ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHÈLE MASTRANGELO-DEHEN

Différentiabilité fine, différentiabilité stochastique, différentiabilité stochastique de fonctions finement harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 2 (1978), p. 161-186

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_2_161_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 2 (1978), 161-186.

DIFFÉRENTIABILITÉ FINE, DIFFÉRENTIABILITÉ STOCHASTIQUE, DIFFÉRENTIABILITÉ STOCHASTIQUE DE FONCTIONS FINEMENT HARMONIQUES

par Michèle MASTRANGELO-DEHEN

Dans cet exposé nous définissons la notion de différentiabilité fine et celle de différentiabilité stochastique d'une fonction définie sur un ouvert fin. Nous montrons qu'en certains points les différentielles fine et stochastique vérifient des propriétés analogues à celles de la différentielle sur un ouvert usuel :

— le laplacien stochastique est la trace de la différentielle seconde fine ou stochastique,

— la formule d'Ito peut être démontrée pour les différentielles fines,

— une fonction admettant une « suite d'approximation forte » est, quasi-partout, stochastiquement indéfiniment différentiable, et vérifie la formule d'Ito pour les différentielles stochastiques, quasi-partout;

— une fonction finement harmonique limite d'une « suite d'approximation harmonique forte » admet des dérivées partielles stochastiques de tous ordres sur un sous-ouvert fin de complémentaire polaire et celles-ci y sont finement harmoniques.

Je tiens à remercier M. le Professeur Choquet de ses conseils, en particulier de celui d'aborder les dernières parties en considérant, non les ensembles négligeables, mais les ensembles polaires, et M. Ancona d'avoir bien voulu relire cet exposé et des remarques qu'il m'a alors faites.

Définitions générales.

Dans l'espace $\mathbf{R}^d$, nous considérons la topologie fine associée au mouvement brownien; pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on note

P^x la probabilité, sur l'espace des trajectoires, associée au point x ; si $A \subset \mathbf{R}^d$, on note T_A le temps d'entrée dans A.

Soient A un ouvert fin de $\mathbf{R}^d$, f une fonction définie sur A, et x un point de A. On dira que f admet un *laplacien stochastique* au point x, noté $\Delta f(x)$, s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêts presque sûrement strictement positifs tels que, pour toute suite (S_n) de temps d'arrêts vérifiant $0 < S_n \leqslant T_n$:

$$\Delta f(x) = 2 \lim_{n \to \infty} \frac{E^x\{f \circ X(S_n) - f(x)\}}{E^x(S_n)}.$$

On voit que cette définition est finement locale.

Remarque 1. — On pourrait considérer une autre notion de laplacien définie, de manière semblable, par :

$$\Delta' f(x) = 2 \lim_{n \to \infty} E^x \left\{ \frac{f \circ X(S_n) - f(x)}{S_n} \right\}$$

pour toute suite (S_n) vérifiant $0 < S_n \leqslant V_n$.

Nous pouvons montrer que, si $\Delta f(x)$ et $\Delta' f(x)$ existent, ils sont égaux. En effet, pour tout n, il existe un réel t_n vérifiant :

$$\begin{cases} E^x \left\{ \mathbf{1}_{\{t_n > T_n \wedge V_n\}} \dfrac{f \circ X(T_n \wedge V_n) - f(x)}{T_n \wedge V_n} \right\} < 1/n \\ P^x(\{t_n > T_n \wedge V_n\}) < 1/n . \end{cases}$$

Notant $S_n = t_n \wedge T_n \wedge V_n$, on voit alors que, si les limites existent, elles vérifient

$$\lim_{n \to \infty} E^x \left\{ \frac{f \circ X(S_n) - f(x)}{S_n} \right\} = \lim_{n \to \infty} \frac{E^x\{f \circ X(S_n) - f(x)\}}{E^x(S_n)}.$$

Différentiabilité fine.

Si $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on dira qu'une fonction f, définie sur un ouvert fin A, est finement m-fois différentiable en un point $x \in A$ si

$$(y \longmapsto f(x+y) - f(x))$$

est finement tangente à un polynôme symétrique de degré k, pour tout entier $k \leqslant m$, c'est-à-dire si : $\forall k \in \mathbf{N} \cap [0,m]$, il existe $(k+1)$ formes $f(x)$, $\nabla f(x) = \mathrm{D}f(x)$, $\mathrm{D}^2 f(x), \ldots,$ $\mathrm{D}^k f(x)$, k-linéaire symétrique, telles que

$$\|h\|^{-k}[f(x+h) - f(x) - \mathrm{D}f(x).h - \cdots \\ - (k\,!)^{-1}\mathrm{D}^k f(x).(h,\ldots,h)] \to 0$$

quand $(x+h)$ tend vers x finement.

Si f est finement différentiable en x, on peut alors définir ses dérivées partielles fines $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \nabla f(x).\ e_i$; on définit de même les opérateurs différentiels.

Différentiabilité stochastique.

De même on peut définir une notion de différentiabilité associée au processus du mouvement brownien pour une fonction f définie sur un ouvert fin A. On dira que f est stochastiquement différentiable en $x \in \mathrm{A}$ s'il existe un vecteur $\nabla f(x)$ et une suite (T_n) de temps d'arrêts strictement positifs presque sûrement tels que, pour toute suite (S_n) de temps d'arrêts vérifiant $\mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{T}_n$ on ait :

$$\mathrm{E}^x(|f \circ \mathrm{X}(\mathrm{S}_n) - f(x) - \nabla f(x)[\mathrm{X}(\mathrm{S}_n) - x]|^2) = o\ [\mathrm{E}^x(\mathrm{S}_n)].$$

Plus généralement, on dira que f est stochastiquement différentiable à l'ordre k en x s'il existe $(k+1)$ formes :

$f(x)$, $\nabla f(x)$, $\ldots$, $\mathrm{D}^p f(x)$ — p-linéaire symétrique —, $\ldots$ $\mathrm{D}^k f(x)$, et une suite $(\mathrm{T}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de temps d'arrêts P^x — presque partout strictement positifs tels que, pour toute suite (S_n) de temps d'arrêts vérifiants $\mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{T}_n$, pour tout n, on ait :

$$\mathrm{E}^x(|f \circ \mathrm{X}(\mathrm{S}_n) - f(\mathrm{X}) - \nabla f(x)[\mathrm{X}(\mathrm{S}_n) - x] - \cdots \\ - (k\,!)^{-1}\mathrm{D}^k f(x)[\mathrm{X}(\mathrm{S}_n) - x]^k|^2) = o\ [(\mathrm{E}^x(\mathrm{S}_n^k)].$$

On peut observer que les résultats suivants ne découlent pas de la définition de manière évidente :

— si f est stochastiquement différentiable à l'ordre k, alors elle l'est aussi à l'ordre p, pour $p < k$.

— si elle existe, la famille des différentielles jusqu'à l'ordre k est unique.

— si f est h fois stochastiquement différentiable [i.e. pour tout $p < h$, la forme p-linéaire symétrique $\nabla^p f(x)$ admet un gradient stochastique $\nabla^{p+1} f(x)$, $(p+1)$-linéaire symétrique :

$$E^x\{\|\nabla^p f \circ X(S_n) - \nabla^p f(x) - \nabla^{p+1} f(x).[X(S_n) - x]\|^2\} = o\ (E^x(S_n))$$

est-elle stochastiquement différentiable pour un ordre $k \leqslant h$?

L'objet du Lemme 2 est une démonstration par la technique des intégrales stochastiques, d'une majoration de

$$E^x([X^i(S) - x^i)^{2\alpha_i})$$

par un multiple de $E^x(S^{\alpha_i})$.

La démonstration probabiliste, qui nous a été communiquée par Yor, est obtenue en utilisant les inégalités de Burkhöder-Davis-Gundy qui conduisent à $E[|X(S)|^p] \leqslant C_p E(S^{p/2})$.

Lemme 2. — *Soient* S *un temps d'arrêt* P^x-*essentiellement borné et* (α_i) *un d-upple, vérifiant* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = p$, $\alpha_i \in \mathbf{N}$, *alors :*

(i) $E^x\{(X^i(S) - x^i)^{2\alpha_i}\} \leqslant [\alpha_i(2\alpha_i - 1)]^{\alpha_i}\ E^x(S^{\alpha_i})$.

(ii) *Si* S *est un temps fixe ou bien le temps d'entrée dans le complémentaire d'un ouvert fin, borné :*

$$\{E^x[X^i(S) - x^i]^{2\alpha_i}\} = (2\alpha_i - 1)(2(\alpha_i - 1) - 1) \ldots 3.1 E^x(S^{\alpha_i}) = \varphi(\alpha_i) E^x(S^{\alpha_i}).$$

(iii) *Si* S *est* P^x-*essentiellement borné*

$$E^x(S)^p \leqslant E^x\Big(\prod_{1\leqslant i\leqslant d} (X^i(S) - x^i)^{2\alpha_i}\Big) \leqslant d[p(2p-1)]^p E^x(S^p).$$

Démonstration. — (iii) se déduit de (i), de l'inégalité de Hölder, et du fait que, si (f_i) est une famille de fonctions positives, $E(\pi f_i^{\alpha_i}) \leqslant E\{(\sup. f_i)^p\} \leqslant E\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant d} f_i^p\Big)$.

Démonstration de (i). — Appliquant le théorème 1 § 4, ch. 1 de [21] :

$$E^x\Big\{\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i - 1}\, dX^i(u)\Big\} = 0$$

et

$$\text{(I)}\quad E^x\{[X^i(S). - x^i]^{2\alpha_i}\} = \alpha_i(2\alpha_i - 1)E^x\left\{\int_0^S \left[\int_0^t dX^i_\omega(u)\right]^{2\alpha_i-2} dt\right\}$$

or

$$\begin{aligned} E^x\left\{\int_0^S \left[(\alpha_i - 1)(2\alpha_i - 3)\int_0^t (X^i_\omega(u) - x^i)^{2\alpha_i-4}\, du\right] dt\right\} &\leqslant E^x\left\{\int_0^S (\alpha_i - 1)(2\alpha_i - 3)\int_0^S (X^i_\omega(u) - x^i)^{2(\alpha_i-2)}\, du\, dt\right\} \\ &\leqslant (\alpha_i - 1)(2\alpha_i - 3)E^x\left\{S\left[\int_0^S (X^i_\omega(u) - x^i)^{2(\alpha_i-2)}\, du\right\}\right]. \end{aligned}$$

Comme $u.[X^i_\omega(u) - x^i]^{2\alpha_i-3}$ appartient à H^2, appliquant le théorème 1. § 4 ch. 1 de 21

$$E^x\left\{\int_0^S u.(X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\right\} = 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} (2\alpha_i - 2)E^x\left\{\int_0^S dt \int_0^t (X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\right\} &= (2\alpha_i - 2)E^x\left\{\int_{u=0}^S (S - u)(X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\right\} \ (*) \\ &= (2\alpha_i - 2)E^x\left\{S\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\right\}. \end{aligned}$$

Utilisant la formule d'Ito

$$\begin{aligned} &E^x\{[X^i(S) - x^i]^{2\alpha_i}\} \\ &\leqslant \alpha_i(2\alpha_i - 1)\Big[(\alpha_i - 1)(2\alpha_i - 3)E^x\left\{S\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2(\alpha_i-2)}\, du\right\} \\ &\qquad + (2\alpha_i - 2)E^x\left\{S\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\right\}. \end{aligned}$$

Employant, de nouveau, la formule d'Ito, puis l'inégalité

(*) L'expression $\mathbf{E}^x\left\{\int_0^S (S-u)(X^i(u)-x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\right\}$ n'est pas une intégrale stochastique; plus précisément, cette égalité se démontre par passage à la limite :

$$\begin{aligned} &\left\{\mathbf{E}^x\left\{\int_0^S\int_0^t (X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\, dt\right\}\right. \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^x\left\{\int_0^S \sum_{k=1}^{nt}\left(X^i\left(\frac{k}{n}\right) - x^i\right)^{2\alpha_i-3}\left[X^i\left(\frac{k+1}{n}\right) - X^i\left(\frac{k}{n}\right)\right] dt\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^x\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}\wedge S}^S \left(X^i\left(\frac{k}{n}\right) - x^i\right)^{2\alpha_i-3}\left[X^i\left(\frac{k+1}{n}\right) - X^i\left(\frac{k}{n}\right)\right] dt\right\} \\ &= \mathbf{E}^x\left\{S\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-3}\, dX^i(u)\right\}. \end{aligned}$$

de Hölder, l'intégrale se majore par :

$$\leqslant \alpha_i(2\alpha_i - 1)E^x\{S[X^i(S) - x^i]^{2(\alpha_i-1)}\}$$

$$\leqslant \alpha_i(2\alpha_i - 1)[E^x(S^{\alpha_i})]^{\frac{1}{\alpha_i}}\left[E^x\left([X^i(S) - x^i]^{\frac{2(\alpha_i-1)\alpha_i}{\alpha_i-1}}\right)\right]^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i}}$$

$$\leqslant \alpha_i(2\alpha_i - 1)E^x(S^{\alpha_i})^{\frac{1}{\alpha_i}}[E^x([X^i(S) - x^i]^{2\alpha_i}]^{1-\frac{1}{\alpha_i}}.$$

En élevant cette expression à la puissance α_i

$$E^x\{[X^i(S) - x^i]^{2\alpha_i}\} \leqslant [\alpha_i(2\alpha_i - 1)]^{\alpha_i}E^x(S^{\alpha_i})$$

(ii) sera démontré par récurrence. Lorsque $\alpha_i = 1$ cette propriété est vraie et démontrée dans [8].

Comme :

$$E^x\{(X^i(S) - x^i)^{2\alpha_i}\} = 2\alpha_i E^x\left\{\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2\alpha_i-1}\, dX^i(u)\right\} + \alpha_i(2\alpha_i - 1)E^x\left\{\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2(\alpha_i-1)}\, du\right\}$$

$$E^x\{(X^i(S) - x^i)^{2\alpha_i}\} = \alpha_i(2\alpha_i - 1)E^x\left\{\int_0^S (X^i(u) - x^i)^{2(\alpha_i-1)}\, du\right\}.$$

1° Supposons $S \equiv t$, appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$E^x\{X^i(S)-x^i)^{2\alpha_i}\} = \alpha_i(2\alpha_i - 1)\int_0^t E^x\{(X^i(u) - x^i)^{2(\alpha_i-1)}\}\, du = \alpha_i(2\alpha_i - 1)\int_0^t \varphi(\alpha_i - 1)u^{\alpha_i-1}\, du = \varphi(\alpha_i)u^{\alpha_i}.$$

2° Si $S = T_{CB}$ où B est un ouvert fin, nous considérons la fonction définie sur B par

$$(x \longmapsto E^x\{(X^i(S) - x^i)^{2\alpha_i}\}) = f(x).$$

Son laplacien fin s'écrit :

$$\Delta' f(x) = 2\lim_{t\to 0} t^{-1}E^x\{f \circ X(t \wedge S) - f(x)\}$$

$$= 2\alpha_i(2\alpha_i - 1)\lim_{t\to 0} E^x\left\{\frac{\int_{t\wedge S}^S [X^i(u) - X^i(t \wedge S)]^{2(\alpha_i-1)}\, du - \int_0^S [X^i(u) - x^i]^{2(\alpha_i-1)}\, du}{t}\right\}$$

$$= 2\alpha_i(2\alpha_i - 1)\lim_{t\to 0} E^x\left\{\frac{-\int_0^{t\wedge S} [X^i(u) - x^i]^{2(\alpha_i-1)}\, du}{t}\right\}$$

$$+ E^x\left\{t^{-1}\int_{t\wedge S}^S [X^i(u) - X^i(t \wedge S)]^{2(\alpha_i-1)} - [X^i(u) - X^i(t \wedge S) + X^i(t \wedge S) - x^i]^{2(\alpha_i-1)}\, du\right\}.$$

La première intégrale tend vers zéro avec t.

La seconde est équivalente à :

$$E^x\left\{t^{-1}[-(\alpha_i-1)(2\alpha_i-3)](X^i(t\wedge S)-x^i)^2 \int_{t\wedge S}^{S}[X^i(u)-X^i(t\wedge S)]^{2(\alpha_i-2)}\,du\right\}$$

qui converge vers

$$-(\alpha_i-1)(2\alpha_i-3)E^x\left\{\int_0^S (X^i(u)-x^i)^{2(\alpha_i-2)}\,du\right\}.$$

Admettant la récurrence vérifiée pour $\alpha_i - 1$:

$$\Delta' f(x) = -2\alpha_i(2\alpha_i-1)(2(\alpha_i-1)-1)\dots 3.1E^x(S^{\alpha_i-1}).$$

De même le laplacien fin de $g(x)=E^x(S^{\alpha_i})=E^x(T_{CB}^{\alpha_i})$ s'écrit

$$2\lim_{t\to 0} E^x\left\{\frac{E^{X(t\wedge T_{CB})}(S^{\alpha_i})-E^x(S^{\alpha_i})}{t}\right\} = -2\alpha_i E^x(S^{\alpha_i-1}).$$

Les deux fonctions $E^x\{(X^i(S)-x^i)^{2\alpha_i}\}$ et $\varphi(\alpha_i)E^x(S^{\alpha_i})$ admettent donc le même laplacien fin sur B et s'annulent toutes deux à la frontière; d'après [8] elles sont donc égales.

Remarque 3. — Si f est une fonction stochastiquement différentiable à l'ordre k, alors, pour tout $p\leqslant k$, f est stochastiquement différentiable à l'ordre p.

Comme :

$$\begin{aligned} E^x\{|f.X(S_n)-f(x)-\cdots-(p\,!)^{-1}D^pf(x)(X(S_n)-x)^p|^2\} \\ \leqslant E^x\{|f.X(S_n)-\cdots-(k\,!)^{-1}D^kf(x)(X(S_n)-x)^k|^2\} \\ +E^x\{|((p+1)\,!)^{-1}D^{p+1}f(x)(X(S_n)-x)^{p+1} \\ +\cdots+(k\,!)^{-1}D^kf(x)(X(S_n)-x)^k|^2\} \\ +2E^x\{|f\circ X(S_n)-\cdots-(k\,!)^{-1}D^kf(x)(X(S_n)-x)^k| \\ |((p+1)\,!)^{-1}D^{p+1}f(x)(X(S_n)-x)^{p+1}\cdots|\}. \end{aligned}$$

Utilisant le lemme 2 :

$$\begin{aligned} E^x\{|((p+1)\,!)^{-1}D^{p+1}f(x)(X(S_n)-x)^{p+1} \\ +\cdots+(k\,!)^{-1}D^kf(x)(X(S_n)-x)^k|^2\} = o\,(E^x(S_n^p)). \end{aligned}$$

L'inégalité écrite ci-dessus implique alors que :

$$\begin{aligned} E^x\{|f.X(S_n)-f(x)-\cdots-(p\,!)^{-1}D^pf(x)(X(S_n)-x)^p|^2\} \\ = o\,(E^x(S_n^p)). \end{aligned}$$

Remarque 4. — Si elle existe, la famille des différentielles jusqu'à l'ordre k est unique.

Supposons que :

$$E^x\{|f\circ X(S_n) - f(x) - \cdots - (k\,!)^{-1}D^k f(x)(X(S_n) - x)^k|^2\}$$
$$\text{et}\quad E^x\{|f.X(S_n) - f(x) - \cdots - (k\,!)^{-1}D_1^k f(x)(X(S_n) - x)^k|^2\}$$

soient des $o(E^x(S_n^k))$; nous notons p le plus petit entier pour lequel $D^p f(x) = D_1^p f(x)$.

Utilisant le lemme 2 :

$$E^x\{|((p+1)\,!)^{-1}D^{p+1}f(x)(X(S_n) - x)^{p+1} + \cdots + (k\,!)^{-1}D^k f(x)(X(S_n) - x)^k|^2\}$$

est un $o\,(E^x(S_n^p))$, ainsi que la même expression avec les D_1^i.

Effectuant la différence :

$$\begin{aligned} E^x\{|(D^p f(x) - D_1^p f(x))(X(S_n) - x)^p|^2\} \\ = (p\,!)E^x\{|f\circ X(S_n) - \cdots - (p)^{-1}D^p f(x)(X(S_n) - x)^p|^2\} \\ + (p\,!)E^x(|f\circ X(S_n) - \cdots D_1^p f(x)(X(S_n) - x)^p|^2\} \\ - 2(p\,!)E^x\{|f\circ X(S_n) - \cdots D_f^p f(x)\ldots| \\ |f\circ X(S_n) - \cdots D_1^p f(x)\cdots|\} = o\,(E^x(S_n^p). \end{aligned}$$

Pour tout n, nous pouvons déterminer un réel $t_n > 0$, tel que $P^x(\{t_n > S_n\}) < 1/n$; notant :

$$U_n = t_n \wedge S_n\,,\quad q(\alpha_i) = (2\alpha_i - 1)(2(\alpha_i - 1) - 1)\ldots 3.1\,,$$
$$(D^p f(x) - D_1^p f(x))(V^p) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_d=p} a_{\alpha_1\ldots\alpha_d}(V^1)^{\alpha_1}\ldots(V^d)^{\alpha_d}$$
$$E^x\{|(D^p f(x) - D_1^p f(x)(X(U_n) - x)^p|^2\}$$
$$\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_d=p\\ \beta_1+\cdots+\beta_d=p\\ \alpha_i+\beta_i\ \text{pair}}} a_{\alpha_1\ldots\alpha_d}a_{\beta_1\ldots\beta_d}\Pi\,\varphi(\alpha_i)\Pi\,\varphi(\beta_i)t_n^{\Sigma(\alpha_i+\beta_i)/2}.$$

Cette expression ne peut être un $o(t_n^p)$ que si

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p\\ |\beta|=p\\ \alpha_i+\beta_i\ \text{pair}}} a_\alpha a_\beta \Pi\,\varphi(\alpha_i)\Pi\,\varphi(\beta_i) = 0.$$

Mais ceci implique alors que, pour tout $t > 0$:

$$E^x\{|(D^p f(x) - D_1^p f(x))(X(t) - x)^p|^2\} = 0$$

et que, par conséquent, pour tout vecteur V,

$$(D^p f(x) - D_1^p f(x))(V^p) = 0\,.$$

Nous dirons que f est h fois stochastiquement différentiable si, pour tout $i \in \{0,1,2\ldots(h-1)\}$, la différentielle $\nabla^i = \nabla \circ \nabla \circ \ldots \circ \nabla$, obtenue par récurrence jusqu'à l'ordre i, est stochastiquement différentiable :

$$\mathrm{E}^x\{|\nabla^i f \circ \mathrm{X}(\mathrm{S}_n) - \nabla^i f(x) - \nabla^{i+1} f(x)(\mathrm{X}(\mathrm{S}_n) - x)|^2\} = o(\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)),$$

la norme étant celle de l'espace des applications i-linéaires de R^d dans R ($\simeq [(\mathrm{R}^d)^*]^i$).

Remarque 5. — Si f est $(k+1)$ fois stochastiquement différentiable, si f et toutes les différentielles ainsi obtenues par récurrence jusqu'à l'ordre $(k-1)$ vérifient la formule d'Ito, si la différentielle obtenue à l'ordre k est finement continue au point considéré, alors f est stochastiquement différentiable à l'ordre k.

Nous en effectuons la démonstration pour $k = 2$. Comme f et ∇f vérifient la formule d'Ito :

$$f \circ \mathrm{X}(\mathrm{S}) - f(x) = \int_0^{\mathrm{S}} \nabla f \circ \mathrm{X}(u)\, d\mathrm{X}(u) + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{S}} \mathrm{Tr}\, \nabla \circ \nabla f \circ \mathrm{X}(u)\, du$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mathrm{X}(u) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^u \nabla \circ \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mathrm{X}(t)\, d\mathrm{X}(t) + \frac{1}{2}\int_0^u \mathrm{Tr}\, \nabla \circ \nabla \circ \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mathrm{X}(t)\, dt$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^x\Big\{|f \circ \mathrm{X}(\mathrm{S}) - f(x) - \nabla f(x)(\mathrm{X}(\mathrm{S}) - x) &- \frac{1}{2}\nabla \circ \nabla f(x)(\mathrm{X}(\mathrm{S}) - x)^2\Big|^2\Big\} \\ &= \mathrm{E}^x\Big\{\Big|\int_0^{\mathrm{S}} (\nabla f \circ \mathrm{X}(u) - \nabla f(x))\, d\mathrm{X}(u) \\ + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{S}} \mathrm{Tr}\, \nabla \circ \nabla f \circ \mathrm{X}(u)\, du &- \frac{1}{2}\nabla \circ \nabla f(x)(\mathrm{X}(\mathrm{S}) - x)^2\Big|^2\Big\}\end{aligned}$$

Or $d(\mathrm{X}(t))^2 = 2\mathrm{X}(t)\, d\mathrm{X}(t) + dt$, et ceci s'écrit encore :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^x\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{d}\int_0^{\mathrm{S}}\int_0^u \Big(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mathrm{X}(t) - \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big)\, d\mathrm{X}(t)\, d\mathrm{X}^i(u) \\ + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{S}} (\mathrm{Tr}\, \nabla \circ \nabla f \circ \mathrm{X}(u) - \mathrm{Tr}\, \nabla \circ \nabla f(x))\, du \\ + \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{S}} \sum_{i=1}^{d}\int_0^u \mathrm{Tr}\, \nabla \circ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \mathrm{X}(t)\, dt\, du\Big|^2\Big\}\end{aligned}$$

Or :

$$E^x \left\{ \left| \int_0^S (\operatorname{Tr} \nabla \circ \nabla f \circ X(u) - \operatorname{Tr} \nabla \circ \nabla f(x)) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{d} \int_0^u \operatorname{Tr} \nabla \circ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ X(t)\, dt \right) du \right|^2 \right\} = o(E^x(S^2)),$$

car $\operatorname{Tr} \nabla \circ \nabla f$ est finement continue en x ;

De même :

$$E^x \left\{ \left| \sum_{i=1}^{d} \int_0^S \int_0^u \left(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ X(t) - \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) dX(t)\, dX^i(u) \right|^2 \right\}$$
$$= o(E^x(S^2)),$$

car, modifiant le cas échéant la suite (T_n),

$$\text{sup. ess.} \{ \sup_{t \leqslant S_n} \| \nabla \circ \nabla f \circ X(t) - \nabla \circ \nabla f(x) \|^2 \}$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

On voit alors que

$$E^x \left\{ \left| \int_0^S \int_0^u \left(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ X(t) - \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) dX(t)\, dX^i(u) \right|^2 \right\}$$
$$= E^x \left\{ \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{t \leqslant u \leqslant S\}} \left(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ X(t) - \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) dX(t) \right|^2 du \right\}$$
$$= E^x \left\{ \int_0^\infty E^x \int_0^\infty \left\| \mathbf{1}_{\{t \leqslant u \leqslant S\}} \left(\nabla \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ X(t) - \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \right\|^2 dt\, du \right\}$$
$$\leqslant \sup_{t \leqslant S} \left\| \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i} \circ X(t) - \nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\|^2 \cdot E^x(S^2/2) = o(E^x(S^2)) \cdot$$

La différentiabilité stochastique à l'ordre deux est démontrée.

1. Quelques propriétés des différentielles fines et stochastiques.

Lemme 6. — *Soit f une fonction finement continue sur un ouvert fin A. Pour tout x de A, P^x-presque sûrement :*

$$f \circ X_\omega = (t \longmapsto f \circ X_\omega(t))$$

n'admet pas de discontinuité sur $[0, T_{CA}[$.

Ce lemme est démontré au théorème 39 de [19], ch. 15, ainsi qu'en [2] et [14].

LEMME 7. — *Si* $x \in \mathbf{R}^d$, *si* $i \in \{1,2,\ldots,d\}$ *et si* σ *est un temps d'arrêt, vérifiant* $E^x(\sigma) < \infty$ *alors la* $i^{\text{ième}}$ *composante du mouvement brownien sur* $\mathbf{R}^d$ *vérifie :*

$$\frac{E^x\{|x^i(\sigma) - x^i|^2\}}{E^x(\sigma)} = 1.$$

Notre démonstration est similaire à celle de la proposition 17 de notre précédent travail [8].

Utilisant le lemme d'Ito, on peut définir un mouvement brownien linéaire $\tilde{X}$ tel que

$$\tilde{X}_\omega(t) = X^i_\omega(t).$$

Alors, supposant $x = (0,0,\ldots,0)$ pour simplifier les notations :

$$E^x(|X^i(\sigma)|^2) = E^x\left(\left|\int_0^{\sigma(\omega)} d\tilde{X}_\omega(s)\right|^2\right) = E^x\left(\int_0^{\sigma(\omega)} ds\right) = E^x(\sigma).$$

THÉORÈME 8. — *Soit* f *une fonction définie sur un ouvert fin* A, *finement deux fois différentiable en* $x \in A$. *Si* x *admet un voisinage fin* V, *sur lequel, pour une fonction* $\varepsilon(z)$, *tendant vers zéro, avec* z*:*

$$\left| f(y) - f(x) - \nabla f(x)(y-x) - \frac{1}{2} D^2 f(x)(y-x, y-x) \right| \leqslant \|y-x\|^2 \varepsilon(\|y-x\|)$$

alors $\Delta f(x)$ *existe et* $\Delta f(x) = \mathrm{Tr}.D^2 f(x)$.

Démonstration du théorème. — Soit σ un temps d'arrêt, P^x-presque partout strictement positif et inférieur à T_{CV}, comme

$$\Delta f(x) = 2 \lim_{\sigma \to 0} \frac{E^x(f \circ X(\sigma) - f(x))}{E^x(\sigma)}.$$

Le sens exact de la limite étant précisé lors de la définition du laplacien, et

$$\begin{aligned} \Big| \{E^x(\sigma)\}^{-1} \Big\{ & E^x[f \circ X(\sigma) - f(x)] - E^x|\nabla f(x).(X(\sigma) - x] \\ & - E^x\left[\frac{1}{2} D^2 f(x)(X(\sigma) - x, X(\sigma) - x)\right]\Big\}\Big| \\ & \leqslant \{E^x(\sigma)\}^{-1} E^x[\|X(\sigma) - x\|^2 \varepsilon(\|X(\sigma) - x\|)] \\ & \leqslant \varepsilon(\|X(\sigma) - x\|_{L^\infty(P^x)}) \cdot \frac{E^x(\|X(\sigma) - x\|^2)}{E^x(\sigma)}. \end{aligned}$$

Utilisant le lemme 7, lorsque $E^x(\sigma) < \infty$:

$$\frac{E^x(\|X(\sigma) - x\|^2)}{E^x(\sigma)} = d$$

(dimension de l'espace).

Par suite l'expression tend vers zéro avec $\|X(\sigma) - x\|_{L^\infty(P^x)}$.

Si σ est un temps d'arrêt, $E^x(X^i(\sigma) - x^i) = 0$; et

$$\{E^x(\sigma)\}^{-1} E^x[\nabla f(x) . (X(\sigma) - x)] = 0 .$$

De même, si $j \neq i$, $E^x[(X^i(\sigma) - x^i) . (X^j(\sigma) - x^j)] = 0$ donc

$$E^x\left[\frac{1}{2} D^2 f(x)(X(\sigma) - x, X(\sigma) - x)\right] = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} D^2 f(x) . E^x[(X^i(\sigma) - x^i)^2]$$

D'après le lemme 7, on voit alors que

$$\Delta f(x) = \operatorname{Tr} D^2 f(x).$$

Théorème 9. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A, telle qu'il existe une suite de temps d'arrêts (T_n) pour laquelle toute suite (S_n), majorée par (T_n) vérifie :*

$$E^x\Big\{\Big| f \circ X(S_n) - f(x) - \nabla f(x)(X(S_n) - x) - \frac{1}{2} D^2 f(x)(X(S_n) - x)^2 \Big|\Big\} = o(E^x(S_n)),$$

alors $\Delta f(x)$ existe et vaut $\operatorname{Tr} D^2 f(x)$.

Démonstration. — Pour toute suite $(S_n) \leqslant (T_n)$

$$\Big| \{E^x(S_n)\}^{-1} \Big\{ E^x\Big[f \circ X(S_n) - f(x) - \nabla f(x)(X(S_n) - x) - \frac{1}{2} D^2 f(x)(X(S_n) - x)^2 \Big] \Big\} \Big|$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini; on est donc ramené à la démonstration du théorème 8.

Lemme 10. — *Soit f une fonction finement continue bornée sur un ouvert fin A. Pour tout x de A, P^x-presque sûrement :*

$$f \circ X_\omega = (t \longmapsto f \circ X_\omega(t))$$

est intégrable sur tout borné $[0, \sigma] \subset [0, T_{CA}[$ *et, la limite étant considérée dans* L^2 :

$$\int_0^\sigma f \circ X_\omega(t)\, dX^i_\omega(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n f \circ X_\omega\left(\frac{k\sigma}{n}\right)\left[X^i_\omega\left(\frac{k\sigma}{n}\right) - X^i_\omega\left(\frac{(k-1)\sigma}{n}\right)\right]$$

Démonstration. — Pour tout entier n, on considère la fonction en escalier

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n f \circ X_\omega\left(\frac{k\sigma}{n}\right) 1_{\left]\frac{(k-1)\sigma}{n}, \frac{k\sigma}{n}\right]} .$$

Comme $f \circ X_\omega$ est P^x-presque sûrement continue à droite, P^x-presque sûrement, $f \circ X_\omega$ est limite simple des fonctions en escalier φ_n. Par ailleurs l'ensemble $\{\varphi_n\}$ est borné car f est bornée sur A; il en résulte que $f \circ X_\omega$ est intégrable et

$$\int_0^\sigma f \circ X_\omega(t)\, dX^i_\omega(t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n f \circ X_\omega\left(\frac{k\sigma}{n}\right)\left[X^i_\omega\left(\frac{k\sigma}{n}\right) - X^i_\omega\left(\frac{(k-1)\sigma}{n}\right)\right]$$

THÉORÈME 11. Formule d'Ito relative aux propriétés fines. — *Soit* f *une fonction, définie sur un ouvert fin* A, *finement deux fois différentiable à différentielles bornées et finement continues telles que, pour une constante* C *et un réel* $\varepsilon > 0$: $\forall (x,y) \in A \times A$

$$|f(x) - f(y) - Df(x)(y - x) - \frac{1}{2} D^2f(x)(y - x, y - x)| \leqslant C\|y - x\|^{2+\varepsilon}.$$

Alors la différentielle stochastique de f *s'écrit :*

$$d(f \circ X_\omega) = Df \circ X_\omega\, dX_\omega + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} D^2f \circ X_\omega\, dt.$$

Démonstration. — D'après l'hypothèse sur les différentielles fines, si τ et σ sont deux fonctions sur Ω, vérifiant

$$0 < \sigma \leqslant \tau < T_{CA} ,$$

alors

$$\begin{aligned}|f \circ X_\omega(\tau) - f \circ X_\omega(\sigma) - \mathrm{D}f \circ X_\omega(\tau)[X_\omega(\tau) - X_\omega(\sigma)] \\ - \frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f \circ X_\omega(\tau)[X_\omega(\tau) - X_\omega(\sigma)]^2| \\ \leqslant C\|X_\omega(\tau) - X_\omega(\sigma)\|^{2+\varepsilon}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 7, si σ est un temps d'arrêt inférieur ou égal à T_{CA} et P^x-presque partout majoré par une constante M, notant, pour tous $n \in \mathbf{N}$, $k \in \{0,1,2,\ldots,(n-1)\}$, σ_n^k le temps d'arrêt :

$$\sigma_n^k = \sigma \wedge \frac{Mk}{n},$$

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant (n-1)} C\|X_\omega(\sigma_n^{k+1}) - X_\omega(\sigma_n^k)\|^2 . \|X_\omega(\sigma_n^{k+1}) - X_\omega(\sigma_n^k)\|^\varepsilon$$

converge P^x-presque sûrement vers zéro, d'après la condition de Hölder de P. Lévy, démontrée au paragraphe 1.9. de [17]

et $$\begin{aligned}f \circ X_\omega(\sigma) - f(x) \\ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{(n-1)} \mathrm{D}f \circ X_\omega(\sigma_n^{k+1})[X_\omega(\sigma_n^{k+1}) - X_\omega(\sigma_n^k)] \\ + \frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f \circ X_\omega(\sigma_n^{k+1})[X_\omega(\sigma_n^{k+1}) - X_\omega(\sigma_n^k)]^2.\end{aligned}$$

D'après le lemme 10, la continuité de $\mathrm{D}f \circ X$ et $\mathrm{D}^2 f \circ X$, implique que cette limite peut encore s'écrire :

$$f \circ X_\omega(\sigma) - f(x) = \int_0^\sigma \mathrm{D}f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} \mathrm{D}^2 f \circ X_\omega(s)\, ds .$$

Ce qui est équivalent à la conclusion du théorème.

2. Étude de la différentiabilité stochastique des fonctions finement harmoniques.

A. Debiard et B. Gaveau ont démontré dans [6] que, si f est une fonction finement harmonique, on peut lui associer un gradient $\nabla_{DG} f(x)$, défini Lebesgue presque-partout comme limite des gradients $\nabla f_n(x)$ d'une suite (f_n) de fonctions harmoniques qui converge finement localement vers f.

Cette définition ne peut évidemment pas s'appliquer à d'autres fonctions. Nous allons montrer que, sous certaines conditions, elle coïncide presque partout avec la définition de la différentiabilité stochastique que nous avons donnée en toute généralité.

Nous rappelons le théorème démontré par Debiard et Gaveau dans [6] :

THÉORÈME 12. — *Soit f une fonction finement harmonique sur un ouvert fin A. On sait alors, d'après B. Fuglede,* [15], *qu'il existe une famille (K_i) de compacts de A, dont la réunion des intérieurs fins soit égale à A, tels que, sur chaque K_i, f soit limite uniforme des restrictions à K_i d'une suite (f_n) de fonctions harmoniques définies sur des voisinages de K_i.*

Debiard et Gaveau ont montré que (∇f_n) converge au sens L^2-local fin sur $\mathring{K}_i^f$ vers une limite $\nabla_{DG} f$ (définie presque partout pour le volume riemannien) et, en tout $x_0 \in \mathring{K}_i^f$

$$f \circ X_\omega(t \wedge T_{CK_i}) = f(x_0) + \int_0^{t \wedge T_{CK_i}} \nabla_{DG} f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s).$$

Définition d'une suite d'approximation forte.

Soit f une fonction continue sur un compact K, finement harmonique sur $\mathring{K}^f$, limite uniforme des restrictions à K d'une suite (f_n) de fonctions harmoniques sur des voisinages de K.

On dira qu'une suite de fonctions harmoniques (f_n) est *une suite d'approximation harmonique forte* de f si, pour tout entier k et pour presque tout x_0 de $\mathring{K}^f$, la suite $D^k f_n$ converge dans $L^2(g_{\mathring{K}^f}, x_0)$:

$$\int_{\mathring{K}^f} \| D^k f_n(y) - D^k f_p(y) \|^2 g_{\mathring{K}^f}(x_0, y)\, dy \xrightarrow[(n,p)\to\infty]{} 0 .$$

On note alors $D_1^k f = \lim_{n\to\infty} D^k f_n$, la limite définie presque partout.

Cette définition se généralise à une classe plus large de fonctions finement continues.

Soient K un compact et (f_n) une suite de fonctions indéfiniment différentiables sur des voisinages de K. On dira que (f_n) est *une suite d'approximation forte* d'une fonction f définie sur un sous-ensemble H de $\mathring{K}^f$, de complémentaire

Lebesgue-négligeable dans $\mathring{K}^f$, si, pour tout entier $k \geqslant 0$ et pour presque tout x_0 de $\mathring{K}^f$, la suite $D^k f_n$ converge dans $L^2(g_{\mathring{K}^f}, x_0)$ vers une limite, $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, $D_1^k f = \lim\limits_{n \to \infty} D^k f_n$, définie presque partout.

Remarque 13. — Si, pour presque tout x_0 de $\mathring{K}^f$, une suite (f_n) converge vers zéro dans $L^2(g_{\mathring{K}^f}, x_0)$, il existe une suite (A_p) de sous-ouverts fins de $\mathring{K}^f$, vérifiant $\lambda(\mathring{K}^f \setminus A_p) < 1/p$, tels que (f_n) converge vers zéro dans $L^2(\lambda/A_p)$, pour tout p.

Démonstration. — D'après le théorème 13 de [8], pour tout p, existent un sous-ouvert fin $A_p \subset \mathring{K}^f$, vérifiant

$$\lambda(\mathring{K}^f \setminus A_p) < 1/p$$

et un réel $\alpha_p > 0$ tels que, sur $A_p \times A_p$, on ait

$$g_{\mathring{K}^f}(x,y) \geqslant \alpha_p .$$

D'où on déduit la remarque.

Lemme 14. — *Soit* A *un ouvert fin admettant une fonction de Green. Si* f [*resp.* F] *est une classe de fonctions mesurables bornées à valeurs réelles* [*resp. vectorielles*], *définies Lebesgue presque partout sur* A, *pour tout temps d'arrêt* $T \leqslant T_{CA}$, *l'expression :*

$$E^\bullet\left(\int_0^T f \circ X_\omega(s)\, ds\right) \left[\mathit{resp.}\ E^\bullet\left(\int_0^T F \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s)\right)\right]$$

ne dépend que de la classe d'équivalence f [*resp.* F].

Démonstration. — Il suffit de montrer que, si h est une fonction définie sur A et nulle presque partout sur A alors

$$E^\bullet\left(\int_0^T |h \circ X_\omega(s)|\, ds\right) = 0.$$

Or

$$E^\bullet\left(\int_0^T |h \circ X(s)|\, ds\right) \leqslant E^\bullet\left(\int_0^{T_{CA}} |h \circ X(s)|\, ds = g_A(.,|h|)\right).$$

D'où il résulte que cette expression est nulle si $|h| = 0$, *p. p.*

Théorème 15. — *Soient* K *un compact et* (f_n) *une suite d'approximation forte d'une fonction* f *définie sur* $H \subset \mathring{K}^f$, $\lambda(\mathring{K}^f \setminus H) = 0$.

Il existe alors un sous-ensemble $\wedge \subset \mathring{K}^f$, *vérifiant* $\lambda(\mathring{K}^f \setminus \wedge) = 0$ *sur lequel*

(i) — $\forall k \geqslant 0\,,\quad \exists D_1^k f = \lim_{n\to\infty} D^k f_n$

(ii) — $\forall k \geqslant 0\,,\quad E^{\bullet}\left(\int_0^{T_{C\mathring{K}^{fin}}} \|D_1^k f \circ X_\omega(x)\|^2\, ds\right) < \infty$ *et* $D^k f_n$ *converge dans* $L^2(g_{\mathring{K}^{fin}}\,,.)$

(iii) — $\forall x \in \Lambda$, P^x*-presque sûrement sur* $\{t < T_{C\mathring{K}^{fin}}\}$, *pour tout opérateur différentiel à coefficients constants* B :

$$B_1 f \circ X(t) = B_1 f(x) + \int_0^t \nabla_1 B_1 f \circ X(s)\, dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)\, ds\,.$$

(iv) *Si* S *et* T *sont deux temps d'arrêts vérifiant* $S \leqslant T < T_{C\mathring{K}^f}$, *alors, sur l'ensemble* $\{X(S) \in \Lambda\} \cap \{X(T) \in \Lambda\}$ P^x*-presque sûrement :*

$$B_1 f \circ X(T) = B_1 f \circ X(s) + \int_S^T \nabla_1 B_1 f \circ X(s)\, dX(x) + \frac{1}{2}\int_S^T \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)\, ds\,.$$

Démonstration.

(i) Utilisant la définition de (f_n), il existe $\Lambda' \subset \mathring{K}^f$, $\lambda(\mathring{K}^f \setminus \Lambda') = 0$, tel que, sur Λ' toutes les limites $\lim_{n\to\infty} D^k f_n$ existent.

(ii) Notant, pour tout $k \geqslant 0$

$$\Lambda_k = \{x_0 \in \mathring{K}^f : \quad D^k f_n \text{ converge dans } L^2(g_{\mathring{K}^f}\,, x_0)\},$$

nous voyons que, si $x_0 \in \bigcap_{k\geqslant 0} \Lambda_k$, (ii) est vérifié en x_0. Par conséquent, posant $\Lambda = \Lambda' \bigcap_{k\geqslant 0} \Lambda_k$, l'assertion (ii) est démontrée.

(iii) Utilisant la formule d'Ito usuelle pour les fonctions f_n, P^x-presque sûrement, sur $\{t < T_{C\mathring{K}^f}\}$

$$B f_n \circ X_\omega(t) = B f_n(x) + \int_0^t \nabla B f_n \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{Tr} D^2 B f_n \circ X_\omega(s)\, ds\,.$$

Or, si x appartient à $\Lambda : B_1 f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} Bf_n(x)$; de plus, pour P^x-presque tout ω de $\{t < T_{C\mathring{K}^f}\}$, $X_\omega(t) \in \Lambda$ et

$$B_1 f \circ X_\omega(t) = \lim_{n\to\infty} Bf_n \circ X_\omega(t).$$

Enfin, comme $x \in \bigcap\limits_{k\geq 0} \Lambda_k$, ∇Bf_n converge dans $L^2(g_{\mathring{K}^{\text{fin}}}, x)$ et il existe une sous-suite (n_p) pour laquelle, P^x-presque sûrement,

$$\int_0^t \nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) = \lim_{n_p\to\infty} \int_0^t \nabla Bf_{n_p} \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s)$$
$$\int_0^t \mathrm{Tr}\, D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s)\, ds = \lim_{n_p\to\infty} \int_0^t \mathrm{Tr}\, D^2 Bf_{n_p} \circ X_\omega(s)\, ds.$$

D'où il résulte que, si $x \in \Lambda$, P^x-presque sûrement, sur $\{t < T_{C\mathring{K}^f}\}$

$$B_1 f \circ X_\omega(t) = B_1 f(x) + \int_0^t \nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}\, D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s)\, ds .$$

(iv) Pour les fonctions f_n, P^x-presque sûrement :

$$Bf_n \circ X(T) = Bf_n \circ X(S) + \int_S^T \nabla Bf_n \circ X(s)\, dX(s) + \frac{1}{2} \int_S^T \mathrm{Tr}\, D^2 Bf_n \circ X(s)\, ds .$$

Or, si $X(T)$ et $X(S)$ appartiennent à Λ

$$B_1 f \circ X(T) = \lim Bf_n \circ X(T) \quad \text{et} \quad B_1 f \circ X(S) = \lim Bf_n \circ X(S),$$

et, de même que pour (iii)

$$\int_S^T \nabla_1 B_1 f \circ X(s)\, dX(s) + \frac{1}{2} \int_S^T \mathrm{Tr}\, D_1^2 B_1 f \circ X(s)\, ds$$
$$= \lim_{n_p\to\infty} \int_S^T \nabla Bf_{n_p} \circ X(s)\, dX(s) + \frac{1}{2} \int_S^T \mathrm{Tr}\, D^2 Bf_{n_p} . X(s)\, ds .$$

La propriété (iv) est donc démontrée.

Proposition 16. — *Soient* K *un compact et* (f_n) *une suite d'approximation forte d'une fonction* f.

Il existe un ouvert fin π, *de complémentaire polaire dans* $\mathring{K}^{\text{fin}}$, *tel que, pour tout* x *de* π *et toute suite* (T_n) *de temps d'arrêts,* T_n *majoré par* $1/n$, P^x*-presque sûrement, pour* *tout opérateur différentiel* B :

$$\mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_n} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et

$$\mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_n} \|\mathrm{D}_1^2 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Démonstration. — Nous allons montrer que, pour quasi-tout x de $\mathring{\mathrm{K}}^{\mathrm{fin}}$, si (T_n) est une suite de temps d'arrêts P^x-presque sûrement majorés par $1/n$, alors

$$\mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_n} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_n} \|\mathrm{D}_1^2 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Comme les deux démonstrations sont similaires, nous n'effectuerons que la première.

Si $\mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_n} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ sur un sous-ensemble non polaire de $\mathring{\mathrm{K}}^{\mathrm{fin}}$, il existe un réel $\gamma > 0$ et un compact H, non polaire, $\mathrm{H} \subset \mathrm{K}^{\mathrm{fin}}$, tels que

$$\forall x \in \mathrm{H}\,, \quad \mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}\wedge 1/n} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) > \gamma$$

et par suite :

$$\forall x \in \mathrm{H}\,, \quad \mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) = +\infty\,.$$

Mais alors, comme toutes les composantes connexes fines de $\mathring{\mathrm{K}}^{\mathrm{fin}}$ rencontrent Λ, il existerait un $x_0 \in \Lambda$ tel que :

$$\mathrm{P}^{x_0}(\{\mathrm{T}_\mathrm{H} < \mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}\}) > 0 \quad (\text{cf } [20]).$$

Comme $x_0 \in \Lambda$, $\mathrm{E}^{x_0}\left(\int_0^{\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) < \infty$ ce qui est en contradiction avec le fait que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^{x_0}&\left(\int_0^{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right)\\ &\geqslant \mathrm{E}^{x_0}\Big\{\mathbf{1}_{\{\mathrm{T}_\mathrm{H}<\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}\}}\mathrm{E}^{\mathrm{X}(\mathrm{T}_\mathrm{H})}\left(\int_0^{\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}} \|\ldots\|^2\, ds\right)\\ &\qquad + \mathbf{1}_{\{\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}\leqslant \mathrm{T}_\mathrm{H}\}} \int_0^{\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}} \|\ldots\|^2\, ds\Big\} = +\infty\end{aligned}$$

car, si $\mathrm{T}_\mathrm{H} < \mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}$, $\mathrm{E}^{\mathrm{X}_\omega(\mathrm{T}_\mathrm{H})}\left(\int_0^{\mathrm{T}_{\complement\mathring{\mathrm{K}}^f}} \|\ldots\|^2\, ds\right) = +\infty$.

Il existe donc un ouvert fin Π, de complémentaire polaire dans $\mathring{\mathrm{K}}^{\mathrm{fin}}$, sur lequel, pour tout opérateur différentiel B,

$$\mathrm{E}^x\left(\int_0^{\mathrm{T}_n} \|\nabla_1 \mathrm{B}_1 f \circ \mathrm{X}_\omega(s)\|^2\, ds\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

L'ouvert fin Π sera appelé domaine de différentiabilité de f. On peut remarquer que Λ est contenu dans Π.

THÉORÈME 17. — *Soient* K *un compact et* (f_n) *une suite d'approximation forte d'une fonction* f.

Pour tout opérateur différentiel B, $B_1 f$ *admet un prolongement finement continu sur l'ouvert fin,* Π, *de complémentaire polaire dans* $\mathring{K}^{\text{fin}}$.

Démonstration. — Conservant la définition du domaine de différentiabilité, Π, de f, nous voyons que, si $x \in \Pi$, P^x-presque toutes les trajectoires rencontrent Λ avec un temps d'entrée égal à zéro. Nous nous proposons de montrer que $B_1 f$ converge vers une limite suivant le filtre des restrictions à Λ des voisinages fins de $x \in \Pi$; sinon il existerait deux boréliens Λ_1 et Λ_2 de Λ, tous deux finement adhérents à x et deux réels $\alpha < \beta$ tels que

$$B_1 f / \Lambda_1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant B_1 f / \Lambda_2 .$$

Or Λ_1 [resp. Λ_2] contient une suite croissante de compacts (H_n) [resp. (K_n)] tels que $T_{H_n} \searrow 0$ [resp. $T_{K_n} \searrow 0$], P^x-presque sûrement.

On définit deux suites de temps d'arrêts :

$$T_1 = T_{K_1} \wedge T_{C\mathring{K}^f} \wedge 1 , \qquad S_1 = T_1 \wedge T_{H_1} ,$$

$\ldots \forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists p_n \geqslant p_{n-1}$ tel que, posant

$$T_n = T_{K_{p_n}} \wedge S_{n-1} \wedge 1/n ,$$

on ait $P^x(\{T_n = T_{K_{p_n}}\}) > 1 - \dfrac{1}{2n}$.

Comme $T_{\Lambda_1} = 0$, $\exists q_n \geqslant q_{n-1}$ tel que, posant

$$S_n = T_n \wedge T_{H_{q_n}}$$

on ait $P^x(\{S_n = T_{H_{q_n}}\}) > 1 - \dfrac{1}{2n}$.

Par suite

$$P^x(\{X(S_n) \in H_{q_n} \subset \Lambda_1\} \cap \{X(T_n) \in K_{p_n} \subset \Lambda_2\}) > 1 - \frac{1}{n}$$

on a donc construit deux suites de temps d'arrêts, (S_n) et

(T_n), vérifiant $0 < S_n \leqslant T_n \leqslant 1/n$ telles que

$$P^x(\{B_1 f \circ X(S_n) \leqslant \alpha < \beta \leqslant B_1 f \circ X(T_n)\}) \nearrow 1 .$$

Alors

$$\begin{aligned}\limsup E^x \Big(\Big| \int_{S_n}^{T_n} \nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) \\ + \frac{1}{2} \int_{S_n}^{T_n} \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s) \Big|\, ds \Big) \\ \leqslant \limsup \Big\{ \Big[E^x \Big(\int_0^{T_n} \|\nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\|^2\, ds \Big]^{1/2} \\ + \frac{1}{2} E^x \Big(\int_0^{T_n} \|D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s)\|\, ds \Big) \Big\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

d'après la proposition 16.

Or :

$$\begin{aligned}\liminf E^x \Big(\Big| \int_{S_n}^{T_n} \nabla_1 B_1 f \circ X(s)\, dX(s) \\ + \frac{1}{2} \int_{S}^{T_n} \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)\, ds \Big| \Big) \\ \geqslant \liminf E^x \Big(1_{\{X(S_n) \in \Lambda,\, X(T_n) \in \Lambda\}} \Big| \int_{S_n}^{T_n} \nabla_1 B_1 f \circ X(s)\, dX(s) \\ + \frac{1}{2} \int_{S_n}^{T_n} \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)\, ds \Big| \Big).\end{aligned}$$

Ceci s'écrit encore, d'après l'assertion (iv) du théorème 15 :

$$\geqslant \liminf E^x(1_{\{X(S_n) \in \Lambda,\, X(T_n) \in \Lambda\}} |B_1 f \circ X(T_n) - B_1 f \circ X(S_n)|) \geqslant \beta - \alpha .$$

Ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu à partir de la proposition 16.

Notant $B_1 f(x)$ la limite fine de $B_1 f(z)$, $z \in \Lambda$, $z \xrightarrow[\neq]{} x$, on déduit que $B_1 f$ est finement continu sur Π .

LEMME 18. — *Conservant les définitions du théorème* 17, *pour tout* $x \in \Pi$, P^x*-presque sûrement, sur* $\{t < T_{C\mathring{K}^{\mathrm{fin}}} = T_{C\Pi}\}$:

$$B_1 f \circ X(t) = B_1 f(x) + \int_0^t \nabla_1 B_1 f \circ X(s)\, dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t T_n D_1^2 f \circ X(s)\, ds .$$

Démonstration. — Pour P^x-presque tout ω , de $\{t < T_{C\Pi}\}$, $X_\omega(t)$ appartient à Λ , par suite

$$B_1 f \circ X_\omega(t) = \lim_{n\to\infty} B f_n \circ X_\omega(t).$$

Par ailleurs $B_1 f$ est finement continu sur Π ; utilisant le lemme 6, on déduit donc que, P^x-presque sûrement, pour toute suite de temps d'arrêts

$$T_n \leqslant T_{C\Pi} \wedge 1/n : \quad B_1 f(x) = \lim_{n \to \infty} B_1 f \circ X_\omega(T_n).$$

Comme $T_\Lambda = 0$, P^x - pp , on peut construire une suite (T_n) de temps d'arrêts $T_n \leqslant n^{-1}$ tels que $P^x(\{X(T_n) \in \Lambda\}) \to 1$ $(n \to \infty)$. Utilisant la propriété (iv) du théorème 15 :

P^x-presque partout sur $\{t + T_n < T_{C\Pi}\} \cap \{X(T_n) \in \Lambda\}$:

$$B_1 f \circ X_\omega(t + T_n) = B_1 f \circ X_\omega(T_n) + \int_{T_n}^{t+T_n} \nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) + \frac{1}{2} \int_{T_n}^{t+T_n} \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s)\, ds.$$

D'où on déduit que, P^x-presque sûrement, sur $\{t < T_{C\Pi}\}$

$$B_1 f \circ X_\omega(t) - B_1 f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_{T_n}^{t+T_n} \nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) + \frac{1}{2} \int_{T_n}^{t+T_n} \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s)\, ds .$$

Comme x appartient à Π

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{T_n} \nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) + \frac{1}{2} \int_0^{T_n} \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s)\, ds = 0$$

d'où l'énoncé du lemme

$$B_1 f \circ X_\omega(t) = B_1 f(x) + \int_0^t \nabla_1 B_1 f \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X_\omega(s)\, ds .$$

THÉORÈME 19. — *Conservant les notations de la définition relative au domaine de différentiabilité, f est stochastiquement indéfiniment différentiable sur Π et l'opérateur différentiel stochastique Bf est égal à l'opérateur obtenu par limite $B_1 f$.*

Démonstration. — Soient $x \in \Pi$ et B un opérateur différentiel, nous nous proposons de montrer que le gradient stochastique $\nabla B_1 f(x)$ existe et vaut $\nabla_1 B_1 f(x)$.

Comme $\nabla_1 B_1 f$ et $D_1^2 B_1 f$ sont finement continus sur Π il existe un voisinage fin, V , de x , où

$$\sup \{\| D_1^2 B_1 f(y) \| : y \in V\} = M < \infty ,$$

et une suite décroissante (V_n) de voisinages fins de x vérifiant $V_1 \subset V$ et

$$\sup \{\|\nabla_1 B_1 f(y) - \nabla_1 B_1 f(x)\| : y \in V_n\} \leqslant 1/n.$$

Soit (T_n) la suite de temps d'arrêt : $T_n = T_{CV_n} \wedge T_{C\Pi} \wedge 1/n$; si $S_n \leqslant T_n$:

$$\begin{aligned}
E^x(|B_1 f \circ X(S_n) - B_1 f(x) &- \nabla_1 B_1 f(x)(X(S_n) - x)|^2) \\
&= E^x\Big(\Big|\int_0^{S_n} [\nabla_1 B_1 f \circ X(s) - \nabla_1 B_1 f(x)]\, dX(s) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^{S_n} \operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)\, ds\Big|^2\Big) \\
&\leqslant E^x\Big(\Big|\int_0^{S_n} [\nabla_1 B_1 f \circ X(s) - \nabla_1 B_1 f(x)]\, dX(s)\Big|^2\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4} E^x\Big(\Big(\int_0^{S_n} |\operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)|\, ds\Big)^2\Big) \\
&\quad + E^x\Big(\Big|\int_0^{S_n} [\nabla_1 B_1 f \circ X(s) - \nabla_1 B_1 f(x)]\, dX(s)\Big| \\
&\qquad \cdot \int_0^{S_n} |\operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)|\, ds\Big).
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
E^x\Big(\Big|\int_0^{S_n} [\nabla_1 B_1 f \circ X(s) &- \nabla_1 B_1 f(x)]\, dX(s)\Big|^2\Big) \\
&= E^x\Big(\int_0^{S_n} \|\nabla_1 B_1 f \circ X(s) - \nabla_1 B_1 f(x)\|^2\, ds\Big) \\
&\leqslant (1/n)^2 E^x(S_n) = o[E^x(S_n)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^x\Big(\Big(\int_0^{S_n} |\operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f &\circ X(s)|\, ds\Big)^2\Big) \\
&\leqslant M^2 E^x(S_n^2) \leqslant \frac{M^2}{n} E^x(S_n) = o[E^x(S_n)],
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E^x\Big(\Big|\int_0^{S_n} [\nabla_1 B_1 f \circ X(s) &- \nabla_1 B_1 f(x)]\, dX(s)\Big| \\
&\cdot \int_0^{S_n} |\operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f \circ X(s)|\, ds\Big) \\
\leqslant \Big[E^x\Big(\Big|\int_0^{S_n} [\nabla_1 B_1 f &\circ X(s) - \nabla_1 B_1 f(x)]\, dX(s)\Big|^2\Big)\Big]^{1/2} \\
\times \Big[E^x\Big(\Big(\int_0^{S_n} |\operatorname{Tr} D_1^2 B_1 f &\circ X(s)|\, ds\Big)^2\Big)\Big]^{1/2} \\
\leqslant \frac{1}{n}[E^x(S_n)]^{1/2} \cdot \frac{M}{n^{1/2}} [E^x(S_n)]^{1/2} &= o[E^x(S_n)].
\end{aligned}$$

D'où il résulte que $\nabla B_1 f(x)$ existe et égale $\nabla_1 B_1 f(x)$.

Remarque 20. — La démonstration du théorème 19 nous montre que le gradient stochastique de B_1 existe et vaut $\nabla_1 B_1 f$; par suite f est indéfiniment stochastiquement différentiable. Il résulte alors du lemme 18 et de la remarque 5 que f est stochastiquement différentiable à tout ordre.

Nous avons montré que, lorsque f est limite d'une suite d'approximation forte, f est stochastiquement indéfiniment différentiable. Nous nous proposons, à présent, de prouver que les dérivées partielles de tous ordres d'une fonction finement harmonique admettant une suite d'approximation harmonique forte sont finement harmoniques sur le domaine de différentiabilité.

Théorème 21. — *Soit f une fonction continue sur un compact K, admettant une suite d'approximation harmonique forte (f_n). Sur le domaine de différentiabilité Π tel que $\mathring{K}^{\text{fin}} \setminus \Pi$ soit polaire, pour tout opérateur différentiel stochastique B, la fonction Bf est finement harmonique.*

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial e_1}$ est finement harmonique sur Π.

Soient $x \in \Pi$ et H un compact, $x \in \mathring{H}^{\text{fin}} \subset H \subset \Pi$. Si (f_n) est une suite d'approximation harmonique forte de f, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_n}{\partial e_1}$ sont harmoniques sur leur ouvert de définition; par suite

$$\frac{\partial f_n}{\partial e_1}(x) = E^x\left[\frac{\partial f_n}{\partial e_1} \circ X(t \wedge T_{C\mathring{H}^{\text{fin}}})\right].$$

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial e_1}$ est finement continue sur Π, nous pouvons supposer que, sur H, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial e_1}\right|$ est uniformément majorée.

Pour tout $y \in \Lambda \cap \mathring{H}^{\text{fin}}$:

$$E^y\left(\left|\frac{\partial f_n}{\partial e_1} - \frac{\partial f}{\partial e_1}\right| \circ X(t \wedge T_{C\mathring{H}^{\text{fin}}})\right) \leqslant \left|\frac{\partial f_n}{\partial e_1}(y) - \frac{\partial f}{\partial e_1}(y)\right|$$
$$+ E^y\left[\left|\int_0^{t\wedge T_{C\mathring{H}^{\text{fin}}}} \nabla\left(\frac{\partial f_n}{\partial e_1} - \frac{\partial f}{\partial e_1}\right) \circ X_\omega(s)\, dX_\omega(s)\right|\right].$$

Comme $y \in \Lambda$:

$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial e_1} - \frac{\partial f}{\partial e_1}\right| (y) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

et

$$\left(\mathrm{E}^y\left[\left|\int_0^{t \wedge \mathrm{T}_{\mathrm{C}\mathring{\mathrm{H}}^f}} \nabla\left(\frac{\partial f_n}{\partial e_1} - \frac{\partial f}{\partial e_1}\right) \circ \mathrm{X}_\omega(s)\, d\mathrm{X}_\omega(s)\right|\right]\right)^2$$
$$\leqslant \mathrm{E}^y\left[\int_0^{\mathrm{T}_{\mathrm{C}\mathring{\mathrm{K}}^{\mathrm{fin}}}} \left\|\nabla\left(\frac{\partial f_n}{\partial e_1}\frac{\partial f}{\partial e_1}\right) \circ \mathrm{X}_\omega(s)\right\|^2 ds\right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Il en résulte que, pour tout $y \in \Lambda \cap \mathring{\mathrm{H}}^{\mathrm{fin}}$

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(y) = \mathrm{E}^y\left[\frac{\partial f}{\partial e_1} \circ \mathrm{X}(t \wedge \mathrm{T}_{\mathrm{C}\mathring{\mathrm{H}}^{\mathrm{fin}}})\right].$$

Or $\dfrac{\partial f}{\partial e_1}$ est finement continu sur $\Pi \cap \mathring{\mathrm{H}}^{\mathrm{fin}} = \mathring{\mathrm{H}}^{\mathrm{fin}}$ ainsi que $\mathrm{E}^\bullet\left[\dfrac{\partial f}{\partial e_1} \circ \mathrm{X}(t \wedge \mathrm{T}_{\mathrm{C}\mathring{\mathrm{H}}^{\mathrm{fin}}})\right]$; les deux fonctions coïncident donc et $\dfrac{\partial f}{\partial e_1}$ est finement harmonique sur Π .

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bauer, Harmonic Spaces and associated Markov processes, Congrès Mathématique d'été de Stresa (1970).

[2] Blumenthal and Getoor, Markov processes and potential theory, Academic Press.

[3] H. Cartan, Sur les fondements de la théorie du potentiel, *Bull. Soc. Math. France*, 69 (1941).

[4] H. Cartan, Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suite de potentiels, *Bull. Soc. Math France*, 73 (1945).

[5] Courant and Hilbert, Methods of mathematical physics, Interscience publishers.

[6] Debiard et Gaveau, Potentiels fins et algèbres de fonctions, *Journal of Functional Analysis*, Juillet (1974).

[7] D. Dehen et M. Mastrangelo-Dehen, Étude de fonctions finement harmoniques sur des ouverts fins de C , *CR Acad. Sc.* Paris, Série A, 275 (7 Août 72).

[8] D. Dehen et M. Mastrangelo-Dehen, Propriété de Lindeberg et points finement intérieur, *Bulletin des Sciences Mathématiques* (à paraître).

[9] D. Dehen et M. Mastrangelo-Dehen, Propriétés infinitésimales du mouvement brownien par rapport à la topologie fine, *CR. Acad. Sci.* Paris, (13 Novembre 1974).

[10] J. DENY et J. L. LIONS, Les espaces du type de BEPPO-LEVY, *Ann. Inst. Fourier*, V (1953-54), 305-370.

[11] DOOB, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France*, n° 85 (1957).

[12] E. B. DYNKIN, Excessive functions and space of exists of a Markov process, *Theor. Probab. Appl.*, 14 (1969), 37-54.

[13] E. B. DYNKIN, The space of exits of a Markov process, *Russian Math Survey*, (4), 24 (1969).

[14] E. B. DYNKIN, Markov Processes, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1965).

[15] B. FUGLEDE, Finely harmonic functions, *Lect. Notes in Math.* n° 289 Springer Verlag, et communication au Séminaire de Théorie du Potentiel, 17 et 18 mai 1973, Paris.

[16] ITO, Lectures on Stochastic processes, Tata Institute Bombay, (1969).

[17] ITO and MAC KEAN, Diffusion processes and their sample paths, Springer Verlag.

[18] MAC-KEAN, Stochastic Integrals, Academic Press.

[19] P. A. MEYER, Processus de Markov, *Lect. Notes in Math.* n° 26, Springer Verlag.

[20] NGUYEN XUAN LOC, Caracterisation of excessive functions on finely open nearly Borel sets, *Math. Ann.*, 196 (1972), 250-268.

[21] SKOHOROD und GIHMAN, Stochastic differential equations, *Ergebnisse des Mathematik und ihrer grenggebiete*, Band 72.

[22] DE LA VALLÉE POUSSIN, Points irréguliers, détermination des masses par les potentiels, *Bull. Acad. Royale Belgique*, Sér. 5, t. 24.

[23] WIDDER, The Laplace transform, Princeton University Press, 1946.

Manuscrit reçu le 14 mars 1977
Proposé par G. Choquet.

Michèle MASTRANGELO-DEHEN,
Équipe d'Analyse
E.R.A. au C.N.R.S. n° 294
Université P. et M. Curie
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.