ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL TALAGRAND

Capacités invariantes extrémales

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 4 (1978), p. 79-146

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_4_79_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 4 (1978), 79-146.

CAPACITÉS INVARIANTES EXTRÉMALES

par Michel TALAGRAND

TABLE DES MATIERES

* * *

1. Introduction et rappels sur les capacités.

Le principal objet de ce travail est l'étude du cône des capacités alternées d'ordre infini sur un espace localement compact E qui sont invariantes par l'action d'un groupe localement compact G. Grâce au théorème de représentation dû à G. Choquet (théorème 2) cette étude se ramène à celle du cône des mesures de Radon positives sur l'espace $\mathscr{F}(E)$ des fermés de E (muni d'une topologie convenable) qui sont invariantes par l'action de G sur $\mathscr{F}(E)$. La richesse de la situation provient de ce que l'action de G sur $\mathscr{F}(E)$ est assez complexe dès que G n'est pas compact, et ceci même si l'action de G sur E est celle de G opérant sur lui-même par translations. Nous étudierons tout particulièrement l'ensemble des génératrices extrémales du cône précité. Les résultats les plus précis seront obtenus lorsque G est moyennable. Le cas le plus simple d'un G non compact, est celui où $G = \mathbf{Z}$ opère sur lui-même par translation, et notre étude est alors celle des mesures $\geqslant 0$ sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}} - \{e\}$ (où e désigne l'élément neutre de $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$) invariantes par le shift de Bernoulli.

La référence de base concernant les notions d'analyse fonctionnelle et de topologie utilisées dans ce travail (chapeau d'un cône, base d'un cône, ...) est [2], et celle concernant les groupes moyennables est [7].

L'aspect de la théorie des capacités [3] que nous utiliserons étant (à tort!) assez méconnu, nous allons procéder brièvement à quelques rappels.

Soit E un espace localement compact et $\mathscr{K}(E)$ l'espace des compacts non vides de E. Muni de la topologie de Hausdorff, $\mathscr{K}(E)$ est un espace localement compact. Une capacité sur E est une fonction f de $\mathscr{K}(E)$ dans $\mathbf{R}^+$, qui est croissante et continue à droite, c'est-à-dire que

$$\forall K \in \mathscr{K}(E), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists L \in \mathscr{K}(E); \qquad K \subset \mathring{L},$$

$$f(L) \leqslant f(K) + \varepsilon .$$

Nous prolongerons f à la partie vide en posant $f(\varnothing) = 0$.

Étant donné une fonction croissante h de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathbf{R}^+$ la régularisée rh de h est définie par

$$\forall K \in \mathcal{K}(E), \qquad rh(K) = \inf\{h(L);\ L \in \mathcal{K}(E),\ K \subset \mathring{L}\};$$

c'est une capacité.

Une fonction h de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathbf{R}^+$ sera dite *alternée d'ordre infini* si pour toute famille finie $K_0, K_1, \ldots, K_p$ de compacts de E, elle vérifie

$$(1) \qquad \sum_{P \subset [1,p]} (-1)^{\operatorname{card} P}\, h\Big(K_0 \cup \bigcup_{p \in P} K_p\Big) \leqslant 0 .$$

Elle sera dite *monotone d'ordre infini* si elle vérifie

$$(2) \qquad \sum_{P \subset [1,p]} (-1)^{\operatorname{card} P}\, h\Big(K_0 \cap \bigcap_{P \in p} K_p\Big) \geqslant 0 .$$

La régularisée d'une application alternée (resp. monotone) d'ordre infini est aussi une capacité alternée (resp. monotone) d'ordre infini.

Désignons par $\mathcal{C}_K(E)$ (resp. : $\mathcal{C}_K^+(E)$; $\mathcal{C}_b(E)$) l'ensemble des fonctions réelles continues à support compact (resp. : continues positives à support compact; continues bornées) sur E. La topologie vague sur l'ensemble des capacités est la moins fine rendant continues les applications $f \longrightarrow \hat{f}(\varphi)$ où $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(E)$ et où

$$\hat{f}(\varphi) = \int_{0^+}^{\infty} f(\{\varphi \geqslant u\})\, du$$

(où du désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}$ et où

$$\{\varphi \geqslant u\} = \{s \in E;\ \varphi(s) \geqslant u\}).$$

Si h est fonction croissante de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathbf{R}$ on a

$$\int_{0^+}^{\infty} h(\{\varphi \geqslant u\})\, du = \widehat{rh}\,(\varphi).$$

Désignons par $M_+(E)$ le cône des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur E. Étant donné un compact K de E, on note :

$$\underset{\sim}{K} = \{L \in \mathcal{K}(E);\ L \subset K\}.$$

C'est un compact de $\mathcal{K}(E)$, et tout compact de $\mathcal{K}(E)$ est contenu dans un compact de cette forme. Le théorème de représentation suivant est dû à G. Choquet.

THÉORÈME. 1. — *A chaque capacité* f *monotone d'ordre infini sur* E *correspond une unique mesure de Radon* μ *sur* $\mathscr{K}(\mathrm{E})$ *telle que pour tout compact* K *de* E *on ait*

$$f(\mathrm{K}) = \mu(\underset{\sim}{\mathrm{K}}).$$

De plus, cette correspondance est un homéomorphisme lorsque le cône des capacités monotones d'ordre infini sur E *et* $\mathrm{M}_+(\mathscr{K}(\mathrm{E}))$ *sont munis des topologies vagues.*

Désignons par $\mathscr{F}(\mathrm{E})$ l'ensemble des fermés *non vides* de E, muni de la topologie la moins fine rendant ouverts les ensembles des types suivants :

$$\{\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{E});\ \mathrm{F} \cap \mathrm{V} \neq \varnothing\}; \qquad \{\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{E});\ \mathrm{F} \cap \mathrm{K} = \varnothing\}$$

(où V est un ouvert de E et K un compact de E). L'espace $\mathscr{F}(\mathrm{E})$ est localement compact.

Pour tout compact K de E, on pose :

$$\tilde{\mathrm{K}} = \{\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{E});\ \mathrm{F} \cap \mathrm{K} \neq \varnothing\}.$$

C'est un compact de $\mathscr{F}(\mathrm{E})$, et tout compact de $\mathscr{F}(\mathrm{E})$ est contenu dans un compact de cette forme. Le théorème suivant, analogue au théorème 1, est également dû à G. Choquet.

THÉORÈME 2. — *A chaque capacité* f *alternée d'ordre infini sur* E *correspond une unique mesure de Radon* μ *sur* $\mathscr{F}(\mathrm{E})$ *telle que pour tout compact* K *de* E *on ait :*

$$f(\mathrm{K}) = \mu(\tilde{\mathrm{K}}).$$

De plus, cette correspondance est un homéomorphisme lorsque le cône des capacités alternées d'ordre infini sur E *et* $\mathrm{M}_+(\mathscr{F}(\mathrm{E}))$ *sont munis des topologies vagues.*

On trouvera dans [14] une démonstration complète de ces deux théorèmes. Ces résultats établissent une correspondance entre d'une part des objets « simples » (mesures de Radon) sur un espace localement compact « compliqué » ($\mathscr{K}(\mathrm{E})$ et surtout $\mathscr{F}(E)$) et d'autre part des objets « compliqués » (capacités alternées ou monotones d'ordre infini) sur un espace « simple ». C'est la richesse de cette dualité que nous allons exploiter à partir du paragraphe 3.

2. Action propre d'un groupe.

Les résultats de ce paragraphe et du suivant sont assez simples et servent principalement à éclairer la nature des difficultés que nous rencontrerons par la suite.

Soit G un groupe localement compact et m une mesure de Haar de G invariante à gauche. Supposons que G opère à gauche sur E par l'application $(g,x) \longrightarrow g.x$ de $G \times E$ dans E. Nous dirons que G opère continûment si cette application est continue; et qu'il opère par des homéomorphismes si chacune des applications partielles $x \longrightarrow g.x$ est continue. Nous supposerons toujours cette dernière condition vérifiée.

Nous allons étudier dans ce paragraphe le cône $\mathscr{Y}$ des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur E qui sont invariantes par l'action de G, et l'ensemble $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$ des points extrémaux de $\mathscr{Y}$. (Par abus de langage, nous dirons qu'un point d'un cône est extrémal s'il est non nul et engendre une génératrice extrémale.) Le cône $\mathscr{Y}$ est réticulé. Il sera muni de la topologie vague.

Pour deux ensembles A de G et B de E posons

$$A.B = \{g.x \; ; \; g \in A , \; x \in B\}.$$

Nous dirons que G opère *proprement* sur E s'il opère continûment et si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall K \in \mathscr{K}(E), \quad \exists L \in \mathscr{K}(G); \qquad g \notin L \Longrightarrow K \cap g.K = \varnothing \qquad \text{(AP)}$$

Cette condition, très forte, signifie que l'action de G est très simple. Par exemple, si cette action est transitive, c'est celle de G sur G/H, où H est un sous-groupe compact de G. C'est pourquoi les résultats que nous obtiendrons avec cette hypothèse sont essentiellement sans mystère.

Commençons par quelques préliminaires qui préparent le théorème 5, lequel décrit complètement $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$ lorsque G

opère proprement sur E, *ce que nous supposons jusqu'à avis contraire*, et que nous indiquons dans les énoncés par (AP).

Lemme 3 (AP). — *Si x et y sont deux points de* E *tels que $x \notin G.y$, il existe des voisinages* V *de x et* W *de y tels que* $G.V \cap G.W = \varnothing$.

Démonstration. — Soit K un voisinage compact de $\{x, y\}$ et L un compact de G tel que $g.K \cap K = \varnothing$ dès que $g \notin L$. Puisque $x \notin L.y$ il existe des voisinages V de x et W de y, contenus dans K et tels que $V \cap L.W = \varnothing$. Mais si $g \notin L$, on a $V \cap g.W \subset K \cap g.K = \varnothing$. On a donc $V \cap G.W = \varnothing$, d'où $G.V \cap G.W = \varnothing$. c.q.f.d.

Soit maintenant $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ les relations d'équivalence définies sur $\mathbf{R}^* \times E$ et E respectivement par les conditions :

$$(\alpha,x)\ \mathscr{R}\ (\alpha',x') \Longleftrightarrow \exists s \in G; \qquad x' = s.x, \quad \alpha' = \alpha\Delta(s)$$
$$x\ \mathscr{S}\ x' \Longleftrightarrow x \in G.y$$

où Δ désigne la fonction module de G.

Désignons par R (resp. S) l'espace quotient $(\mathbf{R}_+ \times E)/\mathscr{R}$ (resp. $E/\mathscr{S}$) muni de la topologie quotient et par σ l'application quotient de E dans S. (Ces définitions ont un sens même si (AP) n'est pas vérifiée.)

Proposition 4 (AP). — *Les espaces* R *et* S *sont séparés et localement compacts.*

Démonstration. — En ce qui concerne S, nos assertions résultent du fait que σ est ouverte et du lemme 3.

Il suffit maintenant, d'après le résultat précédent, de prouver que l'action de G sur $\mathbf{R}_+ \times E$ donnée par

$$(g,(\alpha,x)) \longrightarrow (\alpha\Delta(g),g.x)$$

vérifie (AP) (puisque les classes d'équivalence pour $\mathscr{R}$ sont les orbites de cette opération). Elle est continue. Tout compact de $\mathbf{R}_+^* \times E$ est contenu dans un compact de la forme $[a,b] \times K$, où $K \in \mathscr{K}(E)$. Et l'on a

$$g.K \cap K = \varnothing \Longrightarrow g.([a,b] \times K) \cap [a,b] \times K = \varnothing .$$

c.q.f.d.

Désignons par $\widetilde{\mathscr{E}(\mathscr{Y})}$ l'espace quotient de $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$ par la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les génératrices, muni de la topologie quotient, et par τ le morphisme canonique de $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$ dans $\widetilde{\mathscr{E}(\mathscr{Y})}$.

Pour tout point x de E l'application $g \longrightarrow g.x$ de G dans E est propre, donc l'image μ_x de m par cette application est bien définie.

THÉORÈME 5 (AP). — *a) L'application* $(\alpha,x) \longrightarrow \alpha\mu_x$ *de* $\mathbf{R}_+ \times \mathrm{E}$ *dans* $\mathscr{Y}$ *est compatible avec* $\mathscr{R}$, *et définit par passage au quotient un homéomorphisme* Ψ *de* R *et* $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$. *De plus* $\mathscr{E}(\mathscr{Y}) \cup \{0\}$ *est fermé.*

b) L'application $x \longrightarrow \tau(\mu_x)$ *de* E *dans* $\widetilde{\mathscr{E}(\mathscr{Y})}$ *est compatible avec* S *et définit par passage au quotient un homéomorphisme de* S *et* $\widetilde{\mathscr{E}(\mathscr{Y})}$.

Démonstration. — Il est clair que Ψ est à valeurs dans $\mathscr{Y}$. Si $x \in \mathrm{G}$, $s \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$, on a

$$\begin{aligned}\mu_{s.x}(\mathrm{K}) &= m(\{t \in \mathrm{G};\ t.(s.x) \in \mathrm{K}\})\\ &= m(\{t \in \mathrm{G};\ t.x \in \mathrm{K}\}s^{-1}) = \Delta^{-1}(s)\mu_x(\mathrm{K}).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\alpha'\mu_{x'} = \alpha\mu_x$ dès que $(\alpha', x')\ \mathscr{R}\ (\alpha,x)$. Réciproquement si $\alpha'\mu_{x'} = \alpha\mu_x$, on a $x' \in \mathrm{G}.x$ puisque $\mu_{x'}$ est portée par $\mathrm{G}.x'$ et μ par $\mathrm{G}.x$. On en déduit sans peine que $(\alpha', x')\ \mathscr{R}\ (\alpha, x)$.

Soit $\mu \in \mathscr{E}(\mathscr{Y})$. Si le support de μ contient deux points x et y tels que $x \notin \mathrm{G}.y$, il existe d'après le lemme 3 deux voisinages ouverts V de x et W de y tels que

$$\mathrm{G.V} \cap \mathrm{G.W} = \varnothing .$$

Les mesures $\mu_{|\mathrm{G.V}}$ et $\mu_{|(\mathrm{G.V})^c}$ sont invariantes, positives, non nulles, non proportionnelles et leur somme est μ, ce qui est absurde. Ainsi le support de μ est contenu dans une orbite $\mathrm{G}.x$.

Il résulte de (AP) que le stabilisateur de x est compact. Nous voilà donc ramenés au cas où $\mathrm{E} = \mathrm{G/H}$ (H compact). On sait qu'alors toutes les mesures invariantes sont proportionnelles, donc proportionnelles à μ_x. Ceci montre que $\mu = k\mu_x$.

Pour voir que μ_x est extrémale, il suffit d'après ce qui précède de remarquer que si $\mu_x = \mu_1 + \mu_2$ alors μ_1 et μ_2 sont portées par $G.x$. Remarquons aussi qu'en vertu de la démonstration précédente μ_x est définie et extrémale dès que la condition suivante est vérifiée :

$$\forall K \in \mathscr{K}(E), \quad \exists L \in \mathscr{K}(G); \qquad g \notin L \Longrightarrow g.x \notin K.$$

Nous avons ainsi établi que Ψ est une bijection de R sur $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$. Pour prouver qu'elle est continue, il suffit par définition de la topologie quotient de prouver que l'application $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha\mu_x$ de $\mathbf{R}_+^* \times E$ dans $\mathscr{Y}$ est continue, donc que $x \longrightarrow \mu_x$ est continue.

Soit $\varphi \in \mathscr{C}_K(E)$. Par définition de μ_x on a

$$\mu_x(\varphi) = \int_G \varphi(g.x)\, dm(x).$$

Soit V un voisinage compact de x. Soit L un compact de G tel que

$$g \notin L \Longrightarrow g.V \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$$

(où $\operatorname{supp} \varphi$ désigne le support de φ). Sur le compact $L \times V$, l'application $(g,x) \longrightarrow \varphi(g.x)$ est uniformément continue. Il en résulte que sur V l'application

$$x \longrightarrow \mu_x(\varphi) = \int_L \varphi(g.x)\, dm(x)$$

est continue, ce qui suffit d'après la définition de la topologie vague de $M_+(E)$.

Pour prouver que Ψ est un homéomorphisme et que $\mathscr{E}(\mathscr{Y}) \cup \{0\}$ est fermé, il suffit, puisque R est localement compact, de prouver que toute mesure λ non nulle de $\mathscr{Y}$ possède un voisinage V tel que $V \cap \Psi(R) = V \cap \Psi(U)$, où U est un compact de R.

Soit $\varphi \in \mathscr{C}_K^+(E)$ telle que $\lambda(\varphi) > 0$. Soit W un voisinage compact de l'unité de G, et $\varphi' \in \mathscr{C}_K^+(E)$ telle que $\varphi'(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in W . \operatorname{supp} \varphi$. Soit $\mu = \alpha'\mu_{x'}$ un élément de $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$ tel que

$$\mu(\varphi) \geqslant \frac{\lambda(\varphi)}{2}; \qquad \mu(\varphi') \leqslant 2\lambda(\varphi').$$

Puisque $\mu(\varphi)$ n'est pas nul, $G.x' \cap \operatorname{supp} \varphi$ n'est pas vide. On peut donc écrire $\mu = \alpha\mu_x$ où $x \in \operatorname{supp} \varphi$. On a :

$$\mu(\varphi') = \int_G \alpha\varphi'(g.x)\, dm(g) \geqslant \alpha \int_W \varphi'(g.x)\, dm(g) \geqslant \alpha m(W)$$

d'où il vient

$$\alpha \leqslant 2\lambda(\varphi')(m(W))^{-1}.$$

D'autre part on a

$$\mu(\varphi) = \int_G \alpha\varphi(g.x)\, dm(g) \leqslant \alpha\|\varphi\|_\infty m(\{g \in G;\ g.x \cap \operatorname{supp} \varphi \neq \varnothing\}) = k\alpha$$

où k est une constante indépendante de μ. On a donc $\alpha \geqslant \frac{\lambda(\varphi)}{2k}$. Ainsi :

$$\left\{\mu \in \mathcal{S} ;\ \frac{\lambda(\varphi)}{2} \leqslant \mu(\varphi),\ \mu(\varphi') \leqslant 2\lambda(\varphi')\right\} \cap \Psi(R) \subset \Psi\left(\rho\left(\left[\frac{\lambda(\varphi)}{2k}, \frac{2\lambda(\varphi')}{m(W)}\right] \times \operatorname{supp} \varphi\right)\right)$$

ce qui termine la preuve de a).

La preuve de b), qui est maintenant aisée, est laissée au lecteur. Ce résultat nous permettra d'identifier désormais $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ et S. c.q.f.d.

Nous allons maintenant chercher à représenter tout élément de $\mathcal{S}$ comme intégrale d'éléments extrêmaux. Nous allons montrer plus précisément que tout élément de $\mathcal{S}$ est barycentre d'une mesure de Radon portée par $\mathcal{E}(\mathcal{S})$. Une telle mesure n'est jamais unique sans restriction supplémentaire, puisqu'il est possible de « déplacer la masse le long des génératrices ». (par contre, la mesure conique associée est unique). Pour éviter ce phénomène, il suffit d'imposer à la mesure d'être portée par un ensemble coupant chaque génératrice extrémale en un point unique.

THÉORÈME 6 (AP). — *a) Il existe un ensemble universellement mesurable* U *de* $\mathcal{E}(\mathcal{S})$, *qui coupe chaque génératrice extrémale en un point unique, et tel que, pour toute mesure* $\mu \in \mathcal{S}$, *il existe une unique mesure* $\eta \in M_+(\mathcal{E}(\mathcal{S}))$ *portée par* U *et telle que :*

$$(3) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_K(E), \qquad \mu(\varphi) = \int_{\mathcal{E}(\mathcal{S})} \lambda(\varphi)\, d\eta(\lambda).$$

b) Supposons qu'il existe une section continue θ *de* τ. *Alors pour toute mesure* $\mu \in \mathcal{S}$, *il existe une unique mesure* $\nu \in M_+(S)$ *telle que*

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_K(E), \qquad \mu(\varphi) = \int_S \theta(y)(\varphi)\, d\nu(y).$$

De plus, la correspondance $\nu \longrightarrow \mu$ *est un homéomorphisme lorsque* $M_+(S)$ et $\mathcal{S}$ *sont munis des topologies vagues.*

Démonstration. — *a*) Soit $(V_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ un recouvrement de E par des ouverts relativement compacts, indexé par les ordinaux $< \gamma$. Posons, pour $\alpha < \gamma$

$$E_\alpha = G.V_\alpha \Big\backslash \bigcup_{\beta<\alpha} G.V_\beta .$$

Ces ensembles sont différence de deux ouverts, donc universellement mesurables, et forment une partition de E. La restriction μ_α de μ à E_α est invariante, et l'on vérifie sans peine, les ensembles $G.V_\alpha$ étant ouverts, que l'on a $\mu = \sum_\alpha \mu_\alpha$.

Soit, pour chaque α, une fonction $\varphi_\alpha \in \mathscr{C}_K^+(E)$ telle que $\varphi_\alpha(x) \geqslant 1$ pour $x \in V_\alpha$. L'ensemble des mesures μ de $\mathcal{S}$ portées par $G.\overline{V}_\alpha$ est une face fermée de $\mathcal{S}_\alpha$ de $\mathcal{S}$ (en effet, $G.\overline{V}_\alpha$ est fermé), et il résulte de la preuve de l'implication $b \Longrightarrow a$ du théorème 7 que

$$B_\alpha = \{\mu \in \mathcal{S}_\alpha \ ; \ \mu(\varphi_\alpha) = 1\}$$

est une base de cette face. L'ensemble des points extrémaux de B_α est fermé, et μ_α, si elle n'est pas nulle, possède un homothétique dans B_α. Il résulte alors du théorème de Krein-Milman qu'il existe une mesure de Radon η_α sur $\overline{\mathscr{E}(B_\alpha)} = \mathscr{E}(B_\alpha) = \mathscr{E}(\mathcal{S}) \cap B_\alpha$, qui vérifie

$$(4) \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}_K(E), \qquad \mu_\alpha(\varphi) = \int_{\mathscr{E}(\mathcal{S})} \lambda(\varphi)\, d\eta_\alpha(\lambda).$$

Puisque $\mathcal{S}$ est réticulé, il en est de même de $\mathcal{S}_\alpha$. Donc B_α est un simplexe, et η_α est unique. De plus η_α est portée par $F_\alpha = \{k\mu_x \in \mathscr{E}(\mathcal{S}) ; \ x \in E_\alpha\}$.

Prouvons que la somme $\sum_{\alpha<\Upsilon} \eta_\alpha$ converge. Il résulte du théorème 5 que tout compact N de $\mathscr{E}(\mathscr{Y})$ est contenu dans un compact de la forme

$$\{k\mu_x;\ k \in [a,b],\ x \in \mathrm{M} \in \mathscr{K}(\mathrm{E}),\ 0 < a < b\}.$$

On en déduit qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{E})$ telle que $\lambda(\varphi) \geqslant 1$ pour $\lambda \in \mathrm{N}$. On a donc :

$$\eta_\alpha(\mathrm{N}) = \int_{\lambda\in\mathrm{N}} d\eta_\alpha(\lambda) \leqslant \int_{\mathscr{E}(\mathscr{Y})} \lambda(\varphi)\, d\eta_\alpha(\lambda) \leqslant \mu_\alpha(\varphi).$$

Le résultat découle alors du fait que $\sum_\alpha \mu_\alpha = \mu$. Une sommation des égalités (4) et un passage à la limite établissent (3).

Posons $\mathrm{U} = \bigcup_{\alpha<\Upsilon} \mathrm{B}_\alpha \cap \mathrm{F}_\alpha$. Il est clair que U est universellement mesurable, indépendant de η, et il porte η puisqu'il porte chaque η_α. L'existence de η et U est ainsi établie. Prouvons l'unicité de η, lorsque μ est fixée. Soit M un compact de E, et posons

$$\mathrm{H} = \{k\mu_x \in \mathscr{E}(\mathscr{Y});\ x \in \mathrm{G.M}\}.$$

Puisque G.M et H sont fermés, l'égalité (3) implique que

$$\forall\varphi \in \mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}), \qquad \mu_{|\mathrm{G.M}}(\varphi) = \int_{\mathscr{E}(\mathscr{Y})} \lambda(\varphi)\, d\eta_{|\mathrm{H}}(\lambda).$$

En considérant les compacts $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}_\alpha$, on a donc

$$\forall\varphi \in \mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}), \qquad \mu_\alpha(\varphi) = \int_{\mathscr{E}(\mathscr{Y})} \lambda(\varphi)\, d\eta_{|\mathrm{F}_\alpha}(\lambda).$$

Or, puisque $\eta_{|\mathrm{F}_\alpha}$ est portée par B_α, cette égalité détermine entièrement $\eta_{|\mathrm{F}_\alpha}$, comme nous l'avons vu. Et puisque

$$\mathrm{F}_\alpha = \{k\mu_x \in \mathscr{E}(\mathscr{Y});\ x \in \mathrm{G.V}_\alpha\} \Big\backslash \bigcup_{\beta<\alpha} \{k\mu_x \in \mathscr{E}(\mathscr{Y});\ x \in \mathrm{G.V}_\alpha\}$$

où les ensembles $\{k\mu_x \in \mathscr{E}(\mathscr{Y});\ x \in \mathrm{G.V}_\alpha\}$ sont ouverts, on a $\eta = \sum_\alpha \eta_{|\mathrm{F}_\alpha}$, ce qui prouve l'unicité de η.

b) Conservons les notations précédentes. Soit θ' l'application réciproque de la restriction de τ à U. Cette application est continue sur chaque ensemble $\sigma(\mathrm{E}_\alpha)$. Désignons par ν_α

l'image par τ de la mesure $\dfrac{\theta' \circ \tau(\lambda)}{\theta \circ \tau(\lambda)}\, d\eta_\alpha(\lambda)$. Cette mesure est bien définie puisque $\dfrac{\theta' \circ \tau}{\theta \circ \tau}$ est bornée et continue sur $B_\alpha \cap \mathscr{E}(\mathscr{Y})$. Et l'on a, pour $\varphi \in \mathscr{C}_K(E)$:

$$(5) \quad \int_S \theta(y)(\varphi)\, d\nu_\alpha(y) = \int_{\mathscr{E}(\mathscr{Y})} (\theta \circ \tau(\lambda))(\varphi) \times \frac{\theta' \circ \tau(\lambda)}{\theta \circ \tau(\lambda)}\, d\eta_\alpha(\lambda)$$
$$= \int_{\mathscr{E}(\mathscr{Y})} \lambda(\varphi)\, d\eta_\alpha(\lambda) = \mu_\alpha(\varphi)$$

puisque pour $\lambda \in U$, on a par définition $\theta' \circ \tau(\lambda) = \lambda$.

Prouvons que la somme $\sum\limits_{\alpha<\Upsilon} \nu_\alpha$ est définie. Soit $M \in \mathscr{K}(S)$, et $N \in \mathscr{K}(E)$ tel que $\sigma(N) = M$. Si $\varphi \in \mathscr{C}_K^+(E)$ est > 0 sur N alors $\theta(y)(\varphi)$ est > 0 pour $y \in M$, donc minorée par une constante > 0 sur M, et le résultat découle alors de (5). Il suffit alors de sommer les égalités (5) et de passer à la limite pour prouver l'existence de ν.

L'unicité se démontre comme précédemment, en prouvant que la restriction de ν à $\sigma(E_\alpha)$ est déterminée par μ, ce qui découle encore de l'unicité de η_α. (Les détails sont laissés au lecteur.)

Pour $\varphi \in \mathscr{C}_K(E)$, la fonction $y \longrightarrow \theta(y)(\varphi)$ appartient à $\mathscr{C}_K(S)$, puisque son support est contenu dans σ (supp φ). La correspondance $\nu \longrightarrow \mu$ est donc continue pour les topologies vagues.

Le fait que cette correspondance soit un homéomorphisme, se prouve par un raisonnement analogue à ceux de [14], en montrant que si (μ_i) converge vaguement vers μ, alors la suite (ν_i) associée possède une valeur d'adhérence ν' associée à μ, et donc que $\nu' = \nu$ d'après l'unicité. c.q.f.d.

Remarque. — Lorsque G est unimodulaire, τ admet toujours une section continue, puisque alors μ_x ne dépend que de $\sigma(x)$.

Revenons maintenant au cas général, où la condition (AP) n'est pas nécessairement vérifiée. Il est intéressant de savoir quand $\mathscr{Y}$ possède une base compacte, ou est bien coiffé, pour pouvoir assurer l'existence d'éléments extrémaux. Remarquons que $\mathscr{Y}$ peut être réduit à $\{0\}$ comme le montre l'exemple d'un groupe non moyennable opérant sur son compactifié de Stone-Čech.

THÉORÈME 7. — *Supposons que* G *opère sur* E *par des homéomorphismes, et considérons les assertions suivantes :*

a) $\mathcal{Y}$ *possède une base compacte s'il n'est pas réduit à* $\{0\}$.

b) Il existe un compact X *de* E *tel que* $G.X = E$.

c) S *est compact.*

d) Il existe une suite (X_n) *de compacts de* E *tels que* $E = \bigcup_n G.X_n$.

e) $\mathcal{Y}$ *est bien coiffé s'il n'est pas réduit à* $\{0\}$.

f) Toute partie discrète fermée de S *est dénombrable.*

g) S *est dénombrable à l'infini.*

Alors on a $b \Longrightarrow a$ *et* $d \Longrightarrow e$. *Si* G *agit proprement sur* E *on a*

$$a \Longleftrightarrow b \Longleftrightarrow c \qquad g \Longleftrightarrow d \Longrightarrow e \Longrightarrow f.$$

Démonstration. — Supposons b, et soit $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(E)$ telle que $\varphi(x) \geqslant 2$ pour $x \in X$. Soit $X' = \{\varphi \geqslant 1\}$. On a $X \subset \mathring{X}'$. Si $\varphi' \in \mathcal{C}_K^+(E)$, il existe des points $t_1, \ldots, t_p$ de G tels que $\operatorname{supp} \varphi' \subset \bigcup_{i=1}^{p} t_i.X'$. On a donc :

$$\forall x \in E, \qquad \varphi'(x) \leqslant \|\varphi'\|_\infty \sum_{i=1}^{p} \varphi(t_i.x).$$

Si $\mu \in \mathcal{Y}$, on a alors $\mu(\varphi') \leqslant p\|\varphi'\|_\infty \mu(\varphi)$. De cette inégalité découle de suite que si $\mathcal{Y} \neq \{0\}$ l'ensemble $\{\lambda \in \mathcal{Y}; \lambda(\varphi) = 1\}$ est une base compacte de $\mathcal{Y}$. Donc $b \Longrightarrow a$.

Réciproquement, supposons a et que G agisse proprement. Alors $\mathcal{Y} \neq \{0\}$. Puisqu'il possède une base compacte, $\mathcal{Y}$ est localement compact. Soit W un voisinage compact de 0 dans $\mathcal{Y}$. Il existe des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{C}_K^+(E)$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$(6) \qquad (\forall i \in [1, p], \quad \mu(\varphi_i) < \varepsilon) \Longrightarrow \mu \in W.$$

Soit X un compact de E dont l'intérieur contient le support de chaque φ_i $(i = 1, \ldots p)$. Prouvons que $E = G.\mathring{X}$. Sinon pour $x \in E \setminus G.\mathring{X}$, la mesure invariante μ_x est telle, d'après (6) que pour tout $\alpha \geqslant 0$ on ait $\alpha\mu \in W'$, ce qui contredit la compacité de W. Ainsi sous nos hypothèses $a \Longrightarrow b$.

Supposons d et $\mathcal{S} \neq \{0\}$. Pour tout n soit $\varphi_n \in \mathscr{C}^+_K(E)$ telle que $\varphi_{n|X_n} \geqslant 1$. Soit $\mu \in \mathcal{S}$. Il existe une suite (α_n) de réels > 0 tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu(\varphi_n) \leqslant 1$. On vérifie sans peine que l'ensemble

$$\{X \in \mathcal{S}; \quad \Sigma\alpha_n\lambda(\varphi_n) \leqslant 1\}$$

est un chapeau de $\mathcal{S}$.

Supposons maintenant $\mathcal{S}$ bien coiffé et G agissant proprement sur E. Soit I une partie fermée discrète de S. Pour tout compact K de E, l'ensemble $\sigma(K) \cap I$ est discret et fermé dans le quasi-compact [1] $\sigma(K)$, donc fini. Il en résulte que tout compact de E ne rencontre qu'un nombre fini d'orbites $G.x_i$, et donc que si $(x_i)_{i \in I}$ désigne une famille d'éléments de E telle que $\sigma(x_i) = i$ la mesure $\mu = \sum_{i \in I} \mu_{x_i}$ est bien définie. Soit $C = \{\lambda \in \mathcal{S};\ p(\lambda) \leqslant 1\}$ un chapeau de $\mathcal{S}$, contenant μ (où p désigne une « forme linéaire » croissante s.c.i. de $\mathcal{S}$ dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$). Pour chaque partie finie J de I, la somme $\sum_{i \in J} \mu_{x_i}$ est majorée par μ au sens de l'ordre de $\mathcal{S}$. On en déduit que $\sum_{i \in J} p(\mu_{x_i}) \leqslant 1$. Puisque pour tout i on a $p(\mu_{x_i}) > 0$, ceci montre que I est dénombrable, et donc que $e \Longrightarrow f$.

Le reste est évident.

Remarque. — Il n'est pas exact que $e \Longrightarrow d$. Si Ω désigne le premier ordinal non dénombrable, considérons l'espace $E = [0, \Omega[$ muni de la topologie de l'ordre, sur lequel agit trivialement le groupe à un élément. Alors $E = S$ n'est pas dénombrable à l'infini, et pourtant $M^+(E)$ est bien coiffé, puisque toute mesure sur E est bornée.

Problème. — Est-il exact que $f \Longrightarrow e$?

[1] $\sigma(K)$ n'est pas séparé en général.

3. Application aux capacités invariantes. Le cas alterné d'ordre infini.

Dans ce paragraphe, nous allons, grâce aux théorèmes 1 et 2 appliquer les résultats précédents aux capacités lorsque cela est possible, dégager le cas plus difficile où cela ne l'est pas, et en commencer l'étude qui sera poursuivie dans les paragraphes suivants.

Si G agit continûment sur E, il agit continûment sur $\mathscr{K}(\mathrm{E})$ par l'action naturelle $(g.\mathrm{K}) \longrightarrow g.\mathrm{K}$. Désignons par $\mathcal{M}$ le cône des capacités monotones d'ordre infini sur E qui sont invariantes par l'action de G (c'est-à-dire que si $s \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$ on a $f(\mathrm{K}) = f(s.\mathrm{K}))$. Grâce au théorème 1, ce cône s'identifie au sous-cône de $\mathrm{M}_+(\mathscr{K}(\mathrm{E}))$ des mesures invariantes par l'action de G sur $\mathscr{K}(\mathrm{E})$.

Tout compact de $\mathscr{K}(\mathrm{E})$ est contenu dans $\underset{\sim}{\mathrm{K}}$, où $\mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$. D'autre part, pour $t \in \mathrm{G}$, on a

$$\underset{\sim}{\mathrm{K}} \cap t.\underset{\sim}{\mathrm{K}} = \underset{\sim}{\mathrm{K} \cap t.\mathrm{K}}$$

(où $t.\underset{\sim}{\mathrm{K}} = \{t.\mathrm{L};\ \mathrm{L} \in \underset{\sim}{\mathrm{K}}\}$). Il en résulte que G agit proprement sur $\mathscr{K}(\mathrm{E})$ si, et seulement s'il agit proprement sur E, ce que nous supposerons jusqu'à avis contraire.

Nous allons traduire dans le langage des capacités les résultats du paragraphe 1 lorsque E est remplacé par $\mathscr{K}(\mathrm{E})$. D'après le théorème 1, la mesure image de m par l'application $g \longrightarrow g.\mathrm{K}$ de G dans $\mathscr{K}(\mathrm{E})$ représente la capacité f_{K} donnée par :

$$f_{\mathrm{K}}(\mathrm{L}) = m(\{t \in \mathrm{G};\, t.\mathrm{K} \subset \mathrm{L}\}), \qquad \forall \mathrm{L} \in \mathscr{K}(\mathrm{E}).$$

Soient $\underset{\sim}{\mathscr{R}}$ et $\underset{\sim}{\mathscr{S}}$ les relations d'équivalence sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathscr{K}(\mathrm{E})$ (resp. $\mathscr{K}(\mathrm{E})$) définies respectivement par les conditions :

$$(\alpha, \mathrm{K})\underset{\sim}{\mathscr{R}}(\alpha', \mathrm{K}') \Longleftrightarrow \exists s \in \mathrm{G}; \qquad \mathrm{K}' = s.\mathrm{K}, \qquad \alpha' = \Delta(s)\alpha$$
$$\mathrm{K}\underset{\sim}{\mathscr{S}}\mathrm{K}' \Longleftrightarrow \exists s \in \mathrm{G}; \qquad \mathrm{K}' = s.\mathrm{K}.$$

L'espace quotient $\underset{\sim}{\mathrm{R}}$ (resp. $\underset{\sim}{\mathrm{S}}$) est séparé et localement compact. Désignons par $\underset{\sim}{\sigma}$ l'application quotient de $\mathscr{K}(\mathrm{E})$ sur $\underset{\sim}{\mathrm{S}}$. Le théorème 5 s'écrit :

Théorème 8 (AP). — *L'application de* $\mathbf{R}_+^* \times \mathcal{K}(\mathrm{E})$ *dans* $\mathfrak{M}$ *qui envoie le couple* (α, K) *sur* αf_{K} *est compatible avec* $\underset{\sim}{\mathcal{R}}$ *et définit par passage au quotient un homéomorphisme de* $\underset{\sim}{\mathrm{R}}$ *sur* $\mathcal{E}(\mathfrak{M})$. *De plus* $\mathcal{E}(\mathfrak{M}) \cap \{0\}$ *est fermé.*

Utilisons maintenant le théorème 6 pour obtenir la représentation intégrale.

Théorème 9 (AP). — *Supposons* G *unimodulaire* (*resp. que l'application canonique* σ *de* E *dans* S *possède une section continue* ξ) .

Alors pour toute capacité $f \in \mathfrak{M}$, *il existe une unique mesure de Radon* ν *sur* $\underset{\sim}{\mathrm{S}}$ *telle que pour tout compact* $\mathrm{L} \in \mathcal{K}(\mathrm{E})$ *on ait :*

$$f(\mathrm{L}) = \int_{y \in \underset{\sim}{\mathrm{S}}} f_y(\mathrm{L})\ d\nu(y)$$

où $f_{\underset{\sim}{\sigma}(\mathrm{K})} = f_{\mathrm{K}}$ *ne dépend que de* $\underset{\sim}{\sigma}(\mathrm{K})$

$$(\textit{resp. } f(\mathrm{L}) = \int_{y \in \underset{\sim}{\mathrm{S}}} g_y(\mathrm{L})\ d\nu(y)\,,$$

où

$$(7) \quad g_{\underset{\sim}{\sigma}(\mathrm{K})} = \operatorname{Sup}\,\{\Delta^{-1}(t)\ ;\quad t.\mathrm{K} \cap \xi(\sigma(\mathrm{K})) \neq \varnothing\,\} \times f_{\mathrm{K}}$$

ne dépend que de K) .

De plus cette correspondance est un homéomorphisme lorsque $\mathfrak{M}$ *et* $\mathrm{M}_+(\underset{\sim}{\mathrm{S}})$ *sont munis des topologies vagues.*

Démonstration. — Le premier cas résulte immédiatement du théorème 6, *b*). Pour établir le second cas il suffit, d'après ce même théorème de vérifier que (7) définit bien g_y , et que l'application $y \longrightarrow g_y$ est continue, donc, par définition de la topologie quotient, que l'application

$$\mathrm{K} \longrightarrow \operatorname{Sup}\,\{\Delta^{-1}(t)\ ;\quad t.\mathrm{K} \cap \xi(\sigma(\mathrm{K})) \neq \varnothing\,\} \times f_{\mathrm{K}}$$

est continue, ce qui est clair. c.q.f.d.

Étudions maintenant l'application du théorème 7.

Proposition 10 (AP). — *i*) $\mathfrak{M}$ *possède une base compacte si et seulement si* E *est compact* (G *est alors compact*).

ii) *Si* $\mathfrak{M}$ *est bien coiffé,* G *est dénombrable à l'infini. Réciproquement, si* G *est dénombrable à l'infini et s'il existe* *une suite* (X_n) *de* $\mathscr{K}(\mathrm{E})$ *telle que* $\mathrm{E} = \bigcup_n \mathrm{G}.\mathrm{X}_n$, *alors* $\mathfrak{M}$ *est bien coiffé.*

Démonstration. — i) Si E est compact il en est de même de $\mathscr{K}(\mathrm{E})$, et $\mathfrak{M}$ possède une base compacte d'après le théorème 7. Réciproquement, si $\mathfrak{M}$ possède une base compacte il existe d'après ce même théorème un compact K de E tel que $\mathscr{K}(\mathrm{E}) = \mathrm{G}.\underset{\sim}{\mathrm{K}}$, c'est-à-dire que tout compact de E possède un translaté contenu dans K . Si $x \in \mathrm{E}$ et $t \in \mathrm{G}$, il existe donc $s \in \mathrm{G}$ tel que $s.x \in \mathrm{K}$ et $st.x \in \mathrm{K}$, c'est-à-dire que s , $st \in \mathrm{L} = \{u \in \mathrm{G}\,;\, u.x \in \mathrm{K}\}$, et ce dernier ensemble est compact d'après (AP) . On en déduit que $t \in \mathrm{L}^{-1}\mathrm{L}$, donc que G est compact. Il en résulte que $\mathscr{K}(\mathrm{E}) = \mathrm{G}.\underset{\sim}{\mathrm{K}}$ est compact, donc aussi E .

ii) Supposons que G ne soit pas dénombrable à l'infini. Soient $x \in \mathrm{E}$ et H le stabilisateur (compact) de x . Il existe un sous-groupe G′ de G , ouvert, contenant H , et dénombrable à l'infini. Si $\mathrm{G} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} t_i\mathrm{G}'$, où la réunion est disjointe, on a encore $\mathrm{G}.x = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} t_i.(\mathrm{G}'.x)$ où la réunion est disjointe. Pour voir que $\mathfrak{M}$ n'est pas bien coiffé, il suffit, d'après le théorème 7 de vérifier que l'ensemble des points $\underset{\sim}{\sigma}(\{t_{i_0}, t_i\})$ $(i \in \mathrm{I})$ est fermé et discret dans $\underset{\sim}{\mathrm{S}}$. Réciproquement si $\mathrm{G} = \bigcup_n \mathrm{G}_n$ où $\mathrm{G}_n \in \mathscr{K}(\mathrm{G})$, et si $\mathrm{E} = \bigcup_n \mathrm{G}.\mathrm{X}_n$ où $\mathrm{X}_n \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$, on peut imposer $\mathrm{X}_n \subset \dot{\mathrm{X}}_{n+1}$. On vérifie alors que $\mathscr{K}(\mathrm{E}) = \bigcup_n \underset{\sim}{(\mathrm{G}_n.\mathrm{X}_n)}$, ce qui suffit d'après le théorème 7 .

c.q.f.d.

Étudions maintenant le cas des capacités alternées d'ordre infini, l'action de G sur E n'étant plus nécessairement propre. Désignons par $\mathcal{A}$ le cône de celles de ces capacités qui sont invariantes par l'action de G . Celle-ci se prolonge de façon naturelle en une action $(g\,,\,\mathrm{F}) \longrightarrow g.\mathrm{F}$ sur $\mathscr{F}(\mathrm{E})$.

Il découle du théorème 2 que $\mathcal{A}$ s'identifie au sous-cône de $\mathrm{M}_+(\mathscr{F}(\mathrm{E}))$ des mesures invariantes par l'action de G . Ce cône n'est jamais réduit à $\{0\}$ puisqu'il contient la mesure de Dirac au point E de $\mathscr{F}(\mathrm{E})$.

PROPOSITION 11. — i) *Le cône* $\mathfrak{A}$ *possède une base compacte si, et seulement s'il existe un compact* X *de* E *tel que* $G.X = E$.

ii) *S'il existe une suite* (X_n) *dans* $\mathscr{K}(E)$ *telle que* $E = \bigcup_n G.X_n$, *alors* $\mathfrak{A}$ *est bien coiffé.*

Démonstration. — Seule n'est pas évidente la nécessité dans la première assertion. Compte tenu de la preuve de l'implication $a \Longrightarrow b$ du théorème 7, il suffit de prouver que s'il n'existe pas de compact X de E tel que $G.X = E$, alors pour tout compact Y de $\mathscr{F}(E)$, il existe une mesure non nulle de $\mathfrak{A}$ qui ne charge par Y. Or Y est contenu dans un certain $\underset{\sim}{X_1}$ (où $X_1 \in \mathscr{K}(E)$) et si $X_2 \in \mathscr{K}(E)$ est tel que $X_1 \subset \dot{X}_2$, il suffit de choisir la mesure de Dirac au point $E \setminus G.\dot{X}_2 \neq \varnothing$ de $\mathscr{F}(E)$. c.q.f.d.

Pour tout compact K de E et tout $t \in G$ on a $K \cup tK \in \tilde{K} \cap t.\tilde{K}$. Il en résulte que G agit proprement sur $\mathscr{F}(E)$ si et seulement s'il est compact (et agit continûment sur E). C'est là que se situe la différence fondamentale avec le cas précédent. Il s'avère que lorsque G n'est pas compact, son action sur $\mathscr{F}(E)$ est beaucoup plus « riche » qu'une action propre. C'est à l'étude de $\mathfrak{A}$ que nous allons consacrer la suite de ce travail. Les résultats les plus précis seront obtenus lorsque G est moyennable et agit proprement sur E. Avant de préciser le problème grâce au théorème 13, décrivons le cas ou G est compact, par une nouvelle application du théorème 5. La fonction module de G vaut alors identiquement 1. Soit $\tilde{\mathscr{S}}$ la relation d'équivalence sur $\mathscr{F}(E)$ définie par

$$F \tilde{\mathscr{S}} F' \Longleftrightarrow \exists s \in G \ ; \qquad F' = s.F\,.$$

La mesure image de m dans $\mathscr{F}(E)$ par l'application $g \longrightarrow g.F$ représente la capacité f_F donnée par

$$\forall L \in \mathscr{K}(E)\,, \qquad f_F(L) = m(\{t \in G \ ; \qquad (t.F) \cap L \neq \varnothing\})\,.$$

(Cette notation ne causera pas d'ambiguïté avec celle, définitivement abandonnée, qui avait trait aux capacités monotones).

Théorème 12. — *L'application de* $\mathscr{F}(\mathrm{E})$ *dans* $\mathcal{A}$ *qui envoie* F *sur* f_{F} *est compatible avec* $\tilde{\mathscr{S}}$. *L'application de* $\mathbf{R}_+^* \times (\mathscr{F}(\mathrm{E})/\tilde{\mathscr{S}})$ *dans* $\mathcal{A}$ *que l'on en déduit est un homoémorphisme de* $\mathbf{R}_+^* \times (\mathscr{F}(\mathrm{E})/\tilde{\mathscr{S}})$ *et* $\mathscr{E}(\mathcal{A})$. *De plus* $\mathscr{E}(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ *est fermé.*

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer le théorème de représentation analogue au premier cas du théorème 9.

Nous supposerons désormais toujours que G *n'est pas compact* (mais pas nécessairement qu'il est dénombrable à l'infini ou métrisable) et qu'il agit continûment sur E. Par « capacité » nous entendrons « capacité alternée d'ordre infini sur E invariante par l'action de G ». Pour alléger le langage nous ne reculerons pas toujours devant les abus du langage auxquels invite le théorème 2, en identifiant une capacité et sa mesure représentative. Nous noterons plus simplement $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathcal{A})$.

Étant donnée $f \in \mathcal{A}$, posons $f(\mathrm{E}) = \operatorname{Sup}\{f(\mathrm{K}); \mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})\}$. Nous dirons que f est bornée si et seulement si $f(\mathrm{E}) < +\infty$ (ce qui équivaut à ce que la mesure représentative de f soit bornée). Étant donné $\mathrm{L} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{E})$ l'ensemble $\mathrm{L}.\mathrm{F}^{-1} = \{t \in \mathrm{G}; t.\mathrm{F} \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\}$ est un fermé de G dès que G opère continûment. Lorsque G agit proprement sur E, et que F est compact, $\mathrm{L}.\mathrm{F}^{-1}$ est compact. Dans ce cas, si $\mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$ on peut définir f_{K} par

$$\forall \mathrm{L} \in \mathscr{K}(\mathrm{E}),\ f_{\mathrm{K}}(\mathrm{L}) = m(\mathrm{L}.\mathrm{K}^{-1}) = m(\{t \in \mathrm{G};\ t.\mathrm{K} \cap \mathrm{L} \neq \varnothing\}).$$

Désignant toujours par $\tilde{\mathscr{R}}$ la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathscr{K}(\mathrm{E})$ définie avant le théorème 8, le résultat suivant montre que même si G agit proprement sur E la situation n'est pas simple.

Théorème 13 (AP). — *Supposons que* G *agisse proprement sur* E. *Alors*

i) *L'application de* $\mathbf{R}_+^* \times \mathscr{K}(\mathrm{E})$ *dans* $\mathcal{A}$, *qui envoie le couple* (α, K) *sur* αf_{K} *est continue, à valeurs dans* $\mathscr{E}$, *compatible avec* $\tilde{\mathscr{R}}$. *L'application quotient n'est pas un homéomorphisme.*

ii) *Il existe dans* $\mathscr{E}$ *un élément borné et un élément non borné qui ne sont pas de la forme* αf_K .

Démonstration. — i) La mesure sur $\mathscr{F}(E)$ représentant f_K est la mesure μ_K image de m par l'application $g \longrightarrow g.K$. Le fait que $f_K \in \mathscr{E}$, et la compatibilité de l'application $(\alpha,K) \longrightarrow \alpha f_K$ avec $\underset{\sim}{\mathscr{R}}$ résultent donc de la démonstration du théorème 5.

Pour prouver la continuité, il suffit d'établir celle de l'application de $\mathscr{K}(E)$ dans $\mathfrak{A}$ qui envoie K sur f_K .

Soit $\psi \in \mathscr{C}_K(\mathscr{F}(E))$. On a, par définition de μ_K

$$\mu_K(\psi) = \int_G \psi(t.K)\, dm(t) .$$

Il existe $L \in \mathscr{K}(E)$ tel que $\operatorname{supp} \psi \subset \tilde{L}$. Soit $K_0 \in \mathscr{K}(E)$ et $M \in \mathscr{K}(E)$ tel que $K_0 \subset \mathring{M}$. On a :

$$t \notin L.M^{-1} \Longrightarrow t.M \cap L = \varnothing .$$

On a donc, si $K \subset \mathring{M}$:

$$\mu_K(\psi) = \int_{L.M^{-1}} \psi(t.K) dm(t) .$$

Il en résulte que l'application $K \longrightarrow \mu_K(\psi)$ est continue en K_0 , puisque l'application $(t, K) \longrightarrow \psi(t.K)$ est uniformément continue sur $L.M^{-1} \times \underset{\sim}{M}$.

Prouvons maintenant que l'application quotient n'est pas un homéomorphisme sur son image. Le lemme suivant sera utile plusieurs fois.

LEMME 14 (AP). — *Soient* $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathscr{C}_K^+(E)$ *et* $K \in \mathscr{K}(E)$. *Il existe alors un compact* M *de* E *tel que*

$$t \notin M \Longrightarrow \forall i = 1, \ldots, p , \qquad \hat{f}_K(\varphi_i) = (1 + \Delta^{-1}(t))^{-1}\hat{f}_{K\cup t.K}(\varphi_i) .$$

Démonstration. — En effet, si $L \in \mathscr{K}(E)$ contient le support de toutes les fonctions φ_i $(i = 1, \ldots, p)$ et si

$$A_{i,u} = \{x \in E ; \varphi_i(x) \geqslant u\} \quad (u > 0, i = 1, \ldots, p)$$

on a, pour $t \notin M = (L.K^{-1})^{-1}(L.K^{-1})$:

$$\begin{aligned} f_{K\cup t.K}(A_{i,u}) &= m(A_{i,u}.(K \cup t.K)^{-1}) \\ &= m(A_{i,u}.K^{-1} \cup ((A_{i,u}.K^{-1})t^{-1})) \\ &= (1 + \Delta^{-1}(t))m(A_{i,u}.K^{-1}) = (1 + \Delta^{-1}(t))f_K(A_{i,u}) \end{aligned}$$

puisque $A_{i,u}.K^{-1} \cap (A_{i,u}.K^{-1}t^{-1}) \subset L.K^{-1} \cap L.K^{-1}t^{-1} = \varnothing$ et le résultat découle alors de la définition de $\hat{f}_K(\varphi_i)$. c.q.f.d.

Revenons à la preuve du théorème. Si V est un voisinage vague de αf_K, il existe d'après ce lemme un compact M de G tel que

$$t \notin M \Longrightarrow (1 + \Delta^{-1}(t))^{-1} f_{K \cup t.K} \in V .$$

Si $L \in \mathcal{K}(E)$ est tel que $K \subset \dot{L}$ l'ensemble $\underset{\sim}{L}$ est un voisinage de K qui ne contient aucun translaté de $K \cup t.K$ dès que $t \notin (L.K^{-1})(L.K^{-1})^{-1}$, ce qui termine la preuve de $i)$.

ii) L'existence d'un élément borné $\mathcal{E}$ sera une conséquence du théorème 20.

Prouvons l'existence d'un élément non borné qui n'est pas de la forme αf_K. Supposons tout d'abord que G est dénombrable à l'infini et que $E = G.x$. Il en résulte que E est K_σ et donc qu'il existe une suite (E_n) de compacts de E telle que $\bigcup_n \underset{\sim}{E}_n = \mathcal{K}(E)$. Il résulte du théorème 7 que $\mathcal{A}$ possède une base compacte de la forme

$$Z = \{f \in \mathcal{A}; \quad \hat{f}(\varphi) = 1\} \qquad \text{où} \qquad \varphi \in \mathcal{C}_K(E) .$$

L'ensemble des points extrémaux de Z est $\mathcal{E} \cap Z$. Soit

$$B_n = \{f \in Z ; \quad f(E) \leqslant n\} .$$

C'est un fermé de Z. Soit encore

$$C_n = \{(f_K(\varphi))^{-1} f_K ; \quad K \subset E_n\} .$$

Puisque $\underset{\sim}{E}_n$ est compact et que l'application $K \longrightarrow (f_K(\varphi))^{-1} f_K$ est continue, C_n est un fermé de Z. Construisons par induction une suite décroissante (T_n) de tranches fermées de Z et une suite (K_n) de compacts de E vérifiant les conditions suivantes :

$$h_n = (f_{K_n}(\varphi))^{-1} f_{K_n} \in \mathring{T}_n$$
$$T_n \cap (B_{n-1} \cup C_{n-1}) = \varnothing .$$

Effectuons le $n^{\text{ième}}$ pas de cette récurrence. Pour t assez grand on a

$$(f_{K_n \cup t.K_n}(\varphi))^{-1} f_{K_n \cup t.K_n} \in \mathring{T}_n)$$

(d'après le lemme 14) et $K_n \cap t.K_n \notin E_n$. Il suffit de choisir $K_{n+1} = K_n \cup t.K_n$ pour un tel t. On a alors $h_{n+1} \notin B_n \cup C_n$, et il existe donc, puisque $h_n \in \mathcal{E}$, une tranche fermée T_{n+1}, contenue dans $T_n \cap (B_n \cup C_n)^c$ et voisinage de h_{n+1}, ce qui termine l'induction.

On a donc

$$T \cap \Big(\bigcup_n B_n \cup \bigcup_n C_n\Big) = \varnothing$$

si l'on a posé $T = \bigcap_n T_n$. Il découle du lemme 27-8 de [2] que T contient un point extrémal, qui possède les propriétés requises.

Examinons maintenant le cas où $E = G.x$, lorsque G n'est plus nécessairement dénombrable à l'infini. On peut supposer $E = G/H$ (H compact). Soit G' un sous-groupe ouvert, dénombrable à l'infini, de G, qui contient H. On peut écrire G comme une réunion disjointe $G = \bigcup_{i\in I} t_i G'$, et E s'écrit alors comme la réunion disjointe $E = \bigcup_{i \in I} t_i.E'$, où $E' = G'/H$. Désignons par $\mathfrak{A}'$ le cône des capacités alternées d'ordre infini sur E' qui sont invariantes par l'action de G' et de façon générale notons par un $'$ les objets relatifs à $\mathfrak{A}'$. Soit τ l'application « restriction » de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$. Elle est linéaire continue, et l'image d'un élément borné est bornée.

Tout compact K de E s'écrit $K = \bigcup_{i\in J} t_i.K_i$, où J est une partie finie de I et où K_i est un compact de E'. Si L est un compact de E' on a

$$\begin{aligned} m\Big(\Big\{t \in G;\ \Big(t.\Big(\bigcup_{i\in J} t_i.K_i\Big)\Big) \cap L \neq \varnothing\Big\}\Big) &= \sum_{i\in J} m(\{t \in G;\ (tt_i.K_i) \cap L \neq \varnothing\}) \\ &= \sum_{i\in J} \Delta^{-1}(t_i) f'_{K_i}(L)\,. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\tau(\alpha f_K) = \sum_{i\in J} \alpha\Delta^{-1}(t_i) f'_{K_i}$, et donc que si $\tau(f)$ est extrémale dans $\mathfrak{A}'$ sans être de la forme f'_M, alors

f n'est pas de la forme αf_K. Les cônes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ étant à base compacte, tout élément de $\mathcal{E}' \cap \tau(\mathcal{C})$ est l'image d'un élément de $\mathcal{E}$. D'après ce qui précède, il suffit pour se ramener au cas déjà traité de prouver que τ est surjective. Soit donc $g \in \mathcal{C}'$. Pour $K \in \mathcal{K}(E)$ posons

$$f(K) = \sum_{i \in I} g((t_i^{-1}.K) \cap E')$$

(la somme étant finie pour chaque K). Il est clair que l'on définit ainsi une capacité alternée d'ordre infini sur E. Prouvons qu'elle est invariante par l'action de G. Soit $t \in G$. Pour chaque $i \in I$ existe un unique $\varphi(i) \in I$ tel que $t^{-1}t_i \in t_{\varphi(i)}G'$. On a donc $t^{-1}t_i = t_{\varphi(i)}u_i$ où $u_i \in G'$, et l'on vérifie que φ est bijective.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(t.K) &= \sum_{i \in I} g((t_i^{-1}(t.K) \cap E') = \sum_{i \in I} g((u_i^{-1}t_{\varphi(i)}^{-1}).K) \cap E') \\ &= \sum_{i \in I} g(u_i^{-1}((t_{\varphi(i)}^{-1}).K) \cap E')) = \sum_{i \in I} g((t_{\varphi(i)}^{-1}).K) \cap E') \\ &= \sum_{i \in I} g((t_i^{-1}.K) \cap E')) = f(K) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de ce cas. (On peut montrer que si g est extrémale, f l'est aussi.)

Prouvons maintenant le cas général. Si $x \in E$ et si f est la capacité sur $G.x$ que nous venons de construire, posons

$$\forall L \in \mathcal{K}(E), \qquad h(L) = f(L \cap (G.x)) .$$

C'est une capacité sur E, dont la mesure représentative μ est portée par le fermé $\mathcal{F}(G.x)$ de $\mathcal{F}(E)$. Si $h = f_K$, le support de μ est la trajectoire de K dans $\mathcal{F}(E)$, donc $K \subset G.x$, ce qui montre que $f = f_K$ et est absurde. De plus h n'est pas bornée. Enfin si $h = h_1 + h_2$ les mesures représentatives de h_1 et h_2 sont portées par $\mathcal{F}(G.x)$, ce qui signifie que l'on peut écrire $h_i(L) = f_i(L \cap (G.x))$ $(i = 1,2)$ où $f = f_1 + f_2$, ce qui montre que h_1 et h_2 sont proportionnelles à h. Ainsi h et extrémale. c.q.f.d.

Terminons ce paragraphe par un résultat dont l'idée m'a été suggérée par G. Choquet.

Proposition 15. — *Supposons que* G *soit discret et agisse proprement sur* E. *Alors il n'existe pas de sous-ensemble*

A *universellement mesurable de* $\mathscr{F}(E)$ *qui rencontre chaque orbite de* $\mathscr{F}(E)$ *en un point unique.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. En considérant la trace de A sur $\mathscr{F}(G.x)$ (où $x \in E$), on se ramène au cas où $E = G/H$ (H compact) ce qui entraîne E discret. Posons :

$$\forall L \in \mathscr{K}(E), \qquad f(L) = 1 - 2^{-\operatorname{card} L}.$$

C'est la capacité associée à la mesure μ sur $\mathscr{F}(E)=\{0,1\}^E \setminus \{e\}$ (où e désigne l'élément neutre de $\{0,1\}^E$) trace de la mesure de Haar de $\{0,1\}^E$. Prouvons que $\mu(A) = 0$. Soient n et m deux entiers tels que $n^2 \left(\frac{3}{4}\right)^m < 1\cdot$ Puisque G agit proprement sur E, étant donnés des points distincts $x_1, \ldots, x_m$ de E, il existe des éléments $t_1, \ldots, t_n$ de G tels que pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ les points x_l et $t_i^{-1}t_j.x_l$ $(l \leqslant m)$ soient deux à deux distincts. On a

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} t_i.A\right) &\geqslant n\mu(A) - \sum_{i<j\leqslant n} \mu(t_i.A \cap t_j.A) \\ &= n\mu(A) - \sum_{i<j\leqslant n} \mu(A \cap t_i^{-1}t.A)\,. \end{aligned}$$

Puisque A rencontre chaque orbite de $\mathscr{F}(E)$ en un point unique on a :

$$F \in A \cap t_i^{-1}t_j.A \Longrightarrow F = t_i^{-1}t_j F\,.$$

D'où

$$\begin{aligned} A \cap t_i^{-1}t_j.A &\subset \{F \in \mathscr{F}(E)\ ;\quad F = t_i^{-1}t_j.F\} \\ &\subset \{F \in \mathscr{F}(E);\quad \forall l = 1, \ldots, m, x_l \in F \Longleftrightarrow t_i^{-1}t_j.x_l \in F\}\,. \end{aligned}$$

La mesure de ce dernier ensemble est $\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot$ D'où

$$1 \geqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} t_i A\right) \geqslant n\mu(A) - \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m \geqslant n\mu(A) - 1\,.$$

Cette inégalité étant valable pour tout n, on a bien $\mu(A) = 0$.

Soit V un ouvert de $\{0,1\}^E$. Il existe une réunion dénombrable d'ouverts élémentaires contenus dans V qui a même mesure que V, donc un ouvert $V' \subset V$, de même mesure que V, et qui ne dépend que d'un ensemble dénombrable D' de coordonnées. En utilisant le fait que V est ouvert, on voit sans peine que la projection V'' de V sur $\{0,1\}^{D'}$ a même mesure que celle de V'. Ainsi V est contenu dans $\{0,1\}^{E\setminus D'} \times V''$, qui est un ouvert de même mesure ne dépendant que d'un nombre dénombrable de coordonnées.

Il en résulte que A est contenu dans un ensemble A' de mesure nulle, A' ne dépendant que d'un ensemble dénombrable D de coordonnées. Soit G' le sous-groupe dénombrable de G engendré par $\{t \in G ; t.D \cap D \neq \varnothing\}$. Écrivons G comme réunion disjointe $G = \bigcup_{i\in I} t_i G'$. On voit de suite que la réunion $E = \bigcup_{i\in I} t_i.(G'.D)$ est disjointe. Soit $A'' = \bigcup_{t\in G'} t.A'$. C'est un ensemble de mesure nulle, qui ne dépend que des coordonnées relatives à $G'.D$. Puisque A'' est de mesure nulle, il existe $F \in \mathscr{F}(E)\setminus A''$ tel que $F \cap G'.D \neq \varnothing$.

Et on a alors

$$\bigcup_{i\in I} t_i.(F \cap G'.D) \notin \bigcup_{i\in I} t_i.A'' = \bigcup_{t\in G} t.A$$

ce qui montre que $\mathscr{F}(E) \neq \bigcup_{t\in G} t.A$. c.q.f.d.

Même en remplaçant l'hypothèse « Universellement mesurable » par « $\mathscr{K}$-analytique » nous n'avons pu établir la proposition 15 dans le cas où G n'est plus discret sans utiliser d'hypothèses supplémentaires sur G (telle que la commutativité).

4. Méthodes de construction de capacités extrémales.

Nous allons tout d'abord étudier une méthode permettant de construire des capacités extrémales à l'aide d'éléments extrémaux d'autres cônes (de mesures, de capacités, etc...).

Soit toujours G un groupe localement compact opérant par des homéomorphismes sur un espace localement compact E et soit μ une mesure de Radon sur E. On dira qu'un ensemble μ-mesurable B est μ-invariant, si pour tout élément t de G l'ensemble $B\Delta t.B$ est localement μ-négligeable.

La preuve du lemme suivant, dont l'idée est bien classique en théorie ergodique, est laissée au lecteur.

LEMME 16. — *Soit* $\mu \in \mathcal{I}$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) μ *est extrémale.*

ii) *Pour tout ensemble* μ*-mesurable* B *qui est* μ*-invariant, ou bien* B *ou bien son complémentaire est localement* μ*-négligeable.*

Ce lemme est la clef du théorème suivant.

THÉORÈME 17. — *Soient* E_1 *et* E_2 *des espaces localement compacts sur lesquels* G *opère par des homéomorphismes. Soit* $\mu_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{I}_1)$. *Soit* D *un sous-ensemble invariant de* E_1, *et soit* φ *une application de* D *dans* E_2 *possédant les propriétés suivantes :*

— φ *commute avec l'action de* G, *c'est-à-dire que*

$$(x \in \mathrm{D}, t \in \mathrm{G}) \Longrightarrow (\varphi(t.x) = t.\varphi(x))$$

— φ *est mesurable lorsque* E_1 *est muni de la tribu des ensembles* μ_1*- mesurables et* E_2 *de sa tribu de Baire.*

— *Pour tout* G_δ *compact* K *de* E_2 *on a* $\mu_1(\varphi^{-1}(\mathrm{K})) < +\infty$.

Alors la mesure image μ_2 *de* μ_1 *par* φ *appartient à* $\mathcal{E}(\mathcal{I}_2)$.

Démonstration. — Elle serait aisée si E_2 était dénombrable à l'infini. En effet, pour tout ensemble μ_2-mesurable B de E_2 on montre alors sans peine qu'il existe un ensemble C de la tribu de Baire de E_2 tel que $\mu_2(\mathrm{B}\Delta\mathrm{C}) = 0$. Si B est μ_2-invariant, il en est de même de C. Et alors $\varphi^{-1}(\mathrm{C})$ est μ_1-mesurable et μ_1-invariant, donc par exemple

$$\mu_1(\varphi^{-1}(\mathrm{C})) = \mu_2(\mathrm{C}) = 0,$$

et on conclut grâce au lemme 16.

Nous allons utiliser dans le cas général la même idée, mais la partie technique sera plus délicate. Raisonnons par l'absurde. Si μ_2 n'est pas extrémale il existe d'après le lemme 16 un ensemble μ_2-mesurable et μ_2-invariant B tel que ni B ni B^c ne soient localement μ_2-négligeables. Il existe alors un compact K de E_2, que l'on peut supposer G_δ, tel que $\mu_2(\mathrm{K} \cap \mathrm{B}) > 0$ et $\mu_2(\mathrm{K} \cap \mathrm{B}^c) > 0$. Pour chaque n soit

L'_n (resp M'_n) un compact contenu dans $B \cap K$ (resp $B^c \cap K$) tel que $\mu_2(B \cap K \setminus L'_n) < 2^{-n}$ (resp $\mu_2(B^c \cap K \setminus M'_n) < 2^{-n}$). On peut séparer L'_n et M'_n par des compacts G_δ disjoints L_n et M_n contenus dans K.

Posons $L = \lim.\sup L_n = \bigcup_n \bigcap_{m \geqslant n} L_n$ et $M = \lim.\sup M_n$. Puisque $L \supset \lim.\sup L'_n$ on a $\mu_2(K \cap B \setminus L) = 0$ et de même $\mu_2(K \cap B^c \setminus M) = 0$. Puisque M et L sont disjoints on en déduit que

$$\mu_2(K \cap B \Delta L) = \mu_2(K \cap B^c \Delta M) = 0 .$$

D'après la proposition (4-14-9) de [4] il existe une famille $\mathscr{X}$ de compacts disjoints de E_1 localement dénombrable (c'est-à-dire que tout compact de E_1 rencontre au plus un nombre dénombrable d'éléments de $\mathscr{X}$) et telle que $E \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{X}} X$ soit localement μ_1-négligeable.

Pour chaque $X \in \mathscr{X}$ soit A_X une famille dénombrable d'éléments de G telle que

$$\mu_1(X \cap \bigcup_{t \in A_X} \varphi^{-1}(t.L)) = \sup \{\mu_1(X \cap \bigcup_{t \in D} \varphi^{-1}(t.L)) ; \; D \subset G \text{ est dénombrable}\}$$

Posons

$$C = \bigcup_{X \in \mathscr{X}} (X \cap \bigcup_{t \in A_X} \varphi^{-1}(t.L)) .$$

C'est un ensemble mesurable (puisqu'il en est de même de son intersection avec tout compact). Prouvons qu'il n'est pas localement μ_1-négligeable. En effet :

$$\mu_1(\varphi^{-1}(L)) \geqslant \mu_1\Big(\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{m \geqslant n} L'_m\Big)\Big) = \mu_2\Big(\bigcup_{m \geqslant n} L'_m\Big)$$

et ce dernier réel est > 0 pour n assez grand, ce qui prouve déjà que $\mu_1(\varphi^{-1}(L)) > 0$. Il existe donc $X \in \mathscr{X}$ tel que $\mu_1(\varphi^{-1}(L) \cap X) > 0$, ce qui suffit (dans le cas contraire, puisque l'on a

$$\varphi^{-1}(L) \subset \Big(E_1 \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{X}} X\Big) \cup \bigcup_{X \in \mathscr{X}} X \cap \varphi^{-1}(L)$$

$\varphi^{-1}(L)$ serait localement μ_1-négligeable, ce qui est absurde puisqu'il est mesurable de mesure finie non nulle).

Montrons maintenant que le complémentaire de C n'est pas localement μ_1-négligeable. Comme précédemment il existe un $X \in \mathscr{X}$ tel que $\mu_1(\varphi^{-1}(M) \cap X) > 0$. Et l'on a

$$(8) \quad \varphi^{-1}(M) \cap X \cap C = \varphi^{-1}(M) \cap X \cap \Big(\bigcup_{t \in A_X} \varphi^{-1}(t.L)\Big) = X \cap \bigcup_{t \in A_X} \varphi^{-1}(M \cap t.L).$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} M \cap t.L &= (M \cap t.L \cap B) \cup (M \cap t.L \cap B^c) \\ &\subset (M \cap B) \cup (t.L \cap B^c) \\ &\subset (M \cap B) \cup t.(L \setminus B) \cup ((B \Delta t.B) \cap t.L) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mu_2(M \cap t.L) = 0$. Puisque $M \cap t.L$ appartient à la tribu de Baire de E_2, on a aussi $\mu_1(\varphi^{-1}(M \cap t.L)) = 0$. Il résulte donc de (8) que

$$\mu_1(X \cap \varphi^{-1}(M) \cap C) = 0$$

et, puisque $\mu_1(X \cap \varphi^{-1}(M)) > 0$, on a $\mu_1(X \cap C^c) > 0$, ce qui montre que C^c n'est pas localement μ_1-négligeable.

Pour achever la preuve de ce théorème, il suffit, en vertu du lemme 16, de prouver que C est μ_1-invariant, ce qui contredira l'assertion « $\mu_1 \in \mathscr{E}(B_1)$ ». Puisque

$$t.C \setminus C = t.(C \setminus t^{-1}.C),$$

il suffit de prouver que pour tout $t \in G$, l'ensemble $C \setminus t.C$ est localement μ_1-négligeable ou encore que pour tout $X \in \mathscr{X}$ on a $\mu_1((C \setminus t.C) \cap X) = 0$. On a successivement

$$\begin{aligned} (C \setminus t.C) \cap X &= C \cap X \setminus t.C \\ &= \Big(X \cap \bigcup_{u \in A_X} \varphi^{-1}(u.L)\Big) \Big\backslash \bigcup_{Y \in \mathscr{X}} \Big(t.Y \cap \bigcup_{v \in A_Y} t.\varphi^{-1}(v.L)\Big) \\ &\subset \Big(X \cap t.\Big(E_1 \Big\backslash \bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y\Big)\Big) \cup \bigcup_{Y \in \mathscr{X}} t.\Big(t^{-1}.X \cap \bigcup_{u \in A_X} \varphi^{-1}(t^{-1}u.L) \\ &\quad \cap Y \Big\backslash \bigcup_{v \in A_Y} \varphi^{-1}(v.L)\Big) \subset \Big(X \cap t.\Big(E_1 \bigcup_{Y \in \mathscr{X}} Y\Big)\Big) \\ &\quad \cup \bigcup_{\substack{Y \in \mathscr{X} \\ Y \cap t^{-1}.X \neq \varnothing}} t.\Big(Y \cap \bigcup_{u \in A_X} \varphi^{-1}(t^{-1}u.L) \Big\backslash \bigcup_{v \in A_Y} \varphi^{-1}(v.L)\Big). \end{aligned}$$

Ce dernier ensemble est de mesure nulle, compte tenu de la définition de A_Y et du fait qu'il n'y a qu'une quantité dénombrable d'ensembles Y rencontrant $t^{-1}.X$. c.q.f.d.

Nous allons déduire de ce résultat un théorème de construction de capacités. Mais prouvons tout d'abord un petit lemme.

LEMME 18. — *La tribu de Baire de* $\mathscr{F}(E)$ *est engendrée par les ensembles* $\tilde{K}$, *où* K *parcourt la classe des compacts* G_δ *de* E.

Démonstration. — Si K est un compact G_δ de E, on peut écrire $K = \bigcap_n K_n$ où (K_n) est une suite de compacts de E telle que $K_{n+1} \subset \mathring{K}_n$. On a alors $\tilde{K} = \bigcap_n \tilde{K}_n$ ce qui montre que $\tilde{K}$ est un G_δ de $\mathscr{F}(E)$ puisque $\tilde{K}_{n+1} \subset \mathring{\tilde{K}}_n$ et donc que $\tilde{K} = \bigcap_n \mathring{\tilde{K}}_n$. Il en résulte que la tribu $\mathscr{C}$ engendrée par les ensembles $\tilde{K}$, pour K compact G_δ de E, est contenue dans la tribu de Baire de $\mathscr{F}(E)$.

Pour prouver l'inclusion inverse il suffit de montrer que tout compact G_δ de $\mathscr{F}(E)$ appartient à $\mathscr{C}$. Soit $T = \cap V_n$ un tel compact, où (V_n) est une suite d'ouverts de $\mathscr{F}(E)$. Par définition de la topologie de $\mathscr{F}(E)$, tout point F de $\mathscr{F}(E)$ possède une base de voisinages de la forme $\tilde{K}_1 \cap \ldots \cap \tilde{K}_p \cap \tilde{K}^c$, où pour $i = 1, \ldots, p$ on a $F \cap \mathring{K}_i \neq \varnothing$ et où $K \cap F = \varnothing$. En diminuant les K_i $(i = 1, \ldots, p)$ et en augmentant K, on peut supposer que ces compacts sont des G_δ, ce qui montre, grâce à la première partie de la démonstration, que tout point de $\mathscr{F}(E)$ possède une base de voisinage appartenant à $\mathscr{C}$. Pour chaque n on peut, d'après la compacité de T, recouvrir cet ensemble par un nombre fini de tels voisinages contenus dans V_n. Ceci montre qu'il existe $T_n \in \mathscr{C}$ tel que $T \subset T_n \subset V_n$. On a donc $T = \bigcap_n T_n \in \mathscr{C}$. c.q.f.d.

THÉORÈME 19. — *Soient* E *et* E' *deux espaces localement compacts sur lesquels* G *opère par des homéomorphismes.*

Soit μ *une mesure invariante sur* E'. *Soit* h *une application de* $\mathscr{K}(E)$ *dans l'ensemble des parties* μ*-mesurables de mesure finie de* E', *qui commute avec l'action de* G (*c'est-à-dire que si* $K \in \mathscr{K}(E)$ *et* $t \in G$ *on a* $h(t.K) = t.h(K)$) *et qui vérifie*

$$\forall K , \quad L \in \mathscr{K}(E) , \quad h(K \cup L) = h(K) \cup h(L) .$$

Alors l'application f *définie par*

$$\forall K \in \mathscr{K}(E) , \quad f(K) = \operatorname*{Inf}_{K \subset \mathring{L}} \mu(h(L))$$

est une capacité, qui est extrémale si f *est extrémale.*

Démonstration. — Le sous-ensemble $D = \bigcup_{L \in \mathscr{K}(E)} h(L)$ de E' est invariant par G. Pour x dans D définissons

$$\varphi(x) = \bigcap_{L \in \mathscr{K}(E), x \notin h(L)} \overline{L^c} .$$

C'est un fermé de L. La famille des fermés $\overline{L^c}$ ($L \in \mathscr{K}(E)$; $x \notin h(K)$) est filtrante décroissante. Si $x \in D$, il existe un compact K de E tel que $x \in h(K)$. Donc, on a $K \cap L^c \neq \varnothing$ si $x \notin h(L)$, ce qui montre que $\varphi(x) \neq \varnothing$. Ainsi φ définit une application de D dans $\mathscr{F}(E)$, qui évidemment commute avec l'action de G.

Soit K un compact de E. On a

$$\begin{aligned} \overset{-1}{\varphi}(\tilde{K}) &= \{x \in E' ; x \notin h(L) \Longrightarrow \overline{L^c} \cap K \neq \varnothing\} \\ &= \{x \in E' ; K \subset \mathring{L} \Longrightarrow x \in h(L)\} = \bigcap_{K \subset \mathring{L}} h(L) . \end{aligned}$$

Il en résulte, puisque h est croissante, que $\overset{-1}{\varphi}(\tilde{K})$ est μ-mesurable dès que K est un G_δ. Il découle alors du lemme 18 que les hypothèses du théorème 17 sont satisfaites. Soit ν la mesure sur $\mathscr{F}(E)$ image de μ par φ. Si K est un compact G_δ on a :

$$\nu(\tilde{K}) = \mu(\overset{-1}{\varphi}(\tilde{K})) = \operatorname*{Inf}_{K \subset \mathring{L}} \mu(h(L)) = f(K) .$$

Si K est un compact quelconque, on a donc

$$\begin{aligned} f(K) &= \operatorname*{Inf}_{K \subset \mathring{L}} f(L) = \operatorname{Inf}\{f(L)\,;\ K \subset \mathring{L},\ L \text{ est } G_\delta\} \\ &= \operatorname{Inf}\{\nu(\tilde{L})\,;\ K \subset \mathring{L},\ L \quad \text{est} \quad G_\delta\} = \nu\Big(\bigcap_{K \subset \mathring{L}} \tilde{L}\Big) = \nu(\tilde{K})\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que f est la capacité associée à ν, donc que f est une capacité. Et il résulte du théorème 17 que si μ est extrémale, alors ν, donc aussi f, est extrémale. c.q.f.d.

Ce théorème permet de définir des capacités (extrémales) à partir de fonctions d'ensembles (extrémales) qui se représentent par des mesures (voir [14]). Par exemple avec les notations précédentes, si h est à valeurs dans $\mathscr{K}(E')$ et continue à droite (c'est-à-dire que $h(K) = \bigcap_{K \subset \mathring{L}} h(L))$ et si g est une capacité extrémale sur E', la capacité sur E définie par

$$\forall K \in \mathscr{K}(E)\,, \qquad f(K) = g(h(K))$$

est extrémale. En effet, si μ est la mesure représentative de g, on a $f(K) = g(h(K)) = \mu(\widetilde{h(K)})$, et il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'application $K \to \widetilde{h(K)}$ de $\mathscr{K}(E)$ dans $\mathscr{F}(E')$.

Voici maintenant une autre méthode de construction de capacités extrémales.

Théorème 20. — *Supposons que* G *opère sur* E *par des homéomorphismes, et soit* f *une capacité de* $\mathfrak{A}$ *sur* E *vérifiant la condition suivante*

$$\text{(9)} \qquad \forall K \in \mathscr{K}(E)\,, \quad \forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists t \in G\,; \quad f(K \cup t.K) \geqslant 2f(K) - \varepsilon\,.$$

Alors la fonction de compacts donnée par

$$\forall K \in \mathscr{K}(E)\,, \qquad g(K) = 1 - e^{-f(K)}$$

est une capacité extrémale.

Démonstration. — Il est clair que g est croissante, continue à droite et invariante. Le fait qu'elle soit alternée d'ordre infini résulte de [2], paragraphe 21-5.

La condition (9) implique que f n'est pas bornée, donc que $g(E) = 1$. La mesure représentative μ de g est une probabilité.

D'après le lemme 16, il suffit de prouver que pour tout sous-ensemble μ mesurable B de $\mathscr{F}(E)$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe t dans G tel que $\mu(B \cap t.B) \leqslant \mu^2(B) + \varepsilon$. En effet, si B est invariant, ceci implique que $\mu(B) \leqslant \mu^2(B)$, et puisque $\mu(B) \leqslant \|\mu\| = 1$ on a $\mu(B) = 0$ où $\mu(B) = 1$.

Soit donc B un sous-ensemble μ-mesurable de $\mathscr{F}(E)$ et ε un réel > 0. Il existe un compact T et un ouvert U de $\mathscr{F}(E)$ tels que

$$T \subset B \subset U; \qquad \mu(U \setminus T) < \varepsilon .$$

Puisque T est compact on peut, comme dans la preuve du lemme 18 le recouvrir par une famille finie d'ensembles A_n, $(n = 1, \ldots, N)$ où :

$$A_n = \tilde{K}_{1,n} \cap \cdots \cap \tilde{K}_{p_n-1,n} \cap (\tilde{K}_{p_n,n})^c$$

contenus dans U. Soit $(K_i)_{i\in I}$ la famille de tous les ensembles $K_{l,n}$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$ et $1 \leqslant l \leqslant p_n$.

Pour chaque partie X de I définissons :

$$A_X = \Big(\bigcap_{i\in X} \tilde{K}_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in X^c} \tilde{K}_i^c\Big) = \Big(\bigcap_{i\in X^c} \tilde{K}_i\Big) \cap \Big(\widetilde{\bigcup_{i\in X^c} K_i}\Big)^c .$$

Les ensembles A_X sont deux à deux disjoints, et A_n est la réunion des A_X tels que pour $l \leqslant p_n - 1$ on ait $K_{l,n} \in \{K_i,\ i \in X\}$, et que $K_{p_n,n} \notin \{K_i,\ i \in X\}$. Soit $\mathscr{X}$ la famille des parties X de I qui vérifient ces conditions pour au moins un n. On a $\mu\Big(B\Delta \bigcup_{x\in\mathscr{X}} A_X\Big) \leqslant \varepsilon$, puisque $T \subset \bigcup_{X\in\mathscr{X}} A_X \subset U$. Puisque μ est invariant, on en déduit que pour tout t de G on a

$$\Big|\mu(B \cap t.B) - \sum_{X,Y\in\mathscr{X}} \mu(A_X \cap t.A_Y)\Big| = \Big|\mu(B \cap t.B) - \mu\Big(\bigcup_{\in\mathscr{X}} A_X \cap t.\bigcup_{Y\in\mathscr{X}} A_Y\Big)\Big| \leqslant 2\varepsilon .$$

On a aussi

$$|\mu^2(B) - \mu^2\Big(\bigcup_{X\in\mathscr{X}} A_X\Big)| \leqslant 2|\mu(B) - \mu\Big(\bigcup_{X\in\mathscr{X}} A_X\Big)| \leqslant 2\varepsilon$$

d'où il vient

$$\begin{aligned}(10)\quad &|\mu(B \cap t.B) - \mu^2(B)| \\ &\leqslant |\sum_{X,Y\in\mathscr{X}} \mu(A_X \cap t.A_Y) - \Big(\sum_{X\in\mathscr{X}} \mu(A_X)\Big)^2| + 4\varepsilon \\ &\leqslant \sum_{X,Y\in\mathscr{X}} |\mu(A_X \cap t.A_Y) - \mu(A_X)\mu(A_Y)| + 4\varepsilon .\end{aligned}$$

Posons, pour toute partie X de I

$$K_X = \bigcup_{i\in X} K_i .$$

On a

$$A_X \cap t.A_Y = \bigcap_{i\in X} \tilde{K}_i \cap \bigcap_{j\in Y} \widetilde{t.K_j} \cap \widetilde{(K_{X^c} \cup t.K_{Y^c})^c} .$$

Pour poursuivre le calcul il nous faut évaluer la mesure de $A_X \cap t.A_Y$.

Lemme 21 ([14], lemme 3). — *Soit* μ *une mesure sur* $M^+(\mathscr{F}(E))$ *et* g *la capacité qu'elle représente. Pour tous compacts* $K, K_1, K_2, \ldots, K_p$ *de* E *on a :*

$$\mu(\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \cap \cdots \cap \tilde{K}_p \cap \tilde{K}^c) = \sum_{P\subset[1,p]} (-1)^{1+\operatorname{card} P}\, g\Big(K \cup \bigcup_{i\in P} K_i\Big).$$

Cette formule nous donne

$$\mu(A_X \cap t.A_Y) = \sum_{\substack{P\subset X\\ Q\subset Y}} (-1)^{\operatorname{card} P + \operatorname{card} Q}\, e^{-f(K_P \cup K_{X^c} \cup t.(K_Q \cup K_{Y^c}))}$$

et aussi

$$\mu(A_X)\mu(A_Y) = \sum_{\substack{P\subset X\\ Q\subset Y}} (-1)^{\operatorname{card} P + \operatorname{card} Q}\, e^{-f(K_P \cup K_{X^c}) - f(K_Q \cup K_{Y^c})} .$$

Or, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$ on a $|e^{-\alpha} - e^{-\beta}| \leqslant \beta - \alpha$. On en déduit que

$$\begin{aligned}|\mu(A_X \cap t.A_Y) - \mu(A_X)\mu(A_Y)| \\ \leqslant \sum_{\substack{P\subset X\\ Q\subset Y}} f(K_P \cup K_{X^c}) + f(K_Q \cup K_{Y^c}) \\ - f(K_P \cup K_{X^c} \cup t.(K_Q \cup K_{Y^c})) .\end{aligned}$$

Compte tenu de (10) nous sommes ramenés à prouver que pour toute famille finie $K_1, \ldots, K_l, L_1, \ldots, L_l$ de $\mathscr{K}(E)$ et tout réel $\eta > 0$ il existe un t de G tel que

$$i \leqslant l \Longrightarrow f(K_i) + f(L_i) - f(K_i \cap t.L_i) \leqslant \eta .$$

Soient K la réunion des K_i et des L_i ($1 \leqslant i \leqslant l$) et λ la mesure représentative de f. Il existe par hypothèse un t dans G tel que $2f(K) - f(K \cup t.K) \leqslant \eta$. On a alors, pour $i < l$:

$$\begin{aligned}f(K_i) + f(L_i) - f(K_i \cup t.L_i) = \lambda(\tilde{K}_i) + \lambda(\tilde{L}_i) - \lambda(\tilde{K}_i \cup \widetilde{t.L_i}) \\ = \lambda(\tilde{K}_i \cap \widetilde{t.L_i}) \leqslant \lambda(\tilde{K} \cap \widetilde{t.K}) = 2f(K) - f(K \cup t.K) \leqslant \eta .\end{aligned}$$

c.q.f.d.

Remarque. — La démonstration précédente prouve que si

$$\forall K \in \mathscr{K}(E) , \qquad \lim_{t\to\infty} f(K \cup t.K) = 2f(K)$$

alors, pour tout sous-ensemble μ-mesurable B de $\mathscr{F}(E)$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} \mu(B \cap t.B) = \mu^2(B)$.

La méthode du théorème 20 (qui est également celle du théorème 2 de [14]) consiste à reconstituer la mesure représentant une capacité grâce au lemme 21. Cette méthode permet d'obtenir le résultat suivant, dont la démonstration, sensiblement plus aisée que celle du théorème 20, est laissée au lecteur. (Les diverses conditions envisagées s'inspirent des notions de « mélange » de la théorie ergodique. Le fait que ces conditions aient un sens résulte de la partie a) du lemme 23.) Nous emploierons le terme « moyenne » au sens de « *moyenne topologiquement invariante à gauche sur* $\mathscr{C}_b(G)$ » (voir [7], paragraphe 2-1).

Proposition 22. — *Supposons que* G *agisse continûment sur* E. *Soit* f *une capacité sur* E *de mesure représentative*

μ . *Les deux conditions de chaque couple ci-dessous sont équivalentes.*

i) *Pour tout compact* K *de* E *on a* $\lim_{t\to\infty} f(\mathrm{K} \cup t.\mathrm{K}) = 2f(\mathrm{K})$.

Pour tout ensemble μ *mesurable* A *de mesure finie dans* $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ *on a* $\lim_{t\to\infty} \mu(\mathrm{A} \cap t.\mathrm{A}) = 0$.

ii) *Pour tous compacts* K *et* L *de* $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\lim_{t\to\infty} f(\mathrm{K} \cup t.\mathrm{L}) = f(\mathrm{K}) + f(\mathrm{L}) - f(\mathrm{K})f(\mathrm{L}) .$$

Pour tout couple (A,B) *d'ensembles* μ*-mesurables de* $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\lim_{t\to\infty} \mu(\mathrm{A} \cap t.\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A})\mu(\mathrm{B}) .$$

Si de plus $\check{m}$ *désigne une moyenne invariante sur* $\mathcal{C}_b(\mathrm{G})$, *on a aussi équivalence pour les couples suivants :*

iii) *Pour tous compacts* K *et* L *de* $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\check{m}(t \to f(\mathrm{K} \cup t.\mathrm{L})) = f(\mathrm{K}) + f(\mathrm{L}) - f(\mathrm{K})f(\mathrm{L}) .$$

Pour tout couple (A,B) *d'ensembles* μ*-mesurables de* $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\check{m}(t \to \mu(\mathrm{A} \cap t.\mathrm{B})) = \mu(\mathrm{A})\mu(\mathrm{B}) .$$

iv) *Pour tous compacts* K *et* L *de* $\mathcal{K}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\check{m}(t \to |f(\mathrm{K} \cup t.\mathrm{L}) - f(\mathrm{K}) - f(\mathrm{L}) + f(\mathrm{K})f(\mathrm{L})|) = 0 .$$

Pour tout couple (A,B) *d'ensembles* μ*-mesurables de* $\mathcal{F}(\mathrm{E})$ *on a*

$$\check{m}(t \to |\mu(\mathrm{A} \cap t.\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A})\mu(\mathrm{B})|) = 0 .$$

Nous allons maintenant préciser le théorème 20 lorsque G est moyennable.

Les idées du lemme suivant sont tout à fait classiques en théorie ergodique.

LEMME 23. — *Supposons que le groupe moyennable* G *agisse continûment sur* E . *Désignons par* $\mathcal{S}$ *le cône des mesures de Radon sur* E *invariantes par l'action de* G ; *et par* $\mathcal{S}_1$

le sous-ensemble de $\mathcal{Y}$ *formé des mesures de masse* $\leqslant 1$. *Alors :*

a) Si $\mu \in \mathcal{Y}$ *et si* $\zeta \in L^2(\mu)$, *l'application de* G *dans* $L^2(\mu)$, *qui envoie* g *sur* ζ_g *où*

$$\zeta_g(x) = \zeta(g.x), \qquad \forall x \in E$$

est continue

b) Pour toute $\mu \in \mathcal{Y}$ *telle que* $\|\mu\| = 1$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) μ *est extrémale.*

ii) *Pour toutes fonctions* $\zeta, \zeta' \in L^2(\mu)$ *et toute moyenne invariante* $\check{m}$ *sur* G *on a, si l'on désigne par* $\langle .,. \rangle$ *le produit scalaire dans* L^2

$$\check{m}(t \longrightarrow \langle \zeta, \zeta'_t \rangle) = \langle \zeta, 1 \rangle \langle \zeta', 1 \rangle .$$

c) Pour $\mu \in \mathcal{Y}$ *les conditions suivantes sont équivalentes.*

iii) μ *ne majore aucun élément non nul de* $\mathcal{Y}_1$.

iv) *Pour toutes fonctions* $\zeta, \zeta' \in L^2(\mu)$ *et toute moyenne invariante on a*

$$\check{m}(t \longrightarrow \langle \zeta, \zeta'_t \rangle) = 0 .$$

v) *Pour tout ensemble* μ*-mesurable* A *on a :*

$$\inf_t \mu(A \cap t.A) = 0 .$$

Démonstration. — *a)* Le premier point résulte de ce que l'action de G est continue et de ce que $\mathscr{C}_K(E)$ est dense dans $L^2(\mu)$.

b) Prouvons que i $\Longrightarrow$ ii. Pour $\varphi \in \mathscr{C}_K(E)$, $\varphi' \in \mathscr{C}_K^+(E)$, soit

$$\nu(\varphi) = \check{m}(t \longrightarrow \langle \varphi, \varphi'_t \rangle) .$$

On définit ainsi une mesure de Radon invariante. Si φ est positive on a $\langle \varphi, \varphi'_t \rangle \leqslant \|\varphi'\|_\infty \mu(\varphi)$, ce qui montre que $\nu \leqslant \|\varphi'\|_\infty \mu$. Puisque μ est extrémale, ceci implique que $\nu = a\mu$. Calculons a. Puisque $\nu(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_\infty \mu(\varphi')$ dès que φ est positive on a

$$a = \text{Sup}\,\{\nu(\varphi);\ \varphi \leqslant 1,\quad \varphi \in \mathscr{C}_K^+(E)\} \leqslant \mu(\varphi') .$$

D'autre part, si $\varphi \in \mathscr{C}_K(E)$ est telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ et que $\mu(\{\varphi = 1\}) \geqslant 1 - \varepsilon$ on a pour tout t

$$\langle \varphi, \varphi'_t \rangle \geqslant \mu(\varphi') - \varepsilon \|\varphi'\|_\infty$$

ce qui montre que

$$\mu(\varphi') - \varepsilon \|\varphi'\|_\infty \leqslant a\nu(\varphi) \leqslant a\,.$$

On a donc $a = \mu(\varphi')$ ce qui s'écrit

$$\check{m}(t \longrightarrow \langle \varphi, \varphi'_t \rangle) = \mu(\varphi)\mu(\varphi')\,.$$

Par différence on voit que cette égalité est encore vraie si φ' n'est pas positive, et on déduit (ii) du fait que $\mathscr{C}_K(E)$ est dense dans $L^2(\mu)$.

Réciproquement si B est un ensemble mesurable invariant, a condition ici appliquée à χ_B donne $\mu(B) \leqslant \mu^2(B)$, d'où $1\mu(B)\mu(B^c) = 0$ ce qui suffit d'après le lemme 16. La preuve de (c) est analogue et laissée au lecteur.

THÉORÈME 24. — *Supposons que* G *soit moyennable et opère continûment sur* E. *Soit* f *une capacité sur* E, *et soit* g *donnée par*

$$\forall K \in \mathscr{K}(E)\,, \qquad g(K) = 1 - e^{-f(K)}\,.$$

Soient λ *et* μ *les mesures représentatives de* f *et* g. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\forall K \in \mathscr{K}(E)\,, \ \sup\limits_{t \in G} f(K \cup t.K) = 2f(K)\,.$

ii) f *ne majore (au sens de* $\mathcal{C}\!\ell$*) aucune capacité bornée non nulle.*

iii) *Pour toute moyenne invariante* m *sur* G, *et toutes fonctions* $\zeta, \zeta' \in L^2(\lambda)$ *on a*

$$\check{m}(t \longrightarrow \langle \zeta, \zeta'_t \rangle_\lambda) = 0\,.$$

iv) *Pour tout compact* K *de* E *et toute moyenne invariante* $\check{m}$ *on a*

$$\check{m}(t \longrightarrow f(K \cup t.K)) = 2f(K)\,.$$

v) g *est extrémale et* $g(E) = 1$.

vi) *Pour toute moyenne invariante* $\check{m}$ *et toutes fonctions* $\eta,\eta' \in L^2(\mu)$ *on a*

$$\check{m}(t \longrightarrow \langle \eta,\eta'_t\rangle_\mu) = \langle \eta,1\rangle_\mu \langle \eta',1\rangle_\mu .$$

Démonstration. — Compte tenu du lemme 23, les quatre premières conditions ainsi que les deux dernières sont équivalentes. Le théorème 20 montre que i $\Longrightarrow$ v . Prouvons que vi $\Longrightarrow$ i . Choisissons $\eta = \eta' = \chi_K$. Soit ε un réel > 0 . On déduit de (vi) l'existence d'un t de G tel que $\mu(K \cap t.K) \leqslant \mu(K)^2 + \varepsilon$, ce qui s'écrit

$$2g(K) - g(K \cup t.K) = 2(1 - e^{-f(K)}) - (1 - e^{-f(K\cup t.K)}) \leqslant (1 - e^{-f(K)})^2 + \varepsilon$$

ou encore

$$e^{-f(K\cup t.K)} - e^{-2f(K)} \leqslant \varepsilon$$

ce qui suffit. c.q.f.d.

Problème. — Si f est bornée, est-il possible que g soit extrémale?

5. Exemples de capacités extrémales.

Ces exemples s'obtiennent par application des résultats précédents.

Exemple 25. — Supposons que G ne soit pas unimodulaire et agisse proprement sur E . Il existe alors des fermés non compacts F de E tels que

$$\forall K \in \mathcal{K}(E) \qquad m(K.F^{-1}) < +\infty .$$

(Par exemple si t est tel que $\Delta(t) > 1$ on peut choisir $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} t^n.x$, pour un x quelconque de E .)

Il résulte du théorème 20 que la régularisée de l'application $K \longrightarrow m(K.F^{-1})$ est une capacité extrémale. Mais en fait cette application est déjà continue à droite. En effet soient $L \in \mathcal{K}(E)$ tel que $K \subset \mathring{L}$, $M \in \mathcal{K}(G)$ tel que $m(L.F^{-1}\setminus M) < \varepsilon$ et soit $M_1 = M^{-1}.L \cap F$. Il existe $N \in \mathcal{K}(E)$ tel que

$$K \subset \mathring{N} \subset L \qquad \text{et} \qquad m(N.M_1^{-1}) < m(K.M_1^{-1}) + \varepsilon .$$

On a $N.M_1^{-1} \supset M \cap N.F^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned} m(N.F^{-1}) &\leqslant m(N.F^{-1}\setminus M) + m(N.F^{-1} \cap M) \\ &\leqslant m(L.F^{-1}\setminus M) + m(N.M_1^{-1}) \\ &\leqslant 2\varepsilon + m(K.M_1^{-1}) \leqslant 2\varepsilon + m(K.F^{-1}) \end{aligned}$$

ce qui prouve notre assertion.

Prouvons que si F_1 et F_2 sont deux tels fermés vérifiant de plus, pour un réel α :

$$\forall K \in \mathscr{K}(E) \qquad f_1(K)' = m(K.F_1^{-1}) = \alpha m(K.F_2^{-1}) = \alpha f_2(K)$$

alors

$$\exists\, s \in G \; ; \qquad F_2 = s.F_1 \qquad \alpha = \Delta(s) \, .$$

Il résulte aussitôt du théorème 2 que si $i = 1$ ou 2, la mesure représentative μ_i de f_i est l'image de m par l'application continue θ_i de G dans $\mathscr{F}(E)$ qui envoie t sur $t.F_i$. Soit L un compact de G tel que $m(L) > 0$. On a :

$$\mu_i(\theta_i(L)) = m(\theta_i^{-1}\theta_i(L)) \geqslant m(L) > 0 \, .$$

Puisque $\mu_1 = \alpha\mu_2$ on a :

$$m(\theta_2^{-1}(\theta_1(L)) = \mu_2(\theta_1(L)) > 0 \, .$$

Ceci montre que $\theta_2^{-1}(\theta_1(L))$ n'est pas vide, et prouve l'existence de s. On a alors $\alpha = \Delta(s)$.

Exemple 26. — Cet exemple est directement dérivé de la remarque qui suit le théorème 20. Soit H un groupe localement compact et θ un morphisme continu de G dans H tel que $\overline{\theta(G)} = H$. Les capacités alternées d'ordre infini sur H invariantes par l'action de H sont, d'après la continuité à droite, les mêmes que celles qui sont invariantes par l'action de G. Si g est une telle capacité choisie de plus extrémale, et si M est un compact de H l'application $K \longrightarrow g(\theta(K)M)$ est une capacité extrémale sur G. Si G agit proprement sur E et si $N \in \mathscr{K}(E)$ alors

$$K \longrightarrow g(\theta(K.N^{-1})M)$$

est une capacité extrémale sur E.

Signalons à titre de curiosité le résultat suivant dont la preuve sera épargnée au lecteur. Prenons pour g une mesure de Haar m' de H. Soit K_0 un compact de G d'intérieur non vide et soit L le plus grand sous-compact de M tel que pour tout ouvert U de H rencontrant L on ait $m'(\theta(K_0)(\overline{U} \cap L)) > 0$. Alors, pour tout compact K de G on a $M'(\theta(K)L) = m'(\theta(K)M)$. De plus soit N un compact de H tel que

— Si U est un ouvert de H rencontrant N, alors

$$m^{-1}(\theta(K_0)(\overline{U} \cap L)) > 0$$

— Pour tout compact K de G, on a

$$m(\theta(K)N) = \alpha m(\theta(K)M) .$$

Alors ces deux conditions impliquent l'existence d'un s de H tel que $N = Ls$ et $\alpha = \Delta'(s)$ (où Δ' désigne la fonction module de H).

Nous avons donc dans ce cas trouvé une représentation canonique de la capacité $K \longrightarrow g(\theta(K.N^{-1}))$.

Exemple 27. — Supposons G discret infini. Soit X un espace compact et $Y = X^G$. Le groupe G opère de façon naturelle sur Y par le shift :

$$(t, (y_i)_{i\in G}) \to (y_{it})_{i\in G} .$$

Soit λ une probabilité sur X et $\mu = \bigotimes_{i\in G} \lambda_i$ la mesure puissance sur Y. Elle est extrémale parmi les mesures sur Y invariantes par G. On prouve même de suite, en approchant en mesure les ensembles μ-mesurables A et B par des ouverts ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées que l'on a $\lim_{t\to\infty} \mu(A \cap t.B) = \mu(A)\mu(B)$. Ainsi, si M est une partie mesurable de Y, l'application $K \longrightarrow \mu\left(\bigcup_{k\in K} k.M\right)$ est une capacité extrémale sur G.

Exemple 28. — Supposons $E = G/H$, où H est un sous-groupe compact de G. Soit m' la mesure image de m par l'application canonique de G sur E. C'est une capacité extrémale sur E. L'ensemble des nombres $m'(K)$ pour $K \in \mathscr{K}(E)$ est ou bien un semi-groupe Q de $\mathbf{R}^+$, égal à $a\mathbf{Z}$ $(a > 0)$ si G est discret, ou bien $\mathbf{R}^+$ dans le cas contraire :

on le voit sans peine. Cherchons maintenant quelles sont les capacités extrémales sur E qui sont de la forme $f(\mathrm{K}) = \varphi(m'(\mathrm{K}))$ où φ est une application de Q dans $\mathbf{R}^+$.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_p$ des éléments de Q et $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_p$ des compacts de E tels que $m'(\mathrm{K}_i) = a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Il existe des points t_i de G ($1 \leqslant i \leqslant p$) tels que les compacts $t_i . \mathrm{K}_i$ soient disjoints deux à deux. Si l'on applique l'inégalité (1) à ces compacts, on voit que l'application φ est alternée d'ordre infini au sens de [3], paragraphe 13-1. Il résulte alors, puisque f est extrémale, du théorème 43-4 de ce même article que l'on a soit $f(\mathrm{K}) = \alpha m'(\mathrm{K})$ ($\alpha \in \mathbf{R}^+$)

$$\text{soit } f(\mathrm{K}) = \beta(1 - e^{-\alpha m'(\mathrm{K})})(\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+).$$

Les deux exemples suivants sont particulièrement importants car ils décrivent presque le cas général comme nous le verrons dans le paragraphe 7 (Théorèmes 40, 41, 42).

Exemple 29. — Supposons G moyennable. Le simplexe des moyennes invariantes s'identifie au simplexe des mesures de Radon de masse 1 sur le compactifié de Stone-Čech $\check{\mathrm{G}}$ de G qui sont invariantes par l'action de G (lequel opère sur $\check{\mathrm{G}}$ par des homéomorphismes). Si $\check{m}$ est une moyenne invariante et F un fermé de G, posons, par abus de notation (où $\overline{\mathrm{F}}^{\vee}$ désigne l'adhérence de F dans $\check{\mathrm{G}}$),

$$\check{m}(\mathrm{F}) \overset{\text{def}}{=} \check{m}(\overline{\mathrm{F}}^{\vee}) = \inf \{\check{m}(h);\quad h \in \mathscr{C}_b^+(\mathrm{G}),\quad h \geqslant \chi_{\mathrm{F}}\}.$$

Supposons que G opère continûment sur E. Soit F un fermé de E. Pour tout compact K de E posons

$$f(\mathrm{K}) = \inf \{\check{m}(\mathrm{L}.\mathrm{F}^{-1})\ ;\quad \mathrm{L} \in \mathscr{K}(\mathrm{E}),\quad \mathring{\mathrm{L}} \supset \mathrm{K}\}.$$

Il résulte du théorème 19 (où l'on prend $\mathrm{E}' = \check{\mathrm{G}}$, et $h(\mathrm{K}) = (\overline{\mathrm{K}.\mathrm{F}^{-1}})^{\vee}$) que c'est une capacité, et que cette capacité est extrémale si $\check{m}$ est extrémale dans le simplexe des moyennes invariantes. Remarquons que $f(\mathrm{E}) \leqslant 1$.

Si $\varphi \in \mathscr{C}_{\mathrm{K}}^+(\mathrm{E})$ on a

$$\hat{f}(\varphi) = \int_{0^+}^{\infty} f(\{\varphi \geqslant u\})\, du = \int_{0^+}^{\infty} \check{m}(\{\varphi \geqslant u\}.\mathrm{F}^{-1})\, du.$$

Soit $\check{\varphi}$ la fonction sur G définie par $\check{\varphi}(t) = \sup\limits_{t.\mathrm{F}} \varphi$.

On a $\check{\varphi} \in \mathscr{C}_b^+(G)$. Puisque φ est à support compact, on a

$$\check{\varphi}(t) \geqslant u \Longleftrightarrow t \in \{\varphi \geqslant u\}.F^{-1}.$$

Désignons par $\check{\check{\varphi}}$ le prolongement canonique de $\check{\varphi}$ à $\check{G}$. Pour $v < w < u$ on a $\{\check{\check{\varphi}} \geqslant u\} \subset \overline{\{\check{\varphi} \geqslant w\}}^{\vee} \subset \{\check{\check{\varphi}} \geqslant v\}$. On a donc

$$\check{m}(\{\check{\check{\varphi}} \geqslant u\}) \leqslant \operatorname*{Inf}_{v<u} \check{m}(\overline{\{\check{\varphi} \geqslant v\}}^{\vee}) \leqslant \operatorname*{Inf}_{v<u} \check{m}(\{\check{\check{\varphi}} \geqslant v\}).$$

Les deux fonctions de u figurant aux extrémités de ces inégalités ne diffèrent qu'en un nombre dénombrable de points, et ont donc même intégrale par rapport à du. De plus on a aussi

$$\check{m}(\overline{\{\check{\varphi} \geqslant u\}}^{\vee}) = \operatorname*{Inf}_{v<u} \check{m}(\overline{\{\check{\varphi} \geqslant v\}}^{\vee})$$

sauf pour au plus un nombre dénombrable de valeurs de u. On a donc

$$\begin{aligned}\check{m}(\check{\varphi}) &= \int_{\check{G}}^{\infty} \check{\check{\varphi}}\, d\check{m} = \int_{0^+}^{\infty} \check{m}(\{\check{\check{\varphi}} \geqslant u\})\, du = \int_{0^+}^{\infty} \check{m}(\overline{\{\check{\varphi} \geqslant u\}}^{\vee})\, du \\ &= \int_{0^+}^{\infty} \check{m}(\{\varphi \geqslant u\}.F^{-1})\, du = \int_{0^+}^{\infty} f(\{\varphi \geqslant u\varphi)\, du = \hat{f}(\varphi).\end{aligned}$$

Il résulte de cette égalité que l'application $\check{m} \longrightarrow f$ est continue lorsque $\mathfrak{A}$ et le simplexe des moyennes sont munis de la topologie vague.

Exemple 30. — Cet exemple généralise le précédent et fournit aussi des capacités non bornées.

Soit T un sous-ensemble de $\mathscr{F}(G)$ possédant les propriétés suivantes

$$(11)\qquad \begin{aligned}&- F_1, F_2 \in T \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in T\\ &- F_1 \subset F_2 \in T \Longrightarrow F_1 \in T\\ &- F \in T,\ t \in G \Longrightarrow t.F \in T\\ &- F \in T \Longrightarrow \exists F' \in T;\quad F \subset \mathring{F}'\\ &- T \neq \mathscr{F}(G).\end{aligned}$$

Soit $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur G dont le support appartient à T. Si $h \in \mathscr{C}_T$ et $t \in G$ la fonction h_t donnée par $h_t(s) = h(ts)$ appartient encore à $\mathscr{C}_T$. Le complété $\mathscr{C}'_T$ de $\mathscr{C}_T$ pour la norme uniforme s'identifie à l'ensemble des fonctions bornées sur G vérifiant la condition :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \qquad \exists F \in T; \qquad t \notin F \Longrightarrow |h(t)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Muni de la norme uniforme, $\mathscr{C}'_T$ est une C*-algèbre sans unité. Son spectre S est un espace localement compact dans lequel se plonge G (grâce à (11)) et sur lequel G opère par des homéomorphismes. De plus $\mathscr{C}_T$ s'identifie à l'espace des fonctions sur S à support compact. En effet, puisque G est réunion disjointe d'ouverts dénombrables à l'infini donc normal, la condition (11) implique que tout fermé F appartenant à T est contenu dans l'ensemble $\{h \geqslant 1\}$ pour un h de $\mathscr{C}_T$, donc est relativement compact dans S. Ceci montre que $\mathscr{C}_T \subset \mathscr{C}_K(S)$, et la réciproque est évidente, compte tenu de la définition de la topologie de S.

Nous appellerons *moyenne* sur $\mathscr{C}_T$ une forme linéaire positive sur $\mathscr{C}_T$ qui est invariante par l'action de G (c'est-à-dire que $\check{m}(h_t) = \check{m}(h)$, pour $h \in \mathscr{C}_T$ et $t \in G$).

Il résulte des considérations précédentes que $\check{m}$ se représente comme une mesure de Radon sur S invariante par l'action de G, ce qui permettra d'appliquer le théorème 20. Désignons par $\mathscr{M}_T$ le cône des moyennes sur $\mathscr{C}_T$. La topologie vague sur $\mathscr{M}_T$ est la moins fine rendant continues les applications $\check{m} \longrightarrow \check{m}(h)$ pour $h \in \mathscr{C}_T$ (puisque $\mathscr{C}_T = \mathscr{C}_K(S)$, cette topologie est exactement la topologie vague lorsque les moyennes sont considérées comme des mesures sur S).

Commençons, comme dans l'exemple précédent, par étendre $\check{m}$ à T par

$$\forall F \in T\,, \qquad \check{m}(F) = \check{m}(\overline{F}^S) = \operatorname{Inf}(\check{m}(h)\ ; \quad h \in \mathscr{C}_T, \quad h \geqslant \chi_F)\,.$$

Supposons que G opère continûment sur E et soit F un fermé de E. Posons

$$T = \{H \in \mathscr{F}(E);\ \ \exists K \in \mathscr{K}(E);\ \ H \subset K.F^{-1}\}\,.$$

Ce sous-ensemble de $\mathscr{F}(E)$ vérifie les conditions requises.

Soit $\check{m}$ une moyenne sur $\mathscr{C}_T$. Posons

$$\forall K \in \mathscr{K}(E) \qquad f(K) = \operatorname{Inf}\{\check{m}(L.F^{-1})\ ; \quad L \in \mathscr{K}(E)\,, \quad \mathring{L} \supset K\}\,.$$

Il résulte du théorème 19 et des considérations précédentes que f est une capacité, qui est extrémale si $\check{m}$ est extrémale dans $\mathcal{M}_{\mathrm{T}}$. De plus, si $\varphi \in \mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$ on montre comme dans l'exemple précédent que $f(\varphi) = \check{m}(\check{\varphi})$, où $\check{\varphi}$ est la fonction de $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$ donnée par $\check{\varphi}(t) = \sup_{t.\mathrm{F}} \varphi$. Il en résulte que l'application $\check{m} \longrightarrow \check{f}$ est continue pour les topologies vagues.

Remarque. — Il peut être intéressant dans les deux exemples précédents d'adopter un point de vue quelque peu différent. On montre sans trop de peine que pour deux fermés A et B de G (resp. appartenant à T) on a

$$\check{m}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \check{m}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \check{m}(\mathrm{A}) + \check{m}(\mathrm{B})$$

si m est une moyenne (resp. sur $\mathscr{C}_{\mathrm{T}}$). Cette égalité signifie par définition que $\check{m}$ est une valuation sur le treillis $\mathscr{F}(\mathrm{G})$ (resp. T). De plus $\check{m}$ est invariante par l'action de G et continue à droite, c'est-à-dire que

$$\check{m}(\mathrm{A}) = \inf_{\mathrm{A} \subset \mathring{\mathrm{B}}} \check{m}(\mathrm{B}) \quad (\text{resp. } \check{m}(\mathrm{A}) = \inf \{\check{m}(\mathrm{B}) , \mathrm{B} \in \mathrm{T} , \mathrm{A} \subset \mathring{\mathrm{B}}\}) .$$

A chaque valuation v continue à droite on associe une moyenne donnée par (voir [3], paragraphe 54-2)

$$\check{m}(h) = \int_{0^+}^{\infty} v(\{h \geqslant u\}) \, du$$

pour $h \in \mathscr{C}_b^+(\mathrm{G})$ (resp. $h \in \mathscr{C}_{\mathrm{T}}^+$) (on prolonge ensuite par linéarité). Les deux correspondances que nous avons établies sont inverses l'une de l'autre et définissent une bijection entre le cône des moyennes et celui des valuations invariantes continues à droite (lesquelles constituent une face du cône des valuations invariantes). Signalons enfin que les valuations sur un treillis peuvent se représenter par des mesures ([14] théorème 1).

6. Résultats de densité et applications.

Dans ce paragraphe nous supposerons toujours que G *agit proprement sur* E .

Proposition 31 (AP). — *Supposons que l'ensemble des capacités de la forme* $\alpha f_{\mathrm{K}} (\alpha \in \mathbf{R}^+ , \mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E}))$ *soit dense dans* $\mathfrak{A}$. *Alors* G *est moyennable.*

Démonstration. — Soit f la capacité égale à 1 sur tout compact. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{E})$ telle que $\sup \varphi = 1$ et soit L un compact contenant le support de φ. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{K}(\mathrm{G})$ et $\varphi' \in \mathscr{C}_{\mathrm{K}}^{+}(\mathrm{E})$ égale à 1 sur X . L et majorée par 1. On a $\hat{f}(\varphi) = \hat{f}(\varphi') = 1$. Soit ε un réel > 0. Il existe par hypothèse $\alpha \in \mathbf{R}^{+}$ et $\mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$ tels que

$$|\hat{f}(\varphi) - \alpha\hat{f}_{\mathrm{K}}(\varphi)| \leqslant \varepsilon \; ; \qquad |\hat{f}(\varphi') - \alpha\hat{f}_{\mathrm{K}}(\varphi')| \leqslant \varepsilon \, .$$

Ces deux conditions impliquent respectivement

$$\alpha m(\mathrm{L}.\mathrm{K}^{-1}) \geqslant 1 - \varepsilon \; ;$$
$$\alpha m((\mathrm{X}.\mathrm{L}).\mathrm{K}^{-1}) = \alpha m(\mathrm{X}(\mathrm{L}.\mathrm{K}^{-1})) \leqslant 1 + \varepsilon \, .$$

On en déduit, en posant $\mathrm{A} = \mathrm{L}.\mathrm{K}^{-1}$

$$\frac{m(\mathrm{XA})}{m(\mathrm{A})} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \, .$$

Puisque X est arbitraire, l'existence de A prouve que G est moyennable ([7], théorème 3-6-2). c.q.f.d.

Prouvons maintenant un résultat un peu plus précis que la réciproque de la proposition précédente. La *topologie faible* sur $\mathfrak{A}$ est la moins fine rendant continues les applications $f \to f(\mathrm{L})$ pour tout compact L de E . Elle est plus fine que la topologie vague ([3], paragraphe 48-4).

Théorème 32 (AP). — *Supposons* G *moyennable. Alors l'ensemble des capacités de la forme* αf_{K} *est faiblement dense* (*donc vaguement dense*) *dans* $\mathfrak{A}$.

Démonstration. — Soient f une capacité, $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n$ des compacts de E et ε un réel > 0. Il suffit de montrer, par définition de la topologie faible qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et un compact K de E tels que

$$1 \leqslant p \leqslant n \Longrightarrow |f(\mathrm{L}_p) - \alpha f_{\mathrm{K}}(\mathrm{L}_p)| \leqslant 3\varepsilon \, .$$

Soient X un compact de E contenant tous les L_i et $\mathrm{Y} = \mathrm{X}.\mathrm{X}^{-1}$. D'après le résultat fondamental de [5] il existe un compact A de G tel que $\dfrac{m(\mathrm{YA}\setminus\mathrm{A})}{m(\mathrm{A})} < \varepsilon' = \varepsilon(f(\mathrm{X}))^{-1}$.
Posons $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}.\mathrm{X}$. Soit μ la mesure sur $\mathscr{F}(\mathrm{E})$ qui

représente f. Pour tout compact L de E et tout t de G on a

$$f(t^{-1}.L \cap B) = \mu(\{F \in \mathscr{F}(E);\quad F \cap t^{-1}.L \cap B \neq \varnothing\}).$$

Si $t^{-1}.L \cap B$ n'est pas vide, t^{-1} appartient à $B.L^{-1}$. Il en résulte donc que l'ensemble

$$\{(t, F) \in G \times \mathscr{F}(E);\quad (t^{-1}.L) \cap B \cap F \neq \varnothing\}$$

est compact ce qui permet d'écrire successivement

$$\begin{aligned}(12)\quad \iint_G f(t^{-1}.L \cap B)\, dm(t) &= \iint_{t^{-1}.L \cap B \cap F \neq \varnothing} d\mu(F)\, dm(t)\\ &= \iint_{L \cap t.(B \cap F) = \varnothing} d\mu(F)\, dm(t)\\ &= \int_{\tilde{B}} m(L.(B \cap F^{-1}))\, d\mu(F) = \int_{\tilde{B}} f_{B \cap F}(L)\, d\mu(F).\end{aligned}$$

Soit L un sous-compact de X. Pour $t \in A$ on a $t^{-1}.L \subset B$ donc $f(t^{-1}.L \cap B) = f(t^{-1}.L) = f(L)$. D'autre part, si $f(t^{-1}.L \cap B) > 0$ alors $t^{-1}.L \cap B \neq \varnothing$, donc aussi

$$t^{-1}.X \cap A^{-1}.X \neq \varnothing.$$

Il existe alors $a^{-1} \in A^{-1}$ tel que $t^{-1}.X \cap a^{-1}.X \neq \varnothing$, ce qui donne $t^{-1}a \in X.X^{-1} = Y$, donc $t \in YA$. Pour un tel t on a $f(t^{-1}.L \cap B) \leqslant f(L)$. Ces inégalités impliquent

$$m(A)f(L) \leqslant \int_G f(t^{-1}.L \cap B) \leqslant m(YA)f(L) \leqslant m(A)(1+\varepsilon')f(X)$$

ce qui donne avec (12)

$$(13)\quad \left|f(L) - \frac{1}{m(A)}\int_{\tilde{B}} f_{B \cap F}(L)\, d\mu(F)\right| \leqslant \varepsilon' f(X) = \varepsilon.$$

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$ soit h_p l'application de $\tilde{B}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $h_p(F) = f_{B \cap F}(L_p)$ et h l'application de $\tilde{B}$ dans $\mathbf{R}^n$ donnée par $h(F) = (h_p(F))_{p=1,\ldots,n}$. Ces applications sont mesurables. Il résulte du théorème de Hahn-Banach dans $\mathbf{R}^n$ et de la positivité de μ que

$$\left(\frac{1}{\mu(\tilde{B})}\int_{\tilde{B}} h_p(F)\, d\mu(F)\right)_{p=1,\ldots,n} \in \overline{\operatorname{conv}}\, h(\tilde{B}).$$

Il existe donc des fermés $F_1, \ldots, F_k$ de $\tilde{B}$ et des réels positifs $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$ et que

$$\forall p = 1, \ldots, n, \left| \frac{1}{\mu(\tilde{B})} \int_{\tilde{B}} h_p(F)\, d\mu(F) - \sum_{i=1}^{k} \beta_i h_p(F_i) \right| \leqslant \varepsilon \frac{m(A)}{\mu(\tilde{B})}.$$

En posant $K_i = F_i \cap B$, il vient, compte tenu de (13)

$$\forall p = 1, \ldots, n \qquad \left| f(L_p) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{K_i}(L_p) \right| \leqslant 2\varepsilon ,$$

où l'on a posé $\alpha_i = \dfrac{\mu(\tilde{B})}{m(A)} \beta_i$ (on a donc, ce qui sera utile $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \frac{\mu(\tilde{B})}{m(A)} = \frac{f(B)}{m(A)}\Big)$.

En remplaçant les α_i par des rationnels $\dfrac{p_i}{q}$ assez voisins on peut faire en sorte que

$$\left| f(L_p) - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{k} p_i f_{K_i}(L)) \right| \leqslant 3\varepsilon . \tag{14}$$

Prouvons maintenant que $G_0 = \{g \in G;\ \Delta(g) = 1\}$ n'est pas compact. Pour s et t dans G on a $tsG_0t^{-1} = sG_0$ (en effet si $g \in G_0$, on a $\Delta(s^{-1}tsgt^{-1}) = 1$, d'où $tsgt^{-1} \in sG_0$). Supposons G_0 compact. Soit V un compact de mesure positive non nulle. Alors VG_0 est un compact de mesure non nulle et stable par conjugaison, ce qui prouve que G est unimodulaire, donc $G = G_0$, ce qui est absurde puisque G n'est pas compact.

Il existe donc une famille $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,p_i}}$ de points de G_0 telle que pour deux points distincts quelconques t et t' de cette famille on ait $(X.B^{-1})t^{-1} \cap (X.B^{-1})t^{-1} = \varnothing$, et donc que si $L \subset X$ on ait $L.(t.B)^{-1} \cap L.(t'.B)^{-1} = \varnothing$. Posons

$$K = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,p_i}} t_{i,j}.K_i .$$

On a pour $L \subset X$

$$f_K(L) = \sum_{i=1}^{k} p_i f_{K_i}(L) .$$

Il en résulte que la capacité $\frac{1}{q} f_K$ vérifie

$$\forall p = 1, \ldots, n \qquad \left| f(L_p) - \frac{1}{q} f_K(L_p) \right| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui termine tout. c.q.f.d.

Lorsque $\mathcal{C}$ possède une base compacte Z, cette base est un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est dense, ce qui fournit des exemples naturels de tels simplexes. Lorsque E est dénombrable à l'infini et métrisable, $\mathcal{C}$, et donc aussi Z, sont métrisables, et Z est alors un exemplaire du simplexe de Poulsen. (Tous les simplexes métrisables dont l'ensemble des points extrémaux est dense sont isomorphes [10].) L'ensemble des points extrémaux de Z est un G_δ dense de Z, ce qui laisse peu d'espoir d'en décrire explicitement les éléments.

Les capacités de la forme αf_K ne sont pas bornées. Ainsi se pose la question de savoir si l'ensemble $\mathcal{E}_1$ des éléments extrémaux du simplexe

$$\mathcal{C}_1 = \{f \in \mathcal{C};\ \ f(E) \leqslant 1\}$$

est dense dans $\mathcal{C}_1$. La difficulté provient de ce que nous ne connaissons pas de famille assez vaste d'éléments de $\mathcal{E}_1$. (Les capacités de la forme $1 - e^{-f}$ sont très particulières.) Le résultat apporte une réponse positive dans les cas les plus importants.

Théorème 33 (AP). — *Supposons que* G *soit de la forme* $\mathbf{R}^\tau \times H$, *où* H *est un groupe localement compact qui possède un sous-groupe distingué compact* H′ *tel que le quotient* H/H′ *soit abélien, discret et semi-simple. Alors les capacités de la forme* $L \longrightarrow m'(\pi(L.K^{-1}))$, *où* K *est un compact de* E *et où* π *est l'homomorphisme canonique de* G *sur un quotient compact* G′ *de mesure de Haar normalisée* m', *sont faiblement denses (donc aussi vaguement denses) dans* $\mathcal{C}_1$, *(et elles sont extrémales d'après l'exemple* 26).

Démonstration. — Soient $f \in \mathcal{C}_1$, un réel $\varepsilon > 0$ et des compacts $L_1, \ldots.\ L_n$ de E. Soit X un compact de E contenant tous les L_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ et $Y = X.X^{-1}$. Désignons par η (resp. η') le morphisme canonique de H (resp. G) sur H/H'. Puisque Y est compact, $\eta'(Y)$ est fini. Soit H_1 un sous-groupe de type fini de H/H' contenant $\eta'(Y)$. Puisque H/H' est semi-simple on peut écrire $H/H' = H_1 \oplus H_2$ (H/H' étant abélien sera noté additivement). Puisque H_1 est abélien de type fini il est de la forme $H_3 \oplus Z^\sigma$ où H_3 est abélien fini. Il existe un entier s tel que

$$Y \subset [-s,s]^\tau \times \eta^{-1}(H_3 \oplus [-s,s[^\sigma \oplus \{0\}) .$$

Supposons par exemple $\sigma > 0$.

Soit r un entier et soit

$$A = [-r,r]^\tau \times \eta^{-1}(H_3 \oplus [-r,r[^\sigma \oplus \{0\}) .$$

Posons $a = r + s$; on a

$$YA \subset [-a,a]^\tau \times \eta^{-1}(H_3 \oplus [a,a[^\sigma \oplus \{0\})$$

donc si r a été choisi assez grand pour que $\left(1+\frac{s}{r}\right)^{\tau+\sigma} \leqslant 1+\varepsilon$, on a :

$$\frac{m(YA\setminus A)}{m(A)} \leqslant \left(1+\frac{s}{r}\right)^{\tau+\sigma} - 1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon(f(X))^{-1} .$$

Il résulte alors de la démonstration du théorème 32 qu'il existe des compacts $K_1, \ldots, K_k$ de $B = A^{-1}.X$, et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, avec $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \frac{f(B)}{m(A)} \leqslant \frac{1}{m(A)}$ tels que

$$1 \leqslant p \leqslant n \Longrightarrow \left| f(L_p) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{K_i}(L_p)\right| \leqslant 2\varepsilon .$$

On peut approcher les α_i par des rationnels $\frac{p_i}{q}$, avec $q > \frac{m(A)}{\varepsilon}$ de sorte que $\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q} \leqslant \frac{1}{m(A)}$ et que

$$(15) \qquad 1 \leqslant p \leqslant n \Longrightarrow \left| f(L_p) - \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q} f_{K_i}(L_p)\right| \leqslant 3\varepsilon .$$

Puisque $\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q} m(A) \leqslant 1$ et que $\frac{m(A)}{q} \leqslant \varepsilon$, il existe un entier b tel que $b \geqslant \sum_{i=1}^{k} p_i$ et que $\left|\frac{b}{q} m(\mathrm{A}) - 1\right| \leqslant \varepsilon$. Posons

$$\mathrm{G}' = (\mathbf{R}/2a\mathbf{Z})^{\tau} \oplus \mathrm{H}_3 \oplus (\mathbf{Z}/2\, a\mathbf{Z})^{\sigma-1} \oplus \mathbf{Z}/2\, ab\, \mathbf{Z}\,.$$

Soit m' la mesure de Haar normalisée de G' et π le morphisme canonique de G sur $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{G}''$, où

$$\mathrm{G}'' = (2a\mathbf{Z})^{\tau} \times \eta^{-1}(\{0\} \oplus ((2a\mathbf{Z})^{\sigma-1} \oplus 2\, ab\mathbf{Z}) \oplus \mathrm{H}_2)\,.$$

Désignons par $\dot{a}$ la classe de a dans $\mathbf{Z}/2\, ab\mathbf{Z}$. Soit y un élément de G tel que $\pi(y) = \{0\} \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus 2\dot{a}$.

Posons

$$\mathrm{K} = \bigcup_{j=1}^{\sum_{i \leqslant n} p_i} y^j . \mathrm{K}_{\varphi(j)}$$

où $\varphi(j) = l$ pour $\sum_{i<l} \alpha_i < j \leqslant \sum_{i \leqslant l} \alpha_i$.

Soient j et j' deux entiers distincts. Les images par π de $\mathrm{YA}\, y^{-j}$ et $\mathrm{YA}\, y^{-j'}$ sont disjointes (comme on voit sans peine) ce qui prouve que ces ensembles sont disjoints. Mais l'on a $\mathrm{YA}\, y^{-l} = \mathrm{X}.(y^l.\mathrm{B})^{-1}$. Pour $p \leqslant n$ les deux ensembles $\mathrm{L}_p.(y^j.\mathrm{K}_{\varphi(j)})^{-1}$ et $\mathrm{L}_p.(y^{j'}.\mathrm{K}_{\varphi(j')})^{-1}$ sont donc disjoints. Il résulte donc de (15) et de la définition de K que

$$1 \leqslant p \leqslant n \Longrightarrow \left|f(\mathrm{L}_p) - \frac{1}{q}\, m(\mathrm{L}_p.\mathrm{K}^{-1})\right| \leqslant 3\varepsilon\,.$$

De plus π est injective sur $\mathrm{X}.\mathrm{K}^{-1}$ sur $\mathring{\mathrm{A}}$, ce qui montre que

$$m(\mathrm{L}_p.\mathrm{K}^{-1}) = m(\mathrm{A})\, \frac{m'(\pi(\mathrm{L}_p.\mathrm{K}^{-1}))}{m'(\pi(\mathrm{A}))} = bm(\mathrm{A})m'(\pi(\mathrm{L}_p.\mathrm{K}^{-1}))\,.$$

Puisque $\left|\frac{bm(\mathrm{A})}{q} - 1\right| \leqslant \varepsilon$ on a

$$1 \leqslant p \leqslant n \Longrightarrow |f(\mathrm{L}_p) - m'(\pi(\mathrm{L}_p.\mathrm{K}^{-1}))| \leqslant 4\varepsilon\,.$$

La preuve de ce cas est terminée. La preuve du cas où H/H' est un groupe de torsion non compact, et celle du cas où $\tau > 0$ sont assez semblables et laissées au lecteur. c.q.f.d.

Il est intéressant de caractériser parmi toutes les capacités extrémales celles qui sont de la forme αf_{K}. Une telle capacité vérifie $f_K(A.L) = m(A(L.K^{-1})) \geqslant m(Ax)$ si $x \in K.K^{-1}$. Si G est unimodulaire on a donc $f_K(A.L) \geqslant m(A)$. Le théorème suivant est en quelque sorte la réciproque de ce résultat. Il fournit l'occasion d'une nouvelle application de la méthode du théorème 32.

Théorème 34 (AP). — *Supposons que G soit moyennable et unimodulaire, et qu'il existe un compact Z de E tel que $E = G.Z$. Soit f une capacité vérifiant la condition suivante*

$$(16) \qquad \forall L \in \mathcal{K}(E), \quad \exists a > 0, \quad \forall A \in \mathcal{K}(G), \quad f(A.L) \geqslant am(A).$$

Il existe alors un compact U de E tel que la mesure représentative μ de f sur $\mathcal{F}(E)$ charge $\mathcal{K}(U)$. De plus si f est extrémale, elle est de la forme αf_K.

Démonstration. — Soit V un voisinage compact de l'unité de G tel que $m(V) > 1$ et soit $L = V.Z$. Soit X un compact de G contenant L et A un compact de G tel que

$$(17) \qquad \frac{m((X.X^{-1})A \setminus A)}{m(A)} \leqslant \inf\left(\frac{f(L)}{f(X)}, \frac{a}{4f(L)}\right).$$

Si l'on pose $B = A^{-1}.X$ la condition (13) implique

$$(18) \qquad \frac{1}{m(A)} \int_{\tilde{B}} f_{B \cap F}(L)\, d\mu(F) \leqslant 2f(L).$$

Pour tout fermé F de E, soit $n(F)$ (resp. $n_B(F)$, $n_X(F)$) le suprémum (éventuellement infini) des entiers n tels qu'il existe n points de E (resp. de $\mathring{B}$, de $\mathring{X}$) $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$1 \leqslant i,j \leqslant n, \qquad i \neq j \Longrightarrow L.x_i^{-1} \cap L.x_j^{-1} = \varnothing.$$

Tout point x de E s'écrit sous la forme $s.z$, où $s \in G$ et $z \in Z$. On a donc

$$L.x^{-1} = L.\{s.z\}^{-1} = \{t \in G; ts.z \in L\} \supset \{t \in G; ts \in V\} = Vs^{-1}.$$

Puisque G est unimodulaire on a $m(L.x^{-1}) \geqslant 1$. On a donc $f_{B \cap F}(L) \geqslant n_B(L)$. Remarquons de plus que $\mathring{B}$ et $\mathring{X}$ étant ouverts les fonctions $n(F)$, $n_B(F)$, $n_X(F)$ sont s.c.i., donc mesurables. La condition (18) implique que

$$\frac{1}{m(A)}\int_{\tilde{B}} n_B(F)\, d\mu(F) \leqslant 2f(L) .$$

On a donc, pour tout entier N

$$\frac{N}{m(A)}\,\mu(\{F \in \tilde{B};\quad n_B(F) \geqslant N\}) \leqslant 2f(L) .$$

Or on a

$$\mu(\tilde{B}) = f(B) = f(A^{-1}.X) \geqslant f(A^{-1}.L) \geqslant am(A^{-1}) = am(A)$$

par hypothèse et puisque G est unimodulaire. D'où

$$N\mu(\{F \in \tilde{B},\quad n_B(F) \geqslant N\}) \leqslant \frac{2f(L)}{a}\,\mu(\tilde{B}) .$$

Choisissons $N \geqslant \dfrac{4f(L)}{a}$ et posons $Q = \{F \in \tilde{B}; n_B(F) < N\}$.
On a

$$\mu(Q) \geqslant \mu(\tilde{B}) - \mu(\{F \in \tilde{B};\ n_B(F) \geqslant N\}) \geqslant \frac{1}{2}\,\mu(\tilde{B}) \geqslant \frac{a}{2}\,m(A) .$$

L'ensemble

$$T_X = \{F \in \mathscr{F}(E);\quad F \cap L \neq \varnothing,\quad n_X(F) \leqslant N - 1\}$$

est un compact de $\mathscr{F}(E)$. Évaluons sa mesure; posons

$$C = (X.X^{-1})A .$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{F\in Q} m(C \cap L.F^{-1})\, d\mu(F) &= \int_{\substack{t\in C,\ F\in Q\\ F\cap t^{-1}.L\neq\varnothing}} d\mu(F)\, dm(t)\\ &= \int_{t\in C} \mu(Q \cap t^{-1}.\tilde{L})\, dm(t)\\ &= \int_{t\in C\setminus A} \mu(Q \cap t^{-1}.\tilde{L})\, dm(t) + \int_A \mu(Q \cap t^{-1}.\tilde{L})\, dm(t) .\end{aligned}$$

Pour $t \in A$ on a $t^{-1}.\mathring{X} \subset \mathring{B}$, d'où :

$$Q \cap t^{-1}.\tilde{L} \subset \{F;\ n_X(t.F) \leqslant N \quad \text{et} \quad t.F \cap L \neq \varnothing\} = t^{-1}.T_X$$

d'où enfin

$$\mu(Q \cap t^{-1}.\tilde{L}) \leqslant \mu(T_X) .$$

Pour $t \in C \setminus A$ on a $\mu(Q \cap t^{-1}.\tilde{L}) \leqslant \mu(\tilde{L}) = f(L)$. On a donc

$$\int_{F \in Q} m(C \cap L.F^{-1})\, d\mu(F) \leqslant m(C \setminus A) f(L) + m(A)\mu(T_X) .$$

Tout fermé F de Q rencontre B en au moins un certain point b . On a $L.b^{-1} \subset X.B^{-1} = C$, et comme nous l'avons vu $m(L.b^{-1}) \geqslant 1$.

On a donc

$$\frac{a}{2} m(A) \leqslant \mu(\tilde{B}) \leqslant m(C \setminus A) f(L) + m(A)\mu(T_X)$$

ce qui donne, compte tenu de (17)

$$\mu(T_X) \geqslant \frac{a}{2} - \frac{m(C \setminus A)}{m(A)} f(L) \geqslant \frac{a}{4}.$$

Posons

$$T = \{F \in \mathscr{F}(E);\quad F \cap L \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad n(F) \leqslant N\} .$$

On a $T = \bigcap_{X \in \mathscr{K}(E)} T_X$, d'où puisque ces ensembles sont compacts, $\mu(T) \geqslant \frac{a}{4}$ · Il existe donc un entier $n > 0$ tel que l'ensemble mesurable

$$T' = \{F \in \mathscr{F}(E);\quad F \cap L \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad n(F) = n\}$$

soit de mesure non nulle.

Si $F \in T'$, il existe des points $y_1, \ldots, y_n$ de E tels que les ensembles $L.y_i^{-1}$ soient deux à deux disjoints, donc des voisinages compacts W_i des points y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que les ensembles $L.W_i^{-1}$ soient deux à deux disjoints, ce qui montre que

$$\forall p \leqslant n, \qquad F \cap W_p \neq \varnothing \Longrightarrow n(F) \geqslant n .$$

D'autre part si une réunion d'ouverts recouvre un ensemble de mesure non nulle, l'intersection de l'un de ces ouverts et de cet ensemble est de mesure non nulle. On peut donc supposer que

$$\mu(\{F \in T';\quad \forall p \leqslant n ,\quad F \cap W_p \neq \varnothing \}) > 0 .$$

Mais on a aussi

$$n(\mathrm{F}) = n\,, \qquad \mathrm{F} \cap \mathrm{W}_p \neq \varnothing \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant p \leqslant n$$

$$\Longrightarrow \mathrm{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{L}.\mathrm{W}_i^{-1})^{-1}.\mathrm{L} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{U}$$

puisque pour $x \notin \mathrm{U}$ et $1 \leqslant p \leqslant n$ on a $\mathrm{L}.x^{-1} \cap \mathrm{L}.\mathrm{W}_p^{-1} = \varnothing$. Nous avons donc montré que

$$\mu(\{\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{E});\quad \mathrm{F} \subset \mathrm{U}\}) > 0\,,$$

ce qui prouve la première assertion puisque U est compact.

Supposons maintenant f extrémale. L'ensemble

$$\mathrm{R} = \{t.\mathrm{F};\quad t \in \mathrm{G}\,,\quad \mathrm{F} \subset \mathrm{U}\} \subset \mathscr{F}(\mathrm{E})$$

est invariant et est fermé, comme il résulte sans peine du fait que G agit proprement sur E. Puisque μ est extrémale, et que sa restriction à R n'est pas nulle, μ est portée par R. Mais l'action de G sur R est propre et il résulte alors du théorème 5 que μ est portée par l'orbite d'un élément K de R, ce qui est le résultat souhaité. c.q.f.d.

Remarques. — 1) Comme le prouve l'exemple 25, il est nécessaire de supposer G unimodulaire.

2) Prouvons que le théorème 34 peut se trouver en défaut si on ne suppose pas l'existence d'un compact Z tel que $\mathrm{G}.\mathrm{Z} = \mathrm{E}$.

Choisissons $\mathrm{G} = \mathbf{Z}$ opérant par translation selon la première composante sur $\mathrm{E} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Désignons par π la projection de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ sur la première composante, et soit f la capacité donnée par $f(\mathrm{K}) = \mathrm{card}(\pi(\mathrm{K}))$. On a

$$f(\mathrm{A}.\mathrm{X}) \geqslant \mathrm{card}\ \mathrm{A}\,,$$

et pourtant f est extrémale sans être de la forme αf_{K}.

3) On peut montrer également que si G n'est pas supposé moyennable, le théorème 34 n'est plus exact, mais nous n'avons pu déterminer si la validité de ce théorème caractérise les groupes moyennables.

4) La situation typique où s'applique le théorème 34 est la suivante : $\mathrm{E} = \mathrm{G}/\mathrm{H}$ (H compact) et $f(\mathrm{K}) \geqslant am'(\mathrm{K})$ pour $\mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$, où m' est une mesure invariante sur E.

En effet on a alors, pour $X \in \mathscr{K}(E)$ et $A \in \mathscr{K}(G)$, et si π désigne la projection canonique de G sur E :

$$f(A.X) \geqslant am'(A.X) = bm(\pi^{-1}(A.X)) = bm(A.\pi^{-1}(X)) \geqslant bm(A).$$

Comme application de ces résultats, étudions la nature topologique de certains sous-ensembles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1$.

Supposons E métrisable et dénombrable à l'infini (puisque G agit proprement sur E il est aussi dénombrable à l'infini). Le cône $\mathcal{A}$ est alors métrisable.

Proposition 35 (AP). — *L'ensemble des capacités vérifiant les conditions (i) à (iv) du théorème 24 est un G_δ dense de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. — Soit (V_n) une base de voisinages ouverts de l'origine de $\mathcal{A}$. Pour tout entier n posons

$$C_n = \{f \in \mathcal{A}\,;\, \exists h \in \mathcal{A}\,;\, h \notin V_n\,,\, h \in \mathcal{A}_1\,,\, h \leqslant f\} = \mathcal{A} + \mathcal{A}_1 \setminus V_n\,.$$

Cet ensemble est fermé puisque $\mathcal{A}$ est fermé et l'ensemble $\mathcal{A}_1 \setminus V_n$ compact. Ce fermé est d'intérieur vide d'après le théorème 32. Le complémentaire de la réunion des C_n est l'ensemble des capacités ne majorant aucune capacité bornée non nulle et c'est un G_δ dense. c.q.f.d.

Remarque. — Si U_n est une suite de compacts de G telle que pour tout compact L de G on ait $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m(LU_n \setminus U_n)}{m(U_n)} = 0$, alors les capacités qui vérifient les conditions (i) à (iv) du théorème 24 sont également celles vérifiant la condition suivante, qui précise l'analogie avec le « mélange faible » de la théorie ergodique

$$\forall K \in \mathscr{K}(E)\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m(U_n)} \int_{U_n} f(K \cup t.K)\, dm(t) = 0\,.$$

Proposition 36 (AP). — *Supposons que G soit dénombrable à l'infini et de la forme décrite dans l'énoncé du théorème 30. L'ensemble des capacités vérifiant la condition*

$$\forall K \in \mathscr{K}(E)\,, \qquad \lim_{t\to\infty} f(K \cup t.K) = 2f(K)$$

est maigre dans $\mathcal{A}$.

Démonstration. — Soient μ la mesure représentative de f et $\psi \in \mathscr{C}_K(\mathscr{F}(E))$ non nulle. On a

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathscr{F}(E)} \psi(F)\psi(t.F)\, d\mu(F) = 0 .$$

Soit (G_n) une suite de compacts de G telle que $\mathscr{K}(G) = \bigcup_n \underset{\sim}{G}_n$. Il suffit de prouver que pour chaque n le fermé

$$\left\{ f \in \mathfrak{A};\quad t \notin G_n \Longrightarrow \int_{\mathscr{F}(E)} \psi(F)\psi(t.F)\, d\mu(F) \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathscr{F}(E)} \psi^2(F)\, d\mu(F) \right\}$$

est d'intérieur vide. Soient V un ouvert contenu dans ce fermé et $f \in V$. Pour n assez grand la capacité

$$K \longrightarrow n\left(1 - e^{-\frac{f(K)}{n}}\right)$$

appartient à V.

D'après le théorème 33 l'ouvert V contient alors une capacité de la forme ng, où g est du type décrit dans ce théorème. La conclusion résulte alors du fait, aisément vérifié, que si ν est la mesure représentative de g, et t est un élément de G tel que $\pi(t)$ soit l'élément neutre de G$'$, on a $F = t.F$ pour ν presque tout F donc aussi $\psi(t.F) = \psi(F)$ pour ν presque tout F. c.q.f.d.

La preuve de la proposition suivante est analogue à la précédente; elle est laissée au lecteur.

Proposition 37. — *Supposons* G *dénombrable à l'infini et de la forme décrite dans le théorème* 32. *Alors l'ensemble des capacités de* $\mathfrak{A}_1$ *vérifiant la condition*

$$\forall K,\quad L \in \mathscr{K}(E),\quad \lim_{t\to\infty} f(K \cup t.L) = f(K) + f(L) - f(K)f(L)$$

est maigre dans $\mathfrak{A}_1$.

Problème. — Supposons E métrisable et dénombrable à l'infini. Soit U_n une suite de $\mathscr{K}(G)$ telle que pour tout compact L de G on ait $\lim \dfrac{m(LU_n \setminus U_n)}{m(U_n)} = 0$. L'ensemble des capacités f de $\mathfrak{A}_1$ vérifiant la condition :

$$\forall K, \qquad L \in \mathscr{K}(E),$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{m(U_n)} \int_{U_n} |f(K) + f(L) - f(K \cup t.L) - f(K)f(L)| \, dm(t) = 0$$

est-il un résiduel de $\mathfrak{A}_1$?

7. Représentation des capacités par des moyennes.

Nous allons montrer que lorsque G est moyennable, les capacités décrites dans les exemples 29 et 30 constituent le cas général dans bien des situations.

Proposition 38. — *Soit* G *un groupe moyennable et* $(U_i)_{i \in I}$ *une famille de compacts de* G, *indexée par l'ensemble filtrant croissant* I, *telle que*

$$(18) \qquad \forall L \in \mathscr{K}(G), \qquad \mathit{lim}_{I} \frac{m(LU_i \setminus U_i)}{m(U_i)} = 0 .$$

a) Supposons que G *opère continûment sur un espace localement compact* E, *et soit* μ *un point extrémal non nul du simplexe* $\mathscr{S}_1$ *des mesures invariantes de masse* $\leqslant 1$. *Alors, pour toute fonction* $\varphi \in \mathscr{C}_K(E)$ *on a, au sens de* $L^2(\mu)$:

$$(19) \quad \mathit{lim}_{I} \left(\frac{1}{m^2(U_i)} \int_{s,t \in U_i} \varphi(st^{-1}.x) \, dm(s) \, dm(t) \right) = \mu(\varphi)$$

$$(20) \qquad \mathit{lim}_{I} \frac{1}{m(U_i)} \int_{s \in U_i} \varphi(s.x) \, dm(s) = \mu(\varphi) .$$

b) Si de plus G *est dénombrable à l'infini,* E *dénombrable à l'infini et métrisable, il existe une moyenne* $\check{m}$ *sur* G *et un point* x *de* E *tels que :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_K(E), \qquad \mu(\varphi) = \check{m}(t \longrightarrow \varphi(t.x)) .$$

On peut imposer à $\check{m}$, *ou bien d'être extrémale dans le simplexe des moyennes topologiquement invariantes à droite et à gauche, (nous dirons bilatères) ou bien d'être extrémale dans le simplexe des moyennes.*

Démonstration. — Le premier point est un cas très particulier du « Théorème de Von Neumann généralisé » ([1] théorème 3, ou [6] corollaire 3-4) Nos hypothèses n'étant pas exactement les mêmes, nous allons donner un argument direct beaucoup plus simple.

Il résulte du lemme 23 que pour toute moyenne $\check{m}$ et toutes fonctions φ,φ' de $\mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$ on a

$$(21)\qquad \check{m}\Big(t \longrightarrow \int_{\mathrm{E}} \varphi(x)\varphi'(t.x)\,d\mu(x)\Big) = \mu(\varphi)\mu(\varphi')\,.$$

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur I contenant tous les ensembles de la forme $\{i \in \mathrm{I};\ i \geqslant j\}$. Pour $h \in \mathscr{C}_b(\mathrm{G})$ posons

$$\check{m}_{\mathscr{U}}(h) = \lim_{\mathscr{U}} m(\mathrm{U}_i)^{-4} \int_{s,t,u,v \in \mathrm{U}_i} h(st^{-1}vu^{-1})\,dm(s)\,dm(t)\,dm(u)\,dm(v)\,.$$

Il résulte de (18) et d'un calcul direct que c'est une moyenne, et puisque (21) est valable pour chaque $\check{m}_{\mathscr{U}}$ on a

$$\lim_{\mathrm{I}} m(\mathrm{U}_i)^{-4} \int_{s,t,u,v \in \mathrm{U}_i} \varphi(x)\varphi'(st^{-1}vu^{-1}.x)\,dm(s)\,dm(t)\,dm(u)\,dm(v)\,d\mu(x) = \mu(\varphi)\mu(\varphi')\,.$$

Puisque μ est invariante ceci donne, en prenant $\varphi' = \varphi$:

$$(22)\qquad \lim_{\mathrm{I}} m(\mathrm{U}_i)^{-4} \int_{s,t,u,v \in \mathrm{U}_i} \varphi(uv^{-1}.x)\varphi(st^{-1}.x)\,dm(s)\,dm(t)\,dm(u)\,dm(v)\,d\mu(x)$$
$$= \lim_{\mathrm{I}} \int \Big[m(\mathrm{U}_i)^{-2} \int_{s,t \in \mathrm{U}_i} \varphi(st^{-1}.x)\,dm(s)\,dm(t)\Big]^2 d\mu(x) = (\mu(\varphi))^2.$$

D'autre part, puisque μ est invariante on a

$$(23)\qquad \int \Big[(m(\mathrm{U}_i)^{-2} \int_{s,t \in \mathrm{U}_i} \varphi(st^{-1}.x)\,dm(s)\,dm(t)\Big]\,d\mu(x)$$
$$= m(\mathrm{U}_i)^{-2} \int_{s,t \in \mathrm{U}_i} dm(s)\,dm(t)\,\Big(\int \varphi(st^{-1}.x)\,d\mu(x)\Big) = \mu(\varphi)\,.$$

L'égalité (19) se déduit de (22) et (23) par un calcul direct immédiat. La preuve de (20) est analogue (en plus simple).

b) Puisque E est métrisable et dénombrable à l'infini, $\mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$ est séparable pour la norme uniforme. Soit (φ_n) une suite dense de $\mathscr{C}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E})$ pour cette norme.

Puisque G est dénombrable à l'infini, on peut supposer que $I = \mathbf{N}$. Il résulte de (19) qu'il existe une suite croissante (n_p) d'entiers telle que

$$q \leqslant p, \quad n \geqslant n_p \Longrightarrow \left\| m(U_n)^{-2} \int_{s,t \in U_n} \varphi_q(st^{-1}.x)\, dm(s)\, dm(t) - \mu(\varphi_q) \right\|_2 \leqslant 2^{-p}.$$

On en déduit que pour tout q :

$$\lim_{p \to \infty} m(U_{n_p})^{-2} \int_{s,t \in U_{n_p}} \varphi_q(st^{-1}.y) = \mu(\varphi_q)$$

pour μ presque tout y.

Il existe un point x de E tel que

$$(24) \quad \forall q, \quad \lim_{p \to \infty} m(U_{n_p})^{-2} \int_{s,t \in U_{n_p}} \varphi_q(st^{-1}.x)\, dm(s)\, dm(t) = \mu(\varphi).$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbf{N}$ porté par l'ensemble des n_p. Pour $h \in \mathscr{C}_b(G)$ posons

$$\check{m}(h) = \lim_{\mathcal{U}} m(U_n)^{-2} \int_{s,t \in U_n} h(st^{-1})\, dm(s)\, dm(t).$$

Il résulte de (18) que $\check{m}$ est une moyenne bilatère. Il résulte de (24) et de la densité de la suite (φ_q) que

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_K(E), \quad \check{m}(t \longrightarrow \varphi(t.x)) = \mu(\varphi).$$

Le point x étant fixé la correspondance $\check{m} \longrightarrow \mu$ définie par la formule précédente est affine continue, et envoie le simplexe des moyennes (resp. bilatères) dans $\mathscr{S}_1$. Il en résulte que l'image réciproque de μ est une face fermée, donc contient un point extrémal. c.q.f.d.

Traduisons maintenant la proposition 38 dans le langage des capacités.

THÉORÈME 39. — *Supposons que* G *moyennable soit dénombrable à l'infini et agisse continûment sur* E , E *étant métrisable et dénombrable à l'infini. Alors pour toute capacité* $f \in \mathscr{E}$ *telle que* $f(E) = 1$ *il existe une moyenne* $\check{m}$ *sur* G *et un fermé* F *de* E *tels que*

$$\forall K \in \mathscr{K}(E), \quad f(K) = \operatorname{Inf}\{\check{m}(L.F^{-1});\ K \in \mathscr{K}(E),\ K \subset \mathring{L}\}.$$

On peut supposer $\check{m}$ *ou bien extrémale dans le simplexe des moyennes bilatères, ou bien extrémale dans le simplexe des moyennes.*

Nous allons préciser considérablement ce résultat lorsque G agit proprement sur E, en montrant notamment que l'on peut choisir F indépendant de f.

THÉORÈME 40 (AP). — *Supposons* G *moyennable et agissant proprement sur* E. *Supposons de plus qu'il existe une suite* (X_n) *de compacts séparables de* E *tels que*

$$E = \bigcup_n G.X_n \qquad \text{et} \qquad X_n \subset \mathring{X}_{n+1}.$$

Il existe alors un fermé F *de* E *tel que pour toute capacité* $f \in \mathfrak{C}_1$ *il existe une moyenne* $\check{m}$ *vérifiant*

$$\forall K \in \mathscr{K}(E), \qquad f(K) = \operatorname{Inf}\,\{\check{m}(L.F^{-1});\ L \in \mathscr{K}(E),\ K \subset \mathring{L}\}.$$

De plus si f *est extrémale on peut supposer* $\check{m}$ *extrémale dans le simplexe des moyennes.*

Démonstration. — Construisons tout d'abord F. Soit G' un sous-groupe ouvert dénombrable à l'infini de G contenant les compacts $X_n.X_n^{-1}$. Soit $E' = \bigcup_n G'.X_n$. Puisque $X_n \subset \mathring{X}_{n+1}$, E' est un ouvert dénombrable à l'infini de E, qui peut se recouvrir par une quantité dénombrable de translatés des X_n et est donc séparable. Soit D' une partie dénombrable dense de E.

Écrivons G comme une réunion disjointe $G = \bigcup_{i\in I} t_i.G'$. On vérifie sans peine que la réunion $E = \bigcup_{i\in I} t_i.E'$ est aussi disjointe. Soit $D = \bigcup_{i\in I} t_i.D'$.

Soit (Y_n) une suite de compacts de G' telle que $Y_n \subset \mathring{Y}_{n+1}$ et $G' = \bigcup_n Y_n$. Tout compact de G est contenu dans une réunion finie $\bigcup_{l=1}^{n} t_{i_l}Y_{n_l}$. Désignons par $\mathscr{U}$ l'ensemble de ces réunions et par $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties finies de D

(y compris la partie vide). Prouvons qu'il existe un fermé F de E possédant la propriété suivante :
« Pour tout $U \in \mathscr{U}$ et tout $P \in \mathscr{P}$ contenu dans U, il existe un translaté à gauche de F qui rencontre U en P ».

Examinons d'abord le cas où I est fini. On peut alors supposer $G = G'$. On énumère les couples (P, Y_n) pour $P \in \mathscr{P}$ et $P \subset Y_n$ et l'on pose $F = \cup t_{P,n}.P$ où la suite $t_{P,n}$ est construite par récurrence de sorte que si (P, Y_n) est le $k^{\text{ième}}$ couple énuméré, $t_{P,n}.Y_n$ ne rencontre ni Y_k ni aucun des fermés $t_{P',m}Y_m$ pour les couples (P', m) précédemment énumérés.

Supposons maintenant I infini. Alors $\mathscr{P} \times \mathscr{U}$ est de même cardinal que I, et l'on procède par une construction transfinie analogue à la précédente.

Pour $\varphi \in \mathscr{C}_K^+(E)$, définissons :

$$\tilde{\varphi} \in \mathscr{C}_K^+(\mathscr{F}(E)) \quad \text{par} \quad \tilde{\varphi}(H) = \sup_H \varphi ,$$
$$\check{\varphi} \in \mathscr{C}_b(G) \qquad \text{par} \quad \check{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t.F) .$$

Soit f une capacité extrémale telle que $f(E) = 1$ et μ sa mesure représentative. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathscr{C}_K^+(E)$ et ε un réel > 0. Reprenons les notations de la proposition 38. D'après la première partie de cette proposition, et puisque $\mu(\tilde{\varphi}) = \hat{f}(\varphi)$ pour $\varphi = \mathscr{C}_K^+(E)$ on a :

$$\forall i \in I, \qquad \exists j(i) > i , \qquad \exists H_i \in \mathscr{F}(E);$$
$$k \leqslant p \Longrightarrow \left| m(U_{j(i)})^{-1} \int_{s \in U_{j(i)}} \tilde{\varphi}_k(s.H_i)\, dm(s) - \hat{f}(\varphi_k) \right| < \varepsilon .$$

Soit K un compact de E contenant le support de toutes les φ_k. Sur le compact $L = U_{j(i)}.K$, les applications $x \longrightarrow s.x (s \in U_{j(i)})$ sont équi-uniformément continues comme il résulte de l'uniforme continuité sur tout compact de $G \times E$ de l'application $(s,x) \longrightarrow s.x$. Les fonctions $\varphi_k(k \leqslant p)$ étant uniformément continues, les fonctions $x \longrightarrow \varphi_k(s.x)$ sont équi-uniformément continues sur L pour $k \leqslant p$, $s \in U_{j(i)}$. Il existe donc une partie finie P de D telle que :

$$\forall k \leqslant p , \qquad \forall s \in U_{j(i)} ,$$
$$\left| \sup_{x \in P} \varphi_k(s.x) - \sup_{x \in H_i} \varphi_k(s.x) \right| \leqslant \varepsilon . m(U_{i(j)})^{-1} .$$

La propriété fondamentale de F montre qu'il existe $g_i \in \mathrm{G}$ tel que $(g_i.\mathrm{F}) \cap \mathrm{L} = \mathrm{P}$. On a alors, pour $k \leqslant p$, et $s \in \mathrm{U}_{j(i)}$

$$\tilde{\varphi}_k(s.\mathrm{P}) = \tilde{\varphi}_k(s.(g_i.\mathrm{F})) = \tilde{\varphi}_k((sg_i).\mathrm{F}) .$$

Et l'on a donc pour $k \leqslant p$

$$(25) \quad |m(\mathrm{U}_{j(i)})^{-1} \int_{s \in \mathrm{U}_{j(i)}} \tilde{\varphi}_k(sg_i.\mathrm{F})\, dm(s) - \hat{f}(\varphi_k)| < 2\varepsilon .$$

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur I contenant tous les ensembles de la forme $\{i \in \mathrm{I};\ i \geqslant j\}$. Pour $h \in \mathscr{C}_b(\mathrm{G})$ définissons

$$\check{m}(h) = \lim_{\mathscr{U}} m(\mathrm{U}_{j(i)})^{-1} \int_{s \in \mathrm{U}_{j(i)}} h(sg_i)\, dm(s)$$

c'est une moyenne et (25) montre que l'on a

$$(26) \qquad k \leqslant p \Longrightarrow |\hat{f}(\varphi_k) - \check{m}(\check{\varphi}_k)| \leqslant 2\varepsilon .$$

Si l'on suppose maintenant que $f = 0$, on peut encore choisir $\check{m}$ vérifiant (26). Il suffit pour cela de poser $\mathrm{U}_{j(i)} = \mathrm{U}_i$, puis de choisir g_i tel que $g_i.\mathrm{F} \cap (\mathrm{U}_i.\mathrm{K}) = \varnothing$.

L'application du simplexe des moyennes dans $\mathcal{A}_1$ définie par la formule du théorème 40 est continue comme nous l'avons montré dans l'exemple 28. Son image est donc un convexe compact. Il résulte de (26) que cette image contient tous les points extrémaux de $\mathcal{A}_1$ donc n'est autre que $\mathcal{A}_1$. La dernière assertion découle d'un raisonnement déjà effectué.

c.q.f.d.

L'existence d'une suite de (X_n) de compacts séparables de E tels que $\mathrm{E} = \bigcup_n \mathrm{G}.\mathrm{X}_n$ sert en quelque sorte à assurer « qu'il y a assez de place à l'infini par rapport au nombre de compacts de E ».

Choisissons par exemple $\mathrm{G} = \mathbf{Z}$ agissant sur $\mathrm{E} = \mathbf{Z} \times \mathrm{J}$ par translation selon la première coordonnée (E est muni de la topologie discrète). Supposons $\operatorname{card} \mathrm{J} > \operatorname{card} \mathbf{R}$.

Soit la capacité donnée par $f(\mathrm{K}) = 1 - 2^{-\operatorname{card}(\mathrm{K})}$ pour $\mathrm{K} \in \mathscr{K}(\mathrm{E})$. Si F est un fermé de E il existe α et β dans J tels que $\mathrm{F} \cap (\mathbf{Z} \times \{\alpha\})$ et $\mathrm{F} \cap (\mathbf{Z} \times \{\beta\})$ soient de la forme $\mathrm{H} \times \{\alpha\})$ et $\mathrm{H} \times \{\beta\}(\mathrm{H} \subset \mathbf{Z})$. Si $\mathrm{K} = \{(0, \alpha), (0, \beta)\}$

et $L = \{(0, \alpha)\}$ on a $f(K) \neq f(L)$; cependant

$$K.F^{-1} = \{n \in \mathbf{Z};\ \ 0 \in n + H\} = L.F^{-1}.$$

Il en résulte que pour toute moyenne $\check{m}$ sur $\mathbf{Z}$ on a $\check{m}(K.F^{-1}) = \check{m}(L.F^{-1})$, et ceci montre que le théorème 40 n'est pas valable dans ce cas.

Prenons maintenant $E = G = \{0,1\}^J \times \mathbf{Z}$. On peut normaliser m de sorte que $m(\{0, 1\}^J \times \{0\}) = 1$. On a alors pour toute moyenne $\check{m}$ sur G et toute $h \in \mathscr{C}_b(G)$

$$\check{m}(h) = \check{m} \int_{y \in \{0,1\}^J \times \{0\}} h(x + y)\, dm(y)\,.$$

L'intégrale étant constante sur chaque ensemble $\{0, 1\}^J \times \{n\}$ cette formule montre que l'application η de l'ensemble des moyennes sur E dans celui des moyennes sur $\mathbf{Z}$ donnée par $\eta(\check{m})(h) = \check{m}(\theta(h))$, (où pour $h \in \mathscr{C}_b(\mathbf{Z})$, $\theta(h)$ désigne l'élément de $\mathscr{C}_b(G)$ égal à $h(n)$ sur $\{0, 1\}^j \times \{n\})$, est une injection. Il y a donc au plus $2^{\operatorname{card} \mathbf{R}}$ moyennes sur G . Mais il y a au moins card J capacités distinctes, par exemple les capacités f_{K_j} où $K_j = \{x \in \{0,1\}^J;\ x(j) = 0\}$. Ainsi la représentation du théorème 40 ne peut s'effectuer si J est grand.

Il existe d'autres cas où la représentation du théorème 40 peut s'effectuer. C'est le cas par exemple (avec une preuve similiaire) s'il existe une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de compacts de E vérifiant les condtions

— $\forall \alpha \in A$, $\exists \beta \in A'$ $X_\alpha \subset \mathring{X}_\beta$,

— $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} G.X_\alpha = E$,

et une partie dense B de $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ telle que si G' désigne le sous-groupe de G engendré par les compacts $X_\alpha . X_\alpha^{-1}$ on ait card $G/G' \geqslant$ sup (card A , card B) .

Problèmes. — Pour appliquer le théorème 19 et affirmer que f est extrémale, il faut supposer $\check{m}$ extrémale dans le simplexe des moyennes. Il ne suffit pas de supposer $\check{m}$ extrémale dans le simplexe des moyennes bilatères. Est-il possible dans la partie b de la proposition 38 d'imposer à $\check{m}$ d'être bilatère et extrémale dans le simplexe des moyennes invariantes à gauche?

Est-il possible dans le théorème 40 d'imposer à $\check{m}$ d'être bilatère?

On pourrait espérer que le théorème 40 permette de trancher la question de savoir si l'ensemble des points extrémaux de $\mathfrak{A}_1$ est dense dans $\mathfrak{A}_1$. Il n'en est hélas rien puisque dans le simplexe des moyennes les points extrémaux ne sont pas denses [15].

Notre prochain résultat est à l'exemple 30 ce que le précédent est à l'exemple 29. Conservons les hypothèses du théorème 40 et soit toujours F le fermé construit dans la preuve de ce théorème. Soient

$$\begin{aligned} T_F &= \{H \in \mathscr{F}(G); \quad \exists K \in \mathscr{K}(E), \quad H \subset K.F^{-1}\}, \\ \mathscr{C}_F &= \{h \in \mathscr{C}_b(E); \quad \operatorname{supp} h \subset T_F\} \end{aligned}$$

et $\mathscr{M}_F$ le cône des moyennes (au sens de l'exemple 30) sur $\mathscr{C}_F$.

Théorème 41 (AP). — *Sous les hypothèses du théorème 40 l'application de $\mathscr{M}_F$ sur $\mathfrak{A}$ qui envoie $\check{m}$ sur f définie par*

$$\forall K \in \mathscr{K}(E), \qquad f(K) = \operatorname{Inf}\{\check{m}(L.F^{-1})\ ;\ L \in \mathscr{K}(E),\ K \subset \mathring{L}\},$$

est surjective. De plus si f est extrémale on peut imposer à $\check{m}$ d'être extrémale dans $\mathscr{M}_F$.

Démonstration. — Désignons par $\mathscr{J}$ l'ensemble des parties finies de $\mathscr{C}_K^+(E)$. Soient $(\varphi_k)_{k \leqslant p} \in \mathscr{J}$, ε un réel > 0 et $f \in \mathfrak{A}$. D'après le théorème 32 l'ensemble des capacités de la forme αf_k est dense dans $\mathfrak{A}$. Il existe donc $K \in \mathscr{K}(E)$ et $\alpha \in \mathbf{R}^+$ tels que

$$1 \leqslant k \leqslant p \Longrightarrow \left|\hat{f}(\varphi_k) - \alpha \int_G \sup_{t.K} \varphi_k \, dm(t)\right| \leqslant \varepsilon .$$

Le même argument d'uniforme continuité que dans la démonstration précédente montre qu'il existe une partie finie P de D telle que

$$1 \leqslant k \leqslant p \Longrightarrow \left|\hat{f}(\varphi_k) - \alpha \int_G \sup_{t.P} \varphi_k \, dm(t)\right| \leqslant \varepsilon .$$

Soient L la réunion des supports des φ_k et Y un compact de G contenant l'élément neutre. Soient $U = Y(L.P^{-1})$

et $V = Y^{-1}U$. Il existe un élément g de G tel que $g.F \cap V^{-1}.L = P$. Pour $t \in V$ on a donc

$$t.(g.F) \cap L = t.P \cap L .$$

Posons, pour $k \leqslant p$, $\check{\varphi}_k(t) = \sup_{t\cdot F} \varphi_k$. On a :

$$\int_G \sup_{t\cdot P} \varphi_k \, dm(t) = \int_{L\cdot P^{-1}} \sup_{t\cdot P} \varphi_k \, dm(t) = \int_U \sup_{t\cdot P} \varphi_k \, dm(t)$$
$$= \int_U \sup_{tg\cdot F} \varphi_k = \Delta^{-1}(g) \int_{Ug} \check{\varphi}_k(t) \, dm(t) .$$

En posant $\beta = \alpha\Delta^{-1}(g)$ on a donc

$$k \leqslant p \Longrightarrow \left| \hat{f}(\varphi_k) - \beta \int_{Ug} \check{\varphi}_k(t) \, dm(t) \right| \leqslant 2\varepsilon .$$

Ainsi, à chaque triplet $i = ((\varphi_k)_{k\leqslant p}, \varepsilon, Y)$ de

$$I = \mathscr{J} \times \mathbf{R}^+ \times \mathscr{K}'(G)$$

(où $\mathscr{K}'(G)$ désigne l'ensemble des compacts de G contenant l'élément neutre) on associe une forme linéaire positive ψ_i sur $\mathscr{C}_F$ donnée par

$$\forall h \in \mathscr{C}_F, \qquad \psi_i(h) = \beta_i \int_{U_i g_i} h(t) \, dm(t)$$

de sorte que

$$k \leqslant p \Longrightarrow |\hat{f}(\varphi_k) - \psi_i(\check{\varphi}_k)| \leqslant 2\varepsilon .$$

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur I contenant les ensembles de la forme $\{i \in I ; i \geqslant j\}$, où $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}'(G)$ sont ordonnés par inclusion, $\mathbf{R}^+$ par l'ordre inverse de l'ordre usuel et I par l'ordre produit.

Soit h une fonction de $\mathscr{C}_F$. Il existe un compact N de E tel que $N.F^{-1}$ contienne le support de h. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^+_K(E)$ telle que $\varphi \geqslant \|h\|_\infty$ sur N. On a alors $|h| \leqslant \check{\varphi}$. Puisque $\lim \psi_i(\check{\varphi}) = f(\varphi)$ est finie, et que $|\psi_i(h)| \leqslant \psi_i(|h|)$ la limite $\check{m}(h) = \lim_{\mathscr{U}} \psi_i(h)$ est finie. Cette formule définit une forme linéaire positive sur $\mathscr{C}_F$. Prouvons que c'est une moyenne. Pour $h \in \mathscr{C}_F$ soit $h_s \in \mathscr{C}_F$ définie par $h_s(t) = h(st)$. Soit $N \in \mathscr{K}(E)$ tel que le support de h soit contenu dans $N.F^{-1}$. On a

$$\psi_i(h_s) = \beta_i \int_{U_i g_i} h(st) \, dm(t) = \beta_i \int_{sU_i g_i} h(t) \, dm(t) .$$

Il existe une partie J de I appartenant à $\mathcal{U}$ et telle que pour $i \in J$, si l'on pose $i = ((\varphi_k^i)_{k \leqslant p_i}, \varepsilon_i, Y_i)$, et si L_i désigne la réunion des supports des φ_k^i, on ait $s^{-1} \in Y_i$ et $N \subset L_i$. La construction de ψ_i montre qu'il existe une partie finie P_i de D telle que

$$U_i = Y_i(L_i.P_i^{-1}), \qquad V_i = Y_i^{-1}U_i, \qquad g_i.F \subset V_i^{-1}.L_i = P_i.$$

Soient $t \in V_i$ et $x \in F$ tels que $t.(g_i.x) \in N \subset L_i$.
On a $g_i.x \in t^{-1}.N \subset V_i^{-1}.L_i$, d'où

$$g_i.x \in g_i.F \cap V_i^{-1}.L_i \subset P_i.$$

On a donc $N.(g_i.F)^{-1} \cap V_i \subset L_i.P_i^{-1}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp} h \cap V_i g &\subset N.F^{-1} \cap V_i g_i \\ &= (N.(g_i.F)^{-1} \cap V_i)g_i \subset (L_i.P_i^{-1})g_i.\end{aligned}$$

Puisque $L_i.P_i^{-1} \subset U_i \subset V_i$ et $L_i.P_i^{-1} \subset sU_i \subset V_i$, on a $\operatorname{supp} h \cap U_i g_i = \operatorname{supp} h \subset sU_i g_i$, ce qui montre que $\psi_i(h) = \psi_i(h_s)$ et que $\check{m}$ est une moyenne en passant à la limite.

Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(E)$ on a par construction $\check{m}(\check{\varphi}) = \widehat{f}(\varphi)$.

Soient K, L, M trois compacts de E tels que $K \subset \mathring{L}$ et $L \subset \mathring{M}$.

Soit $\varphi' \in \mathcal{C}_K^+(E)$, telle que $\chi_L \leqslant \varphi' \leqslant \chi_M$. On a

$$\begin{aligned}f(K) &= \operatorname{Inf}\{\widehat{f}(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{C}_K(E),\ \varphi \geqslant \chi_K\} = \operatorname{Inf}\{\check{m}(\check{\varphi});\\ &\quad \varphi \in \mathcal{C}_K(E),\ \varphi \geqslant \chi_K\} \leqslant \check{m}(L.F^{-1}) \leqslant \check{m}(\check{\varphi}') = \widehat{f}(\varphi') \leqslant f(M)\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$f(K) = \operatorname{Inf}\{\check{m}(L.F^{-1});\ L \in \mathcal{K}(E),\ \mathring{L} \supset K\}.$$

La première assertion est ainsi établie. Pour établir la seconde, puisque toute face fermée d'un convexe compact contient un point extrémal, il suffit d'établir que $\mathcal{M}_F$ est bien coiffé, ce qui peut s'établir directement, ou bien résulte du théorème 7, de la représentation de $\mathcal{M}_F$ établie dans l'exemple 30, et de l'existence de la suite (X_n) de $\mathcal{K}(E)$ telle que $X_n \subset \mathring{X}_{n+1}$ et $E = \bigcup_n G.X_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CHATARD, Application des propriétés de moyenne d'un groupe localement compact à la théorie ergodique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. VI, nº 4 (1970), 307-326.

[2] G. CHOQUET, Lectures on Analysis, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1969.

[3] G. CHOQUET, Theory of Capacities, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, V (1953), 131-297.

[4] R. E. EDWARDS, Functional Analysis Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[5] W. R. EMERSON, Covering Properties and Folner Conditions for locally compact Groups, *Math. Zeitschr.*, 102 (1967), 370-384.

[6] F. P. GREENLEAF, Ergodic Theorems and the Construction of Summing Sequences in Amenable Locally Compact Groups, *Communications on Pure and Applied Math.*, Vol. XXVI (1973), 29-46.

[7] F. P. GREENLEAF, Invariant Means on Topological groups, Von Nostrand, *Math. Studies*, 16 (1969).

[8] P. R. HALMOS, In general a measure preserving transformation is mixing, *Annals of Math.*, (1944), 786.

[9] K. JACOBS, Lectures notes on Ergodic Theory, Aarhus Universitet, 1962.

[10] J. LINDENSTRAUSS, G. OLSEN and. Y. STERNFELD, The Poulsen Simplex, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 28, 1 (1978), 91-114.

[11] ROKLIN, In general a measure-preserving transformation is not mixing, *Doklady*, (1948), 349.

[12] M. TALAGRAND. Capacités invariantes, *C.R.A.S.*. t. 284, p. 481-484.

[13] M. TALAGRAND, Capacités invariantes : le cas alterné d'ordre infini, *C.R.A.S.*, t. 284, p. 543-546.

[14] M. TALAGRAND, Quelques exemples de représentation intégrale : Valuations, fonctions alternées d'ordre infini. *Bull. Sc. math.*, 2e série, 100 (1976), 321-329.

[15] M. TALAGRAND, Moyennes de Banach extrémales, *CRAS*, t. 282, p. 1359-1362.

Manuscrit reçu le 26 octobre 1977
Proposé par G. Choquet.

Michel TALAGRAND,
Équipe d'Analyse
Université de Paris VI
Tour 46, 4e étage
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.