ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROLAND GILLARD

Unités cyclotomiques, unités semi-locales et $\mathbb{Z}_\ell$-extensions

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 1 (1979), p. 49-79

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_49_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 1 (1979), 49-79

UNITÉS CYCLOTOMIQUES UNITÉS SEMI-LOCALES ET Z_ℓ-EXTENSIONS

par Roland GILLARD

Dédié à Monsieur Claude Chabauty.

0. Introduction.

Soit K un corps de nombres abélien réel, G le groupe de Galois de $K/\mathbf{Q}$ et ℓ un nombre premier. Pour chaque idéal premier $\mathcal{L}$ de K au-dessus de ℓ, désignons par $U_\mathcal{L}$ le groupe des unités du complété correspondant $K_\mathcal{L}$ qui sont congrues à 1 modulo le complété de $\mathcal{L}$. Nous appelons groupe des unités semi-locales le groupe $U = \prod_{\mathcal{L}|\ell} U_\mathcal{L}$. Soit C (resp. E) le groupe des unités cyclotomiques formelles de K – cf. [14] et § 2.2 – (resp. le groupe des unités de K). Considérons l'intersection de U et de l'image de C par l'application diagonale dans le produit $\hat{K} = \prod_{\mathcal{L}|\ell} K_\mathcal{L}$. Désignons par $\overline{C}$ sa fermeture dans U muni de la topologie produit. On note $\mathcal{C}(K)$ le ℓ-groupe des classes de K.

Si G est d'ordre premier à ℓ, on peut décomposer l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}_\ell[G]$ et les modules sur $\mathbf{Z}_\ell[G]$ à l'aide des idempotents de G associés aux caractères définis et irréductibles sur $\mathbf{Q}_\ell$. si Φ est un tel caractère, R. Greenberg ([8] cf. aussi [4]) donne l'ordre, pour $\ell \neq 2$, de la Φ-composante du quotient $U/\overline{C}$ exprimé à l'aide de la valeur au point 1 de la fonction L ℓ-adique associée à Φ. Soit E/C le ℓ-sous-groupe de Sylow du quotient E/C. On sait, d'après la théorie de Leopoldt [14], que les ordres de $(E/C)_\ell$ et $\mathcal{C}(K)$ sont égaux. G. Gras ([6]) a conjecturé que les ordres des Φ composantes de $(E/C)_\ell$ et $\mathcal{C}(K)$ sont aussi égaux. Pour des raisons de rang, on ne peut pas espérer en général d'isomorphisme entre ces composantes. J. Coates et S. Lichtenbaum ont énoncé ([1]) une conjecture et ont donné des conditions suffisantes de vérification (cf. ci-dessous conjecture 2 de 6.1 et début de 6.2). Le résultat cité plus haut donnant l'ordre de la Φ composante de $U/\overline{C}$ et la conjecture précédente entraînent la validité de la conjecture de G. Gras pour $\ell \neq 2$ (cf. [8] et [4]).

Je me propose dans cet article d'étendre aux extensions abéliennes quelconques de $\mathbf{Q}$ le résultat sur $U/\overline{C}$ établi par Greenberg évoqué ci-dessus. En effet, G s'écrit canoniquement sous la forme d'un produit direct $\Gamma \times \Delta$ avec Γ sous-groupe d'ordre une puissance de ℓ et Δ sous-groupe d'ordre premier à ℓ. Il est alors possible de décomposer l'anneau $\mathbf{Z}_\ell[\Delta]$ et les modules sur $\mathbf{Z}_\ell[\Delta]$ à l'aide des idempotents associés aux caractères de Δ définis et irréductibles sur $\mathbf{Q}_\ell$. Si Φ est un tel caractère, j'obtiens alors (au § 4.4) une formule analogue à celle de [8] pour l'ordre de la Φ composante de $U/\overline{C}$. Il y figure une constante N_Γ qui ne dépend que de la structure de Γ et qui joue le même rôle que l'indice limite Q_G dans [14]. Lorsque Γ est cyclique, il est possible (cf. § 5) de supprimer cette constante en agrandissant le groupe C.

Dans la deuxième partie de cet article, j'étudie une généralisation de la conjecture de Gras concernant les différents étages de la $\mathbf{Z}_\ell$ extension d'un corps de nombres abélien réel de degré fini premier à ℓ sur $\mathbf{Q}$. Comme dans [8] et [4], on utilise la conjecture de Coates et Lichtenbaum. Le § 6.4 contient la démonstration de cette conjecture dans des conditions légèrement plus larges que celles de [1]. Le § 7 concerne le cas $\ell = 2$, on énonce une conjecture analogue à celle de Coates et Lichtenbaum et on donne des conditions de vérification analogues à celles de 6.4. L'application à la conjecture de G. Gras est plus délicate (comparer les théorèmes 4 et 4'). Les résultats sont énoncés en 6.2 ($\ell \neq 2$) et 7.2 ($\ell = 2$).

Dans la suite, nous choisissons une clôture algébrique Ω_ℓ de $\mathbf{Q}_\ell$ et un plongement φ dans Ω_ℓ d'une extension abélienne maximale $\mathbf{Q}^{ab}$ de $\mathbf{Q}$ contenant K. On utilise la valeur absolue de Ω_ℓ telle que $|\ell| = \frac{1}{\ell}\cdot$ Pour tout entier positif n on choisit dans $\mathbf{Q}^{ab}$ une racine de l'unité d'ordre n, ζ_n de façon à avoir des relations de compatibilité $\zeta_{nm}^m = \zeta_n$.

1. Préliminaires.

1.1. Tous les caractères que nous étudions sont à valeurs dans Ω_ℓ. On appelle $\mathbf{Q}$-caractères (resp. $\mathbf{Q}_\ell$-caractères, resp. Ω_ℓ-caractères) d'un groupe, les caractères définis et irréductibles sur $\mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{Q}_\ell$, resp. Ω_ℓ). Si H est un groupe fini, à tout caractère χ de H défini sur $\mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{Q}_\ell$, resp. Ω_ℓ), on associe un élément e_χ de $\mathbf{Q}[H]$ (resp. $\mathbf{Q}_\ell[H]$, resp. $\Omega_\ell[H]$) par la formule :

$$e_\chi = \frac{1}{[H]} \sum_{\sigma \in H} \chi(\sigma^{-1})\sigma . \tag{1}$$

Nous choisissons une fois pour toutes un $\mathbf{Q}_\ell$-caractère non trivial Φ de Δ ; soit d sa dimension. Par l'inclusion canonique de $\mathbf{Z}_\ell[\Delta]$ dans $\mathbf{Z}_\ell[G]$, e_Φ s'identifie à l'idempotent de $\mathbf{Z}_\ell[G]$ associé par (1) au caractère Φ^* de G induit par Φ. La décomposition de Φ en Ω_ℓ-caractères est notée : $\Phi = \sum_{\psi \mid \Phi} \psi$. Choisissons un Ω_ℓ-composant ψ_0 de Φ (i.e. un Ω_ℓ-caractère intervenant dans la décomposition précédente) et désignons par A (resp. L) le sous-anneau de Ω_ℓ engendré sur $\mathbf{Z}_\ell$ (resp. le sous-corps de Ω_ℓ engendré sur $\mathbf{Q}_\ell$) par l'image de ψ_0. On définit comme suit un isomorphisme d'anneaux :

$$e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G] \xrightarrow{\sim} A[\Gamma] \; ; \tag{2}$$

à l'élément $\Sigma\, a_{\gamma\delta}\, \gamma\delta$ de $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]$, somme prise sur tous les couples (γ, δ) de $\Gamma \times \Delta \simeq G$ et les coefficients $a_{\gamma\delta}$ étant dans $\mathbf{Z}_\ell$, on associe l'élément $\Sigma\, a_{\gamma\delta} \cdot \psi_0(\delta)\gamma$ de $A[\Gamma]$. Par extension des scalaires, on déduit aussi un isomorphisme entre $e_\Phi \mathbf{Q}_\ell[G]$ et $L[\Gamma]$.

Si H est un groupe abélien fini et χ un Ω_ℓ-caractère, on désigne par g_χ l'ordre de χ (considéré comme élément du groupe dual de H) et d_χ le discriminant du corps $\mathbf{Q}(\zeta_{g_\chi})$. Si ξ est un $\mathbf{Q}$-caractère de H, on pose $g_\xi = g_\chi$ et $d_\xi = d_\chi$ où χ est un Ω_ℓ-composant quelconque de ξ.

Pour chaque Ω_ℓ-caractère χ de G, soit K_χ le sous-corps de K défini par le noyau de χ considéré comme homomorphisme de G dans Ω_ℓ^* et f_χ le conducteur de K_χ. Si χ est un Ω_ℓ-composant d'un $\mathbf{Q}$-caractère ξ de G, on notera encore K_ξ ou f_ξ pour K_χ ou f_χ. Tout Ω_ℓ-caractère χ de G définit un caractère de Dirichlet modulo f_χ, qu'on note encore χ. Ceci permet de définir une somme de Gauss :

$$\tau(\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,f_\chi)=1}}^{f_\chi} \chi(a)\,\zeta_{f_\chi}^{a} .$$

1.2. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K et $\hat{\mathcal{O}}$ le produit des anneaux des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$ des complétés $K_{\mathcal{L}}$ pour $\mathcal{L}$ au-dessus de ℓ. Les anneaux $\hat{\mathcal{O}}$ et $\hat{K}$ sont les complétés ℓ-adiques de $\mathcal{O}$ et K : on identifie donc $\mathcal{O}$ et K à leurs images dans $\hat{\mathcal{O}}$ et $\hat{K}$ par l'application diagonale. L'action d'un élément quelconque σ de G se prolonge par continuité en un automorphisme de l'anneau $\hat{K}$ encore noté σ. De même on prolonge par continuité la restriction à K du plongement φ en une application encore notée φ. Pour chaque $\mathcal{L}|\ell$ le logarithme définit une application de $U_{\mathcal{L}}$ dans $K_{\mathcal{L}}$. Notons $\mathcal{L}og$ l'application de U dans $\hat{K}$, produit des applications précédentes. Pour chaque Ω_ℓ-caractère χ de G, définissons une application T_χ de $\hat{K}$ dans Ω_ℓ par :

$$T_\chi(\alpha) = \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma)^{-1}\,\varphi(\sigma(\alpha)) .$$

Il est facile de vérifier que l'on a la formule :

$$\forall\tau \in G\,,\quad T_\chi(\tau(\alpha)) = \chi(\tau)\,.\,T_\chi(\alpha) .$$

Cette formule se prolonge par $\mathbf{Z}_\ell$-linéarité :

$$\forall u \in \mathbf{Z}_\ell[G]\,,\quad T_\chi(u(\alpha)) = \chi(u)\,T_\chi(\alpha) . \tag{3}$$

Si ϵ est une unité de K congrue à 1 modulo $\mathcal{L}$ $(\forall\mathcal{L}|\ell)$, $\varphi(\sigma(\mathcal{L}og\,\epsilon))$ est égal à $\varphi(\mathcal{L}og\,\sigma(\epsilon))$ donc à $\log[\varphi(\epsilon^\sigma)]$. Ici log est le logarithme dans Ω_ℓ, cf. [12] § 4 ; ainsi :

$$T_\chi(\mathcal{L}og\,\epsilon) = \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma^{-1})\,\log[\varphi(\epsilon^\sigma)] . \tag{4}$$

1.3. Si M et N sont deux A-modules qui sont des réseaux dans un même espace vectoriel de dimension finie, on peut leur associer un idéal fractionnaire [M,N] (cf. [3]) de A. Cet idéal est de la forme $\ell^a.A$ pour a unique dans $\mathbf{Z}$. Nous appelons "indice" de N dans M et nous notons encore [M : N] le nombre rationnel ℓ^a. Bien sûr, si M contient N, [M : N] est égal à l'indice de N dans M au sens usuel. Enfin si M est un réseau et si N est de rang strictement inférieur, on dit que l'"indice" [M : N] est infini.

Soit α un élément de $\hat{\mathrm{K}}$ tel que $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\,.\,\alpha$ soit un réseau du L-espace vectoriel $e_\Phi \hat{\mathrm{K}}$, c'est-à-dire soit un $\mathbf{Z}_\ell$ module libre de rang d. Soit β un élément de $\hat{\mathrm{K}}$. On peut alors énoncer :

LEMME 1. – *L'"indice" de $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\,.\,\beta$ dans $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\,.\,\alpha$ est fini si et seulement si pour tout $\mathbf{Z}_\ell$-composant χ de Φ^*, $\mathrm{T}_\chi(\beta)$ est non nul. Cet "indice" vaut alors :*

$$[e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\,.\,\alpha : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\,.\,\beta] = \left| \frac{\prod_{\chi | \Phi^*} \mathrm{T}_\chi(\alpha)}{\prod_{\chi | \Phi^*} \mathrm{T}_\chi(\beta)} \right| . \tag{5}$$

Démonstration. – On peut écrire $e_\Phi \beta = u(\alpha)$ avec u dans $e_\Phi \mathbf{Q}_\ell[\mathrm{G}]$; en multipliant β par une puissance de ℓ suffisante, on voit qu'on peut supposer que u est dans $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$, on a alors un isomorphisme entre $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\,.\,\alpha / e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\,.\,\beta$ et $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]/(u)$. Notons $\widetilde{u}$ l'application de $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$ dans lui-même définie par la multiplication par u. L'anneau $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$ est un $\mathbf{Z}_\ell$-module libre de rang d. L'indice étudié est fini si et seulement si le déterminant de $\widetilde{u}$ est non nul. Si cette condition est vérifiée l'indice vaut $|\mathrm{dét}\, \widetilde{u}|^{-1}$. Le déterminant de $\widetilde{u}$ peut être étudié à l'aide d'une extension des scalaires de $\mathbf{Z}_\ell$ à Ω_ℓ et de l'application Ω_ℓ-linéaire $e_\Phi \Omega_\ell[\mathrm{G}] \xrightarrow{\pi e_\chi} \Omega_\ell^{d.[\Gamma]}$ définie à l'aide des idempotents associés, cf. (1), aux Ω_ℓ-composants de Φ^*. Sur $\Omega_\ell^{d.[\Gamma]}$ l'endomorphisme $\widetilde{u}$ est traduit par une application linéaire de matrice diagonale, les éléments sur la diagonale de cette matrice sont précisément les nombres $\chi(u)$. Ainsi

$$[e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\alpha : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]\beta] = |\det \widetilde{u}|^{-1} = \left| \prod_{\chi | \Phi^*} \chi(u) \right|^{-1} .$$

Le lemme résulte alors de l'égalité (cf. § 1.2 (3)) : $\chi(u) = \dfrac{\mathrm{T}_\chi(\beta)}{\mathrm{T}_\chi(\alpha)}$.

2. Résumé de résultats de Leopoldt.

2.1. Rappelons rapidement des résultats de [15] utilisés dans la suite. Pour chaque nombre premier p ramifié dans $\mathrm{K}/\mathbf{Q}$ soit I_p^k le $k^{\text{ième}}$ groupe de ramification. Soit I (resp. I*) le sous-groupe $\prod_p \mathrm{I}_p^1$ (resp. $\mathrm{I}_2^2 \,.\, \prod_{p \neq 2} \mathrm{I}_p^1$). Soit ξ un $\mathbf{Q}$-caractère de I trivial sur

I_2^2 (i.e. tel que $\forall x \in I_2^2$, $\xi(x) = \xi(1)$) ou un $\mathbf{Q}$-caractère de I^* non trivial sur I_2^2. On note par Ξ le caractère de G induit par ξ et e_Ξ l'idempotent de $\mathbf{Q}_\ell[G]$ associé à Ξ (cf. (1)). Soit Z l'ensemble des caractères Ξ définis de la façon précédente. Pour Ξ dans Z, soit f_Ξ le plus petit commun multiple des f_χ et K_Ξ le corps composé des corps K_χ, pour χ Ω_ℓ-composant de Ξ.

Pour Ξ dans Z et χ Ω_ℓ-composant, posons :

$$\tau(\chi, \zeta_{f_\Xi}) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_\Xi)=1}}^{f_\Xi} \chi(a)\, \zeta_{f_\Xi}^a \, .$$

Pour Ξ dans Z définissons t_Ξ par :

$$t_\Xi = \frac{1}{[K_\Xi : \mathbf{Q}]} \sum_{\chi \mid \Xi} \tau(\chi, \zeta_{f_\Xi}) .$$

A K est associé un ordre de $\mathbf{Q}[G]$ $\mathcal{O} = \bigoplus_{\Xi \in Z} e_\Xi \mathbf{Z}[G]$ et un élément de $\mathbf{Q}^{ab}$: $t = \sum_{\Xi \in Z} t_\Xi$. Le résultat fondamental de [15] est que $\mathcal{O}$ est l'ordre associé au $\mathbf{Z}[G]$-module $\mathfrak{O}$ (i.e. on a $\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathbf{Q}[G] \mid \lambda\, \mathfrak{O} \subset \mathfrak{O}\}$, que t est dans K et qu'on a : $\mathfrak{O} = \mathcal{O} . t$. Un Ω_ℓ-caractère χ de G figure dans la décomposition d'un et d'un seul caractère Ξ de Z, f_χ divise alors f_Ξ et le rapport f_Ξ / f_χ est sans facteur carré et premier à f_χ (cf. [15]). Si μ désigne la fonction de Moebius, on a la relation pour χ Ω_ℓ-composant de Ξ (comparer à § 1 (1) et § 2 (15) de [15]) :

$$\sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma)\, \sigma(t) = \mu\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right) \chi\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right) \tau(\chi^{-1})\, [K : K_\Xi] . \qquad (6)$$

Remarquons que $\mu\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right) \chi\left(\frac{f_\Xi}{f_\chi}\right)$ est une racine de l'unité donc une unité de Ω_ℓ. Posons $\mathcal{O}_\ell = \bigoplus_{\Xi \in Z} e_\Xi \mathbf{Z}_\ell[G]$: $\hat{\mathfrak{O}}$ est un $\mathcal{O}_\ell$-module libre de rang 1 engendré par t.

2.2. Nous rappelons maintenant la définition des unités cyclotomiques (cf. [14]). Si ξ est un $\mathbf{Q}$-caractère de G, Leopoldt définit l'entier algébrique θ_ξ comme suit. Choisissons pour tout automorphisme sur K_ξ, σ, du sous-corps réel maximum de $\mathbf{Q}(\zeta_{f_\xi})$, un prolongement $\bar{\sigma}$ à $\mathbf{Q}(\zeta_{2f_\xi})$ et définissons θ_ξ par : $\theta_\xi = \prod_\sigma \bar{\sigma}(\zeta_{2f_\xi} - \zeta_{2f_\xi}^{-1})$.

Le carré de θ_ξ est égal au signe près à la norme dans K_ξ de l'élément $1-\zeta_{f_\xi}$ de $\mathbf{Q}(\zeta_{f_\xi})$. Le groupe des unités cyclotomiques C_0 de K est l'intersection du groupe des unités E de K et du groupe engendré par -1, les éléments θ_ξ et leurs conjugés, ξ parcourant l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères de G.

Pour chaque ξ, notons σ_ξ un générateur du groupe de Galois (cyclique) de K_ξ sur $\mathbf{Q}$ et $\overline{\sigma}_\xi$ un relèvement de σ_ξ dans $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{ab}/\mathbf{Q})$. On considère alors les éléments γ_ξ et $\overline{\gamma}_\xi$ de $\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(K_\xi/\mathbf{Q})]$ et $\mathbf{Z}[\mathcal{G}]$ définis par :

$$\gamma_\xi = \prod_{p|g_\xi} (1-\sigma_\xi^{g_\xi/p}) \qquad \overline{\gamma}_\xi = \prod_{p|g_\xi} (1-\overline{\sigma}_\xi^{g_\xi/p}).$$

En prolongeant par $\mathbf{Z}$-linéarité l'action de $\mathcal{G}$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbf{Q}^{ab})^*$, on peut considérer $\theta_\xi^{\overline{\gamma}_\xi}$: c'est une unité de K_ξ dont la norme sur les sous-corps stricts de K_ξ vaut ± 1. Soit Θ le produit des éléments $\theta_\xi^{\overline{\gamma}_\xi}$ pour ξ parcourant l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères de G. Leopoldt définit le groupe des unités cyclotomiques formelles C comme étant le sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de E engendré par -1 et les éléments $\theta_\xi^{\overline{\gamma}_\xi}$. L'ordre de $\mathbf{Q}[G]$ associé au sous-module de E engendré par Θ (i.e. l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{Q}[G] \mid \Theta^\lambda \in E\}$) est l'ordre maximal de $\mathbf{Q}[G]$ c'est-à-dire $\oplus\, e_\xi \mathbf{Z}[G]$, la somme étant prise sur l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères de G : ceci résulte de l'égalité au signe près entre Θ^{e_ξ} et $\theta_\xi^{\overline{\gamma}_\xi}$. Si ξ est un $\mathbf{Q}$-caractère de G et χ un Ω_ℓ-composant de ξ on notera aussi $\theta_\chi \ldots \overline{\gamma}_\chi$ pour $\theta_\xi \ldots \overline{\gamma}_\xi$. De plus, pour tout Ω_ℓ caractère χ de G on définit $\chi(\gamma_\chi)$ en considérant χ comme un caractère de $G/\ker\chi$ et en l'étendant par linéarité. Considérons l'intersection de U et de l'image diagonale de C (resp. de C_0) dans $\hat{K}$ et notons $\overline{C}$ (resp. $\overline{C}_0$) sa fermeture.

2.3. Définissons (cf. [14] et [9]) pour tout groupe abélien H des entiers :

$$N_H = \sqrt{\frac{[H]^{[H]}}{\prod d_\xi}} \qquad C_H = \sqrt{\prod d_\xi \left(\frac{[H]}{g_\xi^2}\right)^{\varphi(g_\xi)}}$$

où les produits sont pris sur l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères de H et où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. On sait que C_H (cf. [9]) est égal à 1 si et seulement si H est cyclique et que N_H est l'indice de $\mathbf{Z}[H]$ dans l'ordre maximal $\oplus\, e_\xi \mathbf{Z}[H]$ de $\mathbf{Q}[H]$, somme prise sur l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères de H.

LEMME 2. — *Le produit* $N_H . C_H$ *est égal au produit des ordres des noyaux des* Ω_ℓ*-caractères de* H. *Le quotient* N_H/C_H *est donné par les formules où les produits sont pris sur l'ensemble des* **Q**-*caractères de* H :

$$N_H/C_H = \prod_\xi \frac{g_\xi^{\varphi(g_\xi)}}{d_\xi} = \prod_\xi \prod_{p|g_\xi} p^{\varphi(g_\xi)/p-1} .$$

Démonstration. — Il suffit d'effectuer le produit et la division en tenant compte de la relation $[H] = \Sigma\varphi(g_\xi)$. La dernière égalité provient de la valeur de d_ξ.

Exemples. — Si H est cyclique d'ordre ℓ^n, alors C_H vaut 1 et N_H est égal à ℓ élevé à la puissance $(1 + \ell + \ldots + \ell^{n-1})$. Si H est isomorphe à $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^n$, alors N_H (resp. C_H) est égal à ℓ élevé à la puissance $\frac{1}{2}\left[(n-1)\,\ell^n + 1 + \frac{\ell^n - 1}{\ell - 1}\right]$ $\left(\text{resp. } \frac{1}{2}\left[(n-1)\,\ell^n + 1 - \frac{\ell^n - 1}{\ell - 1}\right]\right)$.

3. Calcul de l'indice de $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]$ dans $e_\Phi \mathcal{O}_\ell$.

3.1. Pour chaque Ω_ℓ-caractère χ de G, on note $\Xi(\chi)$ l'unique élément de Z (cf. 2.1) qui admet χ comme Ω_ℓ-composant. Le but du § 3 est de démontrer la proposition :

PROPOSITION 1. — *Si* $\mathcal{O}_\ell$ *désigne l'ordre de* $\mathbf{Q}_\ell[G]$ *introduit à la fin de 2.1 on a :* $[e_\Phi \mathcal{O}_\ell : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]] = |\prod_{\chi|\Phi^*} [K : K_{\Xi(\chi)}]|^{-1}$.

3.2. Nous allons utiliser l'isomorphisme d'anneaux signalé en 1.1 entre $e_\Phi \mathbf{Q}_\ell[G]$ et $L[\Gamma]$. Soit Γ_1 (resp. Γ_1^*) l'intersection de Γ et de I (resp. I*). Soit Ξ l'élément de Z défini par induction d'un **Q**-caractère ξ de I (resp. I*). Notons ξ' la restriction de ξ à Γ_1 (resp. Γ_1^*). Nous disons que Ξ et Φ sont compatibles si et seulement si Φ^* et Ξ possèdent au moins un Ω_ℓ-composant commun. A l'aide de l'inclusion de $L[\Gamma_1]$ (resp. $L[\Gamma_1^*]$) dans $L[\Gamma]$ on peut considérer $e_{\xi'}$ comme un élément de $L[\Gamma]$.

LEMME 3. – *L'image de* $e_\Phi \,.\, e_\Xi$ *dans* $\mathrm{L}[\Gamma]$ *est* $e_{\xi'}$ *si* Φ *et* Ξ *sont compatibles et* 0 *sinon.*

Démonstration. – Remarquons d'abord que e_Ξ est égal à la somme $\Sigma\, e_\chi$, somme prise sur les Ω_ℓ-composants de Ξ ; comme $e_{\psi_0} \,.\, e_\chi$ est nul sauf si χ et ψ_0 coïncident sur Δ, $e_{\psi_0} \,.\, e_\Xi$ est nul sauf si un Ω_ℓ-composant de ξ coïncide avec ψ_0 sur $\Delta \cap \mathrm{I}$ (resp. $\Delta \cap \mathrm{I}^*$). Ceci signifie exactement que Ξ et Φ sont compatibles. Si cette dernière condition est vérifiée, on a $e_{\psi_0} \,.\, e_\Xi = \Sigma\, e_\chi$, la somme étant prise sur les Ω_ℓ-caractères de G égaux à ψ_0 sur Δ et à ξ' sur Γ_1 (resp. Γ_1^*). Ainsi $e_{\psi_0} \,.\, e_\Xi$ n'est autre que l'idempotent du caractère de G induit par le caractère θ de $\Delta \times \Gamma_1$ (resp. $\Delta \times \Gamma_1^*$) qui vaut $\psi_0(\delta)\, \xi'(\gamma)$ pour l'élément $\delta \,.\, \gamma$ de $\Delta \times \Gamma_1$ (resp. $\Delta \times \Gamma_1^*$). C'est donc aussi e_θ considéré dans $\mathbf{Q}_\ell[\mathrm{G}]$. Cet idempotent s'identifie au produit des idempotents e_{ψ_0} et $e_{\xi'}$ dont les images dans $\mathrm{L}[\Gamma]$ sont respectivement 1 et $e_{\xi'}$. Son image, qui est la même que celle de e_Ξ, est donc bien $e_{\xi'}$.

3.3. Supposons dans ce n° 3.3 que Γ_1 et Γ_1^* soient égaux, ce qui est toujours vérifié si $\ell \neq 2$. Le lemme 3 et (2) montrent qu'on a un isomorphisme de $\mathrm{A}[\Gamma_1]$-modules entre $e_\Phi \mathcal{O}_\ell$ et $\oplus e_\lambda \mathrm{A}[\Gamma]$, donc encore entre $e_\Phi \mathcal{O}_\ell$ et $(\oplus\, e_\lambda \mathrm{A}[\Gamma_1])^{[\Gamma:\Gamma_1]}$ (les sommes sont prises sur l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères λ de Γ_1). Le sous-module $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$ est envoyé sur le sous-module $\mathrm{A}[\Gamma_1]^{[\Gamma:\Gamma_1]}$. Comme A est un $\mathbf{Z}_\ell$-module de rang d, l'indice $[e_\Phi \mathcal{O}_\ell : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]]$ est égal à la puissance $d \,.\, [\Gamma : \Gamma_1]$ de l'indice $[\oplus\, e_\lambda \mathbf{Z}_\ell[\Gamma_1] : \mathbf{Z}_\ell[\Gamma_1]]$ c'est donc $(\mathrm{N}_{\Gamma_1})^{d.[\Gamma:\Gamma_1]}$. Par la théorie du corps de classes, Γ_1 (resp. Γ_1^* si $\ell = 2$) est cyclique car c'est l'image du groupe multiplicatif $1 + p\mathbf{Z}_p$ (resp. $1 + 4\mathbf{Z}_2$ si $\ell = 2$) par l'application de réciprocité locale. Il en résulte que N_{Γ_1} est égal (cf. lemme 2) au produit des ordres des noyaux des Ω_ℓ-caractères de Γ_1. Pour chaque Ω_ℓ-composant χ de Φ^*, soit χ_1 sa restriction à Γ_1 : il est facile de voir que le noyau de χ_1 est d'ordre $[\mathrm{K} : \mathrm{K}_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de $\mathbf{Z}_\ell$ près. La proposition de 3.1 provient (avec l'hypothèse $\Gamma_1 = \Gamma_1^*$) du fait qu'il y a exactement $(d \,.\, [\Gamma : \Gamma_1])$ Ω_ℓ-composants de Φ^* qui ont même restriction à Γ_1.

3.4. Etudions maintenant le cas où Γ_1^* est strictement inclus dans Γ_1. Dans ce cas ℓ est égal à 2 et Γ_1^* est facteur direct de Γ_1

et d'indice 2. Ceci se voit en remarquant que, grâce à la théorie du corps de classes, Γ_1 est un quotient de $(\mathbf{Z}_2)^*$ et Γ_1^* est l'image du sous-groupe $1 + 4\mathbf{Z}_2$. Soit J l'élément de Γ_1, image de $-1 \in 1 + 2\mathbf{Z}_2$: alors Γ_1 est égal au produit direct de Γ_1^* par $\{1, J\}$. Les caractères Ξ de Z proviennent soit d'un caractère ξ de I trivial sur I_2^2, soit d'un caractère ξ de I^* non trivial sur I_2^2. Les idempotents de $L[\Gamma]$ obtenus sont dans le premier cas

$$e = \frac{1}{[\Gamma_1]}(1 + J) \sum_{\gamma \in \Gamma_1^*} \gamma \quad \text{et} \quad e' = \frac{1}{[\Gamma_1]}(1 - J) \sum_{\gamma \in \Gamma_1^*} \gamma$$

et dans le second les e_λ où λ décrit l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères non triviaux de Γ_1^*. L'ordre de $L[\Gamma]$ image de $e_\Phi \mathcal{O}_\ell$ est donc, en sommant sur l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères λ non triviaux de Γ_1^* :

$$eA[\Gamma] \oplus e'A[\Gamma] \oplus \Big(\bigoplus_{\lambda \neq 1} e_\lambda A[\Gamma]\Big).$$

Il contient l'ordre $\oplus e_\lambda A[\Gamma]$, somme prise sur l'ensemble de tous les $\mathbf{Q}$-caractères de Γ_1^* avec l'indice $2^{d[\Gamma:\Gamma_1]}$. Ce qui précède, ajouté à un raisonnement calqué sur celui de 3.3, montre que l'indice de $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]$ dans $e_\Phi \mathcal{O}_\ell$ est égal à $(N_{\Gamma_1^*})^{d[\Gamma:\Gamma_1^*]} \cdot 2^{d[\Gamma:\Gamma_1]}$. Pour évaluer $N_{\Gamma_1^*}$ on utilise la propriété de Γ_1^* d'être cyclique. Pour chaque Ω_ℓ composant χ de Φ^* soit χ_1^* sa restriction à Γ_1^*. Il est facile de voir que si χ_1^* n'est pas trivial, son noyau est d'ordre $[K : K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de $\mathbf{Z}_2$ près. Ceci est encore vrai si χ est trivial sur Γ_1^* mais non sur Γ_1. Enfin si χ est trivial sur Γ_1, le noyau de χ_1^* est d'ordre $\frac{1}{2}[K : K_{\Xi(\chi)}]$ à une unité de $\mathbf{Z}_2$ près. La proposition de 3.1 résulte alors du fait qu'il y a exactement $d[\Gamma : \Gamma_1^*]$ (resp. $d[\Gamma : \Gamma_1]$) Ω_ℓ-composants de Φ^* qui ont même restriction à Γ_1^* (resp. à Γ_1).

4. Indice du groupe des unités cyclotomiques formelles.

4.1. Soit m un entier strictement positif, premier à ℓ, assez grand pour que l'image diagonale dans $\hat{K}$ des unités $\theta_\xi^{\gamma_\xi m}$ soit dans U, pour tous les $\mathbf{Q}$-caractères ξ de G. L'image de Θ^m dans $\hat{K}$ est alors aussi dans U. Soit $\overline{C}_1$ le sous-$\mathbf{Z}_\ell[G]$-module de U engendré par cet élément. Nous allons d'abord évaluer l'indice de $e_\Phi \overline{C}_1$ dans $e_\Phi U$. Désignons par Q l'indice $\Big[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi \Big(\prod_{\mathfrak{L} | \ell} \mathfrak{L}\mathcal{O}_{\mathfrak{L}}\Big)\Big]$.

LEMME 4. – *On a la relation suivante sur les "indices" :*

$$[e_\Phi(U/\overline{C}_1)] = \frac{1}{Q}\,[e_\Phi\hat{\mathcal{O}} : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]\,\mathcal{L}\mathrm{og}\,\Theta^m]\,.$$

Démonstration. – Soit μ l'ordre du sous-groupe de torsion de $e_\Phi U$; on a :

$$\begin{aligned}[e_\Phi(U/\overline{C}_1)] &= [e_\Phi\, U/e_\Phi \overline{C}_1] \\ &= [e_\Phi\, \mathcal{L}\mathrm{og}\, U/e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]\, \mathcal{L}\mathrm{og}\,\Theta^m]\,.\,\mu \\ &= \frac{[e_\Phi\hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\mathbf{Z}_\ell[G]\mathcal{L}\mathrm{og}\,\Theta^m]}{[e_\Phi\hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\mathcal{L}\mathrm{og}\,U]}\cdot\mu\,.\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour r entier assez grand, $e_\Phi \mathcal{L}\mathrm{og}\Big(\prod_{\mathfrak{L}|\ell}(1+\mathfrak{L}^r\mathcal{O}_\mathfrak{L})\Big)$ est égal à $e_\Phi \prod_{\mathfrak{L}|\ell}\mathfrak{L}^r\mathcal{O}_\mathfrak{L}$. Son indice dans $e_\Phi\hat{\mathcal{O}}$ est Q^r celui dans $e_\Phi\mathcal{L}\mathrm{og}\,U$ est $\frac{1}{\mu}Q^{r-1}$. D'après la multiplicativité de l'"indice" introduit en 1.3, on a : $[e_\Phi\hat{\mathcal{O}} : e_\Phi\mathcal{L}\mathrm{og}\,U] = Q\,.\,\mu$.

4.2. Calculons maintenant l'indice Q :

LEMME 5. – *L'indice* Q *vaut* $\left|\prod_{\chi|\Phi^*}\left(1-\frac{\chi(\ell)}{\ell}\right)\right|$.

Démonstration. – Notons D (resp. D_0, Γ_0, Δ_0) le sous-groupe de décomposition de ℓ dans $K/\mathbf{Q}$ (resp. le sous-groupe d'inertie de ℓ dans D, Γ, Δ). Choisissons un idéal premier $\mathfrak{L}_0$ de K au-dessus de ℓ. On sait que $\hat{\mathcal{O}}$ est le G-module induit par le D-module $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_0}$. De même $\prod_{\mathfrak{L}|\ell}\mathfrak{L}\mathcal{O}_\mathfrak{L}$ est le G-module induit par le D-module $\mathfrak{L}_0\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_0}$. Il résulte alors de l'interprétation du module induit à l'aide d'un produit tensoriel et de l'exactitude à droite du produit tensoriel que $\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell}\mathfrak{L}\mathcal{O}_\mathfrak{L}$ est le $\mathbf{F}_\ell[G]$-module induit par le $\mathbf{F}_\ell[D]$-module $\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_0}/\mathfrak{L}_0\mathcal{O}_{\mathfrak{L}_0}$. D'après le théorème de la base normale pour les extensions galoisiennes, ce dernier module est isomorphe à $\mathbf{F}_\ell[D/D_0]$ c'est-à-dire au $\mathbf{F}_\ell[D]$-module induit par le D_0-module $\mathbf{F}_\ell$ où D_0 agit trivialement. On en conclut que $\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell}\mathfrak{L}\mathcal{O}_\mathfrak{L}$ est un G-module isomorphe à $\mathbf{F}_\ell[G/D_0]$, donc un Δ-module isomorphe au produit de $[\Gamma:\Gamma_0]$-copies de $\mathbf{F}_\ell[\Delta/\Delta_0]$. L'ordre de $e_\Phi\left(\hat{\mathcal{O}}/\prod_{\mathfrak{L}|\ell}\mathfrak{L}\mathcal{O}_\mathfrak{L}\right)$ est donc $\ell^{d.[\Gamma:\Gamma_0]}$ si les composants ψ de Φ sont triviaux sur Δ_0

et 1 sinon. Le lemme en résulte facilement sachant que pour tout Ω_ℓ-caractère χ, composant de Φ^*, $\left|1 - \dfrac{\chi(\ell)}{\ell}\right|$ vaut ℓ si χ est trivial sur D_0 et 1 sinon.

4.3. L'"indice" $[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]\, \mathcal{L}og\, \Theta^m]$ se calcule par la méthode 1.3 en tenant compte des résultats des § 2 et 3. On obtient alors le résultat suivant où figure la fonction L ℓ-adique (cf. [12]) :

LEMME 6. — *L'ordre de* $e_\Phi(U/\overline{C}_1)$ *est égal à*

$$\left| \prod_{\chi \mid \Phi^*} \frac{[G]}{g_\chi} \chi(\gamma_\chi) \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1} .$$

Démonstration. — On sait que $\hat{\mathcal{O}}$ est un $\mathcal{O}_\ell$-module engendré par t (cf. 2.1) on a donc (cf. prop. 1 du § 3) :

$$[e_\Phi \hat{\mathcal{O}} : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]\, t] = \left| \prod_{\chi \mid \Phi^*} [K : K_{\Xi(\chi)}] \right|^{-1} .$$

De plus, d'après le lemme 1 de 1.3 :

$$[e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]\, t : e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]\, \mathcal{L}og\, \Theta^m] = \left| \frac{\prod_{\chi \mid \Phi^*} T_\chi(t)}{\prod_{\chi \mid \Phi^*} T_\chi(\mathcal{L}og\, \Theta^m)} \right| .$$

La formule (6) de 2.1, appliquée à $T_\chi(t) = \Sigma \chi(\sigma)^{-1} \sigma(t)$, et la remarque qui la suit montrent que :

$$\left| \prod_{\chi \mid \Phi^*} T_\chi(t) \right| = \left| \prod_{\chi \mid \Phi^*} \tau(\chi^{-1}) \,.\, [K : K_{\Xi(\chi)}] \right| .$$

D'autre part, d'après (3) $T_\chi(\mathcal{L}og\, \Theta^m)$ est égal à $T_\chi(e_\xi\, \mathcal{L}og\, \Theta^m)$ si ξ est le $\mathbf{Q}$-caractère de G ayant χ comme Ω_ℓ-composant, donc, en tenant compte de 2.2, à $T_\chi(\mathcal{L}og\, \theta_\xi^{m\gamma_\xi})$. Ce dernier nombre se calcule à l'aide de la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
T_\chi(\mathcal{L}og\, \theta_\xi^{2m\gamma_\xi}) &= \sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma) \log [\varphi(\theta_\xi^{2m\gamma_\xi \sigma})] \\
&= m \,.\, \chi(\gamma_\xi) \,.\, \sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma) \log [\varphi(\theta_\xi^{2\sigma})] \\
&= m \,.\, \chi(\gamma_\xi) \,.\, \frac{[G]}{g_\chi} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K_\chi/\mathbf{Q})} \chi^{-1}(\sigma) \log [\varphi(\theta_\xi^{2\sigma})] \\
&= m \,.\, \chi(\gamma_\xi) \,.\, \frac{[G]}{g_\chi} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, f_\chi)=1}}^{f_\chi} \chi^{-1}(a) \log [\varphi(1 - \zeta_{f_\chi}^a)] \,.
\end{aligned}$$

La première égalité écrite provient de la formule (4), la seconde est conséquence d'un calcul analogue à celui de (3) le logarithme a été prolongé comme dans [12] § 4. Dans la troisième égalité, on a considéré χ comme un caractère de $G/\operatorname{Ker}\chi$ qui est isomorphe au groupe de Galois $\operatorname{Gal}(K_\chi/\mathbf{Q})$. Dans la dernière égalité χ est identifié au caractère de Dirichlet modulo f_χ qu'il définit ; on a exprimé θ_ξ^2 comme norme de $(1 - \zeta_{f_\chi})$ (cf. 2.2). La somme sur a se calcule à l'aide de la formule donnant $L_\ell(1, \chi)$ (cf. par exemple [12] § 5) et la relation classique $\tau(\chi)\,\tau(\chi^{-1}) = f_\chi$:

$$\Sigma\, \chi^{-1}(a) \log [\varphi(1 - \zeta_{f_\chi}^a)] = -\ \tau(\chi^{-1}) \left(1 - \frac{\chi(\ell)}{\ell}\right)^{-1} L_\ell(1, \chi).$$

Le lemme 6 résulte alors des calculs précédents et des lemmes 4 et 5.

4.4. Traduisons maintenant 4.3 sur le groupe des unités formelles :

THEOREME 1. – *L'ordre de* $e_\Phi(U/\overline{C})$ *est donné par* :

$$[e_\Phi(U/\overline{C})] = N_\Gamma^d \cdot \left| \prod_{\chi | \Phi^*} \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1}.$$

Démonstration. – En revenant aux définitions de C_1 et C (cf. § 4.1 et 2.2) on voit que l'indice de $e_\Phi \overline{C}_1$ dans $e_\Phi \overline{C}$ est égal à celui de $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[G]$ dans $e_\Phi(\oplus e_\xi \mathbf{Z}_\ell[G])$ où dans la somme ξ parcourt l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères non triviaux de G. C'est aussi, grâce à la formule (2) l'indice de $A[\Gamma]$ dans $\oplus e_\lambda A[\Gamma]$ où dans la somme λ parcourt l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères de Γ, c'est donc (cf. 2.3) N_Γ^d. Ainsi :

$$[e_\Phi(U/\overline{C})] = \left| \frac{1}{N_\Gamma^d} \prod_{\chi | \Phi^*} \chi(\gamma_\chi)\, \frac{[G]}{g_\chi}\, \frac{L_\ell(1, \chi)}{2} \right|^{-1}.$$

Si χ est un composant de Φ^*, notons ψ et π ses restrictions à Δ et Γ ; soit ξ (resp. ρ) le $\mathbf{Q}$-caractère de G (resp. Γ) ayant χ (resp. π) parmi ses Ω_ℓ-composants. On a alors :

$$\left| \frac{[G]}{g_\chi} \right| = \left| \frac{[\Gamma]}{g_\pi} \right| \quad \text{et} \quad |\chi(\gamma_\chi)| = |1 - \pi(\sigma_\xi)^{g_\xi/\ell}|.$$

D'après le lemme 2 de 2.3, on déduit :

$$\left| \prod_{\chi | \Phi^*} \frac{[G]}{g_\chi} \right|^{-1} = (N_\Gamma \cdot C_\Gamma)^d$$

et, en observant qu'il y a exactement d caractères χ qui correspondent au même π

$$\left|\prod_{\chi\mid\Phi^*} \chi(\gamma_\chi)\right|^{-1} = [\prod_\rho \ell^{\varphi(g_\rho)/\ell-1}]^d = \left(\frac{N_\Gamma}{C_\Gamma}\right)^d .$$

Dans le terme du milieu, le produit est pris sur l'ensemble des $\mathbf{Q}$-caractères ρ de Γ tels que ℓ divise g_ρ .

4.5. Remarque sur le caractère trivial. Dans ce qui précède, nous avons supposé que Φ est non trivial. Le théorème 1 est encore vrai si Φ est trivial, en convenant que les deux membres de l'égalité sont infinis : le rang de $e_\Phi\overline{C}$ est $[\Gamma]-1$, celui de $e_\Phi U$ est $[\Gamma]$ et la fonction L ℓ-adique correspondant au Ω_ℓ-caractère trivial de G admet un pôle en $s=1$. Cependant en remplaçant $\overline{C}$ par le $\mathbf{Z}_\ell[G]$-module $\overline{C}'$ engendré par $\overline{C}$ et $(1+\ell)$ on obtient :

$$[e_\Phi(U/\overline{C}')] = \frac{N_\Gamma}{2}\left|\prod_{\substack{\chi\mid\Phi^*\\ \chi\text{ non trivial}}} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2}\right|^{-1} .$$

5. Cas où Γ est cyclique.

Si Γ est cyclique, montrons qu'on peut supprimer l'indice N_Γ figurant dans le théorème 1, en remplaçant les unités cyclotomiques formelles par les unités cyclotomiques (cf. § 2.2) :

THEOREME 2. — *Si* Γ *est cyclique et* Φ *non trivial, on a :*

$$[e_\Phi(U/\overline{C}_0)] = \left|\prod_{\chi\mid\Phi^*} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2}\right|^{-1} .$$

Démonstration. — Il s'agit de montrer que $e_\Phi\overline{C}$ est un sous-groupe d'indice N_Γ^d de $e_\Phi\overline{C}_0$. C'est clair si Γ est trivial car alors les éléments γ_χ introduits plus haut sont inversibles dans $e_\Phi\mathbf{Z}_\ell[\Delta]$. Si Γ est cyclique d'ordre ℓ^n, on sait que N_Γ vaut $\ell^{1+\ell+\ldots+\ell^{n-1}}$ (cf. § 2.3). Soit π un générateur de $\mathrm{Hom}(\Gamma,\Omega_\ell^*)$, ψ un Ω_ℓ-composant de Φ et δ un générateur de $\mathrm{Gal}(K_\psi/\mathbf{Q})$. Pour $k=0,\ldots,n$, on considère (cf. 2.2) l'entier algébrique $\theta_{\psi.\pi^{\ell^{n-k}}}$, on l'élève à la puissance $(\delta-1)$ pour obtenir une unité, puis encore à la puissance m (m entier premier à ℓ assez grand) pour obtenir une unité α_k de $\mathrm{K}_{\psi.\pi\ell^{n-k}}$ dont l'image dans $\hat{\mathrm{K}}$ est dans U. Comme ℓ ne divise pas $[\Delta]$, la formule (2) montre que $(\delta - 1)m$ est inversible dans $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$. On voit ainsi que $e_\Phi \overline{\mathrm{C}}_0$ est le $\mathbf{Z}_\ell[\mathrm{G}]$-module engendré par les éléments α_k. On sait d'ailleurs que son rang est $[\Gamma].\,d = \ell^n d$. Soit γ un générateur de Γ. Pour tout j entier vérifiant $0 < j \leqslant \ell^n - 1$, on considère l'entier k tel que $\ell^k \leqslant j < \ell^{k+1}$ et on associe à j l'élément $\beta_j = \alpha_{k+1}^{\gamma^j}$; à 0 on associe α_0. En utilisant la norme entre les corps consécutifs de la suite $\mathrm{K}_\psi, \ldots, \mathrm{K}_{\psi.\pi\ell^{n-k}}, \ldots, \mathrm{K}_{\psi.\pi\ell^n}$ et en raisonnant de proche en proche à partir de K_ψ, on vérifie que les éléments $\beta_0, \ldots, \beta_{\ell^n - 1}$ forment un système générateur du $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\Delta]$-module $e_\Phi \overline{\mathrm{C}}_0$. En considérant le rang de ce module, on voit qu'on a en fait une base. On peut alors calculer l'indice de $e_\Phi \overline{\mathrm{C}}$ de la façon suivante : cet $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\Delta]$-module admet comme base l'ensemble des éléments

$$\beta_0 \beta_1^{\gamma - 1} \ldots \beta_{\ell-1}^{\gamma-1} \beta_\ell^{\gamma^\ell - 1} \ldots \beta_{\ell^2-1}^{\gamma^\ell - 1} \ldots \beta_{\ell^{n-1}}^{\gamma^{\ell^{n-1}} - 1} \ldots \beta_{\ell^n - 1}^{\gamma^{\ell^{n-1}} - 1} .$$

Il est alors facile d'expliciter une partie de la matrice carrée d'ordre ℓ^n de ce système dans la base $\beta_0 \ldots \beta_{\ell^n - 1}$ de $e_\Phi \overline{\mathrm{C}}_0$. Par exemple si $\ell = 3$ et $n = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & ? & & & & & & \\
0 & -1 & -1 & & \mathbf{0} & & & ? & \\
0 & 1 & -2 & & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
\cline{4-9}
 & \mathbf{0} & & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)$$

Pour $\ell = 2$, la matrice est triangulaire avec $1, -2, -2, \ldots, -2$ sur la diagonale. Pour $\ell \neq 2$ en permutant les lignes et les colonnes, on fait apparaître des blocs d'ordre $(\ell - 1)$ et de déterminant ℓ :

$$\begin{pmatrix} -1 & & \mathbf{0} & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ pour } \ell \neq 3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ pour } \ell = 3 .$$

Un bloc correspond à un couple d'entiers positifs (k, j) avec $0 \leqslant k < n$, $0 \leqslant j < \ell^k$: on regroupe les lignes et les colonnes correspondant aux éléments $\beta_{\ell^k i+j}$ pour $i = 1, \ldots, \ell - 1$.

Le déterminant de la matrice est donc au signe près $\ell^{1+\cdots+\ell^{n-1}}$ (il y a $(\ell^n - 1)/(\ell - 1)$ blocs si $\ell \neq 2$) c'est donc N_Γ (cf. fin de 2.3). Enfin $e_\Phi \mathbf{Z}_\ell[\Delta]$ est un $\mathbf{Z}_\ell$-module de rang d. L'indice de $e_\Phi \overline{C}$ dans $e_\Phi \overline{C}_0$ est bien N_Γ^d.

6. Application aux $\mathbf{Z}_\ell$-extensions.

6.1. Soit ℓ un nombre premier, K un corps de nombres abélien réel de degré fini sur $\mathbf{Q}$ premier à ℓ, et Δ le groupe $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$. Soit K' le corps obtenu par adjonction à K des racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité ($4^{\text{ièmes}}$ si $\ell = 2$) et Δ' le groupe $\mathrm{Gal}(K'/\mathbf{Q})$. Si $\mathbf{Q}_\infty$ désigne l'unique $\mathbf{Z}_\ell$-extension de $\mathbf{Q}$, on note K_∞ (resp. K'_∞) l'extension composée $K.\mathbf{Q}_\infty$ (resp. $K'.\mathbf{Q}_\infty$). Soit K_n (resp. $\mathbf{Q}_n$, resp. K'_n) le sous-corps de K_∞ (resp. de $\mathbf{Q}_\infty$, resp. de K'_∞) de degré ℓ^n sur K (resp. sur $\mathbf{Q}$, resp. sur K'). Désignons par E_n (resp. C_n, resp. U_n) le groupe des unités (resp. des unités cyclotomiques, resp. des unités semi-locales) de K_n et par E'_n le groupe des unités de K'_n. Soit $(E_n/C_n)_\ell$ le ℓ-sous-groupe de Sylow du quotient E_n/C_n. Pour tout corps de nombres F, $\mathcal{C}(F)$ désigne le ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux de F. En désignant par Φ un $\mathbf{Q}_\ell$-caractère de Δ (cf. 1.1), on peut énoncer :

CONJECTURE 1. — *Pour tout n, les groupes $e_\Phi(E_n/C_n)_\ell$ et $e_\Phi \mathcal{C}(K_n)$ ont même ordre.*

Remarquons que si Φ est le caractère trivial, la conjecture 1 résulte de la formule analytique du groupe des classes (cf. [9], § 11 Satz 3) appliquée à $\mathbf{Q}_n$. Les deux groupes sont d'ailleurs nuls (cf. [10]). Nous nous bornons dorénavant au cas où Φ est non trivial. Soit d la dimension de Φ.

On désigne par M_∞ (resp. L_∞) la ℓ-extension abélienne non ramifiée pour les places finies ou infinies premières à ℓ (resp. non ramifiée pour toutes les places) maximale de K_∞. On définit de même $M_n, L_n, M'_n, L'_n, M'_\infty, L'_\infty$ à partir de K_n, K'_n et K'_∞. On note N_∞ l'extension de K'_∞ obtenue en adjoignant les racines d'ordre une puissance de ℓ des unités de K'_∞. Pour le caractère Φ fixé, choisissons un Ω_ℓ-composant ψ ; soit q le plus petit commun multiple de f_ψ (cf. 1.1) et ℓ (de f_ψ et 4 si $\ell = 2$). On appelle γ le générateur topologique du groupe de Galois Γ de K'_∞/K' qui agit sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ par élévation à la puissance $1 + q$. Le groupe $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ s'identifie canoniquement à Γ. Notons $\Gamma'_n, \Delta'_n, G'_n$ les groupes $\mathrm{Gal}(K'_n/K')$, $\mathrm{Gal}(K'_n/\mathbf{Q}_n)$, $\mathrm{Gal}(K'_n/\mathbf{Q})$ et Γ_n, Δ_n, G_n, les groupes $\mathrm{Gal}(K_n/K)$, $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q}_n)$, $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q})$. Les groupes Γ_n, Δ_n, G_n jouent dans la suite le rôle des groupes Δ, Γ, G des paragraphes précédents. Soit Φ_n (resp. Φ'_n) le caractère de Δ_n (resp. de Δ'_n) obtenu en composant Φ avec la surjection canonique entre Δ_n (resp. Δ'_n) et Δ et Φ^*_n le caractère de G_n induit par Φ_n. Soit aussi ψ'_n le caractère de Δ'_n obtenu en composant ψ et la surjection canonique de Δ'_n sur Δ. Les groupes $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$, $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)\ldots$ sont des $\mathbf{Z}_\ell[\Gamma]$-modules topologiques compacts. En faisant correspondre à γ la série formelle $1 + T$, on les munit classiquement de structures de modules sur l'anneau de séries formelles $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$ (pour tout ceci cf. [13]). A γ^{ℓ^n} correspond la série $\omega_n = (1 + T)^{\ell^n} - 1$. Soit ϖ le Ω_ℓ-caractère de Δ' obtenu en considérant l'action de Δ' sur les racines de l'unité d'ordre ℓ (d'ordre 4 si $\ell = 2$). On note $\widetilde{\Phi}$ (resp. $\widetilde{\psi}$) le $\mathbf{Q}_\ell$-caractère (resp. le Ω_ℓ-caractère de $\Delta' = \Delta'_0$ défini par $\sigma \longrightarrow \varpi(\sigma)\Phi'_0(\sigma^{-1})$ (resp. $\sigma \longrightarrow \varpi(\sigma)\psi'_0(\sigma^{-1})$). Soit $f(T, \psi)$ la série formelle associée par K. Iwasawa (cf. [12] § 6) au caractère de Dirichlet primitif défini par ψ. La conjugaison dans $\mathrm{Gal}(L'_\infty/\mathbf{Q})$ permet de définir une action de Δ' sur $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ commutant avec celle de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K'_\infty/K')$. Ainsi on peut munir $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ d'une structure de $(\mathbf{Z}_\ell[\Delta'])[[T]]$-module.

Supposons dorénavant $\ell \neq 2$. En utilisant 1.1 (2) avec $\widetilde{\psi}$ et Δ' dans les rôles de ψ_0 et Δ, on peut munir la $\widetilde{\Phi}$-composante $e_{\widetilde{\Phi}}\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ d'une structure de $A[[T]]$-module. De même, on peut considérer $\mathcal{C}(K')$ comme un Δ'-module et $e_{\widetilde{\Phi}}\mathcal{C}(K')$ comme un A-module. Rappelons que deux $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$-modules sont dits pseudo-isomorphes s'il existe entre eux un pseudo-isomorphisme, c'est-à-dire un homomorphisme de $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$-modules dont le noyau et le conoyau sont finis. Nous employons la même terminologie pour les $A[[T]]$-modules. On peut alors énoncer la conjecture 2 pour le caractère $\widetilde{\Phi}$ (cf. [1], conjecture 2.3).

CONJECTURE 2. – *Le* $A[[T]]$-*module* $e_{\widetilde{\Phi}}\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ *est pseudo-isomorphe à* $A[[T]]/(f(T,\psi))$.

6.2. Rappelons que la conjecture 2 est vérifiée si les conditions suivantes sont satisfaites (cf. [1] théorème 2.4) :

i) $\mathcal{C}(K')$ est un $\mathbf{Z}_\ell[\Delta']$-module monogène

ii) aucun idéal premier au-dessus de ℓ n'est décomposé dans l'extension entre K' et son sous-corps réel maximal.

Nous améliorerons légèrement ce résultat en 6.4, théorème 5.

THEOREME 3. – *Si le caractère* $\widetilde{\Phi}$ *vérifie la conjecture 2,* Φ *vérifie la conjecture 1.*

La démonstration du théorème 3 repose sur l'énoncé suivant qui sera démontré en 6.3. Rappelons que d'après [13] § 2.2, le groupe $e_\Phi \mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ est fini.

THEOREME 4. – *Si le caractère* $\widetilde{\Phi}$ *vérifie la conjecture 2, le groupe* $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ *est d'ordre* $\left| \prod_{\chi \mid \Phi_n^*} \frac{L_\ell(1,\chi)}{2} \right|^{-1}$.

Démonstration du théorème 3. – En comparant les théorèmes 2 et 4 on obtient que les groupes $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ et $e_\Phi(U_n/\overline{C}_n)$ ont même ordre. D'après la théorie du corps de classes, on a un isomorphisme : $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/L_n) \simeq e_\Phi(U_n/\overline{E}_n)$. On déduit que les deux groupes $e_\Phi\mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ et $e_\Phi(\overline{E}_n/\overline{C}_n)$ ont même ordre. Observons que $\overline{E}_n$ et $\overline{C}_n$ étant canoniquement isomorphes à $E_n \otimes \mathbf{Z}_\ell$ et $C_n \otimes \mathbf{Z}_\ell$, $e_\Phi(\overline{E}_n/\overline{C}_n)$ est isomorphe à $e_\Phi(E_n/C_n)_\ell$. Le théorème 3 résulte alors de l'isomorphisme provenant de la théorie du corps de classes entre $e_\Phi\mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ et $e_\Phi\,\mathcal{C}(K_n)$.

6.3. Démontrons maintenant le théorème 4 : on suppose qu'il existe un pseudo-isomorphisme de $A[[T]]$-modules

$$e_{\widetilde{\Phi}}\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(f(T,\psi)).$$

On peut alors utiliser la théorie de Kummer comme dans [13] (démonstration du théorème 16). En tenant compte de la note p. 275 de [13], de la présence de l'idempotent et du choix différent de γ (e^q est remplacé par $1+q$) on montre l'existence d'un pseudo-isomorphisme de A[[T]]-modules : $e_{\Phi'_0}\,\mathrm{Gal}(M'_\infty/N_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(g(T))$ où $g(T)$ désigne la série composée $f(\dot{T}, \psi)$ où $\dot{T} = \dfrac{1+q}{1+T} - 1$.
Remarquons maintenant, en considérant l'action de la conjugaison complexe sur les unités de K'_∞ et la parité de Φ'_0, que $e_{\Phi'_0}\mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty)$ est nul. On sait d'après [13] théorème 18 que $\mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)$ n'a pas de sous-$\mathbf{Z}_\ell[[T]]$-module fini non trivial. En remarquant que la conjugaison dans $\mathrm{Gal}(M'_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$ et $\mathrm{Gal}(M_\infty/\mathbf{Q}_\infty)$ permet de munir $\mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)$ et $\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ de structures respectives de Δ'-module et de Δ-module, ces structures étant compatibles avec les surjections canoniques, on déduit que $e_{\Phi'_0}\,\mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)$ s'identifie à $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$. Il résulte des considérations précédentes qu'on peut écrire une suite exacte de $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$-modules avec un conoyau D fini :

$$0 \longrightarrow e_\Phi\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(g) \longrightarrow D \longrightarrow 0 . \qquad (7)$$

Il est clair que M_n contient K_∞ ; de plus $\mathrm{Gal}(M_n/K_\infty)$ s'obtient en divisant $\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ par un groupe de commutateurs qui est en notations additives $(\gamma^{\ell^n} - 1)\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty) = \omega_n\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$. L'action de Δ commutant avec celle de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, on a un résultat analogue pour $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_\infty/K_\infty)$ et $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/K_\infty)$. Le caractère Φ étant non trivial, ce dernier groupe s'identifie à $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$. En notant ${}_nD$ le noyau de la multiplication par ω_n dans D on peut écrire la suite exacte tirée du lemme du serpent :

$${}_nD \longrightarrow e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/K_n) \longrightarrow A[[T]]/(g, \omega_n) \longrightarrow D/\omega_n D \longrightarrow 0 \cdot \quad (8)$$

Comme Φ est non trivial, $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ est fini (cf. [13] § 2.2). La suite exacte (8) montre que $A[[T]]/(g, \omega_n)$ est fini. On en déduit que g et ω_n sont premiers entre eux et que la multiplication par ω_n est injective dans $A[[T]]/(g)$. On peut alors prolonger sur la gauche la suite exacte (8) par un 0. Puisque les groupes ${}_nD$ et $D/\omega_n D$ ont même ordre, on en déduit qu'il en est de même pour $e_\Phi\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ et $A[[T]]/(g, \omega_n)$.

Calculons par récurrence l'ordre de $A[[T]]/(g, \omega_n)$ en introduisant la série $\nu_n = \sum_{i=0}^{\ell-1} (1+T)^{i\ell^n}$. On montre facilement que la multiplication par ω_{n-1} permet d'écrire une suite exacte (n entier $\geqslant 1$) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\nu_{n-1}) \xrightarrow{\omega_{n-1}} \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\omega_n) \longrightarrow \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\omega_{n-1}) \longrightarrow 0\,.$$

Nous allons utiliser les isomorphismes :

$$\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\omega_0) \simeq \mathrm{A}/(g(0)) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\nu_{n-1}) \simeq \mathrm{A}[\zeta_{\ell^n}]/(g(\zeta_{\ell^n}-1))\,.$$

Notons π_n le caractère de Dirichlet de conducteur ℓ^{n+1} et d'ordre ℓ^n qui vaut ζ_{ℓ^n} pour $1+q$. On a alors (cf. [12] § 6) :

$$g(0) = f(q\,,\psi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_\ell(1\,,\psi)$$

$$g(\zeta_{\ell^n}-1) = f(\zeta_{\ell^n}^{-1}(1+q)-1\,,\psi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_\ell(1\,,\psi\,.\,\pi_n)\,.$$

L'ordre de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\omega_0)$ est donné par la norme de $g(0)$ sur $\mathbf{Q}_\ell$; c'est donc $\left|\prod\limits_{\psi|\Phi} \dfrac{\mathrm{L}_\ell(1\,,\psi)}{2}\right|^{-1}$. De même l'ordre de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\nu_{n-1})$ est donné par la norme de $g(\zeta_{\ell^n}-1)$ sur $\mathbf{Q}_\ell$; c'est

$$\left|\prod_{\psi|\Phi}\ \prod_{\substack{i=1\\(i,\ell)=1}}^{\ell^n} \frac{\mathrm{L}_\ell(1\,,\psi\pi_n^i)}{2}\right|^{-1}.$$

L'ordre de $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(g\,,\omega_n)$ est donc $\left|\prod\limits_{\psi|\Phi}\ \prod\limits_{i=1}^{\ell^n} \dfrac{\mathrm{L}_\ell(1\,,\psi\pi_n^i)}{2}\right|^{-1}$.

Observons, pour conclure la démonstration du théorème 4, que les caractères qui interviennent dans le produit précédent sont exactement les caractères de Dirichlet associés aux Ω_ℓ-composants de Φ_n^*.

6.4. Nous nous proposons de généraliser légèrement le résultat de [1] théorème 2.4 rappelé au début de 6.2 : le théorème 5 prouve la conjecture 2 pour des corps ne vérifiant pas les conditions de 6.2 et certains caractères $\widetilde{\Phi}$. Disons qu'un Ω_ℓ-caractère de Δ' est pair (impair) s'il vaut 1 (resp. -1) pour la conjugaison complexe. Disons qu'un $\mathbf{Q}_\ell$-caractère de Δ' est pair (resp. impair) si ses Ω_ℓ-composants sont pairs (resp. impairs). Pour tout $\mathbf{Q}_\ell$-caractère pair Φ (resp. Ω_ℓ-caractère pair ψ) de Δ' – on modifie donc légèrement les notations de 6.1 – on associe un $\mathbf{Q}_\ell$-caractère impair $\widetilde{\Phi}$ (resp. un Ω_ℓ-caractère impair $\widetilde{\psi}$) de Δ' défini par $\sigma \longrightarrow \widetilde{\Phi}(\sigma) = \varpi(\sigma)\,\Phi(\sigma^{-1})$ (resp.

$\sigma \longrightarrow \widetilde{\psi}(\sigma) = \varpi(\sigma)\,\psi(\sigma^{-1})$. Si ψ est un Ω_ℓ-composant de Φ, $\widetilde{\psi}$ est un Ω_ℓ-composant de $\widetilde{\Phi}$. Tout $\mathbf{Q}_\ell$-caractère (resp. Ω_ℓ-caractère) impair de Δ' est de la forme $\widetilde{\Phi}$ (resp. $\widetilde{\psi}$) pour un unique Φ (resp. ψ). Choisissons un tel Φ non trivial et un Ω_ℓ-composant ψ. D'après 1.1 (2) en faisant jouer à $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\psi}$ et Δ' les rôles de Φ, ψ_0 et Δ, on a un isomorphisme : $e_{\widetilde{\Phi}}\mathbf{Z}_\ell[\Delta'] \simeq$ A où A désigne le sous-anneau de Ω_ℓ engendré sur $\mathbf{Z}_\ell$ par l'image de ψ (ou de $\widetilde{\psi}$: cela revient au même). Enfin désignons par $K'_{\widetilde{\psi}}$ le sous-corps de K' correspondant au sous-groupe $\operatorname{Ker}\widetilde{\psi}$ de Δ'. Introduisons des conditions sur le caractère $\widetilde{\Phi}$:

(c 1) $e_{\widetilde{\Phi}}\mathcal{C}(K')$ est un A-module monogène.

(c2) Le nombre premier ℓ n'est pas totalement décomposé dans l'extension $K'_{\widetilde{\psi}}/\mathbf{Q}$.

Nous pouvons énoncer :

THEOREME 5. – *Si le caractère $\widetilde{\Phi}$ et tous ses conjugués sur $\mathbf{Q}$ vérifient c 1 et c 2, on a un pseudo-isomorphisme :*

$$e_{\widetilde{\Phi}}\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty) \longrightarrow A[[T]]/(f(T, \psi)).$$

La démonstration du théorème 5 est donnée après celle des lemmes 8 à 11. Le lien entre la condition c 2 et la condition ii) de 6.2 est donnée dans le lemme 7.

LEMME 7. – *La condition ii) de 6.2 est vérifiée si et seulement si pour tout Ω_ℓ-caractère impair $\widetilde{\psi}$ de Δ', c 2 est vérifiée.*

Démonstration. – Soit D le groupe de décomposition de ℓ dans $K'/\mathbf{Q}$. La condition ii) de 6.2 signifie que J appartient à D c'est-à-dire que tous les Ω_ℓ-caractères triviaux sur D le sont sur J donc sont pairs. Le lemme 7 résulte du fait qu'un Ω_ℓ-caractère $\widetilde{\psi}$ de Δ' est trivial sur D si et seulement si ℓ est totalement décomposé dans $K'_{\widetilde{\psi}}/\mathbf{Q}$ et d'un raisonnement par l'absurde.

Notons X (resp. $X(\widetilde{\Phi})$) le A[[T]]-module $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ (resp. $e_{\widetilde{\Phi}}\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$). La condition c 2 intervient dans le lemme suivant :

LEMME 8. – *Si c 2 est vérifiée alors pour tout n on a un isomorphisme de A-modules : $e_{\widetilde{\Phi}}\,\mathcal{C}(K'_n) \simeq X(\widetilde{\Phi})/\omega_n X(\widetilde{\Phi})$.*

Démonstration. – Il résulte du théorème 6 de [13] qu'il existe un sous-$\mathbf{Z}_\ell[[T]]$-module Y de X tel qu'en désignant par ν'_n la série $\sum_{i=0}^{\ell^n-1} (1+T)^i$, on ait des isomorphismes :

$$\mathcal{C}(K') \simeq X/Y \qquad \mathcal{C}(K'_n) \simeq X/\nu'_n Y\,.$$

Il est clair d'après [13] que ces isomorphismes sont compatibles avec les structures de Δ'-modules : on a donc encore des isomorphismes :

$$e_{\widetilde{\Phi}}\,\mathcal{C}(K') \simeq e_{\widetilde{\Phi}}(X/Y) \qquad e_{\widetilde{\Phi}}\,\mathcal{C}(K'_n) \simeq e_{\widetilde{\Phi}}(X/\nu'_n Y)\,. \tag{9}$$

On peut énoncer un analogue de la formule des classes ambiges (pour plus de détails, cf. [5]) où figure en plus un idempotent $e_{\widetilde{\Phi}}$ (la démonstration ne fait que reproduire la démonstration classique) :

$$[e_{\widetilde{\Phi}}\,\mathcal{C}(K'_1)^\Gamma] = [e_{\widetilde{\Phi}}\,\mathcal{C}(K')]\,\frac{\ell^{d'}}{[e_{\widetilde{\Phi}}(E'_0/E'_0 \cap NK'^*_1)]}\,.$$

Dans cette formule, d' vaut d si ℓ est totalement décomposé dans $K'_{\widetilde{\psi}}/\mathbf{Q}$ et 0 sinon, N désigne la norme de K'_1 à K'.

L'hypothèse c 2 signifie exactement que d' vaut 0 et implique que $[e_{\widetilde{\Phi}}\,\mathcal{C}(K'_1)^\Gamma]$ divise $[e_{\widetilde{\Phi}}\,\mathcal{C}(K')]$. Ceci revient à dire que $[e_{\widetilde{\Phi}}(X/Y)]$ est un multiple de l'ordre du noyau de la multiplication par T dans $e_{\widetilde{\Phi}}(X/\nu'_1 Y)$ donc est un multiple de $[e_{\widetilde{\Phi}}(X/TX + \nu'_1 Y)]$. De plus, puisque l'extension $L'_0K'_\infty/K$ est abélienne, Y contient le groupe des commutateurs de $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K)$ qui est TX. On en déduit l'égalité $e_{\widetilde{\Phi}}Y = TX(\widetilde{\Phi}) + \nu'_1(e_{\widetilde{\Phi}}Y)$.

Le lemme de Nakayama appliqué à l'anneau local $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$ prouve que : $e_{\widetilde{\Phi}}Y = TX(\widetilde{\Phi})$.

Le lemme 8 résulte alors de (9) et de la relation $\omega_n = T\,.\,\nu'_n$.

LEMME 9. – *Si* $\widetilde{\Phi}$ *vérifie c1 et c2,* $X(\widetilde{\Phi})$ *est un* $A[[T]]$-module monogène.

Démonstration. – Il suffit d'appliquer le lemme 8 avec $n=0$: le lemme 9 résulte alors de c 1 et du lemme de Nakayama.

LEMME 10. – *Le* $A[[T]]$-*module* $X(\widetilde{\Phi})$ *est annulé par* $f(T, \psi)$.

Démonstration. – Le lemme 10 résulte de la relation de Stickelberger et d'un passage à la limite (cf. [1] lemme 2.10 et [12] § 6).

Considérons un système de représentants R du quotient de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{g_\psi})/\mathbf{Q})$ par le sous-groupe de décomposition de ℓ dans $\mathbf{Q}(\zeta_{g_\psi})/\mathbf{Q}$. Soit $\widetilde{\xi}$ le $\mathbf{Q}$-caractère de Δ' : $\widetilde{\xi} = \sum_{\sigma \in \mathrm{R}} \sigma(\widetilde{\Phi})$.

LEMME 11. – *Il existe une constante* C *indépendante de* n *telle qu'on ait :* $[e_{\widetilde{\xi}}\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)] = \mathrm{C} \prod_{\substack{\theta \mid \widetilde{\xi} \\ \theta \neq \omega}} \prod_{\substack{\zeta^{\ell^n}=1 \\ \zeta \neq 1}} |f(\zeta - 1, \theta)|^{-1}$.

Démonstration. – Désignons par $\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)^-$ le sous-groupe des classes relatives de $\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)$. On montre comme dans [12] § 7 qu'il existe une constante B indépendante de n telle qu'on ait : $[\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)^-] = \mathrm{B} \prod_{\theta} \prod_{\substack{\zeta^{\ell^n}=1 \\ \zeta \neq 1}} |f(\zeta - 1, \theta)|^{-1}$ où dans le produit θ décrit l'ensemble des caractères impairs de Δ' distincts de ω et ζ l'ensemble des racines de l'unité d'ordre divisant ℓ^n. Le lemme 10 provient alors du résultat (12) de [14] § 9.4.

Démonstration du théorème 5. – Si $\widetilde{\Phi}$ vérifie c 1 et c 2, on sait d'après le lemme 9 que $\mathrm{X}(\widetilde{\Phi})$ est de la forme $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(f'(\mathrm{T}, \Phi))$ avec $f'(\mathrm{T}, \Phi)$ série dans $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$. Du lemme 10, on déduit que $f'(\mathrm{T}, \Phi)$ divise $f(\mathrm{T}, \psi)$: soit $g(\mathrm{T}, \widetilde{\Phi})$ le quotient. On peut évaluer $e_{\widetilde{\Phi}}\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)$ à l'aide du lemme 8 et de calculs analogues à ceux de 6.3. En désignant par N la norme de L (cf. 1.1) à $\mathbf{Q}_\ell$:

$$[e_{\widetilde{\Phi}}\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)] = \left| \mathrm{N}\Big(\prod_{\zeta^{\ell^n}=1} f'(\zeta - 1, \Phi) \Big) \right|^{-1}.$$

En faisant le même raisonnement pour des conjugués $\sigma(\widetilde{\Phi}) \neq \omega$ de $\widetilde{\Phi}$ $(\sigma \in \mathrm{R})$ et en comparant au lemme 11, on conclut que les séries $g(\mathrm{T}, \sigma(\widetilde{\Phi}))$ sont inversibles dans $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ (les invariants λ et μ qu'on peut leur associer sont nuls (cf. [12] § 7.3) : $\mathrm{X}(\widetilde{\Phi})$ est donc isomorphe à $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(f(\mathrm{T}, \psi))$ et on a un résultat analogue pour les conjugués de $\widetilde{\Phi}$ distincts de ω d'où le théorème 5.

7. Cas particulier des $\mathbf{Z}_2$-extensions.

7.1. Nous allons maintenant adapter les raisonnements et résultats du § 6 au cas $\ell = 2$. Nous conservons les notations de 6.1. La difficulté nouvelle est que le groupe $\mathrm{Gal}(K'/\mathbf{Q}) = \Delta'$ est d'ordre divisible par 2. En fait, on a un isomorphisme canonique $\Delta' \simeq \Delta \times \langle J \rangle$ où $\langle J \rangle$ désigne le sous-groupe de Δ' engendré par la conjugaison complexe J. Pour chaque $\mathbf{Z}_2[\Delta']$-module X, désignons par X^- et X_- (resp. X^+ et X_+) le noyau et le conoyau de la multiplication par $1 + J$ (resp. $1 - J$) dans X. Aux caractères ψ et Φ de Δ associons $\overline{\psi}$ et $\overline{\Phi}$ définis par $\sigma \longrightarrow \psi(\sigma^{-1})$ et $\sigma \longrightarrow \Phi(\sigma^{-1})$. D'après 1.1 (2), en considérant Δ comme un sous-groupe de Δ' avec $\overline{\psi}$ dans le rôle de ψ_0 et Δ' dans celui de G, on a un isomorphisme :

$$e_{\overline{\Phi}} \mathbf{Z}_2[\Delta'] \simeq A[\langle J \rangle]. \tag{10}$$

En composant avec l'homomorphisme d'anneaux obtenu en envoyant J sur -1 on obtient :

$$(e_{\overline{\Phi}} \mathbf{Z}_2[\Delta'])_- \simeq A. \tag{10bis}$$

En munissant $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ de sa structure de $(\mathbf{Z}_2[\Delta'])[[T]]$-module (cf. 6.1) et en utilisant ce qui précède on voit qu'on peut munir $e_{\overline{\Phi}}(\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)^-)$ d'une structure de $A[[T]]$-module. Enonçons alors la conjecture $2'$ pour le caractère Φ :

CONJECTURE $2'$. – *Le* $A[[T]]$-*module* $e_{\overline{\Phi}}(\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)^-)$ *est pseudo-isomorphe à* $A[[T]]/(f(T, \psi))$.

7.2. Enoncé des résultats. Le théorème 3 admet un analogue légèrement plus faible :

THEOREME $3'$. – *Si* Φ *et tous ses conjugués sur* $\mathbf{Q}$ *vérifient la conjecture $2'$, ils vérifient aussi la conjecture 1.*

La démonstration du théorème $3'$ repose sur l'énoncé suivant qui sera démontré en 7.3.

THEOREME $4'$. – *Si* Φ *vérifie la conjecture $2'$, le groupe* $e_\Phi(\mathrm{Gal}(M_n/K_n))$ *est d'ordre divisible par* $\left| \prod_{\chi \mid \Phi_n^*} \frac{L_2(1, \chi)}{2} \right|^{-1}$.

Démonstration du théorème 3'. – En comparant les théorèmes 2 et 4', on obtient qu'il existe une puissance positive de ℓ, $\alpha_n(\Phi)$ telle que : $[e_\Phi \,.\, \mathrm{Gal}(M_n/K_n)] = \alpha_n(\Phi)\,.\,[e_\Phi(U_n/\overline{C}_n)]$. En reprenant la démonstration du théorème 3 de 6.2 on obtient :

$$[e_\Phi \mathcal{C}_n(K)] = \alpha_n(\Phi)\,[e_\Phi(E_n/C_n)_\ell]\,. \tag{11}$$

Avec les hypothèses du théorème 3', on a une relation analogue pour les conjugués sur $\mathbf{Q}$ de Φ. Par ailleurs, on sait d'après un résultat de G. Gras (cf. [7] théorème II.1', on pourrait le retrouver à l'aide de la démonstration du § 5 et des résultats de [14] notamment 9.4 (12)) que la formule obtenue en faisant le produit des relations analogues à (11) pour Φ et ses conjugués sur $\mathbf{Q}$ est valable sans constante parasite : on en déduit que $\alpha_n(\Phi)$ vaut 1 et qu'on a le même résultat pour les conjugués de Φ. D'où le théorème 3'.

Nous avons donné en 6.4, théorème 5, des conditions suffisantes pour que la conjecture 2 soit satisfaite. Enonçons un résultat similaire qui sera démontré en 7.4. Explicitons des conditions sur le caractère Φ ($\mathcal{C}(K')$ est un Δ'-module donc d'après (10), $e_{\overline{\Phi}}\mathcal{C}(K')$ est un $A[\langle J \rangle]$-module) :

c'1 $e_{\overline{\Phi}}\mathcal{C}(K')$ *est un* $A[\langle J \rangle]$-*module monogène.*

c'2 2 *n'est pas totalement décomposé dans* $K_\psi/\mathbf{Q}$.

Alors :

THEOREME 5'. – *Si le caractère* Φ *et ses conjugués sur* $\mathbf{Q}$ *vérifient c'1 et c'2, ils vérifient la conjecture 2'.*

Remarque. – Soit $\mathcal{C}_0(K)$ le 2-groupe des classes de K au sens restreint. En appliquant le lemme de Nakayama à l'anneau local $A[\langle J \rangle]$ et à son idéal maximal $(2, 1-J)$ on voit que la condition c'1 est équivalente (à condition que c'2 soit vérifiée) à la condition c''1 qui ne porte que sur K :

c''1 $e_{\overline{\Phi}}\mathcal{C}_0(K)$ *est un* A-*module monogène.*

7.3. *Démonstration du théorème 4'.* – Supposons (hypothèse du théorème 4') qu'il existe un pseudo-isomorphisme

$$e_{\overline{\Phi}}(\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)^-) \longrightarrow A[[T]]/(f(T,\psi))\,.$$

Le même raisonnement qu'en 6.3 conduit à l'existence d'un pseudo-isomorphisme (g étant défini comme en 6.3) :

$$e_\Phi(\mathrm{Gal}(M'_\infty/N_\infty)_+) \longrightarrow A[[T]]/(g). \tag{12}$$

On a un diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & e_\Phi \mathrm{Gal}(M'_\infty/N_\infty) & \longrightarrow & e_\Phi \mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty) & \longrightarrow & e_\Phi \mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 1-J} & & \downarrow{\scriptstyle 1-J} & & \downarrow{\scriptstyle 1-J} & & \\
0 & \longrightarrow & e_\Phi \mathrm{Gal}(M'_\infty/N_\infty) & \longrightarrow & e_\Phi \mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty) & \longrightarrow & e_\Phi \mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Le lemme du serpent donne alors une suite exacte de $\mathbf{Z}_2[[T]]$-modules où F désigne le noyau de la multiplication par 2 dans $e_\Phi \mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty)$:

$$\begin{aligned} F \longrightarrow e_\Phi(\mathrm{Gal}(M'_\infty/N_\infty)_+) \longrightarrow e_\Phi(\mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)_+) \\ \longrightarrow e_\Phi(\mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty)_+) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{13}$$

De la démonstration du théorème 15 de [13], en tenant compte de l'idempotent e_Φ, on déduit qu'il existe un pseudo-isomorphisme où Z est un $\mathbf{Z}_2$-module de type fini et d désigne comme plus haut la dimension du caractère Φ : $e_\Phi . \mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty) \longrightarrow (\mathbf{Z}_2[[T]])^d \oplus Z$. On en déduit que le module F de (13) est fini et qu'il y a un pseudo-isomorphisme

$$e_\Phi(\mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty)_+) \longrightarrow \mathbf{F}_2[[T]]^d. \tag{14}$$

puisque d'après la théorie de Kummer J opère sur $\mathrm{Gal}(N_\infty/K'_\infty)$ comme -1. En raisonnant comme dans 6.3, on voit que le conoyau de ω_n dans $e_\Phi \mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)_+$ s'identifie à $e_\Phi(\mathrm{Gal}(M'_n/K_n)_+)$. Remarquons que $\mathrm{Gal}(M'_n/K_n)_+$ s'identifie aussi au groupe de Galois de M^f_n, l'extension maximale de K_n parmi les 2-extensions abéliennes non ramifiées pour les places *finies* premières à 2. Désignons par $\beta_n(\Phi)$ (resp. $\gamma_n(\Phi)$) l'ordre du conoyau (resp. du noyau) de la multiplication par ω_n dans $e_\Phi(\mathrm{Gal}(M'_\infty/K'_\infty)_+)$. Alors :

$$\beta_n(\Phi) = [e_\Phi \mathrm{Gal}(M^f_n/K_n)]. \tag{15}$$

LEMME 12. – *On a :* $\beta_n(\Phi) = \gamma_n(\Phi) . \left| \prod_{\chi | \Phi^*_n} L_2(1, \chi) \right|^{-1}$.

Les calculs que nous allons faire pour démontrer le lemme 12 seront facilités par le lemme 13 dont la preuve ne présente aucune difficulté. Le lemme 13 est énoncé avec un nombre premier ℓ et n'est utilisé que pour $\ell = 2$. Si M est un $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$-module strictement fini (cf. [11]), c'est-à-dire un module tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le conoyau $M/\omega_n M$ et le noyau ${}_nM$ de la multiplication par ω_n sont finis, on note $[M]_n$ le quotient $\dfrac{[M/\omega_n M]}{[{}_nM]}$.

LEMME 13. —

i) *Si* M *est un* $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$*-module qui est un groupe fini,* M *est strictement fini et pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $[M]_n$ *vaut* 1.

ii) *Pour toute suite exacte de* $\mathbf{Z}_\ell[[T]]$*-modules strictement finis* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *on a pour tout* $n \in \mathbf{N}$: $[M]_n = [M']_n \cdot [M'']_n$.

Démonstration du lemme 12. — On déduit du lemme 13 et de (12), (13), (14) que : $\beta_n(\Phi) = \gamma_n(\Phi)\, [(\mathbf{F}_2[[T]])^d]_n \cdot [A[[T]]/(g)]_n$. On calcule $[A[[T]]/(g, \omega_n)]$ comme dans 6.3. On tire alors de l'injectivité de la multiplication par ω_n dans $A[[T]]/(g)$ la relation :

$$[A[[T]]/(g)]_n = \left| \prod_{\chi | \Phi_n^*} \frac{L_2(1, \chi)}{2} \right|^{-1} .$$

Il est facile de calculer $[(\mathbf{F}_2[[T]])^d]_n$: $[(\mathbf{F}_2[[T]])^d]_n = 2^{2^n \cdot d}$. Le lemme 12 résulte alors du fait que Φ_n^* est de dimension $2^n \cdot d$. Le théorème 4′ résulte alors de (15) du lemme 12 et du lemme suivant :

LEMME 14. — *L'ordre de* $e_\Phi \mathrm{Gal}(M_n^f/M_n)$ *divise* $2^{2^n \cdot d}$.

Démonstration. — Interprétons les groupes $\mathrm{Gal}(M_n^f/K_n)$ et $\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ à l'aide de la théorie du corps de classes. Soit I_n le groupe des idéaux de K_n premiers à 2. Soit P_n^r (resp. Q_n^r) le sous-groupe de I_n formé d'idéaux principaux qui admettent un générateur congru à 1 modulo 2^r (resp. congru à 1 modulo 2^r et totalement positif). Les groupes $\mathrm{Gal}(M_n^f/K_n)$ et $\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ sont respectivement les limites projectives des groupes I_n/Q_n^r et I_n/P_n^r pour les surjections canoniques. Mais comme $\mathrm{Gal}(M_n^f/K_n)$ et $\mathrm{Gal}(M_n/K_n)$ sont finis (cf. toujours [13] § 2.2) ils sont en fait égaux à I_n/Q_n^r et I_n/P_n^r pour r assez grand. Fixons dorénavant une telle valeur de r : on obtient ainsi un isomorphisme de G_n-modules : $P_n^r/Q_n^r \simeq \mathrm{Gal}(M_n^f/M_n)$.

Soit F_n^0 (resp. F_n^1) le sous-groupe de K_n^* formé des éléments congrus à 1 modulo 2^r (resp. qui sont congrus à 1 modulo 2^r et totalement positifs). L'application qui à un élément de K_n^* premier à 2 associe l'idéal principal engendré induit un homomorphisme surjectif de Δ-modules : $F_n^0/F_n^1 \longrightarrow P_n^r/Q_n^r$.

Choisissons un plongement i de K_n dans $\mathbf{R}$ et définissons pour chaque $\sigma \in G_n = \mathrm{Gal}(K_n/\mathbf{Q})$ une application i_σ :

$$\forall \alpha \in K_n^* \qquad i_\sigma(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i(\sigma(\alpha)) < 0 \\ 0 & \text{si} \quad i(\sigma(\alpha)) > 0 . \end{cases}$$

Définissons une application S de K_n^* dans $\mathbf{F}_2[G_n]$:

$$S(\alpha) = \sum_{\sigma \in G_n} i_\sigma(\alpha)\, \sigma^{-1} .$$

Alors S définit un homomorphisme injectif de G_n-modules de F_n^0/F_n^1 dans $\mathbf{F}_2[G_n]$. Ainsi $[e_\Phi(P_n^r/Q_n^r)]$ divise $[e_\Phi(F_n^0/F_n^1)]$ donc aussi $[e_\Phi \mathbf{F}_2[G_n]]$ qui vaut $2^{d.2^n}$.

7.4. *Démonstration du théorème 5'.* — Nous suivons la même méthode que pour le théorème 5. Désignons par X (resp. $X(\overline{\Phi})$) le groupe $\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$ (resp. $e_{\overline{\Phi}}\mathrm{Gal}(L'_\infty/K'_\infty)$). On démontre exactement comme en 6.4 les deux lemmes suivants :

LEMME 8'. — *Si la condition c'2 est vérifiée, alors pour tout n on a un isomorphisme de* $A[\langle J \rangle]$*-modules :* $e_{\overline{\Phi}}\mathcal{C}(K_n') \simeq X(\overline{\Phi})/\omega_n.X(\overline{\Phi})$.

LEMME 9'. — *Si les conditions c'1 et c'2 sont vérifiées,* $X(\overline{\Phi})$ *est un* $(A[\langle J \rangle])[[T]]$*-module monogène.*

De même qu'en 6.4, on énonce :

LEMME 10'. — *Le* $A[[T]]$*-module* $X(\overline{\Phi})_-$ *est annulé par* $2f(T, \psi)$.

Démonstration. — On raisonne comme dans [1] lemme 2.10 : on applique le théorème de Stickelberger à K_n'. On le traduit sur $e_{\overline{\Phi}}\mathcal{C}(K_n')_-$ en utilisant l'isomorphisme déduit de (10 bis) : $e_{\overline{\Phi}}(\mathbf{Z}_2[G_n'])_- \simeq A[\Gamma_n]$. Cet isomorphisme est obtenu comme dans (2) de 1.1 en faisant jouer les rôles de Δ et ψ_0 à Δ' et $\widetilde{\psi}$ ($\widetilde{\psi}$ comme dans 6.1) : le produit de l'élément de Stickelberger et de $e_{\overline{\Phi}}$ est envoyé sur l'élément $2\xi_n^\psi$ de [12] § 6.4 : en passant à la limite projective la famille (ξ_n^ψ) correspond à la série $f(T, \psi)$.

Considérons un système de représentants R du quotient de $G(\mathbf{Q}(\zeta_{g_\psi})/\mathbf{Q})$ par le sous-groupe de décomposition de 2 dans $\mathbf{Q}(\zeta_{g_\psi})/\mathbf{Q}$. Soit ξ le $\mathbf{Q}$-caractère de Δ : $\xi = \sum_{\sigma \in R} \sigma(\Phi) = \sum_{\sigma \in R} \sigma(\overline{\Phi})$

et ξ^* le caractère de Δ' induit par ξ (en considérant Δ comme un sous-groupe de Δ').

LEMME 11'. –

i) *L'extension des idéaux induit une injection de* $e_\xi \mathcal{C}(\mathrm{K}_n)$ *dans* $\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)$.

ii) *Il existe une constante* C *indépendante de* n *telle qu'on ait :* $[e_\xi(\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)_-)] = \mathrm{C} \prod_{\substack{\theta \mid \xi^* \\ \theta(\mathrm{J})=-1}} \prod_{\substack{\zeta^{2^n}=1 \\ \zeta \neq 1}} |f(\zeta - 1, \theta)|^{-1}$.

Démonstration de i). – Soit H_n le groupe $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}'_n/\mathrm{K}_n)$ et μ_n le groupe des racines de l'unité dans K'_n : vue l'hypothèse $\ell \nmid [\Delta]$, μ_n est d'ordre une puissance de 2. De plus, H_n agit trivialement sur E'_n/μ_n qui est un $\mathbf{Z}$-module sans torsion : le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_n, \mathrm{E}'_n/\mu_n)$ est donc nul. La suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte de H_n-modules $0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathrm{E}'_n \longrightarrow \mathrm{E}'_n/\mu_n \longrightarrow 0$ prouve que $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_n, \mathrm{E}'_n)$ est l'image de $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_n, \mu_n) \simeq \mu_n/\mu_n^2$, groupe d'ordre 2. L'action de $\mathrm{G}'_n = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}'_n/\mathbf{Q})$ sur $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_n, \mathrm{E}'_n)$ est donc triviale. Comme le noyau de l'application d'extension des idéaux de K_n à K'_n peut être envoyé par un G_n-homomorphisme injectif dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{H}_n, \mathrm{E}'_n)$ (résultat classique, cf. aussi [5]), on voit que sa ξ-composante est triviale, d'où la partie i) du lemme.

Démonstration de ii). – Remarquons d'abord que $[e_\xi(\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)_-)]$ et $[e_\xi(\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)^-)]$ sont égaux. Or d'après la partie i), on peut identifier sur $e_\xi \mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)$ les noyaux de $(1 + \mathrm{J})$ et de l'application $e_\xi \mathcal{C}(\mathrm{K}'_n) \longrightarrow e_\xi \mathcal{C}(\mathrm{K}_n)$ déduite de la norme des idéaux. Donc $[e_\xi(\mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)_-)]$ est l'ordre de la ξ-partie du 2-groupe des classes relatives de K'_n. Il suffit alors de raisonner comme pour le lemme 11 de 6.4 pour obtenir ii).

Démonstration du théorème 5'. – Si Φ vérifie c'1 et c'2, on sait d'après le lemme 9' que $\mathrm{X}(\overline{\Phi})_-$ est de la forme $\mathrm{A}[[\mathrm{T}]]/(f'(\mathrm{T}, \Phi))$ avec $f'(\mathrm{T}, \Phi) \in \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$. Du lemme 10', on déduit que $f'(\mathrm{T}, \Phi)$ divise $2f(\mathrm{T}, \psi)$ donc aussi $f(\mathrm{T}, \psi)$ puisque l'invariant μ de $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}'_\infty/\mathrm{K}'_\infty)$ est nul ($\ell = 2$, cf. [2]) : soit $g(\mathrm{T}, \Phi)$ le quotient. On peut évaluer $e_{\overline{\Phi}} \mathcal{C}(\mathrm{K}'_n)_-$ à l'aide du lemme 8' et de calculs analogues à ceux de 6.3. En désignant par N la norme de L (cf. 1.1) à $\mathbf{Q}_\ell$, on obtient : $[e_{\overline{\Phi}} \mathcal{C}(K'_n)_-] = \left| N \left(\prod_{\zeta^{2^n}=1} f'(\zeta - 1, \Phi) \right) \right|^{-1}$.

En faisant le même raisonnement pour les conjugués de Φ et en comparant au lemme 11′, on en déduit que les séries $g(T, \sigma(\Phi))$ ($\sigma \in R$) sont inversibles. L'application canonique $X \longrightarrow X_-$ induit un $A[[T]]_-$ homomorphisme $X^- \longrightarrow X_-$ dont le noyau et le co-noyau sont annulés par $\underline{2}$ donc sont finis (encore d'après $\mu = 0$ pour X cf. [2]) : $X(\sigma(\overline{\Phi}))^-$ et $X(\sigma(\overline{\Phi}))_-$ sont donc pseudo-isomorphes ; d'où le théorème 5′.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. COATES et S. LICHTENBAUM, On ℓ-adic zeta functions, *Annals of Maths*, vol. 98, n° 3, pp. 498-550.

[2] B. FERRERO, Iwasawa invariants of abelian number fields, *Math. Ann.*, 234 (1978).

[3] A. FRÖHLICH, Ideals in a extension field as modules. . .,*Math. Zeit.*, 74 (1960), 29-38.

[4] R. GILLARD, Sur le groupe des classes des extensions abéliennes réelles, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, exposé du 3.1.77.

[5] R. GILLARD, Unités cyclotomiques et $\mathbf{Z}_\ell$-extensions, *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 25 mars 1977.

[6] G. GRAS, Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, *Ann. de l'Inst. Fourier*, t. 27, n° 1 (1977), 1-66.

[7] G. GRAS, Etude d'invariants relatifs aux groupes des classes des corps abéliens, Journées arithmétiques de Caen (1976), *Astérisque*, n° 41-42 (1977), 35-53.

[8] R. GREENBERG, On p-adic L functions and cyclotomic fields II, *Nagoya Math. J.*, 67 (1977).

[9] H. HASSE, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie Verlag, Berlin, 1952.

[10] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, *Abh. math. Sem.* Hamburg, t. 20 (1956), 257-258.

[11] K. Iwasawa, On some properties of Γ finite modules, *Annals of Maths.*, vol. 70, n° 2, (1959), 291-312.

[12] K. Iwasawa, Lectures on *p*-adic L-functions, *Ann. Math. Studies,* 74, Princeton Univ. Press.

[13] K. Iwasawa, On $\mathbf{Z}_{\ell}$-extensions of algebraic number fields, *Annals of Maths,* vol. 98 (1973), 246-326.

[14] H. Leopoldt, Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, *Abh. Deutsche Akad. Wiss.,* Berlin, 2 (1954).

[15] H. Leopoldt, Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers, *J. reine angew. Math.,* 201 (1959), 119-149.

Manuscrit reçu le 11 juillet 1977.

Roland Gillard,
Université de Grenoble I
Laboratoire de Mathématiques Pures
Associé au CNRS n° 188
Institut Fourier
B.P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères.