YVES DUPAIN

Discrépance de la suite $(\{n\alpha\}), \alpha = (1+\sqrt{5})/2$

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 81-106

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_81_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 81-106

DISCRÉPANCE DE LA SUITE $\left(\left\{n\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$ [1]

par Yves DUPAIN

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

Introduction.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points du tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et I un intervalle du tore. Pour N entier naturel, posons :

$$\varphi(\mathrm{I},\mathrm{N}) = \mathrm{card}\,\{n\,,\ 0 \leqslant n < \mathrm{N}\,,\ u_n \in \mathrm{I}\} - \mathrm{N}\,\mu(\mathrm{I})\,,$$

μ désignant la mesure de Haar normalisée du tore.

Soit $\mathcal{I}$ (respectivement $\mathcal{I}^*$) l'ensemble des intervalles du tore (respectivement des intervalles de la forme $[0\,,\beta[$). Posons :

$$\mathrm{D}(\mathrm{N}) = \sup_{\mathrm{I}\in\mathcal{I}} \varphi(\mathrm{I},\mathrm{N}) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}^*(\mathrm{N}) = \sup_{\mathrm{I}\in\mathcal{I}^*} |\varphi(\mathrm{I},\mathrm{N})|\,.$$

Le nombre réel D(N) (respectivement D*(N)) est la $\mathrm{N}^{\text{ième}}$ discrépance (respectivement discrépance à l'origine) de la suite u.

Remarquons que $\mathrm{D}^*(\mathrm{N}) \leqslant \mathrm{D}(\mathrm{N}) \leqslant 2\mathrm{D}^*(\mathrm{N})$.

Pour une suite u donnée, posons :

$$\mathrm{S}(u) = \limsup_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{\mathrm{D}(\mathrm{N})}{\mathrm{Log}\,\mathrm{N}} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}^*(u) = \limsup_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{\mathrm{D}^*(\mathrm{N})}{\mathrm{Log}\,\mathrm{N}}$$

(on a donc $\mathrm{S}^*(u) \leqslant \mathrm{S}(u) \leqslant 2\mathrm{S}^*(u)$). Nous nous intéressons aux suites à "petite discrépance". W.M. Schmidt a démontré que pour toute suite u, on a l'inégalité $\mathrm{S}(u) \geqslant (66\ \mathrm{Log}\ 4)^{-1}$. La suite à plus "petite discrépance" connue est actuellement la suite de Van der Corput, pour laquelle S. Haber a prouvé l'égalité :

---

(1) $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel x.

$S^*(u) = (3 \operatorname{Log} 2)^{-1} \simeq 0{,}48$. Considérons maintenant les suites $(\{n\alpha\})$. Si les quotients partiels de α sont majorés par K, H. Niederreiter a prouvé l'inégalité :

$$S(\{n\alpha\}) \leqslant \left(\operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^{-1} + K\,(\operatorname{Log}(K+1))^{-1}\,.$$

Pour la suite particulière $u = \left(\left\{n\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$, A. Gillet et V.T. Sos ont respectivement démontré les résultats suivants :

$$0{,}15\left(\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \leqslant S(u) \leqslant (\sqrt{5}+1)\left(3\sqrt{5}\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$$

$$\text{et} \quad S(u) \leqslant 1\,.$$

Pour tous ces résultats, ainsi que certains approfondissements, on peut consulter L. Kuipers et H. Niederreiter [3].

Nous allons étudier la suite $\left(\left\{n\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$ et démontrer le résultat suivant :

THEOREME. – $S^*\left(\left(\left\{n\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)\right) = 0{,}15 \operatorname{Log}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}.$

Remarque. – Soit f une fonction à variation bornée sur $[0,1]$, et soit $(x_n)_{n\in\{1,2,\ldots,N\}}$ une suite finie de points de $[0,1[$. On a l'inégalité suivante (Koksma) :

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right| \leqslant V(f)\,\frac{D^*(N)}{N}\,.$$

On voit donc que les suites à petite discrépance, comme la suite $\left(\left\{n\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$, pourraient être utilisées avec profit en intégration numérique.

0. Notations et rappels.

Considérons un nombre irrationnel α et la suite $(\{n\alpha\})$. Soit γ un nombre réel, $0 \leqslant \gamma < 1$ que nous identifions à son image sur le tore. Pour N entier naturel posons :

$\varphi^{-}(\gamma, \mathrm{N}) = \operatorname{card}\{n\,,\ 0 \leqslant n < \mathrm{N}\,,\ \{n\alpha\} \in [0, \gamma[\} - \mathrm{N}\gamma$

$\varphi^{+}(\gamma, \mathrm{N}) = \operatorname{card}\{n\,,\ 0 < n \leqslant \mathrm{N}\,,\ \{n\alpha\} \in]0, \gamma]\} - \mathrm{N}\gamma$.

Remarquons que $\varphi^{-}(\gamma, \mathrm{N}) = \varphi([0, \gamma[, \mathrm{N})$.

Développons α en fraction continue. Les suites des quotients partiels de α et des dénominateurs des réduites de α seront notées respectivement $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ avec la convention $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$. Posons enfin $\lambda_n = \|q_n\alpha\|$ ($\|x\|$ désigne la distance du nombre réel x à l'entier le plus proche).

Une suite d'entiers $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ sera dite normale (pour α) si elle vérifie les propriétés suivantes :

$0 \leqslant b_1 \leqslant a_1 - 1$

$0 \leqslant b_k \leqslant a_k$ pour $k = 2, 3, \ldots$

$b_k = a_k \Longrightarrow b_{k-1} = 0$ pour $k = 2, 3, \ldots$

Il n'existe pas d'entier impair l tel que $b_k = a_k$ pour $k = l, l+2, l+4, \ldots$

De même, nous dirons qu'une suite finie $(b_k)_{k\in\{1,2,\ldots,\mathrm{K}\}}$ est normale (pour α) si elle vérifie les trois premières propriétés précédentes.

Soit β un nombre réel, $0 < \beta < 1$. Développer β par rapport à α, c'est associer à β une suite normale (b_k) et une suite (r_k) telles que : $r_k = \sum_{i=1}^{k} b_i q_i$ et $\beta = \lim_{k\to\infty} \{r_k\alpha\}$.

Un tel développement existe et est unique, et réciproquement, toute suite normale définit un nombre β (cf. [4]).

Notons les propriétés suivantes (que l'on peut trouver dans [4] et [5] ou qui s'en déduisent aisément) :

(i) tout nombre entier $x < q_{n+1}$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{k=1}^{n} d_k q_k$ où la suite $(d_k)_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}$ est normale, et réciproquement toute suite normale $(d_k)_{k\in\{1,2,\ldots,n\}}$ définit un nombre entier $x < q_{n+1}$

(ii) pour tout entier $n > 0$: $\lambda_n q_{n+1} + \lambda_{n+1} q_n = 1$.

Soit $(d_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite normale définissant le nombre β. Posons $r_k = \sum_{i=1}^{k} d_i q_i$. Alors :

(iii) pour tout entier $n > 0$, $\left|\beta - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} d_k \lambda_k\right| \leqslant \lambda_n$

(iv) pour tous entiers $n > 0$ et $p > 0$,

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} (-1)^{k+1} d_k \lambda_k\right| \leqslant \lambda_{n-1} - \lambda_{n+p+1}$$

(v) pour tous entiers $\mathrm{N} > 0$ et $k > 0$ tels que $\mathrm{N} < q_{k+1}$

$$|\varphi^-(\beta, \mathrm{N}) - \varphi^-(\{r_k\alpha\}, \mathrm{N})| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\varphi^+(\beta, \mathrm{N}) - \varphi^+(\{r_k\alpha\}, \mathrm{N})| \leqslant 1$$

(vi) pour tous entiers $u > 0$ et $v > 0$, $\varphi^+(\{u\alpha\}, v) = \varphi^-(\{v\alpha\}, u)$

(vii) pour tout élément du tore γ et tout entier $u > 0$, $|\varphi^+(\gamma, u) - \varphi^-(\gamma, u)| \leqslant 1$

(viii) si $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, pour tout entier $k > 0$, $\lambda_k = \alpha \lambda_{k+1}$.

Dans [2], nous avons démontré le lemme suivant :

LEMME 0. – *Soient* $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite normale et $r_k = \sum_{i=1}^{k} b_i q_i$. *Soient* m *et* x *deux entiers,* $m > 0$ *et* $0 \leqslant x < q_{m+1}$; x s'écrit $x = x_{m-1} + d_m q_m$ *(où* $0 \leqslant x_{m-1} < q_m$ *et* $0 \leqslant d_m \leqslant a_m$*).* Alors :

(1) Si m est impair :

$$\varphi^-(\{r_m\alpha\}, x) = \varphi^-(\{r_{m-1}\alpha\}, x_{m-1}) - \lambda_m(d_m r_{m-1} + b_m x) + \mathrm{A}_m(x)$$

où

$$\mathrm{A}_m(x) = \begin{cases} \mathrm{Min}\,(d_m + 1\,,\, b_m) & \text{si } x_{m-1} > r_{m-1} \\ \mathrm{Min}\,(d_m\,,\, b_m) & \text{si } x_{m-1} \leqslant r_{m-1}. \end{cases}$$

(2) Si m est pair :

$$\varphi^-(\{r_m\alpha\}, x) = \varphi^-(\{r_{m-1}\alpha\}, x_{m-1}) + \lambda_m(d_m r_{m-1} + b_m x) - \mathrm{B}_m(x)$$

où :

$$\mathrm{B}_m(x) = \begin{cases} \mathrm{Min}\,(d_m\,,\, b_m) & \text{si } x_{m-1} > r_{m-1} \\ \mathrm{Min}\,(d_m\,,\, b_m + 1) & \text{si } 0 < x_{m-1} \leqslant r_{m-1} \\ \mathrm{Min}\,(\mathrm{Max}\,(d_m - 1, 0)\,,\, b_m) & \text{si } x_{m-1} = 0. \end{cases}$$

COROLLAIRE 0. – *Soient* $(b_k)_{k\in\{1,2,\ldots,\mathrm{K}\}}$, $(b'_k)_{k\in\{1,2,\ldots,\mathrm{K}\}}$, $(d_k)_{k\in\{1,2,\ldots,\mathrm{K}\}}$, $(d'_k)_{k\in\{1,2,\ldots,\mathrm{K}\}}$ *quatre suites normales et* n *un entier,* $n \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{K}\}$ *tels que pour* $k \neq n$, $b_k = b'_k$ *et* $d_k = d'_k$. *Posons :*

$$r = \sum_{k=1}^{K} b_k q_k \,, \quad r' = \sum_{k=1}^{K} b'_k q_k \,, \quad x = \sum_{k=1}^{K} d_k q_k \,, \quad x' = \sum_{k=1}^{K} d'_k q_k \,.$$

Alors : $\quad |\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r'\alpha\}, x')| \leqslant a_n \,.$

Ce corollaire est une conséquence immédiate du lemme 0, de (ii) et de (iv).

1. Préliminaires – Présentation des calculs.

Dans tout ce qui suit, α désigne le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (dont les quotients partiels a_n sont tous égaux à 1) et q_n le dénominateur de la n$^{\text{ième}}$ réduite de α. Nous avons donc les relations suivantes $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$ et $\lambda_{n+1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n$. Les fonctions D^*, φ, φ^- et φ^+ sont celles correspondant à la suite $\left(\left\{ n \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}\right)$.

Notre but est de calculer :

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{D^*(N)}{\operatorname{Log} N} = \limsup_{N\to\infty} \sup_{\beta\in[0,1[} \left| \frac{\varphi^-(\beta, N)}{\operatorname{Log} N} \right| .$$

Pour cela, il suffit d'évaluer pour tout entier K, $\sup\limits_{\substack{r<q_K \\ x<q_K}} \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$.

En effet :

$$S^* = \limsup_{N\to\infty} \sup_{q_{K-1}<N<q_K} \sup_{\beta\in[0,1[} \left| \frac{\varphi^-(\beta, N)}{\operatorname{Log} N} \right| .$$

Or $\operatorname{Log} q_K \sim K \operatorname{Log} \alpha$, d'où :

$$S^* = \limsup_{K\to\infty} \frac{1}{K \operatorname{Log} \alpha} \sup_{q_{K-1}<N<q_K} \sup_{\beta\in[0,1[} |\varphi^-(\beta, N)| .$$

D'après le corollaire 0 la condition sur N peut être remplacée par $N < q_K$, et :

$$S^* = \limsup_{K\to\infty} \frac{1}{K \operatorname{Log} \alpha} \sup_{N<q_K} \sup_{\beta\in[0,1[} |\varphi^-(\beta, N)| .$$

Considérons maintenant le développement de β par rapport à α ; $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \{r_n\alpha\}$ (cf. § 0) ; d'après (v)

$$|\varphi^-(\beta, N) - \varphi^-(\{r_{K-1}\alpha\}, N)| < 1 \quad \text{pour} \quad N < q_K \,.$$

Donc : $$S^* = \limsup_{K\to\infty} \frac{1}{K \operatorname{Log} \alpha} \sup_{x<q_K} \sup_{r<q_K} |\varphi^-(\{r\alpha\}, x)| .$$

Montrons que l'on peut supprimer la valeur absolue dans l'expression ci-dessus. Soient r et x deux entiers, $r = \sum_{i=1}^{K} b_i q_i$ et $x = \sum_{i=1}^{K} d_i q_i$. Posons $R = \sum_{i=1}^{K} b_i q_{i+1}$ et $X = \sum_{i=1}^{K} d_i q_{i+1}$ et comparons $\varphi^-(\{r\alpha\}, x)$ et $\varphi^-(\{R\alpha\}, X)$. Pour cela introduisons la suite $(\{n(-\alpha)\})$ et la fonction $\varphi^-_{-\alpha}$:

$$\varphi^-_{-\alpha}(\beta, N) = \operatorname{card} \{n, 0 \leqslant n < N, \{-n\alpha\} \in [0, \beta[\} - N\beta .$$

Posons $I = [\{R\alpha\}, 1[$. Alors $\varphi(I, X) = -\varphi^-(\{R\alpha\}, X)$.

De plus

$$\operatorname{card} \{n, 0 \leqslant n < X, \{-n\alpha\} \in [0, \{-R\alpha\}[\}$$
$$= \operatorname{card} \{n, 0 \leqslant n < X, \{n\alpha\} \in I\} + \epsilon$$

(où $\epsilon = 0$ ou 1), d'où : $-\varphi^-(\{R\alpha\}, X) = \varphi^-_{-\alpha}(\{-R\alpha\}, X) - \epsilon$.

Désignons par Q_i le dénominateur de la $i^{\text{ème}}$ réduite de $-\alpha$ et posons $\Lambda_i = \|Q_i(-\alpha)\|$, nous avons alors : $Q_i = q_{i+1}$ et $\Lambda_i = \lambda_{i+1}$.

Comparons $\varphi^-(\{r\alpha\}, x)$ et $\varphi^-_{-\alpha}(\{R(-\alpha)\}, X)$. (Remarquons que $R = \sum_{i=1}^{K} b_i Q_i$ et $X = \sum_{i=1}^{K} d_i Q_i$.) Ces deux quantités peuvent se calculer en appliquant K fois le lemme 0.

Pour $m \leqslant K$, posons $r_m = \sum_{i=1}^{m} b_i q_i$, $x_m = \sum_{i=1}^{m} d_i q_i$, $R_m = \sum_{i=1}^{m} b_i Q_i$ et $X_m = \sum_{i=1}^{m} d_i Q_i$.

Nous avons à comparer $\varphi^-(\{r_m\alpha\}, x_m) - \varphi^-(\{r_{m-1}\alpha\}, x_{m-1})$ à $\varphi^-_{-\alpha}(\{R_m(-\alpha)\}, X_m) - \varphi^-_{-\alpha}(\{R_{m-1}(-\alpha)\}, X_{m-1})$ c'est-à-dire $\lambda_m(d_m r_{m-1} + b_m x_m)$ à $\Lambda_m(d_m R_{m-1} + b_m X_{m-1})$.

Or $\lambda_m = \alpha \Lambda_m$ et $\dfrac{Q_i}{q_i}$ tend vers α quand i tend vers l'infini, donc : $\lambda_m(d_m r_{m-1} + b_m x_m) - \Lambda_m(d_m R_{m-1} + b_m X_{m-1})$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini. Nous avons donc :

$$\varphi^-(\{r\alpha\}, x) = \varphi^-_{-\alpha}(\{R(-\alpha)\}, X) + o(K)$$

et

$$\varphi^-(\{r\alpha\}, x) = -\varphi^-(\{R\alpha\}, X) + o(K) ;$$

nous pouvons donc supprimer la valeur absolue et obtenir finalement :

$$S^* = \limsup_{K \to \infty} \frac{1}{K \operatorname{Log} \alpha} \sup_{\substack{r < q_K \\ x < q_K}} (\varphi^-(\{r\alpha\}, x)) .$$

Nous nous proposons d'évaluer $\sup_{\substack{r<q_K \\ x<q_K}} \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$. Pour cela nous montrerons que l'on peut se restreindre à des couples (r, x) appartenant à des ensembles de plus en plus petits. Nous considérerons les suites normales $(b_k)_{k\in\{1,2,\dots,K-1\}}$ et $(d_k)_{k\in\{1,2,\dots,K-1\}}$ associées à un couple (r, x), et, en changeant certaines composantes de ces suites, nous construirons un couple (r', x') vérifiant les propriétés requises. Nous minorerons alors $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$ en utilisant le lemme 0 à partir du premier indice où certaines composantes changent.

Nous schématisons le changement de composantes $(b_l, b_{l+1}, \dots, b_{l+s})$ et $(d_l, d_{l+1}, \dots, d_{l+s})$ respectivement en $(b'_l, b'_{l+1}, \dots, b'_{l+s})$ et $(d'_l, d'_{l+1}, \dots, d'_{l+s})$ par le tableau :

$$\begin{array}{cccc}
 & l \qquad\quad l+s & & l \qquad\quad l+s \\
(b_k) & b_l \dots\dots b_{l+s} & \longrightarrow & b'_l \dots\dots b'_{l+s} \\
(d_k) & d_l \dots\dots d_{l+s} & & d'_l \dots\dots d'_{l+s}
\end{array}$$

Il est sous-entendu que les autres composantes des suites (b_k) et (d_k) ne changent pas. Généralement seule la suite (d_k) sera modifiée, mais nous reproduirons le tableau ci-dessus en entier pour faciliter l'utilisation du lemme 0.

Les suites $(b_k)_{k\in\{1,2,\dots,K-1\}}$ (respectivement (b'_k), (B_k)) et $(d_k)_{k\in\{1,2,\dots,K-1\}}$ (respectivement (d'_k), (D_k)) désignent partout dans la suite de cet article les suites normales associées à r (respectivement r', R) et x (respectivement x', X). Nous utilisons les notations suivantes pour $n \leqslant K-1$: $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k q_k$ et $x_n = \sum_{k=1}^{n} d_k q_k$ (notations analogues pour r', R, x', X). Remarquons que $r_{K-1} = r$ et $x_{K-1} = x$.

Pour $K > 5$, soit $\mathcal{D}_K^0$ l'ensemble des couples (r, x), $r < q_K$, $x < q_K$ dont les suites normales associées vérifient : $b_2 = d_2 = 0$; $b_3 = 1$, $d_3 = 0$; $b_5 = 0$, $d_5 = 1$. Il est clair, d'après le corollaire 0 que : $\sup_{\substack{r<q_K \\ x<q_K}} \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \leqslant \sup_{(r,x)\in\mathcal{D}_K^0} \varphi^-(\{r\alpha\}, x) + 5$.

Cette première réduction, élémentaire, simplifie l'application du lemme 0, car pour tout n, $n > 5$ nous avons $r_n \neq x_n$ et $x_n \neq 0$.

2. Première réduction.

Soit $\mathcal{D}^1_{\mathrm{K}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}^0_{\mathrm{K}}$ défini par la condition relative aux suites normales $(b_i)_{i\in\{1,2,\ldots,\mathrm{K}-1\}}$ et $(d_i)_{i\in\{1,2,\ldots,\mathrm{K}-1\}}$ associées à r et x : Pour tout entier pair n, $b_n = 1$ implique $d_n = 0$.

PROPOSITION 1. – $\sup_{(r,x)\in\mathcal{D}^0_{\mathrm{K}}} \varphi^-(\{r\alpha\}, x) = \sup_{(r,x)\in\mathcal{D}^1_{\mathrm{K}}} \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$.

Soit $(r, x) \in \mathcal{D}^0_{\mathrm{K}}$ tel que pour un indice pair n, $b_n = d_n = 1$ (remarquons qu'alors $n \geqslant 8$). Définissons (r', x') par le changement de composantes :

a) *si* $x_{n-1} < r_{n-1}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & n & & & & n & \\ (b_k) & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & \longrightarrow & & & \\ (d_k) & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

b) *si* $x_{n-1} > r_{n-1}$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & n & & & & n & \\ (b_k) & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \longrightarrow & & & \\ (d_k) & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Minorons $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$. Pour cela, appliquons (iv) et le lemme 0 entre les indices n et $\mathrm{K}-1$ en remarquant que, pour tout k, $x_k < r_k \iff x'_k < r'_k$.

Dans le premier cas : $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant$

$$\geqslant 1 - \lambda_n r_{n-1} - \lambda_n q_n - \lambda_{n+1} q_n \geqslant 1 - \lambda_n q_{n+1} - \lambda_{n+1} q_n = 0$$

(en utilisant (i), (ii) et le fait que $b_{n-1} = 0$).

Dans le second cas : $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant$

$$\geqslant 1 - \lambda_n x_n - \lambda_{n+1} q_n \geqslant 1 - \lambda_n q_{n+1} - \lambda_{n+1} q_n = 0 .$$

Soit $(r, x) \in \mathcal{D}^0_{\mathrm{K}}$. En effectuant les changements de composantes définis précédemment, autant de fois que nécessaire, on construit un couple (R,X) de $\mathcal{D}^1_{\mathrm{K}}$ tel que $\varphi^-(\{\mathrm{R}\alpha\},\mathrm{X}) \geqslant \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$, ce qui démontre la proposition 1 .

3. Seconde réduction.

Soit $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}^2$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}^1$ défini par la condition relative aux suites normales $(b_i)_{i \in \{1,2,\dots,\mathrm{K}-1\}}$ et $(d_i)_{i \in \{1,2,\dots,\mathrm{K}-1\}}$ associées à r et x : pour tout entier pair n, $b_n = d_n = 0$.

PROPOSITION 2. — $\sup_{(r,x) \in \mathcal{D}_{\mathrm{K}}^1} \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$

$$\leqslant \sup_{(r,x) \in \mathcal{D}_{\mathrm{K}}^2} \varphi^-(\{r\alpha\}, x) + 13 .$$

Soit k_0 le plus grand des indices pairs inférieurs ou égal à $\mathrm{K}-1$. Soit $(r, x) \in \mathcal{D}_{\mathrm{K}}^1$ tel que $b_{k_0} = 1$. Ou bien pour tout indice pair k, $d_k = 0$, ou bien il existe des indices pairs k tels que $d_k = 1$. Considérons ce second cas. Les changements de composantes que nous allons définir maintenant vont permettre de se ramener au premier. Soit n le plus grand des indices pairs k tels que $d_k = 1$ (remarquons qu'alors $8 \leqslant n \leqslant \mathrm{K}-3$).

a) $x_{n-1} < r_{n-1}$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{cccccc} & n & & & n & \\ (b_k) & 0 & b_{n+1} & \longrightarrow & 0 & b_{n+1} \\ (d_k) & 1 & 0 & & 0 & 1 \end{array}$$

la suite (d_k') obtenue est bien une suite normale car $d_{n+2} = 0$. Appliquons le lemme 0 pour minorer $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$ dans les deux cas suivants :

a$_1$) $b_{n+1} = 0$

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+1} r_n - (q_{n+1} - q_n) \lambda_{n+2} \quad \text{(d'après (iv))}$$
$$\geqslant 1 - \lambda_{n-1} q_n - \lambda_{n+2} q_{n-1} > 0 \quad \text{(d'après (i) et (ii))}.$$

a$_2$) $b_{n+1} = 1$

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+1} r_n - \lambda_{n+1}(q_{n+1} - q_n) - \lambda_{n+2}(q_{n+1} - q_n)$$
$$\geqslant 1 - \lambda_{n-1} q_n - \lambda_n q_{n-1} = 0 \quad \text{(d'après (i) et (ii))}.$$

b) $x_{n-1} > r_{n-1}$.

Soit s (respectivement t) le plus grand des indices $k < n$ (respectivement le plus petit des indices $k > n$) tel que $b_k = 1$. (D'après les hypothèses faites sur (r, x), ces deux nombres existent.)

b$_1$) $d_s = 0$

Il existe donc un indice k, strictement compris entre s et n tel que $d_k = 1$. Soit m le plus petit de ces indices k. Nous avons donc : $x_{m-1} < r_{m-1}$, et dans tout ce qui suit nous ne nous servirons plus que de cette propriété.

b$_{11}$) *t pair*

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{lcccccc} & m & & n+1 & & m & n+1 \\ (b_k) & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 0 & \longrightarrow & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \quad 0 \\ (d_k) & 1 \quad d_{m+1} \ldots d_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \quad 0 \ldots 0 \ldots 0 & 0 \quad 1 \end{array}$$

(nous avons $d'_k = 0$ pour $m \leqslant k \leqslant n$). La suite (d'_k) obtenue est bien une suite normale car $d_{n+2} = 0$. Appliquons (iv) et le lemme 0 pour minorer $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$ dans les deux cas suivants.

b$_{111}$) *m pair*

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 1 - \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_m$$

(La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K-1$ provient du fait que t est pair et que $x'_{t-1} > x_{t-1}$.)

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 1 - \lambda_{m-1} q_m > 0 \quad \text{(d'après (i) et (ii))}.$$

b$_{112}$) *m impair*

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) &\geqslant \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_m \\ &\geqslant (\lambda_m - \lambda_{m+1})\, r_{m-1} \geqslant 0\,.\end{aligned}$$

b$_{12}$) *t impair*

Considérons les deux cas suivants :

b$_{121}$) *m pair*

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{lccccc} & m & n & & m & n \\ (b_k) & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & \longrightarrow & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ (d_k) & 1 \quad d_{m+1} \ldots d_{n-1} & 1 & & 0 \quad 1 \quad 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \end{array}$$

(nous avons $d'_k = 0$ pour $m+2 \leqslant k \leqslant n$). Remarquons que pour $k > m$, $x_k < r_k \Longleftrightarrow x'_k < r'_k$ et appliquons (iv) et le lemme 0 entre les indices m et $\mathrm{K}-1$ pour minorer $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$.

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 1 - \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_{m-1} - \lambda_{m+1} r_{m-1}$$

(La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $\mathrm{K}-1$ provient du fait que t est impair et que $x'_{t-1} < x_{t-1}$.)

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 1 - q_m(\lambda_{m+1} + \lambda_{m-1}) \text{ (d'après (i))}.$$

Or: $\quad q_m(\lambda_{m+1} + \lambda_{m-1}) = q_m\lambda_{m-1} + q_{m-1}\lambda_m\left(\frac{q_m}{q_{m-1}}\,\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}\right)$,

$$\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} = \frac{1}{\alpha} \text{ (d'après (viii)) et } \frac{q_m}{q_{m-1}} < \alpha$$

car m est pair d'où :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 1 - q_m\lambda_{m-1} - q_{m-1}\lambda_m = 0$$

(d'après (ii)).

b_{122}) *m impair*

Remarquons qu'alors $n \geqslant m+3$ et considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & m & & & n & & m & & & n \\
(b_k) & 0 & \ldots\ldots & & 0 & & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\
 & & & & & \longrightarrow & & & & \\
(d_k) & 1 & d_{m+1} & d_{m+2}\ \ldots & 1 & & 0\ \ 0\ \ 1 & 0 & \ldots\ldots & 0
\end{array}$$

(nous avons $d'_k = 0$ pour $m+3 \leqslant k \leqslant n$). De même que précédemment :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant \lambda_m r_{m-1} - \lambda_{m+2} r_{m-1} - \lambda_{m+2} r_{m-1}$$

(La minoration $-2\lambda_{m+2}r_{m-1}$ obtenue pour les indices compris entre $m+2$ et $t-1$ provient de (iv) et du fait que m est impair. La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $\mathrm{K}-1$ provient du fait que t est impair et que $x'_{t-1} < x_{t-1}$.). D'où :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant r_{m-1}(\lambda_m - 2\lambda_{m+2}) \geqslant 0.$$

b_2) $d_s = 1$

Remarquons que cette condition entraîne s impair et $n \geqslant s+3$. Distinguons encore les cas $x_{s-1} > r_{s-1}$ et $x_{s-1} < r_{s-1}$.

b_{21}) $x_{s-1} > r_{s-1}$

b_{211}) *t impair*

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{lcccc} & s & n & s & n \\ (b_k) & 1\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \quad \longrightarrow & 1\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ (d_k) & 1\ d_{s+1} \ldots d_{n-1} & 1 & 0\ 0\ 1\ 0 \ldots\ldots & 0 \end{array}$$

(Nous avons $d'_k = 0$ pour $s + 3 \leqslant k \leqslant n$). Appliquons (iv) et le lemme 0 pour minorer $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$.

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant \lambda_s r_{s-1} + \lambda_s q_s - r_s \lambda_{s+2} - r_s \lambda_{s+2}\,.$$

(La minoration $-2r_s\lambda_{s+2}$ obtenue pour les indices compris entre $s+1$ et $t-1$ provient de (iv) et du fait que s est impair. La minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K-1$ provient du fait que t est impair et que $x'_{t-1} < x_{t-1}$) d'où :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant r_s(\lambda_s - 2\lambda_{s+2}) > 0\,.$$

b_{212}) *t pair*

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{lcccc} & s & n+1 & s & n+1 \\ (b_k) & 1\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \quad \longrightarrow & 1\ 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ (d_k) & 1\ d_{s+1} \ldots d_{n-1} & 1\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0\ 1 \end{array}$$

(Nous avons $d'_k = 0$ pour $s \leqslant k \leqslant n$, et la suite (d'_k) obtenue est bien une suite normale car $d_{n+2} = 0$.) De même que précédemment :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant \lambda_s r_{s-1} + \lambda_s q_s - \lambda_{s+2} r_s - \lambda_{n+1} r_s\,.$$

(La minoration $-\lambda_{s+2} r_s - \lambda_{n+1} r_s$ obtenue pour les indices compris entre $s+1$ et $t-1$ provient de (iv) et du fait que s est impair, et la minoration 0 obtenue pour les indices compris entre t et $K-1$ provient du fait que t est pair et que $x'_{t-1} > x_{t-1}$.) D'où :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant r_s(\lambda_s - \lambda_{s+2} - \lambda_{s+4}) \geqslant 0\,.$$

b_{22}) $x_{s-1} < r_{s-1}$

La condition $x_{n-1} > r_{n-1}$ entraîne qu'il existe un indice k strictement compris entre s et n tel que $d_k = 1$. Soit m le plus petit de ces indices k. Nous avons alors $x_{m-1} < r_{m-1}$ et sommes ramenés à un cas similaire à b_1 (voir l'introduction du cas b_1).

En conclusion, soit donc $(r, x) \in \mathcal{D}_K^1$ tel que $b_{k_0} = 1$. On peut construire, en effectuant successivement l'un des changements de composantes précédents, un couple $(r', x') \in \mathcal{D}_K^1$ tel que, pour tout indice k pair, on ait $d'_k = 0$, et vérifiant :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 0 .$$

Considérons maintenant $(R, X) \in \mathcal{D}_K^1$. D'après le corollaire 0, il existe $(r, x) \in \mathcal{D}_K^1$ tel que $b_{k_0} = 1$ et

$$\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{R\alpha\}, X) \geqslant -3 ,$$

donc $(r', x') \in \mathcal{D}_K^1$ tel que, pour tout indice pair k on ait $d'_k = 0$, et vérifiant :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') \geqslant \varphi^-(\{R\alpha\}, X) - 3 .$$

D'après (vi) et (vii) $\varphi^-(\{x'\alpha\}, r') \geqslant \varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - 1$. (x', r') n'appartient pas à $\mathcal{D}_K^1$, mais on peut trouver (u, v) appartenant à $\mathcal{D}_K^1$, ne différant de (x', r') qu'au plus par les six premières composantes (les composantes d'indice pair de n restant nulles).

D'après le corollaire 0, nous avons :

$$\varphi^-(\{u\alpha\}, v) \geqslant \varphi^-(\{x'\alpha\}, r') - 6 .$$

De même que précédemment, il existe un couple $(u', v') \in \mathcal{D}_K^1$ tel que toutes les composantes d'indice pair de v' soient nulles (et celles de u' aussi, car par construction $u' = u$) et vérifiant :

$$\varphi^-(\{u'\alpha\}, v') \geqslant \varphi^-(\{u\alpha\}, v) - 3 .$$

Finalement, nous obtenons :

$$\varphi^-(\{u'\alpha\}, v') \geqslant \varphi^-(\{R\alpha\}, X) - 13$$

et $(u', v') \in \mathcal{D}_K^2$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

4. Evaluations de $\varphi^-(\{r\alpha\}, x)$ pour certains couples (r, x).

Donnons tout d'abord quelques propriétés des nombres réels λ_n et q_n. D'après (ii) et (viii) il est évident que :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n q_n = \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_{n+p} q_n = \frac{1}{\alpha^P}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+1} .$$

Posons :

$$L(p) = \frac{1}{\alpha^P}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+1} \quad \text{et} \quad \lambda_{n+p} q_n = L(p) + \epsilon_p(n) .$$

Nous utiliserons les inégalités suivantes :

$L(1) > 0{,}276$; $L(4) > 0{,}065$; $0{,}040 < L(5) < 0{,}041$; $L(8) < 0{,}010$

PROPOSITION 3. – *Soit* N *un entier,* $N > 1$. *Définissons le couple* (r, x) *par :*

$$r = \sum_{k=0}^{N-1} q_{4k+3} \qquad et \qquad x = \sum_{k=0}^{N-1} q_{4k+5} .$$

Alors :

$$\varphi^-(\{r\alpha\}, x) = \frac{3}{5} N + o(N)$$

$$\varphi^-(\{r\alpha\}, x) = \sum_{k=0}^{N-1} (\varphi^-(\{r_{4k+5}\alpha\}, x_{4k+5}) - \varphi^-(\{r_{4k+1}\alpha\}, x_{4k+1})) + \varphi^-(\{r_1\alpha\}, x_1) .$$

Posons :

$$G(k) = \varphi^-(\{r_{4k+5}\alpha\}, x_{4k+5}) - \varphi^-(\{r_{4k+1}\alpha\}, x_{4k+1}) .$$

D'après le lemme 0,

$$G(k) = 1 - \lambda_{4k+3}\Big(\sum_{l=1}^{k} q_{4l+1}\Big) - \lambda_{4k+5}\Big(\sum_{l=0}^{k} q_{4l+3}\Big) .$$

Calculons la limite de $G(k)$ pour k tendant vers l'infini

$$\lim G(k) = 1 - \frac{2}{\alpha(\alpha^2+1)}\Big(1 + \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^8} + \dots\Big)$$

$$= 1 - \frac{2\alpha^3}{(\alpha^2+1)^2(\alpha^2-1)} = \frac{3}{5} ,$$

ce qui démontre la proposition 3.

Soit $\mathcal{D}^3_K$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}^2_K$ défini par les conditions relatives aux suites normales $(b_k)_{k\in\{1,2,\dots,K-1\}}$ et $(d_k)_{k\in\{1,2,\dots,K-1\}}$ associées à r et x :

– Pour tout indice n, $b_n = 1$ implique $d_n = 0$.

– Si n_1 et n_2 sont deux indices consécutifs tels que $b_{n_1} = b_{n_2} = 1$, il existe un indice n' et un seul, $n_1 < n' < n_2$ tel que $d_{n'} = 1$.

PROPOSITION 4. – *Pour tout couple* (r, x), $(r, x) \in \mathcal{D}^3_K$ *et pour tout entier* K_0, $K_0 < K$:

$$\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_{K_0}\alpha\}, x_{K_0}) \leqslant \frac{3}{20}(K - 1 - K_0) + o(K) .$$

Afin de démontrer cette proposition, établissons les lemmes suivants.

LEMME 1. – *Soit* $(r, x) \in \mathcal{D}^3_{\mathrm{K}}$, *soit* n *un indice impair,* $n < \mathrm{K} - 6$ *tel que*

$$b_n = b_{n+6} = 1 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = b_{n+5} = 0\,.$$

Alors :

$$\varphi^-(\{r_{n+6}\alpha\}, x_{n+6}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) \leqslant 0{,}766 + \epsilon(n)$$

(*où* ϵ *est une suite tendant vers* 0).

Deux cas sont à envisager : $d_{n+2} = 1$ ou $d_{n+4} = 1$. Appliquons le lemme 0. Dans le premier cas :

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r_{n+6}\alpha\}, x_{n+6}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) &= -\lambda_{n+2}r_{n+1} + 1 - \lambda_{n+6}x_{n+5}\\ &\leqslant 1 - \lambda_{n+2}q_n - \lambda_{n+6}q_{n+2}\,.\end{aligned}$$

Dans le second cas :

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r_{n+6}\alpha\}, x_{n+6}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) &= -\lambda_{n+4}r_{n+3} + 1 - \lambda_{n+6}x_{n+5}\\ &\leqslant 1 - \lambda_{n+4}q_n - \lambda_{n+6}q_{n+4}\,.\end{aligned}$$

Or $\lambda_{n+p}q_n = \mathrm{L}(p) + \epsilon_p(n)$, $\mathrm{L}(4) < 0{,}065$ et $\mathrm{L}(2) > 0{,}169$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 2. – *Soit* $(r, x) \in \mathcal{D}^3_{\mathrm{K}}$. *Soient* k *un entier,* $3 < k < \mathrm{K}/2$ *et* n *un indice impair,* $n < \mathrm{K} - 2k$ *tels que :* $b_n = b_{n+2k} = 1$ *et* $b_{n+1} = \ldots = b_{n+2k-1} = 0$. *Alors :*

$$\varphi^-(\{r_{n+2k}\alpha\}, x_{n+2k}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) < 1\,.$$

Soit n' l'indice, $n < n' < n + 2k$ tel que $d_{n'} = 1$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r_{n+2k}\alpha\}, x_{n+2k}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) &= -\lambda_{n'}r_{n'-1}\\ &\quad + 1 - \lambda_{n+2k}x_{n+2k-1} < 1\,.\end{aligned}$$

LEMME 3. – *Soit* $(r, x) \in \mathcal{D}^3_{\mathrm{K}}$. *Soient* k *un entier,* $0 < k < \dfrac{\mathrm{K}}{4}$ *et* n *un indice impair,* $n < \mathrm{K} - 4k$ *tels que :* $b_n = b_{n+4} = \ldots = b_{n+4k} = 1$. *Alors :*

$$\varphi^-(\{r_{n+4k}\alpha\}, x_{n+4k}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) \leqslant \frac{3}{5}k + 0{,}102 + \sum_{l=0}^{k-1}\epsilon(n+4l)$$

(*où* ϵ *est une suite tendant vers* 0).

Remarquons que $(r, x) \in \mathcal{D}^3_{\mathrm{K}}$ implique

$$d_{n+2} = d_{n+6} = \ldots = d_{n+4k-2} = 1\,.$$

Supposons que $n \equiv 3 \pmod 4$, posons $n = 4k_0 + 3$. En appliquant le lemme 0 nous obtenons :

$$\varphi^-(\{r_{n+4k}\alpha\}, x_{n+4k}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) = k - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} r_{4k_0+4+4l} - \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} x_{4k_0+6+4l}$$

or

$$r_{4k_0+4+4l} \geqslant \sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3} - (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-5} + \ldots) \geqslant \sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3} - (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4})$$

(d'après (i)).

De même :

$$x_{4k_0+6+4l} \geqslant \sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+5} - (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2})$$

d'où :

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r_{n+4k}\alpha\}, x_{n+4k}) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) \leqslant k &- \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} \Big(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3}\Big) \\ &- \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} \Big(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+5}\Big) \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4}) \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2}).\end{aligned}$$

Il est évident (voir proposition 3) que :

$$1 - \lambda_{4k_0+5+4l}\Big(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+3}\Big) - \lambda_{4k_0+7+4l}\Big(\sum_{j=0}^{l+k_0} q_{4j+5}\Big) = \frac{3}{5} + \epsilon'(k_0 + l)$$

(où ϵ' est une suite tendant vers 0).

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+5+4l} (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4}) &< \lambda_{4k_0+4} (q_{4k_0-1} + q_{4k_0-4}) \\ &= \mathrm{L}(5) + \mathrm{L}(8) + \epsilon_5(4k_0 - 1) + \epsilon_8(4k_0 - 4).\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k-1} \lambda_{4k_0+7+4l} (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2}) &< \lambda_{4k_0+6} (q_{4k_0+1} + q_{4k_0-2}) \\ &= \mathrm{L}(5) + \mathrm{L}(8) + \epsilon_5(4k_0 + 1) + \epsilon_8(4k_0 - 2)\end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi^{-}(\{r_{n+4k}\alpha\}, x_{n+4k}) - \varphi^{-}(\{r_n\alpha\}, x_n) \leqslant \frac{3}{5}k + 2(\mathrm{L}(5) + \mathrm{L}(8)) + \sum_{l=0}^{k-1} \epsilon(n+4l).$$

Il est évident que l'on obtient un résultat analogue si $n \equiv 1 \pmod 4$. Le lemme 3 se déduit de l'inégalité précédente et du fait que $\mathrm{L}(5) < 0{,}041$ et $\mathrm{L}(8) < 0{,}010$.

Démontrons maintenant la proposition 4. Soit $(r, x) \in \mathcal{D}_{\mathrm{K}}^3$. Considérons la suite (b_n) et les trois types de séquences décrites dans les lemmes 1, 2, 3 apparaissant dans cette suite. Toutes les séquences (sauf peut-être au plus une) du type du lemme 3 sont précédées d'une séquence du type du lemme 1 ou du lemme 2.

La proposition 4 est une conséquence triviale des lemmes 1, 2 et 3, en remarquant que $1 + 0{,}102 < 8.\ \frac{3}{20}$ et $0{,}766 + 0{,}102 < 6.\ \frac{3}{20}$.

5. Troisième réduction.

Proposition 5. –

$$\sup_{(r,x)\in\mathcal{D}_{\mathrm{K}}^2} \varphi^{-}(\{r\alpha\}, x) = \sup_{(r,x)\in\mathcal{D}_{\mathrm{K}}^3} \varphi^{-}(\{r\alpha\}, x) + o(\mathrm{K}).$$

Supposons K impair et considérons un couple (r, x) appartenant à $\mathcal{D}_{\mathrm{K}}^2$ tel que :

– pour $k > \mathrm{K} - 22$, $b_k = 1 \Longrightarrow d_k = 0$;

– il existe k, $\mathrm{K} - 22 < k < \mathrm{K} - 2$ tel que $b_k \neq d_k$.

Soit n, s'il existe, le plus grand indice tel que $b_n = d_n = 1$. Soit alors p le plus petit des indices $k > n$ tels que $b_k \neq d_k$. Considérons les différents cas suivants :

a) $p > n + 2$

* Supposons $b_p = 1$ et considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{cccc} & n & & \\ (b_k) & 1 & 0 & 0 \\ (d_k) & 1 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} n & & \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Appliquons (iv) et le lemme 0 pour minorer $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$ dans les deux cas suivants :

a$_1$) $x_{n-1} > r_{n-1}$

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) &\geqslant \lambda_n q_n + \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+2}(r_{n-1} + q_n)\\ &\quad - \lambda_{n+3}(q_{n+2} - q_n) \geqslant q_n(\lambda_n - \lambda_{n+2}) - \lambda_{n+3} q_{n+1}\\ &= q_n \lambda_{n+1} - \lambda_{n+3} q_{n+1} > 0 .\end{aligned}$$

a$_2$) $x_{n-1} < r_{n-1}$

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) &\geqslant -1 + \lambda_n q_n + \lambda_n r_{n-1} - \lambda_{n+2}(r_{n-1} + q_n)\\ &\quad - \lambda_{n+3}(q_{n-2} - q_n) + 1 \geqslant q_n \lambda_{n+1} - \lambda_{n+3} q_{n+1} > 0 .\end{aligned}$$

* Si $d_p = 1$, le changement de composantes

$$\begin{array}{cccc} & n & & \\ (b_k) & 1\ 0\ 0 & \longrightarrow & 0\ 0\ 1 \\ (d_k) & 1\ 0\ 0 & & 1\ 0\ 0 \end{array}$$

conduit au même résultat.

b) $p = n + 2$

* Supposons $b_p = 1$ et examinons les différents cas suivants :

b$_1$) $x_{n-1} < r_{n-1}$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes

$$\begin{array}{cccc} & n & & n \\ (b_k) & 1\ 0\ 1 & \longrightarrow & 0\ 0\ 1 \\ (d_k) & 1\ 0\ 0 & & 1\ 0\ 0 . \end{array}$$

D'après le lemme 0,

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant -1 + \lambda_n x_n + 1 > 0 .$$

b$_2$) $x_{n-1} > r_{n-1}$

b$_{21}$) $d_{n-2} = 0$

Remarquons qu'alors $b_{n-2} = 0$ et considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{cccc} & n & & n \\ (b_k) & 0\ 0\ 1\ 0\ 1 & \longrightarrow & 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ (d_k) & 0\ 0\ 1\ 0\ 0 & & 0\ 0\ 1\ 0\ 0 . \end{array}$$

En utilisant (iv) et le lemme 0 nous obtenons :

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 1 - \lambda_{n-2}x_{n-3} - 1 + \lambda_n(q_n + x_{n-3}) - \lambda_n q_{n-2} \geqslant \lambda_n q_{n-1} - \lambda_{n-1}q_{n-3} > 0 .$$

b$_{22}$) $d_{n-2} = 1$

Considérons (r', x') défini par le changement de composantes :

$$\begin{array}{cc|c} n & & \\ 1 & 0 & 1 \\ & & \quad A \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|c} n & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \quad A \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{sauf les 2 der-} \\ \text{nières compo-} \\ \text{santes} \end{array}$$

c'est-à-dire $b'_n = 1$, $d'_n = 0$; $b'_{n+1} = d'_{n+1} = 0$; $b'_{n+2} = 0$, $d'_{n+2} = 1$ et pour un indice k tel que : $n+3 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}-1$, $b'_k = b_{k-2}$ et $d'_k = d_{k-2}$.

Calculons $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$

$$\begin{aligned} \varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) = {} & \varphi^-(\{r'_n\alpha\}, x'_n) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) \\ & + (\varphi^-(\{r'_{n+2}\alpha\}, x'_{n+2}) - \varphi^-(\{r'_{n+1}\alpha\}, x'_{n+1})) \\ & + (\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r'_{n+3}\alpha\}, x'_{n+3}) \\ & - (\varphi^-(\{r_{\mathrm{K}-3}\alpha\}, x_{\mathrm{K}-3}) - \varphi^-(\{r_{n+1}\alpha\}, x_{n+1}) \\ & - (\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_{\mathrm{K}-3}\alpha\}, x_{\mathrm{K}-3})) . \end{aligned}$$

Afin d'évaluer cette somme, établissons le lemme suivant :

LEMME 4. – *Soit* $(r, x) \in \mathcal{D}^2_{\mathrm{K}}$ $\left(r = \sum_{i=1}^{\mathrm{K}-1} b_i q_i \ \text{ et } \ x = \sum_{i=1}^{\mathrm{K}-1} d_i q_i\right)$. *Posons* $r' = \sum_{i=1}^{\mathrm{K}-1} b_i q_{i+2}$ *et* $x' = \sum_{i=1}^{\mathrm{K}-1} d_i q_{i+2}$. *Alors, pour tout entier n :*

$$\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r'_{n+2}\alpha\}, x'_{n+2}) = \varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n) + \mathrm{O}(\lambda_n) .$$

Posons :

$$\Delta = \varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r'_{n+2}\alpha\}, x'_{n+2}) - (\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_n\alpha\}, x_n)$$

et calculons Δ en appliquant le lemme 0

$$\Delta = \sum_{k=n+1}^{\mathrm{K}-1} (-1)^k \left[\lambda_{k+2}(d_k r'_{k+1} + b_k x'_{k+2}) - \lambda_k(d_k r_{k-1} + b_k x_k)\right] .$$

Comparons $\lambda_{k+2} r'_{k+1}$ à $\lambda_k r_{k-1}$

$$\lambda_{k+2} r'_{k+1} = \lambda_{k+2} \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_{i+2}$$

$$\lambda_k r_{k-1} = \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i .$$

Or $b_i \neq 0 \Longrightarrow i$ impair. Supposons donc i impair

$$\lambda_{k+2} q_{i+2} = \lambda_k q_i \left(\frac{\lambda_{k+2}}{\lambda_k} \frac{q_{i+2}}{q_{i+1}} \frac{q_{i+1}}{q_i}\right)$$

$$= \lambda_k q_i \left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \left(\alpha + \frac{\lambda_{i+1}}{q_{i+1}}\right) \left(\alpha - \frac{\lambda_i}{q_i}\right) = \lambda_k q_i \left[1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{q_i^2}\right)\right]$$

d'où :

$$\lambda_{k+2} r'_{k+1} = \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i \left[1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{q_i^2}\right)\right] = \lambda_k r_{k-1} + \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} b_i \, \mathrm{O}\left(\frac{1}{q_i}\right)$$

$$= \lambda_k r_{k-1} + \mathrm{O}(\lambda_k) .$$

De même $\lambda_{k+2} x'_{k+2} = \lambda_k x_k + \mathrm{O}(\lambda_k)$. D'où :

$$\Delta = \sum_{\substack{k=n+1 \\ k \text{ impair}}}^{\mathrm{K}-1} \mathrm{O}(\lambda_k) = \mathrm{O}(\lambda_n) \qquad \text{(d'après (iv))},$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.

Revenons à la minoration de $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$.

Introduisons (r'', x'') défini par : $r'' = \sum_{i=1}^{\mathrm{K}-3} b_i q_{i+2}$ et $x'' = \sum_{i=1}^{\mathrm{K}-3} d_i q_{i+2}$ et posons :

$$\Delta_2 = \varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r'_{n+3}\alpha\}, x'_{n+3}) - (\varphi^-(\{r''\alpha\}, x'') - \varphi^-(\{r''_{n+3}\alpha\}, x''_{n+3}))$$

$$\Delta_3 = \varphi^-(\{r''\alpha\}, x'') - \varphi^-(\{r''_{n+3}\alpha\}, x''_{n+3}) - (\varphi^-(\{r_{\mathrm{K}-3}\alpha\}, x_{\mathrm{K}-3}) - \varphi^-(\{r_{n+1}\alpha\}, x_{n+1}))$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_3 .$$

$$\begin{aligned}\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) &= \lambda_n r_{n-1} + \lambda_n q_n - \lambda_{n+2}(r_{n-1} + q_n) \\ &\quad + \Delta_1 - (\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_{\mathrm{K}-3}\alpha\}, x_{\mathrm{K}-3})) \\ &\geqslant \lambda_{n+1} q_n + \Delta_1 - (\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_{\mathrm{K}-3}\alpha\}, x_{\mathrm{K}-3})) .\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 4, $\Delta_3 = O(\lambda_n)$ et,

$$\Delta_2 = \sum_{\substack{i=n+4 \\ i \text{ impair}}}^{K-1} \lambda_i \left[d_i(r''_{n+3} - r'_{n+3}) + b_i(x''_{n+3} - x'_{n+3})\right]$$

$$\geqslant \lambda_{n+4}(x''_{n+3} - x'_{n+3})$$

$$(\text{car } r''_{n+3} > r'_{n+3} \text{ et } x''_{n+3} > x'_{n+3})$$

$$\Delta_2 \geqslant \lambda_{n+4} q_{n-1} \qquad (\text{car } d_{n-2} = 1 \text{ et } q_n - q_{n-2} = q_{n-1})$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) &\geqslant \lambda_{n+1} q_n + \lambda_{n+4} q_{n-1} + O(\lambda_n) \\ &\quad - (\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_{K-3}\alpha\}, x_{K-3})) \geqslant 0{,}316 \\ &\quad - (\varphi^-(\{r\alpha\}, x) - \varphi^-(\{r_{K-3}\alpha\}, x_{K-3})) + \epsilon(n) \end{aligned}$$

(où ϵ est une suite tendant vers 0).

En effet :

$\lambda_{n+1} q_n \longrightarrow L(1)$; $\lambda_{n+4} q_{n-1} \longrightarrow L(5)$; $L(1) > 0{,}276$ et $L(5) > 0{,}04$.

* Si $d_p = 1$ les changements de composantes définis dans les cas suivants :

b$'_1$) $x_{n-1} > r_{n-1}$

$$\begin{array}{lccc} & n & & \\ (b_k) & 1\ 0\ 0 & \longrightarrow & 1\ 0\ 0 \\ (d_k) & 1\ 0\ 1 & & 0\ 0\ 1 \end{array}$$

b$'_2$) $x_{n-1} < r_{n-1}$

b$'_{21}$) $b_{n-2} = 0$

$$\begin{array}{lccc} & \quad\quad\ \ n & & n \\ (b_k) & 0\ 0\ 0\ 1 & \longrightarrow & 0\ 0\ 1 \\ (d_k) & 0\ 0\ 0\ 1 & & 1\ 0\ 0 \end{array}$$

b$'_{22}$) $b_{n-2} = 1$

$$\begin{array}{lllcll} (b_k) & 1\ 0 & 0 & & 0\ 0\ 1\ 0 & 0 \\ & & \quad A & \longrightarrow & & \quad A \quad \text{sauf les deux dernières composantes} \\ (d_k) & 1\ 0 & 1 & & 1\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}$$

donnent respectivement les mêmes résultats que dans les cas b$_1$), b$_{21}$) et b$_{22}$).

Afin de pouvoir tirer parti des minorations effectuées dans les cas b_{22}) et b'_{22}), établissons les lemmes suivants :

LEMME 5. – *Soit* (r, x) *un couple de* $\mathcal{D}^2_K$ *tel que* $b_n = 1$ *implique* $d_n = 0$. *Alors il existe un couple* (r', x') *de* $\mathcal{D}^3_K$ *tel que :* $\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') \geqslant \varphi^-(\{r\alpha\}, x)$.

Ce lemme se déduit trivialement du lemme 0.

LEMME 6. – *Soit* K *un entier impair,* $K > 22$. *Soit* $(r, x) \in \mathcal{D}^2_K$. *Soient* k *un entier,* $k \geqslant 1$ *et* $(r', x') \in \mathcal{D}^2_{K+2k}$ *tel que, pour tout indice* i, $K - 20 \leqslant i < K$ *on ait :* $b'_{i+2k} = b_i$ *et* $d'_{i+2k} = d_i$.

Supposons de plus que pour

$$i = K - 3 \text{ et } i = K - 2,\ x_i < r_i \Longleftrightarrow x'_{i+2k} < r'_{i+2k}.$$

Alors :

$$|\varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r'_{K+2k-3}\alpha\}, x'_{K+2k-3}) - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) + \varphi^-(\{r_{K-3}\alpha\}, x_{K-3})| \leqslant 0{,}01 + \epsilon(K)$$

(*où* ϵ *est une suite tendant vers* 0).

Posons :

$$\Delta = \varphi^-(\{r'\alpha\}, x') - \varphi^-(\{r'_{K+2k-3}\alpha\}, x'_{K+2k-3}) - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) + \varphi^-(\{r_{K-3}\alpha\}, x_{K-3})$$

et appliquons le lemme 0 (K est impair) :

$$\Delta = \lambda_{K-2}(d_{K-2}r_{K-3} + b_{K-2}x_{K-2}) - \lambda_{K+2k-2}(d_{K-2}r'_{K-2k-3} + b_{K-2}x'_{K-2k-2}).$$

Or :

$$r'_{K+2k-3} = r'_{K+2k-21} + \sum_{i=K-20}^{K-1} b_i q_{i+2k}$$

et

$$r_{K-3} = r_{K-21} + \sum_{i=K-20}^{K-1} b_i q_i$$

d'où :

$$|\lambda_{K-2}r_{K-3} - \lambda_{K+2k-2}r'_{K+2k-3}| \leqslant |\lambda_{K-2}r_{K-21} - \lambda_{K+2k-2}r'_{K+2k-21}| + \left|\sum_{i=K-20}^{K-3} b_i(\lambda_{K-2}q_i - \lambda_{K+2k-2}q_{i+2k})\right|$$

$$|\lambda_{K-2}r_{K-3} - \lambda_{K+2k-2}r'_{K+2k-3}| \leqslant \lambda_{K-2}q_{K-20} + \lambda_{K+2k-2}q_{K+2k-20} + \epsilon(K)$$

(d'après (i) et la convergence des suites $n \longrightarrow \lambda_{n+p} q_n$) ; soit :

$$|\lambda_{K-2} r_{K-3} - \lambda_{K+2k-2} r'_{K+2k-3}| < \frac{2}{\alpha^{19}} + \epsilon(K) \qquad \text{(d'après (ii) et (viii))}.$$

On majore de la même façon l'autre terme entrant dans la composition de Δ et on obtient $|\Delta| \leqslant (4/\alpha^{18}) + \epsilon(K)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Supposons K impair et considérons $(r, x) \in \mathcal{D}_K^2$ tel que, pour $k > K - 22$, $b_k = 1 \longrightarrow d_k = 0$ et tel qu'il existe p, $p > K - 22$ pour lequel $b_p \neq d_p$.

Définissons $(R, X) \in \mathcal{D}_K^2$ en effectuant successivement pour tous les indices n nécessaires les changements de composantes définis précédemment.

Supposons que nous ayons eu à effectuer l changements de composantes correspondant aux cas b_{22}) ou b'_{22}). Pour $i = 1, 2, \ldots, l$, appelons (r^i, x^i) les couples obtenus avant le i$^{\text{ème}}$ changement de composantes correspondant aux cas b_{22}) ou b'_{22}).

Nous noterons :

$$r^i = \sum_{k=1}^{K-1} b_k^i q_k \qquad \text{et} \qquad x^i = \sum_{k=1}^{K-1} d_k^i q_k .$$

En utilisant les notations précédentes nous obtenons :

$$\varphi^-(\{R\alpha\}, X) - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant 0{,}316\, l - \sum_{i=l}^{l} ((\varphi^-(\{r^i\alpha\}, x^i) - \varphi^-(\{r^i_{K-3}\alpha\}, x^i_{K-3})) + O(1)$$

en effet, d'apres (iv), $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \lambda_n = O(1)$.

Notons $R = \sum_{k=1}^{K-1} B_k q_k$ et $X = \sum_{k=1}^{K-1} D_k q_k$ et considérons $(R', X') \in \mathcal{D}^2_{K+2l}$ défini de la façon suivante :

$R' = \Sigma\ B'_k q_k$ et $X' = \Sigma\ D'_k q_k$, où, pour $k < K$ $B'_k = B_k$ et $D'_k = D_k$ et pour $K \leqslant k < K + 2l$, $B'_k = b_{k-2s}^{l-s+1}$ et $D'_k = d_{k-2s}^{l-s+1}$ si $K + 2(s-1) \leqslant k < K + 2s$.

Remarque. — (R', X') est obtenu comme (r', x') en effectuant les différents changements de composantes, mais en gardant les deux composantes supplémentaires à chaque changement du type b_{22}) ou b'_{22}).

(R', X') vérifie les propriétés suivantes :

– si $k < K + 2l \quad B'_k = 1 \Longrightarrow D'_k = 0$

– pour tout s, $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$,

$$r^s_{K-2} < x^s_{K-2} \Longleftrightarrow R'_{K+2(l-s)} < X'_{K+2(l-s)}$$

– pour tout s, $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$ et pour tout k, $K - 20 \leqslant k < K$

$$b^s_k = B'_{k+2(l-s+1)} \quad \text{et} \quad d^s_k = D'_{k+2(l-s+1)} .$$

D'après le lemme 6 :

$$\sum_{i=1}^{l} (\varphi^-(\{r^i \alpha\}, x^i) - (\varphi^-\{r^i_{K-3}\alpha\}, x^i_{K-3}))$$
$$\leqslant \varphi^-(\{R'\alpha\}, X') - \varphi^-(\{R'_{K-1}\alpha\}, X'_{K-1}) + l.\, 0{,}01 + l\,\epsilon(K).$$

Nous obtenons donc :

$$\varphi^-(\{R\alpha\}, X) - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant l\,[0{,}306 + \epsilon(K)] - (\varphi^-(\{R'\alpha\}, X')$$
$$- \varphi^-(\{R'_{K-1}\alpha\}, X'_{k-1})) + O(1)$$

or, d'après la proposition 4 et le lemme 5 :

$$\varphi^-(\{R'\alpha\}, X') - \varphi^-(\{R'_{K-1}\alpha\}, X'_{K-1}) \leqslant 0{,}3\,l + o(K)$$

donc, finalement :

$$\varphi^-(\{R\alpha\}, X) - \varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant o(K) .$$

Il est clair que nous obtenons le même résultat si K est pair.

Soit maintenant un couple (u, v) de $\mathcal{D}^2_K$. D'après le corollaire 0, il existe $(r, x) \in \mathcal{D}^2_K$ tel que pour $k > K - 22$, $b_k = 1 \Longrightarrow d_k = 0$, tel qu'il existe p, $K - 22 < p < K - 2$ avec $b_p \neq d_p$ et tel que :

$$\varphi^-(\{r\alpha\}, x) \geqslant \varphi^-(\{u\alpha\}, v) - 22 .$$

En appliquant le résultat précédent, il existe un couple $(R, X) \in \mathcal{D}^2_K$ tel que pour $k < K$, $B_k = 1 \Longrightarrow D_k = 0$ et $\varphi^-(\{u\alpha\}, v) \leqslant \varphi^-(\{R\alpha\}, X) + o(K)$.

La proposition 5 est maintenant une conséquence immédiate du lemme 5 .

6. Le résultat final.

THEOREME. — $S^*\left(\left(\left\{n\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)\right) = \dfrac{0{,}15}{\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Ce théorème se déduit immédiatement des propositions 1, 2, 3 et 5.

Remarques

a) Si u désigne la suite de van der Corput, R. Bejian et H. Faure [1] ont montré que $S(u) = \dfrac{1}{3 \operatorname{Log} 2}$.

b) Nous conjecturons que pour la suite $\left(\left\{n\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$, $S\left(\left(\left\{n\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)\right) = \dfrac{0{,}2}{\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Cette quantité est peu différente de 0,415 donc inférieure à $\dfrac{1}{3 \operatorname{Log} 2}$. Une preuve de cette conjecture donnerait un exemple de suite u pour laquelle $S(u)$ est plus petit que la quantité analogue calculée dans le cas de la suite de van der Corput (qui donne le meilleur résultat connu actuellement pour S).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEJIAN et H. FAURE, Discrépance de la suite de van der Corput, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 285 (1977), 313-316.

[2] Y. DUPAIN, Intervalles à restes majorés pour la suite $\{n\alpha\}$, *Acta. Math. Acad. Scient. Hung.*, t. 29(3,4) (1977), 289-303.

[3] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, Wiley Interscience, New York, (1974), 88-132.

[4] J. LESCA, Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Acta Arith.*, 20 (1972), 345-352.

[5] J. LESCA, Sur la répartition modulo 1 des suites $\{n\alpha\}$, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou,* (1966-67), fascicule 1, exposé n° 2.

Manuscrit reçu le 6 septembre 1977.

Yves DUPAIN,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226
U.E.R. de Mathématiques et
d'Informatique de l'Université
de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex.