,

$$\|d''\chi_\epsilon u\|^2 \leq 2 \{ \|d''\chi_\epsilon u \wedge u\|^2 + \|\chi_\epsilon d''u\|^2 \} \leq 2 \left\{ \frac{N_1^2}{\epsilon^2} \|u\|^2 + \|f\|^2 \right\}.$$

Soit encore

$$\|d''\chi_\epsilon u\|^2 \leq \frac{K_1^2}{\epsilon^2} \|f\|^2.$$

Enfin, on a

$$\theta\chi_\epsilon u = \chi_\epsilon \theta u + [\theta, \chi_\epsilon] u.$$

La condition $\theta(e^{-\varphi}u) = 0$ se traduit par le fait que θ agit sur u comme un opérateur d'ordre 0 dont les coefficients sont majorés par une constante ne dépendant que du diamètre de U et $[\theta, \chi_\epsilon]$ est un opérateur d'ordre 0 dont les coefficients sont majorés par $\frac{L_1}{\epsilon}$.

On a donc :

$$\|\theta(\chi_\epsilon u)\|^2 \leq 2 \left\{ L_1'^2 \|u\|^2 + \frac{L_1^2}{\epsilon^2} \|u\|^2 \right\} \leq 2 \left\{ \nu L_1'^2 + \nu \frac{L_1^2}{\epsilon^2} \right\} \|f\|^2.$$

En ajoutant les trois termes, on obtient le résultat désiré.

b) *Le cas général.*

Nous avons montré que $\|\chi_\epsilon u\|_{(1)} \leq \frac{M_0}{\epsilon} \|f\|$.

Supposons qu'on ait démontré $\|\chi_\epsilon u\|_{(s+1)} \leq \frac{M_s}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{(s)}$ et montrons qu'on peut en déduire le même résultat pour $s + 1$, à savoir $\|\chi_\epsilon u\|_{(s+2)} \leq \frac{M_{s+1}}{\epsilon^{s+2}} \|f\|_{(s+1)}$. Soit donc D^α une dérivation d'ordre $s + 1$; on a évidemment :

$$\|D^\alpha \chi_\epsilon u\| \leq \frac{M_s}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{(s)} \leq \frac{M_s}{\epsilon^{s+2}} \|f\|_{(s+1)} \quad (\epsilon < 1);$$

d'autre part, comme dans le cas $s = 0$,

$$\|D^\alpha \chi_\epsilon u\|_1^2 = \|D^\alpha \chi_\epsilon u\|^2 + \|d'' D^\alpha \chi_\epsilon u\|^2 + \|\theta D^\alpha \chi_\epsilon u\|^2.$$

On a

$$d'' D^\alpha \chi_\epsilon u = D^\alpha \chi_\epsilon d'' u + D^\alpha (d'' \chi_\epsilon \wedge u).$$

Pour le premier terme, on a

$$\|D^\alpha \chi_\epsilon d'' u\| \leq \|\chi_\epsilon f\|_{(s+1)} \leq \frac{T_{s+1}}{\epsilon^{s+1}} \|f\|_{s+1}.$$

Pour le deuxième terme, grâce à la formule de Leibnitz, on a

$$D^\alpha (d'' \chi_\epsilon \wedge u) = \sum \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta d'' \chi_\epsilon) \wedge D^{\alpha-\beta} u$$

et
$$\|(D^\beta d'' \chi_\epsilon) \wedge D^{\alpha-\beta} u\| \leq \frac{N_{|\beta|}}{\epsilon^{|\beta|+1}} \|D^{\alpha-\beta} u\|_{(0, \epsilon/6)}.$$

Il suffit alors d'utiliser la récurrence pour obtenir

$$\|D^{\alpha-\beta} u\|_{(0, \epsilon/6)} \leq \frac{M_{|\alpha-\beta|}}{\epsilon^{|\alpha-\beta|}} 6^{|\alpha-\beta|} \|f\|_{|\alpha-\beta|-1}.$$

Après sommation sur les multiindices $\beta \leq \alpha$, on obtient finalement

$$\|D^\alpha (d'' \chi_\epsilon \wedge u)\| \leq \frac{S_{s+1}}{\epsilon^{|\beta|+1+|\alpha-\beta|}} \|f\|_{|\alpha|} = \frac{S_{s+1}}{\epsilon^{s+2}} \|f\|_{(s+1)}.$$

Un calcul tout à fait analogue pour $\theta D^\alpha \chi_\epsilon u$ fournit le résultat cherché.

2. Démonstration du théorème quand Γ est borné.

On choisit un nombre R tel que $\Gamma_R = \Gamma$ et on notera $\Omega_\nu = \Omega_\nu^R$. Quitte à extraire une sous-suite de la suite $\{\Omega_\nu\}$ initiale, on peut supposer qu'il existe $1/2 > \eta > 0$ tel que

$$\left\{ z \in \mathbf{C}^n ; d(z, \Gamma) < \eta^{p\nu+1} \right\} \subset \Omega_\nu \subset \left\{ z \in \mathbf{C}^n ; d(z, \Gamma) < \frac{1}{2} \eta^{p\nu} \right\}.$$

Soit maintenant w une forme de type (p, q) où $q \geq 1$ à coefficients dans $W(\Gamma)$ telle que $d''w = 0$; on désigne par \tilde{w} un prolongement de w qui soit une forme à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$. Il n'y a bien sûr aucune raison pour que $d''\tilde{w} = 0$, mais néanmoins, pour tout N et tout entier s , il existe une constante $C_{N,s}$ vérifiant $\|d''\tilde{w}\|_{(s, \Omega_\nu)} \leq C_{N,s} \eta^{Np\nu}$ car $d''\tilde{w}$ est identiquement nul sur Γ ainsi que toutes ses dérivées.

On désigne alors par h_ν une solution de $d''h_\nu = d''\tilde{w}$ dans Ω_ν , fournie par le lemme 1; on a donc

$$\|h_\nu\|_{(s+1, \Omega_{\nu+1})} \leq M_s \frac{1}{2} \eta^{p\nu+1-(s+1)} \|d''\tilde{w}\|_{(s, \Omega_\nu)}$$

en remarquant que

$$\Omega_{\nu+1} \subset \left\{ z \in \Omega_\nu ; d(z, \mathbf{C} \setminus \Omega_\nu) > \frac{1}{2} \eta^{p\nu+1} \right\}.$$

Considérons alors sur Ω_2 la forme $\tilde{w} - h_1$, on a évidemment $d''(\tilde{w} - h_1) = 0$; il existe donc α_1 une forme de type $(p, q-1)$ fournie par le lemme 1 telle que $d''\alpha_1 = \tilde{w} - h_1$. De même, pour tout $\nu \geq 1$, on considère sur $\Omega_{\nu+2}$ la forme $h_\nu - h_{\nu+1}$, qui est d'' -fermée; désignons par $\alpha_{\nu+1}$ une solution de l'équation $d''\alpha_{\nu+1} = h_\nu - h_{\nu+1}$ fournie par le lemme 1.

On a

$$\|\alpha_{\nu+1}\|_{(s+2, \Omega_{\nu+3})} \leq M_{s+1} \left(\frac{1}{2} \eta^{p\nu+2}\right)^{-(s+2)} M_s \left(\frac{1}{2} \eta^{p\nu+1}\right)^{-(s+1)} \|d''\tilde{w}\|_{(s, \Omega_\nu)}.$$

Soit encore

$$\|\alpha_{\nu+1}\|_{(s+2, \Omega_{\nu+3})} \leq M_s M_{s+1} \left(\frac{1}{2} \eta^{p\nu+2}\right)^{-(2s+3)} \|d''\tilde{w}\|_{(s, \Omega_\nu)}.$$

Soit en majorant $\|d''\tilde{w}\|_{(s, \Omega_\nu)}$

$$\|\alpha_{\nu+1}\|_{(s+2, \Omega_{\nu+3})} \leq M_s M_{s+1} C_{N,s} \left(\frac{1}{2} \eta^{p\nu+2}\right)^{-(2s+3)} \times \eta^{Np\nu}.$$

On choisit alors N suffisamment grand pour que cette inégalité, jointe au lemme de Sobolev fournisse la convergence de $\sum \alpha_\nu$ dans $W^{(p, q-1)}(\Gamma)$ muni de la topologie quotient de celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

3. Démonstration du théorème.

Traisons d'abord le cas $q > 1$.

Soit $w \in W^{(p,q)}(\Gamma)$ telle que $d''w = 0$.

Il existe une suite $\{u_n\}$ $u_n \in W^{(p,q)}(\Gamma_n)$ ⁽¹⁾, telle que $d''u_n = w/\Gamma_n$ d'après le paragraphe précédent.

On peut modifier la suite $\{u_n\}$ de telle façon que $u_{n+1}/\Gamma_n = u_n$ pour tout n . Pour s'en convaincre, il suffit de montrer que $u_{n+1}/\Gamma_n - u_n$ peut se prolonger en une $(p, q - 1)$ forme d'' -fermée sur Γ_{n+1} . En effet, puisque $d''(u_{n+1}/\Gamma_n - u_n) = 0$, il existe v une $(p, q - 2)$ -forme à coefficients dans $W(\Gamma_n)$ telle que $d''v = u_{n+1}/\Gamma_n - u_n$. Notons \tilde{v} un prolongement de v dans $W(\Gamma_{n+1})$ et $d''\tilde{v}$ est le prolongement cherché.

La série Σu_n ainsi modifiée converge évidemment dans $W(\Gamma)$ vers une solution $u \in W(\Gamma)$ de l'équation $d''u = w$.

Dans le cas $q = 1$, l'argument précédent disparaît, mais est remplacé par le lemme suivant. La démonstration est alors un argument à la Mittag-Leffler.

LEMME 2. — Soit Γ un fermé de \mathbf{C}^n possédant la propriété (λ) et deux nombres réels strictement positifs R et R' avec $R < R'$; si $f \in W(\Gamma_R)$ est telle que $d''f = 0$ alors f est limite dans $W(\Gamma_R)$, muni de la topologie quotient de celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$ de fonctions holomorphes dans $\Omega_1^{R'}$.

Démonstration. — Soit \tilde{f} un prolongement de f dans \mathbf{C}^n . On a $d''\tilde{f}$ nul sur Γ_R ainsi que toutes ses dérivées. En notant h_ν la solution fournie par le lemme 1 de l'équation $d''h_\nu = d''\tilde{f}$ dans Ω_ν^R et en appliquant les arguments du § 2, il est facile de voir que la série $\Sigma (h_\nu - h_{\nu+1})/\Gamma_R$ est convergente dans $W(\Gamma_R)$ muni de la topologie quotient de celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n)$ et que

$$f = (\tilde{f} - h_1)/\Gamma_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu - h_{\nu+1})/\Gamma_R .$$

(1) Rappelons que $\Gamma_n = \{z \in \Gamma; |z| \leq n\}$.

Pour P assez grand,

$$\tilde{f} - h_1 + \sum_{\nu=1}^N (h_\nu - h_{\nu+1})/\Gamma_R$$

est une fonction holomorphe dans Ω_P^R qui grâce à la condition iii) de la propriété (λ) est limite dans $W(\Gamma_R)$ de fonctions holomorphes dans $\Omega_1^{R'}$ en vertu des théorèmes 4.3.2 et 4.3.4 de [1].

Appendice :

Exemples de fermés de \mathbf{C}^n vérifiant la condition (λ) .

- *Un fermé convexe de \mathbf{C}^n vérifie la condition (λ) .*

En effet, posons $\Omega_\nu^R = \{z \in \mathbf{C}^n ; d(z, \Gamma_R) < 2^{-\nu}\}$.

Les ouverts Ω_ν^R sont convexes, donc pseudo-convexes et $\bigcap_\nu \Omega_\nu^R = \Gamma_R$, d'autre part la condition ii) est évidemment satisfaite. La condition iii) est une conséquence immédiate du fait que $\overline{\Omega_\nu^R}$ est convexe.

- *Une intersection localement finie d'adhérences d'ouverts strictement pseudo-convexes de \mathbf{C}^n vérifie la condition (λ) .*

Désignons par $\rho_1, \dots, \rho_n \dots$ les fonctions définissant les ouverts strictement pseudo-convexes U_n de classe C^2 ; autrement dit, ρ_n est de classe C^2 dans un voisinage de U_n , le gradient de ρ_n ne s'annule pas sur $\rho_n^{-1}(0) = \partial U_n$ et la restriction au plan tangent complexe de la forme de Levi de ρ_n est définie positive.

Pour R fixé, il existe n_1, \dots, n_p tel que

$$\Gamma_R = \{z \in \mathbf{C}^n ; \rho_{n_j}(z) \leq 0 ; |z|^2 - R^2 \leq 0\}.$$

Quitte à composer les fonctions ρ_{n_j} par une fonction convexe, on peut supposer que les fonctions ρ_{n_j} sont strictement plurisous-harmoniques dans un voisinage de la frontière de U_{n_j} ; il est alors facile de voir que $\Omega_\nu^R = \{z \in \mathbf{C}^n ; \sup_j \rho_j(z) < 2^{-\nu}\}$ est (pour ν assez grand) un ouvert pseudo-convexe et que $\bigcap_\nu \Omega_\nu^R = \Gamma_R$. Du fait que l'enveloppe supérieure d'une famille finie de fonctions lipschitziennes est lipschitzienne, il existe une constante c telle que $\Omega_\nu^R \supset \{z \in \mathbf{C}^n ; d(z, \Gamma_R) < c2^{-\nu}\}$ et la condition sur le

gradient des fonctions ρ_j fournit une constante C telle que $\Omega_\nu^R \subset \{z \in \mathbf{C}^n ; d(z, \Gamma_R) < C2^{-\nu}\}$. Si $R' > R$, il existe un voisinage de $\Gamma_{R'}$ tel que $\Omega_\nu^{R'}$ soit défini dans ce voisinage de $\Gamma_{R'}$, par des fonctions plurisousharmoniques.

Si on choisit le voisinage de $\Gamma_{R'}$ pseudo-convexe, on en déduit que $\overline{\Omega_\nu^{R'}}$ est holomorphiquement convexe dans ce voisinage de $\Gamma_{R'}$, ce qui fournit la condition iii).

- *Un polyèdre analytique ou un ensemble analytique complexe vérifie la condition (λ).*

Nous allons montrer simultanément ces deux affirmations en montrant plus généralement que toute intersection localement finie d'ensembles de la forme $\{\operatorname{Re} f \leq 0\}$ où f est une fonction holomorphe dans un voisinage du fermé possède la propriété (λ).

Pour tout R , il existe i_1, \dots, i_p tels que Γ_R soit défini par $\Gamma_R = \{z ; \operatorname{Re} f_{i_p}(z) \leq 0 ; |z|^2 - R^2 \leq 0\}$. On pose alors $\Omega_\nu^R = \{z ; \operatorname{Re} f_{i_p}(z) \leq 2^{-\nu} ; |z|^2 - R^2 \leq 2^{-\nu}\}$. Il est facile de voir que Ω_ν^R est un ouvert pseudo-convexe de \mathbf{C}^n et que $\bigcap_\nu \Omega_\nu^R = \Gamma_R$. La condition ii) s'obtient en partie en utilisant le fait que les fonctions qui définissent Ω_ν^R sont lipschitziennes dans un voisinage de Γ_R et en partie en utilisant l'inégalité de Lojasiewicz. La condition iii) se vérifie comme dans le cas précédent.

* * *

* *

*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. HORMANDER, An introduction to complex analysis in several variables, The University series in higher Mathematics, D. Van Nostrand Company.
- [2] J.J. KOHN, Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudo-convex manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181 (1973), 273-292.

Manuscrit reçu le 9 décembre 1977.

Alain DUFRESNOY,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS n° 188
Institut Fourier
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères.