ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL LASSALLE

Sur la transformation de Fourier-Laurent dans un groupe analytique complexe réductif

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 1 (1978), p. 115-138

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_1_115_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 1 (1978), 115-138

SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER - LAURENT DANS UN GROUPE ANALYTIQUE COMPLEXE RÉDUCTIF

par Michel LASSALLE

Introduction.

Ce travail généralise au cas d'un groupe analytique compact un résultat bien connu pour l'espace euclidien (ou pour le tore) : la possibilité de caractériser l'analyticité d'une fonction dans certains domaines du complexifié du groupe par la décroissance exponentielle dans des directions correspondantes de sa transformée de Fourier-Laplace (ou de Fourier-Laurent). Les "tubes" dans $\mathbf{C}^n$ (resp. les "domaines de Reinhardt" dans $(\mathbf{C}^*)^n$) sont alors les domaines d'analyticité appropriés. On désigne ainsi les domaines de $\mathbf{C}^n$ (resp. de $(\mathbf{C}^*)^n$) invariants par le groupe réel des translations (resp. du tore). Ces domaines sont caractérisés par leur "base", qui est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$. On sait alors qu'il est équivalent de dire qu'une fonction est holomorphe dans un tube (resp. un domaine de Reinhardt) de base B, ou que sa transformée de Fourier-Laplace (resp. de Fourier-Laurent) admet comme "indicatrice de décroissance" l'ensemble "polaire" de B.

On généralise ici ce résultat à un groupe de Lie compact connexe H. Son complexifié universel G est alors un groupe analytique complexe réductif. On introduit dans G une classe de "domaines de Reinhardt généralisés", bi-invariants par H et caractérisés par la donnée d'une "base" définie dans une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre de Lie du groupe H et invariante par le groupe de Weyl.

On donne (Théorème 1) une caractérisation par la "décroissance exponentielle" de leurs "coefficients de Fourier-Laurent" des fonctions qui sont holomorphes dans un domaine de Reinhardt généralisé et régulières sur le groupe H. Cette restriction est écartée au Théorème 2 où la caractérisation précédente est étendue au cas général de valeurs au bord hyperfonctions.

On montre (Théorème 3) qu'un domaine de Reinhardt généralisé à base convexe est une variété de Stein.

On obtient au Théorème 4 une généralisation du "théorème du tube" : l'enveloppe d'holomorphie du domaine de Reinhardt généralisé de base B est le domaine de Reinhardt généralisé dont la base est l'enveloppe convexe de B. Cependant l'invariance par le groupe de Weyl fait apparaître de nouveaux phénomènes géométriques par rapport au cas abélien.

Finalement on peut établir très simplement un théorème de prolongement analytique global du type "edge of the wedge" (Théorème 5).

Je suis reconnaissant à M. Jacques Bros qui m'a indiqué ce problème. Je remercie M. Louis Boutet de Monvel pour ses suggestions.

1. Généralités.

1.1. Groupes analytiques complexes réductifs.

Soit H un groupe analytique compact, $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie, G le complexifié universel de H d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. H est alors un sous-groupe compact maximal de G et $\mathfrak{h}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$ ([7], Théorèmes 5.1 et 5.3, p. 226-229). On a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus i\,\mathfrak{h}$$

et l'application σ définie par :

$$\sigma(X + iY) = X - iY \quad (X, Y \in \mathfrak{h})$$

est un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$, qui induit un automorphisme involutif de G dont l'ensemble des points fixes est H.

Alors ([6], p. 174) l'espace homogène G/H est un espace riemannien globalement symétrique à courbure non positive. On note $\pi : G \longrightarrow G/H$ la projection naturelle.

$\mathfrak{h}$ est la somme directe de son centre $\mathfrak{z}$ et de l'algèbre semi-simple compacte $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}'.$$

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{z}$ est contenue dans $\mathfrak{a}$ et on a :

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{c}$$

où $\mathfrak{c}$ est maximale abélienne dans $\mathfrak{h}'$. On note $\mathfrak{h}'_c$ la complexification de $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{c}_c$ la complexification de $\mathfrak{c}$. Alors $\mathfrak{c}_c$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}'_c$: on note Δ l'ensemble des racines correspondantes.

Celles-ci prennent leurs valeurs réelles sur $i\mathfrak{c}$: on choisit une chambre de Weyl $i\mathfrak{c}^+$ dans $i\mathfrak{c}$, c'est-à-dire une des composantes connexes de l'ouvert de $i\mathfrak{c}$ où aucune racine $\alpha \in \Delta$ ne s'annule. $\mathfrak{c}^+$ est un cône ouvert convexe dans $\mathfrak{c}$ et on note :

$$\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{c}^+ , \quad \overline{\mathfrak{a}^+} = \mathfrak{z} \oplus \overline{\mathfrak{c}^+}$$

où $\overline{\mathfrak{c}^+}$ désigne la fermeture de $\mathfrak{c}^+$ dans $\mathfrak{c}$.

THEOREME. – *On a les deux décompositions suivantes de* G :

i) $G = (\exp i\,\mathfrak{h}).\ H$

Tout élément de G *peut s'écrire :*

$$g = \exp iX.\ h\,. \tag{1}$$

Cette décomposition est unique et l'application de $\mathfrak{h} \times H$ *dans* G *définie par* $(X, h) \longmapsto \exp iX.h$ *est un difféomorphisme analytique. L'application* $\varphi : X \longmapsto \pi(\exp iX)$ *est un difféomorphisme analytique de* $\mathfrak{h}$ *dans* G/H.

ii) $G = H.\,(\exp i\,\overline{\mathfrak{a}^+}).\ H$

Tout élément de G *peut s'écrire :*

$$g = h_1 .\ \exp iA(g).h_2 \tag{2}$$

où $A(g) \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ *est unique, mais ni* h_1, *ni* h_2.

La preuve de ces décompositions est classique lorsque G est un groupe analytique complexe semi-simple [8]. Pour le principe de leur extension au cas où G est analytique complexe réductif, voir [12], p. 42.

Remarque 1. – Le lien entre les deux décompositions est le suivant. Désignons par A le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans H. Alors

([6], Lemme 1.16, p. 381) l'application : $(h\mathrm{A}, \mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{Ad}\, h.\mathrm{X}$ est un difféomorphisme de $(\mathrm{H}/\mathrm{A}) \times \mathfrak{a}^+$ dans $\mathfrak{h}$ moins un ensemble de mesure nulle.

1.2. Transformation de Fourier sur H.

H est un groupe analytique compact : on note dh sa mesure de Haar de masse 1 et $\hat{\mathrm{H}}$ l'ensemble des classes d'équivalence de ses représentations irréductibles (de dimension finie).

Dans chaque classe de $\hat{\mathrm{H}}$ on choisit un représentant M : M est une représentation unitaire de H dans un espace hilbertien $\mathrm{V_M}$ de dimension $d(\mathrm{M})$. L'ensemble des représentations ainsi obtenu est encore noté $\hat{\mathrm{H}}$.

Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{H}, dh)$ sa transformée de Fourier est définie par :

$$\hat{f}(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{H}} f(h)\, \mathrm{M}^*(h)\, dh \qquad (\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}). \tag{3}$$

C'est pour tout $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}$ un opérateur continu dans $\mathrm{V_M}$ (M^* est l'adjoint de M dans $\mathcal{L}(\mathrm{V_M})$).

On a une formule de Plancherel :

$$\|f\|^2 = \sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}} d(\mathrm{M})\ |||\hat{f}(\mathrm{M})|||^2 \tag{4}$$

où $|||\mathrm{A}||| = (\mathrm{tr}\, \mathrm{AA}^*)^{1/2}$ est la norme de Hilbert-Schmidt de A. Si f est C^∞, on a une formule d'inversion :

$$f(h) = \sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}} d(\mathrm{M})\ \mathrm{tr}\, [\hat{f}(\mathrm{M})\, \mathrm{M}(h)]. \tag{5}$$

Chaque représentation unitaire $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}$ induit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ (encore notée M) par des opérateurs anti-hermitiens.

Par la propriété universelle du groupe complexifié G ([7], ch. XVII.5, p. 225) chaque représentation $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}$ du groupe H dans $\mathrm{V_M}$ (ou son adjointe M^*) se prolonge de manière unique en une représentation *holomorphe* (encore notée M ou M^*) de G dans $\mathrm{V_M}$. On remarque que dans cette extension les éléments de la forme $(\exp i\mathrm{X}, \mathrm{X} \in \mathfrak{h})$ sont représentés par des opérateurs hermitiens définis positifs.

1.3. Représentations irréductibles de H.

On désigne maintenant par A le tore maximal de H d'algèbre $\mathfrak{a}$. On note H′ le groupe compact semi-simple simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{h}'$. Soit t le rang de H′ et s la dimension de $\mathfrak{z}$.

On note $\Delta^+ \subset \Delta$ l'ensemble des racines positives de $(\mathfrak{h}'_c, \mathfrak{c}_c)$ associées à la chambre de Weyl $i\mathfrak{c}^+ \subset i\mathfrak{c}$, et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\}$ le système de racines simples correspondant. Soit $\{H_1, \ldots, H_t\}$ l'ensemble des coracines associées. Si $<.,.>$ désigne la forme de Killing induite par $\mathfrak{g}$ sur $i\mathfrak{c} \times i\mathfrak{c}$, on a par définition :

$$\langle H_{\alpha_j}, H\rangle = \alpha_j(H) \qquad (H \in i\mathfrak{c})$$

$$\langle \alpha_j, \alpha_k\rangle = \langle H_{\alpha_j}, H_{\alpha_k}\rangle$$

$$H_j = \frac{2}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} H_{\alpha_j} \qquad (1 \leqslant j,\ k \leqslant t).$$

On note W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{h}'_c, \mathfrak{c}_c)$. Si $w \in W$ on étend w à $\mathfrak{a}_c$ en posant $wX = X$ pour tout $X \in \mathfrak{z}_c$.

On désigne par $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_t\}$ l'ensemble des poids dominants fondamentaux sur $i\mathfrak{c}$ définis par :

$$\Lambda_j(H_k) = \delta_{jk} \qquad (1 \leqslant j,\ k \leqslant t).$$

Si l'on pose :

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{t} n_j \Lambda_j \qquad (n_j \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant j \leqslant t)$$

on voit que les formes linéaires intégrales dominantes sur $i\mathfrak{c}$ sont paramétrées par les points d'un réseau isomorphe à $\mathbf{N}^t$.

On sait alors ([11], Théorème 4.6.6, p. 96) qu'il y a une correspondance bijective entre les éléments de $\hat{H}'$ et les formes linéaires intégrales dominantes sur $i\mathfrak{c}$: celle qui à toute représentation $M \in \hat{H}'$ associe le plus haut poids de la représentation de $\mathfrak{h}'_c$ correspondante.

On sait aussi ([11], Théorème 4.6.12, p. 98) qu'il existe une correspondance bijective entre les éléments de $\hat{H}$ et les formes linéaires à valeurs réelles sur $i\,\mathfrak{a}$:

i) qui sont la différentielle d'un caractère de A,

ii) dont la restriction à $i\mathfrak{c}$ est une forme intégrale dominante.

On note $(i\mathfrak{a})^*$ l'ensemble des formes linéaires à valeurs réelles sur $i\mathfrak{a}$ et $\mathcal{P} \subset (i\mathfrak{a})^*$ le sous-ensemble discret défini par ces conditions. Chaque forme $\Lambda \in \mathcal{P}$ spécifie un élément de $\hat{\mathrm{H}}$, qu'on désigne désormais par M_Λ : on dit que Λ est le plus haut poids de M_Λ.

Désignons par :

$$\Gamma = \{X \in \mathfrak{z} : \exp X = 1\}$$

le réseau des périodes de $\mathfrak{z}$ et par Γ^* le réseau dual défini par :

$$\Gamma^* = \{\lambda \in (i\mathfrak{z})^* : \lambda(i\Gamma) \subset 2\pi\mathbf{Z}\}.$$

Alors tout $\Lambda \in \mathcal{P}$ s'écrit de manière unique : $\Lambda = \lambda + \Lambda'$, où $\lambda \in \Gamma^*$ et Λ' est une forme intégrale dominante sur $i\mathfrak{c}$.

2. Définitions.

2.1. *Domaines de Reinhardt généralisés.*

On appelle domaine de Reinhardt généralisé dans G tout ouvert connexe $\mathcal{D} \subset \mathrm{G}$ bi-invariant par H, c'est-à-dire :

$$\mathrm{H}\mathcal{D}\mathrm{H} = \mathcal{D}.$$

La décomposition (2) indique qu'un tel domaine est uniquement déterminé par la famille $\widehat{\mathrm{B}} = \{\mathrm{A}(g),\ g \in \mathcal{D}\}$ des éléments de $\overline{\mathfrak{a}^+} = \mathfrak{z} \oplus \overline{\mathfrak{c}^+}$ définis par :

$$g = h_1 \,.\, \exp i\mathrm{A}(g) \,.\, h_2 .$$

$\widehat{\mathrm{B}}$ est une partie connexe, relativement ouverte de $\overline{\mathfrak{a}^+}$. On désigne par :

$$\mathrm{B} = \bigcup_{w \in \mathrm{W}} w\widehat{\mathrm{B}}$$

la réunion de toutes les W-orbites de $\mathfrak{a}$ rencontrant $\widehat{\mathrm{B}}$: $\widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{B}/\mathrm{W}$. B est appellée la *base* de $\mathcal{D}$: c'est une partie ouverte de $\mathfrak{a}$ invariante par le groupe de Weyl. On note :

$$\mathcal{D}_\mathrm{B} = \mathrm{H} \,.\, \exp i\mathrm{B} \,.\, \mathrm{H}$$

le domaine de Reinhardt généralisé de base B.

Tout élément de $\mathcal{D}_\mathrm{B}$ s'écrit :

$$g = h_1 \,.\, \exp i\mathrm{X} \,.\, h_2 \quad (\mathrm{X} \in \mathrm{B}\ ;\ h_1, h_2 \in \mathrm{H})$$

et de manière unique :

$$g = u \,.\, \exp iX \,.\, u^{-1}h \quad (X \in \widehat{B},\ h \in H,\ uA \in H/A) \tag{6}$$

(A est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans H).

Sans que cette hypothèse soit restrictive de généralité, on ne considère plus désormais que des domaines bi-invariants *dont l'adhérence contienne H* : l'origine de $\mathfrak{a}$ appartient alors à l'adhérence de B (et à celle de $\widehat{B}$). On leur réserve le terme de domaine de Reinhardt généralisé.

Remarque 2. – Notons que contrairement au cas abélien la base d'un domaine de Reinhardt généralisé n'est pas nécessairement connexe.

Remarque 3. – Soit $\mathcal{E}$ un domaine de G invariant à droite : $\mathcal{E}H = \mathcal{E}$. La décomposition (1) indique que :

$$\mathcal{E} = \exp i\, E.H$$

où E est un domaine de $\mathfrak{h}$: $E = \varphi^{-1} \circ \pi(\mathcal{E})$. Il résulte de la Remarque 1 que dans le cas d'un domaine bi-invariant $\mathcal{D}$, $\varphi^{-1} \circ \pi(\mathcal{D})$ est *stable* par AdH. Il est immédiat que parmi les domaines invariants à droite cette propriété caractérise les domaines bi-invariants.

2.2. Fonction d'appui, polaire.

Soit B une partie bornée de $\mathfrak{a}$. On appelle *fonction d'appui* de B et on note h_B l'application de $(i\mathfrak{a})^*$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$h_B(\mu) = \sup_{X \in B} \mu(iX).$$

Elle est continue et homogène de degré un :

$$\forall t > 0 \qquad h_B(t\mu) = t\, h_B(\mu).$$

On appelle *polaire* de B l'ensemble :

$$\hat{B} = \{\mu \in (i\mathfrak{a})^* : h_B(\mu) \leqslant 1\}.$$

$\hat{B}$ est un fermé convexe de $(i\mathfrak{a})^*$.

Dans toute la suite, on munit $i\mathfrak{a}$ d'une norme $\| \ \|$, invariante par le groupe de Weyl. On note ib la boule unité ouverte correspondante. On munit $(i\mathfrak{a})^*$ de la norme duale, encore notée $\| \ \|$.

Ultérieurement les relations suivantes seront utiles. Si A et B sont deux parties bornées de $\mathfrak{a}$, on a :

$$h_{A+B} = h_A + h_B \tag{7}$$

$$h_{A \cup B} = \sup (h_A , h_B) \tag{8}$$

$$h_{B^c} = h_B \tag{9}$$

où B^c désigne l'enveloppe convexe de B. Pour $\epsilon > 0$, on a :

$$h_{\epsilon b}(\mu) = \epsilon \|\mu\| \tag{10}$$

par définition de la norme duale.

Remarque 4. – Soient Δ l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{h}'$ et $\{e_1, \ldots, e_s\}$ une base de $\mathfrak{z}$. L'opérateur $\nabla = - \sum_{j=1}^{s} e_j^2 + \Delta$ appartient au centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. On note $\delta(\Lambda)$ les scalaires positifs définis par :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \qquad M_\Lambda(\Delta) = (\delta(\Lambda))^2 \, \mathbf{1}_{V_{M_\Lambda}}.$$

Alors on sait ([11], Lemme 5.6.6, p. 125) que $\delta(\Lambda)$ et $\|\Lambda\|$ sont équivalents :

$$\exists\, c_1, c_2 > 0 \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{R} \qquad c_1 \|\Lambda\| \leqslant \delta(\Lambda) \leqslant c_2 \|\Lambda\|.$$

Remarque 5. – On rappelle ([11], Lemme 5.6.7, p. 126) que $d(M_\Lambda)$ est polynômial en $\|\Lambda\|$:

$$\exists\, c > 0, \ r \in \mathbf{N} \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad d(M_\Lambda) \leqslant c(1 + \|\Lambda\|)^r. \tag{11}$$

3. Caractérisation des fonctions holomorphes.

Nous nous proposons maintenant de donner une caractérisation par leurs coefficients de Fourier-Laurent des fonctions holomorphes dans un domaine de Reinhardt généralisé. Nous utiliserons pour cela les résultats auxiliaires suivants.

PROPOSITION 1. – *Avec la notation (2), on a pour tout* $\Lambda \in \mathcal{R}$ *et tout* $g \in G$:

$$|||M_\Lambda(g)||| = |||M_\Lambda\ (\exp iA(g))|||$$

$$e^{\Lambda(iA(g))} \leqslant |||M_\Lambda(g)||| \leqslant (d(M_\Lambda))^{1/2}\ e^{\Lambda(iA(g))} \quad .$$

Preuve. – L'égalité est une conséquence directe de la décomposition (2), de l'unitarité des opérateurs $\{M_\Lambda(h), h \in H\}$ et de la relation $tr(AB) = tr(BA)$.

Comme on l'a vu on a pour tout $\Lambda \in \mathcal{R}$: $\Lambda = \lambda + \Lambda'$, où λ(resp. Λ') est une forme linéaire sur $i\mathfrak{z}$ (resp. intégrale dominante sur $i\mathfrak{c}$).

Désignons par $\{\omega_j, 1 \leqslant j \leqslant d(M_\Lambda)\}$ la famille des poids (avec multiplicité) de la représentation de $\mathfrak{h}'_c$ ayant Λ' pour plus haut poids.

C'est par rapport à la chambre de Weyl $i\mathfrak{c}^+$ que nous avons défini le système de racines positives. Aussi pour tout $X \in \overline{\mathfrak{c}^+}$, on a :

$$\omega_j(iX) \leqslant \Lambda'(iX) \qquad (1 \leqslant j \leqslant d(M_\Lambda)). \tag{12}$$

Dans une base convenable l'opérateur M_Λ (exp $iA(g)$) est représenté par la matrice diagonale hermitienne définie positive :

$$\{e^{\lambda(iZ(g)) + \omega_j\ (iX(g))}\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant d(M_\Lambda)\}$$

où $Z(g)$ (resp. $X(g)$) désigne la composante de $A(g) \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ dans $\mathfrak{z}$ (resp. $\overline{\mathfrak{c}^+}$).

Alors (12) implique :

$$e^{\lambda(iZ(g)) + \Lambda'\ (iX(g))} \leqslant |||M_\Lambda\ (\exp iA(g))||| \leqslant (d(M_\Lambda))^{1/2}\ e^{\lambda(iZ(g)) + \Lambda'\ (iX(g))}$$

ce qui achève la preuve. ■

PROPOSITION 2. – *Pour tout* $M \in \hat{H}$ *et tout* $g \in G$, *on a :*

$$\int_H M(u\ .\ \exp iA(g)\ .\ u^{-1})du = (d(M))^{-1}\ tr[M(\exp iA(g))]\ \mathbf{1}_{V_M}. \tag{13}$$

Preuve. – C'est une conséquence élémentaire du lemme de Schur. Le membre de gauche de (13) est en effet en endomorphisme de V_M qui commute avec la représentation irréductible M : ceci résulte immédiatement de l'invariance par translation de la mesure *du*. On a donc :

$$\int_{\mathrm{H}} \mathrm{M}(u\,.\,\exp i\mathrm{A}(g)\,.\,u^{-1})\,du = \lambda\,\mathbf{1}_{\mathrm{V}_{\mathrm{M}}}$$

et la valeur de λ est obtenue en prenant la trace de chaque membre. ∎

Remarque 6. — On a, pour tout $\Lambda \in \mathfrak{L}$ et tout $\mathrm{X} \in \overline{\mathfrak{a}^+}$:

$$e^{\Lambda(i\mathrm{X})} \leqslant tr[\mathrm{M}_\Lambda(\exp i\mathrm{X})] \leqslant d(\mathrm{M}_\Lambda)\, e^{\Lambda(i\mathrm{X})}. \tag{14}$$

PROPOSITION 3. — *Pour toute partie bornée* $\mathrm{B} \subset \mathfrak{a}$ *invariante par le groupe de Weyl, soit* $\widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{B}/\mathrm{W}$ *la partie de* $\overline{\mathfrak{a}^+}$ *correspondante. Alors on a la relation suivante entre les fonctions d'appui de* B *et de* $\widehat{\mathrm{B}}$:

$$\forall \Lambda \in \mathfrak{L} \qquad h_{\mathrm{B}}(\Lambda) = h_{\widehat{\mathrm{B}}}(\Lambda).$$

Preuve. — Il suffit de montrer que :

$$\forall \Lambda \in \mathfrak{L} \qquad h_{\mathrm{B}}(\Lambda) \leqslant h_{\widehat{\mathrm{B}}}(\Lambda) \tag{15}$$

puisque l'inégalité :

$$\forall \mu \in (i\,\mathfrak{a})^* \qquad h_{\mathrm{B}}(\mu) \geqslant h_{\widehat{\mathrm{B}}}(\mu)$$

est évidente. Pour tout $\Lambda \in \mathfrak{L}$ on a vu que : $\Lambda = \lambda + \Lambda'$, où λ(resp. Λ') est une forme linéaire sur $i\,\mathfrak{z}$ (resp. intégrale dominante sur $i\,\mathfrak{c}$).

Alors pour tout $\mathrm{X} \in \overline{\mathfrak{c}^+}$, on a :

$$\forall\, w \in \mathrm{W} \quad \Lambda'(iw\mathrm{X}) = w^{-1}\Lambda'(i\mathrm{X}) \leqslant \Lambda'(i\mathrm{X})$$

puisque $w^{-1}\Lambda'$ est un des poids de la représentation de $\mathfrak{h}'_c$ ayant Λ' pour plus haut poids (dans l'ordre induit par $i\mathfrak{c}^+$). On en déduit que pour tout $\mathrm{X} \in \overline{\mathfrak{a}^+}$, on a :

$$\forall \Lambda \in \mathfrak{L},\ w \in \mathrm{W} \qquad \Lambda(iw\mathrm{X}) \leqslant \Lambda(i\mathrm{X})$$

d'où (15) et le résultat annoncé. ∎

PROPOSITION 4. — *Soit* F *une fonction holomorphe dans un domaine* $\mathcal{E}$ *de* G *invariant à droite par* H, f *sa restriction à* H *supposée continue. Pour tout* $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}$, *on note :*

$$\hat{f}_g(\mathrm{M}) = \int_{\mathrm{H}} \mathrm{F}(gh)\, \mathrm{M}^*(gh)\, dh \qquad (g \in \mathscr{E}).$$

Alors $\hat{f}_g(\mathrm{M})$ *est constant sur* $\mathscr{E}$ *et c'est le coefficient de Fourier* $\hat{f}(\mathrm{M})$ *de la fonction* f.

Preuve. – Clairement $\hat{f}_g(\mathrm{M})$ est une fonction holomorphe de g dans l'ouvert connexe $\mathscr{E}$. Pour conclure il suffit donc de vérifier qu'elle est constante sur une classe à gauche $g_0\mathrm{H}$, $g_0 \in \mathscr{E}$ arbitraire. Mais c'est une conséquence immédiate de l'invariance par translation de la mesure dh. ■

DEFINITION. – *On dit que les opérateurs continus* $\{\hat{f}(\mathrm{M}),\ \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}\}$ *sont les coefficients de Fourier-Laurent de la fonction holomorphe. On appelle série de Fourier-Laurent de* f *la série :*

$$\sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}} d(\mathrm{M})\ tr[\hat{f}(\mathrm{M})\, \mathrm{M}(g)] \qquad (g \in \mathscr{E}).$$

THEOREME 1. – *Soient* f *une fonction* C^∞ *sur* H, B *un ouvert de* $\mathfrak{a}$ *invariant par* W, *avec* $0 \in \overline{\mathrm{B}}$. *Il est équivalent de dire :*

i) f *est la restriction à* H *d'une fonction* F *holomorphe dans le domaine de Reinhardt généralisé* $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ *de base* B,

ii) *pour tout compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}$ *invariant par* W, *il existe une constante* $\mathrm{C_K} > 0$ *telle que :*

$$\forall \Lambda \in \mathscr{R} \qquad |||\hat{f}(\mathrm{M}_\Lambda)||| \leqslant \mathrm{C_K}\, e^{-h_{\mathrm{K}}(\Lambda)}. \tag{16}$$

La série de Fourier-Laurent de f *converge alors normalement vers* F *sur tout compact de* $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$.

Remarque 7. – :

a) Dans le cas particulier où la base est une boule centrée en 0, ce résultat a été obtenu indépendamment dans [5] par une autre méthode.

b) En vertu de l'homogénéité de h_{K}, la condition ii) est une condition de "décroissance exponentielle" en dehors du polaire $\hat{\mathrm{B}}$ de B. On peut exprimer ce résultat en disant que $\hat{\mathrm{B}}$ est le "support essentiel" de la famille d'opérateurs $\{\hat{f}(\mathrm{M}),\ \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{H}}\}$.

c) Par la Remarque 5, la condition ii) et la condition suivante sont visiblement équivalentes : pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}$ invariant par W, il existe $\mathrm{C_K} > 0$ tel que :

$$\forall \Lambda \in \mathscr{R} \qquad |||\hat{f}(\mathrm{M}_\Lambda)||| \leqslant \mathrm{C_K}[d(\mathrm{M}_\Lambda)]^{3/2}\, e^{-h_{\mathrm{K}}(\Lambda)}.$$

Preuve. – Première partie : i) $\Rightarrow$ ii)

Utilisons l'invariance à droite de $\mathcal{D}_B$: la Proposition 4 assure que pour tout $g \in \mathcal{D}_B$, on a :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad \hat{f}(M_\Lambda) = [\int_H F(gh)\, M_\Lambda^*(h)\, dh]\, M_\Lambda^*(g)\ .$$

Utilisons la bi-invariance de $\mathcal{D}_B$: la relation (6) indique que pour tout $uA \in H/A$ et tout $X \in \widehat{B} = B/W$, on a :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad \hat{f}(M_\Lambda) = [\int_H F(u\,.\exp iX\,.\,u^{-1}h)\, M_\Lambda^*(h)\, dh]\, M_\Lambda^*(u\,.\exp iX\,.\,u^{-1})$$

ou encore :

$$\hat{f}(M_\Lambda)\, M_\Lambda(u\,.\exp iX\,.\,u^{-1}) = \int_H F(u\,.\exp iX\,.\,u^{-1}h)\, M_\Lambda^*(h)\, dh\ .$$

On peut intégrer cette relation sur le groupe H et appliquer la Proposition 2. On obtient pour tout $X \in \widehat{B}$:

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad \hat{f}(M_\Lambda) = d(M_\Lambda)\, [tr(M_\Lambda(\exp iX))]^{-1} \int_{H\times H} F(u\,.\exp iX\,.\,u^{-1}h)\, M_\Lambda^*(h)\, dh\, du.$$

Il en résulte que si l'on pose :

$$C_X = \int_{H\times H} |F(u\,.\exp iX\,.\,u^{-1}h)|\, dh\, du$$

on a pour tout $X \in \widehat{B}$:

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad |||\hat{f}(M_\Lambda)||| \leqslant C_X (d(M_\Lambda))^{3/2}\ [tr(M_\Lambda(\exp iX))]^{-1}$$

ou encore grâce à (14) :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R}\ ,\ X \in \widehat{B} \quad |||\hat{f}(M_\Lambda)||| \leqslant C_X (d(M_\Lambda))^{3/2}\ e^{-\Lambda(iX)}. \tag{17}$$

Soit alors K un compact contenu dans B et invariant par W. De la définition de la fonction d'appui de $\widehat{K} = K/W$ il résulte que :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad \exists X \in \widehat{K} \quad \Lambda(iX) = h_{\widehat{K}}(\Lambda).$$

Alors (17) implique :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad |||\hat{f}(M_\Lambda)||| \leqslant C_K (d(M_\Lambda))^{3/2}\ e^{-h_{\widehat{K}}(\Lambda)}$$

où on a posé :

$$C_K = \sup_{X \in \widehat{K}} C_X .$$

La Proposition 3 et la Remarque 7c permettent de conclure.

Seconde partie : ii) $\Rightarrow$ i)

On va montrer que la série de Fourier-Laurent de f :

$$\sum_{\mathrm{M}\in\hat{\mathrm{H}}} d(\mathrm{M})\; tr[\hat{f}(\mathrm{M})\,\mathrm{M}(g)] \quad (g \in \mathcal{O}_{\mathrm{B}}) \tag{18}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$. La somme sera alors une fonction holomorphe dans $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$ dont la restriction à H coïncidera avec f grâce à (5).

Pour tout compact $\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathrm{B}}$ il existe un compact L invariant par W tel que $\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathring{\mathrm{L}}}$. Alors il résulte de (16) et de la Proposition 1 que :

$\exists \mathrm{C_L} > 0 \quad \forall \Lambda \in \mathcal{R},\ g \in \Delta$

$$|d(\mathrm{M}_\Lambda)\; tr[\hat{f}(\mathrm{M}_\Lambda)\,\mathrm{M}_\Lambda(g)]| \leqslant d(\mathrm{M}_\Lambda)\; |||\hat{f}(\mathrm{M}_\Lambda)|||\;\; |||\mathrm{M}_\Lambda(g)|||$$
$$\leqslant \mathrm{C_L}\,(d(\mathrm{M}_\Lambda))^{3/2}\; e^{\Lambda(i\mathrm{A}(g)) - h_{\mathrm{L}}(\Lambda)}. \tag{19}$$

On note :

$$\hat{\mathrm{K}} = \{\mathrm{A}(g)\,,\ g \in \Delta\}$$

et

$$\mathrm{K} = \bigcup_{w\in\mathrm{W}} w\hat{\mathrm{K}}.$$

Il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\mathrm{K} + \epsilon b \subset \mathrm{L}$. Alors il résulte de (7) et (10) que :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R} \qquad h_{\mathrm{L}}(\Lambda) \geqslant h_{\mathrm{K}}(\Lambda) + \epsilon\,\|\Lambda\|$$

ou encore :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R}\ ,\ \mathrm{X} \in \hat{\mathrm{K}} \qquad \Lambda(i\mathrm{X}) \leqslant h_{\mathrm{L}}(\Lambda) - \epsilon\,\|\Lambda\|.$$

Insérons ce résultat dans (19). On obtient :

$\exists \epsilon > 0\,,\ \mathrm{C} > 0 \quad \forall \Lambda \in \mathcal{R},\ g \in \Delta$

$$|d(\mathrm{M}_\Lambda)\; tr[\hat{f}(\mathrm{M}_\Lambda)\,\mathrm{M}_\Lambda(g)]| \leqslant \mathrm{C}\,(d(\mathrm{M}_\Lambda))^{3/2}\; e^{-\epsilon\|\Lambda\|}$$
$$\leqslant c^{3/2}\,\mathrm{C}(1 + \|\Lambda\|)^{3r/2}\; e^{-\epsilon\|\Lambda\|}$$

où on a tenu compte de (11).

Ceci montre que la série de Fourier-Laurent de f converge normalement sur tout compact de $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$.

La somme est donc une fonction $\widetilde{\mathrm{F}}$ holomorphe dans $\mathcal{O}_{\mathrm{B}}$. Il est immédiat que ses coefficients de Fourier-Laurent sont ceux de F.

Sur chaque orbite $g_0 \mathrm{H} (g_0 \in \mathcal{D}_{\mathrm{B}})$, (18) considérée comme série de Fourier d'une fonction C^∞ sur H converge alors vers F. On en conclut que $\mathrm{F} = \widetilde{\mathrm{F}}$, d'où la dernière assertion du Théorème. ■

Nous sommes alors en mesure d'établir un premier corollaire.

PROPOSITION 5. – *Une fonction f analytique (réelle) sur* H *est la restriction d'une fonction* F *holomorphe dans* G *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \mathrm{C}_\epsilon > 0 \quad \forall \Lambda \in \mathcal{R} \ |||\hat{f}(\mathrm{M}_\Lambda)||| \leqslant \mathrm{C}_\epsilon \, e^{-\epsilon \|\Lambda\|}.$$

La série de Fourier-Laurent de f converge alors vers F *normalement sur tout compact de* G.

Preuve. – Les ensembles $\{\epsilon \bar{b}, \epsilon > 0\}$ forment une famille exhaustive de compacts de $\mathfrak{a}$ invariants par W. Compte tenu de (10), l'énoncé est une conséquence immédiate du Théorème 1. ■

Remarque 8. – On retrouve ainsi un résultat déjà connu [2-5]. Dans [2] (Proposition 12, p. 267), c'est le coefficient de Fourier $\delta(\Lambda)$ de l'opérateur ∇ (introduit à la Remarque 4) qui fournit une mesure de décroissance. Mais on a vu que $\|\Lambda\|$ et $\delta(\Lambda)$ sont équivalents.

4. Valeurs au bord hyperfonctions.

Le but de cette section est d'étendre la caractérisation des fonctions holomorphes dans un domaine de Reinhardt généralisé donnée au Théorème 1 au cas général des fonctions qui ne sont plus régulières sur le groupe H : leur valeur au bord sur H est alors une hyperfonction. Les propriétés élémentaires suivantes seront utiles.

On note $\mathcal{A}(\mathrm{H})$ l'espace des fonctions analytiques sur H muni de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet-Schwartz (limite inductive des espaces de fonctions holomorphes dans les voisinages de H dans G).

H est une variété analytique réelle compacte sans bord : l'espace $\mathcal{B}(\mathrm{H})$ des hyperfonctions sur H s'identifie alors canoniquement avec celui des fonctionnelles analytiques sur H (voir [10], p. 53 et 69).

Il en résulte une définition des coefficients de Fourier $\{\hat{T}(M)\,,\ M \in \hat{H}\}$ d'une hyperfonction $T \in \mathcal{B}(H)$:

$$\forall M \in \hat{H} \quad \hat{T}_{\alpha\beta}(M) = \langle T, M^*_{\alpha\beta}\rangle \quad (1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant d(M))$$

où l'on désigne par $\{M^*_{\alpha\beta}\,,\ 1 \leqslant \alpha\,, \beta \leqslant d(M)\}$ les éléments matriciels (holomorphes dans G) de l'extension à G de M^*. Par convention on note :

$$\forall M \in \hat{H} \quad \hat{T}(M) = \langle T, M^*\rangle. \tag{20}$$

Considérons alors la famille $\{\mathcal{D}_\epsilon\,,\ \epsilon > 0\}$ des domaines de Reinhardt généralisés de base ϵb, où ib désigne la boule unité ouverte de $i\mathfrak{a}$. Ce sont des voisinages de H dans G et nous pouvons établir la

PROPOSITION 6. — *Toute fonction analytique (réelle) sur* H *se prolonge en une fonction holomorphe dans un certain* $\mathcal{D}_\epsilon$.

Preuve. — Comme H est compact, il existe sur $\mathfrak{h}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive $(.\,,.)$ invariante par Ad H ([7], p. 156). Si une fonction est analytique réelle sur H, il résulte de la décomposition (1) et de la compacité de H qu'elle se prolonge dans G en une fonction holomorphe dans un domaine du type :

$$C_r = \{g = \exp iX.h\ ;\ h \in H\,,\ (X, X) < r^2\}$$

pour un certain $r > 0$. Mais C_r est un domaine de Reinhardt généralisé puisque $(.\,,.)$ est Ad H – invariante (Remarque 3). Et il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\mathcal{D}_\epsilon \subset C_r$. ■

Comme corollaire du Théorème 1, on peut alors donner la caractérisation suivante des éléments de $\mathcal{A}(H)$ par leurs coefficients de Fourier (voir aussi [2], p. 254).

PROPOSITION 7. — φ *est une fonction analytique (réelle) sur* H *si et seulement si :*

$$\exists \epsilon > 0\,,\ C > 0 \quad \forall \Lambda \in \mathfrak{L} \quad |||\hat{\varphi}(M_\Lambda)||| \leqslant C\, e^{-\epsilon\|\Lambda\|}.$$

Sa série de Fourier-Laurent converge alors normalement vers φ *sur tout compact de* $\mathcal{D}_\epsilon$.

Preuve. — On applique la Proposition 6 et le Théorème 1 en tenant compte de (10). ■

On peut donner (voir aussi [2], p. 255) la caractérisation suivante des hyperfonctions sur H par leurs coefficients de Fourier.

PROPOSITION 8. – *Une famille* $\{\hat{T}(M), M \in \hat{H}\}$ *d'opérateurs continus est la famille des coefficients de Fourier d'une hyperfonction* $T \in \mathcal{B}(H)$ *si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists C_\epsilon > 0 \quad \forall \Lambda \in \mathfrak{L} \quad |||\hat{T}(M_\Lambda)||| \leqslant C_\epsilon \, e^{\epsilon \|\Lambda\|}. \tag{21}$$

Preuve. – On écrit la condition de continuité de T sur les fonctions holomorphes $\{M^*_{\alpha\beta}\}$ dans la famille de compacts $\{\overline{\mathcal{D}}_\epsilon, \epsilon > 0\}$ et on applique la Proposition 1.

Inversement si on a (21) la fonctionnelle

$$\varphi \longrightarrow \sum_{M \in \hat{H}} d(M) \; tr[\hat{T}(M) \; \hat{\varphi}(M^*)]$$

est clairement une hyperfonction dont les coefficients de Fourier sont $\{\hat{T}(M), M \in \hat{H}\}$. ■

DEFINITION. – *Soit* F *une fonction holomorphe dans un domaine de Reinhardt généralisé* $\mathcal{D}_B$. *On associe à* F *une fonctionnelle analytique notée* $\dot{F}$ *(sa valeur au bord sur* H) *de la façon suivante. Pour toute fonction* $\varphi \in \mathcal{A}(H)$ *(prolongeable dans un certain* $\mathcal{D}_\epsilon$*), on pose :*

$$\langle \dot{F}, \varphi \rangle = \int_H F(gh) \; \varphi(gh) \, dh \tag{22}$$

avec g *arbitraire dans* $\mathcal{D}_\epsilon \cap \mathcal{D}_B$. *On vérifie que cette définition est indépendante du choix de* g.

THEOREME 2. – *Soient* T *une hyperfonction sur* H, B *un ouvert de* $\mathfrak{a}$ *invariant par* W *avec* $0 \in \overline{B}$. *Il est équivalent de dire :*

i) T *est la valeur au bord d'une fonction* F *holomorphe dans le domaine de Reinhardt généralisé* $\mathcal{D}_B$ *de base* B,

ii) *pour tout compact* $K \subset B$ *invariant par* W, *il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que :*

$$\forall \Lambda \in \mathfrak{L} \quad |||\hat{T}(M_\Lambda)||| \leqslant C_K \, e^{-h_K(\Lambda)}. \tag{23}$$

La série de Fourier-Laurent de T *converge alors normalement vers* F *sur tout compact de* $\mathcal{D}_B$.

Preuve. – i) ⇒ ii) : Des définitions (20) et (22) il résulte immédiatement que les coefficients de Fourier de T satisfont

$$\forall g \in \mathcal{D}_B\,,\ \Lambda \in \mathcal{R} \quad \hat{T}(M_\Lambda) = \langle T, M_\Lambda^* \rangle = \int_H F(gh)\, M^*(gh)\, dh.$$

La suite est alors comme au Théorème 1.

ii) ⇒ i) : On considère la série de Fourier-Laurent des coefficients de T :

$$\sum_{M \in \hat{H}} d(M)\ tr[\hat{T}(M)\, M(g)] \qquad (g \in \mathcal{D}_B).$$

On montre comme au Théorème 1 qu'elle converge sur tout compact de $\mathcal{D}_B$ vers une fonction $\widetilde{F}$ holomorphe dans $\mathcal{D}_B$. Il reste à établir que la valeur au bord de $\widetilde{F}$ sur H est précisément T. Mais c'est une conséquence immédiate de (3) et de la relation de dualité :

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{M \in \hat{H}} d(M)\ tr[\hat{T}(M)\ \hat{\varphi}(M^*)]$$

facilement vérifiée. Enfin on établit que $F = \widetilde{F}$ comme au Théorème 1. ■

5. Enveloppe d'holomorphie, convexités.

On sait ([9], Théorème 1, p. 312) que le groupe analytique complexe réductif G est une variété de Stein : c'est une conséquence de l'existence d'une représentation holomorphe fidèle de dimension finie ([7], p. 226). Nous allons donner dans cette section une caractérisation des domaines de Reinhardt généralisés qui sont de Stein.

PROPOSITION 9. – *Toute fonction holomorphe dans un domaine de Reinhardt généralisé de base* B *se prolonge au domaine de Reinhardt généralisé dont la base est l'enveloppe convexe de* B.

Preuve. – Soit F une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}_B$ et $\dot{F}$ son hyperfonction valeur au bord sur H. La première partie du Théorème 2 indique que la relation (23) est satisfaite pour tout compact $K \subset B$ invariant par W. Mais par (9) on a :

$$h_K = h_{K^c}$$

et si $\{K_j, j \in \mathbf{N}\}$ est une famille exhaustive de compacts de B, la famille $\{K_j^c, j \in \mathbf{N}\}$ est une famille exhaustive de compacts de B^c. Il résulte alors de la seconde partie du Théorème 2 que la somme de la série de Fourier-Laurent de $\dot{F}$ est holomorphe dans $\mathcal{D}_{B^c}$ et y définit le prolongement de F annoncé. ■

Considérons en particulier le cas d'un groupe compact semi-simple ($s = 0$). Son complexifié universel est un groupe analytique complexe semi-simple ([7], Théorème 3.2, p. 221) et on a le corollaire :

PROPOSITION 10. – *Soit* H' *un groupe analytique compact semi-simple de complexification* G', *et* $\mathcal{D}_B$ *un domaine de Reinhardt généralisé arbitraire de* G'. *Toute fonction holomorphe dans* $\mathcal{D}_B$ *se prolonge à un voisinage complexe de* H' *dans* G'. *En particulier, elle admet sur* H' *une restriction analytique (réelle).*

Preuve. – Si B est une base arbitraire dans $\mathfrak{c}$, B^c est un voisinage de l'origine dans $\mathfrak{c}$. ■

Nous allons voir maintenant que l'extension holomorphe de la Proposition 9 est maximale. Le résultat auxiliaire suivant sera utile :

PROPOSITION 11. – *Soit* B *une partie bornée convexe de* $\mathfrak{a}$ *invariante par* W. *L'ensemble :*

$$\Omega = \{X \in \mathfrak{a} : \exists \Lambda \in \mathcal{R} \quad \Lambda(iX) = h_B(\Lambda)\}$$

est dense dans $\partial B \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$.

Preuve. – Dans $(i\mathfrak{c})^*$ on considère la chambre de Weyl fermée :

$$C = \{\mu \in (i\mathfrak{c})^* : \mu(H_i) \geqslant 0 \,,\ 1 \leqslant i \leqslant t\}$$

et on pose :

$$A = (i\,\mathfrak{z})^* \oplus C.$$

Il est classique ([3], 21.4.6.ii), p. 97) que A est exactement l'ensemble des formes linéaires $\mu \in (i\,\mathfrak{a})^*$ telles que $w\mu \leqslant \mu$ pour tout $w \in W$. C'est-à-dire :

$$\forall \mu \in A \,,\ X \in \overline{\mathfrak{a}^+} \,,\ w \in W \qquad \mu(iwX) \leqslant \mu(iX). \tag{24}$$

On sait aussi ([3], 21.4.7.1, p. 99) que A est un domaine fondamental pour l'action de W dans $(i\,\mathfrak{a})^*$: pour tout $\lambda \in (i\,\mathfrak{a})^*$, il existe un couple unique $(w, \mu) \in W \times A$ tel que $\lambda = w\mu$. (25)

Clairement $\mathfrak{L} \subset A$ et le cône engendré par $\mathfrak{L}$ (réunion des demi-droites issues de l'origine passant par les points de $\mathfrak{L}$) est dense dans A. Par continuité et homogénéité de h_B, il en résulte que :

$$\overline{\Omega} = \{X \in \mathfrak{a} : \exists \mu \in A \ \mu(iX) = h_B(\mu)\}.$$

En vertu de la convexité de B, on a :

$$\partial B = \{X \in \mathfrak{a} : \exists \lambda \in (i\mathfrak{a})^* \ \lambda(iX) = h_B(\lambda)\}$$

ou encore grâce à (25) :

$$\partial B = \{X \in \mathfrak{a} : \exists \mu \in A ,\ w \in W \ \ \mu(iw^{-1}X) = h_B(w\mu)\}.$$

L'invariance de B par W implique celle de h_B et on a :

$$\partial B = \{X \in \mathfrak{a} : \exists \mu \in A ,\ w \in W \ \ \mu(iw^{-1}X) = h_B(\mu)\}.$$

Maintenant en tenant compte de (24), il vient :

$$\partial B \cap \overline{\mathfrak{a}^+} = \{X \in \mathfrak{a} : \exists \mu \in A \ \ \mu(iX) = h_B(\mu)\}$$

ce qui achève la preuve. ∎

THEOREME 3. — *Tout domaine de Reinhardt généralisé à base convexe est une variété de Stein.*

Preuve. — On établit d'abord le résultat pour tout domaine de Reinhardt généralisé $\mathcal{D}_B$ à base convexe *bornée.* Puisque G est une variété de Stein, il suffit de montrer que $\mathcal{D}_B$ est holomorphiquement convexe. Pour ceci on procède en deux étapes :

a) On considère la famille d'opérateurs $\{\hat{f}(M_\Lambda), \Lambda \in \mathfrak{L}\}$ définis par :

$$\forall \Lambda \in \mathfrak{L} \quad \hat{f}(M_\Lambda) = e^{-h_B(\Lambda)} \ \mathbf{1}_{V_{M_\Lambda}}.$$

Ce sont les coefficients de Fourier d'une distribution sur H ([2], p. 251) et il résulte immédiatement du Théorème 2 que leur série de Fourier-Laurent converge vers une fonction holomorphe dans $\mathcal{D}_B$:

$$f(g) = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{L}} d(M_\Lambda) \ e^{-h_B(\Lambda)} \ tr[M_\Lambda(g)] \quad (g \in \mathcal{D}_B).$$

Cette fonction est à valeurs réelles sur exp i $\mathfrak{a}$ et (14) implique :

$$\forall X \in \overline{\mathfrak{a}^+} \quad f(\exp iX) \geqslant \sum_{\Lambda \in \mathfrak{L}} d(M_\Lambda) \ e^{\Lambda(iX) - h_B(\Lambda)}. \tag{26}$$

Si $\Lambda \in \mathcal{R}$, il résulte aussitôt de la définition de $\mathcal{R}$ que pour tout entier $n \geqslant 1$, $n\Lambda \in \mathcal{R}$. Désignons alors par :

$$\Omega = \{X \in \mathfrak{a} : \exists \Lambda_X \in \mathcal{R} : \Lambda_X(iX) = h_B(\Lambda_X)\}$$

l'ensemble (dense dans $\partial B \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$) de la Proposition 11. (26) implique :

$$\forall X \in \Omega \quad f(\exp iX) \geqslant \sum_{n \geqslant 1} d(M_{n\Lambda_X})\ e^{n\Lambda_X(iX) - h_B(n\Lambda_X)}$$

d'où par homogénéité de h_B :

$$\forall X \in \Omega \quad f(\exp iX) \geqslant \sum_{n \geqslant 1} d(M_{n\Lambda_X}).$$

Ainsi f est holomorphe dans $\mathcal{D}_B$ et non bornée en tous les points de $\exp i\Omega \subset \partial\mathcal{D}_B$.

b) Soit $\hat{g}$ un point arbitraire de la frontière de $\mathcal{D}_B$:

$$\hat{g} = \hat{h}_1 \,.\, \exp iA(\hat{g}) \,.\, \hat{h}_2$$

où $A(\hat{g}) \in \partial B \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$. On considère la fonction :

$$F_{\hat{g}}(g) = f(\hat{h}_1^{-1} \,.\, g \,.\, \hat{h}_2^{-1}).$$

Il résulte de a) que $F_{\hat{g}}$ est holomorphe dans $\mathcal{D}_B$ et non bornée en tous les points de $\partial\mathcal{D}_B$ de la forme :

$$g = \hat{h}_1 \,.\, \exp iX \,.\, \hat{h}_2\,, \quad X \in \Omega.$$

Ω est dense dans $\partial B \cap \overline{\mathfrak{a}^+}$ et il existe une suite $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ d'éléments de Ω convergeant vers $A(\hat{g})$. Ainsi pour tout point $\hat{g} \in \partial\mathcal{D}_B$, il existe une fonction $F_{\hat{g}}$ holomorphe dans $\mathcal{D}_B$ et non bornée en tous les points d'une suite $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\partial\mathcal{D}_B$ convergeant vers $\hat{g}$.

$\mathcal{D}_B$ est donc holomorphiquement convexe, ce qui achève la première partie de la preuve.

Soit maintenant un domaine de Reinhardt généralisé $\mathcal{D}_B$ à base convexe non bornée. On peut construire une famille $\{B_t,\ t \in [0,1[\}$ de parties ouvertes de B, convexes, bornées, invariantes par W telles que :

$$B = \bigcup_{t \in [0,1[} B_t$$

et pour tout $t_0 \in\ ]0,1[$:

$$B_{t_0} = \bigcup_{t \in [0,t_0[} B_t\ .$$

Alors $\mathcal{O}_B$ est une variété de Stein comme réunion de la suite continue croissante $\{\mathcal{O}_{B_t}, t \in [0,1[\}$ d'ouverts de Stein [4]. ∎

Rassemblant les résultats de la Proposition 9 et du Théorème 3, nous pouvons alors énoncer la généralisation suivante du "théorème du tube".

THEOREME 4. – *L'enveloppe d'holomorphie du domaine de Reinhardt généralisé de base* B *est le domaine de Reinhardt généralisé ayant pour base l'enveloppe convexe de* B.

Remarque 9. – :

a) Dans le cas particulier où la base est une boule centrée en 0, le Théorème 3 a été obtenu indépendamment dans [5].

b) Soit $\mathcal{E}$ un domaine de G invariant à droite, $E = \pi(\mathcal{E})$ sa projection dans l'espace riemannien globalement symétrique G/H. On dit que E est convexe s'il contient l'unique segment de géodésique de G/H reliant deux quelconques de ses points. L'enveloppe convexe E^c de E est définie comme l'intersection de tous les domaines convexes de G/H qui le contiennent.

Alors on sait ([9], Théorème 2, p. 316) que l'enveloppe d'holomorphie d'un domaine invariant à droite de projection E contient le domaine invariant à droite de projection E^c. Dans le cas particulier d'un domaine bi-invariant, ce résultat est à comparer avec le Théorème 4.

6. Théorème edge of the wedge.

Un corollaire immédiat du Théorème 2 nous donne la

PROPOSITION 12. – *Si une fonction holomorphe dans un domaine de Reinhardt généralisé* $\mathcal{O}_B$ *a une valeur au bord sur* H *égale à zéro (au sens des hyperfonctions), elle s'annule sur tout* $\mathcal{O}_B$.

Nous allons établir ici un théorème de prolongement analytique global du même type. Compte-tenu de la Proposition 10, il n'a évidemment d'intérêt que *si* H *n'est pas semi-simple* ($s \neq 0$).

THEOREME 5. – *Soit* F_1 *(resp.* F_2*) une fonction holomorphe dans un domaine de Reinhardt généralisé à base convexe* $\mathcal{D}_{B_1}$ *(resp.* $\mathcal{D}_{B_2}$*). Si* F_1 *et* F_2 *ont même valeur au bord sur* H *(au sens des hyperfonctions), il existe une fonction holomorphe dans le domaine de Reinhardt généralisé de base* $(B_1 \cup B_2)^c$ *qui est un prolongement analytique commun de* F_1 *et* F_2.

Preuve. – Soit T l'hyperfonction valeur au bord commune de F_1 et F_2. La première partie du Théorème 2 indique que pour tout compact $K_j \subset B_j$ $(j=1,2)$ invariant par W, on a :

$$\exists C_{K_j} > 0 \quad \forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad |||\hat{T}(M_\Lambda)||| \leqslant C_{K_j}\, e^{-h_{K_j}(\Lambda)} \quad (j=1,2).$$

En tenant compte de (8) et (9), il en résulte que :

$$\exists C > 0 \quad \forall \Lambda \in \mathcal{R} \quad |||\hat{T}(M_\Lambda)||| \leqslant C\, e^{-h_{(K_1 \cup K_2)^c}(\Lambda)} .$$

La seconde partie du Théorème 2 indique alors que la somme de la série de Fourier-Laurent de T définit le prolongement analytique annoncé. ■

7. Exemples.

A) $H = T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$; $G = (\mathbf{C}^*)^n$.

C'est le cas abélien : $t = 0$, $s = n$, $\hat{H} \simeq \mathbf{Z}^n$. On retrouve les domaines de Reinhardt de $(\mathbf{C}^*)^n$ caractérisés comme l'on sait par la donnée d'un domaine dans l'espace des variables $\{\log|z_1|, \dots, \log|z_n|\}$, qui s'identifie à l'algèbre abélienne $\mathfrak{h}$.

B) $H = SU(2)$; $G = SL(2, \mathbf{C})$.

H est un groupe simple simplement connexe : $t = 1$, $s = 0$, $\dim \mathfrak{h} = 3$, $\hat{H} \simeq \mathbf{N}$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_c$ est l'algèbre des matrices complexes 2x2 à trace nulle ; $\mathfrak{t}_c$ la sous-algèbre des matrices diagonales ; $\overline{\mathfrak{t}^+}$ s'identifie à la demi-droite $\{\lambda \in \mathbf{R}\ ,\ \lambda \geqslant 0\}$.

La base d'un domaine de Reinhardt généralisé de $SL(2, \mathbf{C})$ est un intervalle $]-R, R[$. Le Théorème 3 indique que les domaines de Reinhardt généralisés de $SL(2, \mathbf{C})$ sont *tous* des voisinages de Stein du groupe réel SU(2) [1].

C) $H = U(2)$; $G = GL(2, \mathbf{C})$.

H est localement isomorphe à $T \times SU(2)$: $s=1$, $t=1$, dim $\mathfrak{h}=4$. $\mathfrak{h}$ est l'algèbre des matrices complexes 2×2 antihermitiennes, $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre formée des matrices diagonales anti-hermitiennes, $\mathfrak{z}$ la sous-algèbre formée des matrices scalaires imaginaires pures.

$\mathfrak{a}$ s'identifie au plan $\mathbf{R}^2$ des variables (Z, C) et $\overline{\mathfrak{a}^+}$ au demi-plan $C \geqslant 0$. Le groupe de Weyl est réduit à deux éléments : l'identité et la symétrie par rapport à la droite $C = 0$.

Un domaine de Reinhardt généralisé de G à base convexe est un voisinage de H si et seulement si l'intersection de sa base et de la droite $Z=0$ est non vide.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beers and A. Dragt, New theorems about spherical harmonics expansions and SU(2), *J. Math. Phys.*, 11 (1970), 2313-2328.

[2] A. Cerezo, Solutions analytiques des équations invariantes sur un groupe compact ou complexe réductif, *Ann. Inst. Fourier*, 25 (1975), 249-277.

[3] J. Dieudonne, Eléments d'analyse, Tome 5, Gauthier-Villars, Paris (1975).

[4] F. Docquier und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, 140 (1960), 94-123.

[5] L. Frota-mattos, Analytic continuation of the Fourier series on connected compact Lie groups, thèse, Rutgers Univ. (1975).

[6] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, New-York (1962).

[7] G. Hochschild, La structure des groupes de Lie, Dunod, Paris (1968).

[8] G. Mostow, A new proof of E. Cartan's theorem on the topology of semi-simple Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 969-980.

[9] O. ROTHAUS, Envelopes of holomorphy of domains in complex Lie groups, in Problems of analysis, 309-317, Princeton Univ. Press (1970).

[10] P. SCHAPIRA, Théorie des hyperfonctions, Lecture notes 126, Springer, Berlin (1970).

[11] N. WALLACH, Harmonic analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, New-York (1973).

[12] G. WARNER, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, Vol. I, Springer, Berlin (1972).

Manuscrit reçu le 25 juillet 1976
Révisé le 7 décembre 1976
Proposé par B. Malgrange.

Michel LASSALLE,
Equipe de Recherche Associée 174 du C.N.R.S.
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex.