Annales de l'institut Fourier

Masayuki Itô

Sur les noyaux de Frostman-Kunugi et les noyaux de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 3 (1977), p. 45-95

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27,3 (1977), 45-95

SUR LES NOYAUX DE FROSTMAN-KUNUGUI ET LES NOYAUX DE DIRICHLET

par Masayuki ITÔ

1. Introduction.

Soit $\mathbf{R}^n$ l'espace euclidien à dimension $n(\geqslant 3)$. Pour un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on notera $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$. On désignera par (r, σ) les coordonnées sphériques dans $\mathbf{R}^n$. On rappelle qu'un noyau de convolution κ sur $\mathbf{R}^n$ est une mesure positive dans $\mathbf{R}^n$ et que, pour une mesure réelle μ dans $\mathbf{R}^n$, le κ-potentiel de μ est la convolution $\kappa * \mu$ dès qu'elle a un sens.

Un noyau de convolution κ s'appelle un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$ s'il est invariant par rotation, s'annule à l'infini([1]) et si $\Delta\kappa \geqslant 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine O, où Δ est le laplacien sur $\mathbf{R}^n$. Pour un noyau de Frostman-Kunugui κ, il existe une fonction (et une seule) $\Phi(t)$ non-négative, finie, continue, croissante au sens large et convexe dans $(0, \infty)$ et une constante non-négative c telles que

$$\kappa = \Phi(|x|^{2-n})\,dx + c\epsilon,$$

où ϵ désigne la mesure unité en O. On dira que Φ est la fonction convexe associée à κ.

On verra facilement qu'un noyau de Frostman-Kunugui n'est pas toujours un noyau de Dirichlet. Dans cet article, on se propose de donner une condition explicite pour qu'un noyau de Frostman-Kunugui soit un noyau de Dirichlet.

([1]) On dit que κ s'annule à l'infini si, quelle que soit la fonction f finie et continue à support compact, $\kappa * f$ tend vers 0 lorsque $|x| \to \infty$.

Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$ de classe C^2 en dehors de O(²). Désignons par α la densité continue de $\Delta\kappa$ en dehors de O. Si $\kappa \neq 0$ et si α vérifie (*), alors κ est de la forme

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n} \, (^3),$$

où κ_0 est un noyau de Dirichlet et où c est une constante $\geqslant 0$.

(*) *Pour un nombre* $t > 0$, *on désigne par* $S(O\,;t)$ *et par* $B(O\,;t)$ *la sphère de centre* O *et de rayon* t *et la boule ouverte de centre* O *et de rayon* t. *Pour* $t' \geqslant t > 0$ *quelconque et pour une constante* $c \geqslant 0$ *quelconque, l'inégalité*

$$\alpha(x) \geqslant c \int \alpha(x-y)\, ds_t(y)$$

a lieu sur $CB(O\,;t')$ *dès qu'elle a lieu pour* $S(O\,;t')$, *où* s_t *désigne la mesure uniforme sur* $S(O\,;t)$ *telle que* $\int ds_t = 1$.

Dans le cas où $\alpha > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$, (*) est équivalent à la condition suivante : Pour $t > 0$ quelconque, la fonction $\int \alpha(x-y)\, ds_t(y)/\alpha(x)$ de x est décroissante au sens large lorsque r ($\geqslant t$) croît.

La démonstration se basera sur l'extension de la formule de Riesz et le résultat suivant :

Soit κ_0 un noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$ invariant par rotation et soit u le laplacien généralisé sur $\mathbf{R}^n$ tel que $u * \kappa_0 = -\epsilon$. Supposons qu'il existe une fonction finie et continue α en dehors de O vérifiant (*) telle que $u = \alpha(x)\,dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Alors pour $t > 0$ quelconque, il existe une mesure positive λ_t sur $[t\,,\infty)$ telle que

$$\alpha(x)\,dx = \int \epsilon'_\rho \, d\lambda_t(\rho),$$

sur $CB(O\,;t)$ dès que $\rho \longrightarrow \epsilon'_\rho$ est vaguement continue, où ϵ'_ρ désigne la mesure balayée de ϵ sur $C\overline{B(O\,;\rho)}$ relativement au noyau κ_0.

En l'appliquant aux noyaux de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$ plus réguliers, on arrivera au théorème suivant :

(²) Précisément $\kappa = K(x)\,dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ où K est une fonction de classe C^2.

(³) On note symboliquement r^{2-n} le noyau newtonien $|x|^{2-n}$ sur $\mathbf{R}^n$.

Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$ de classe C^4 en dehors de O et soit ϕ une fonction de classe C^2 dans $(0\ ,\ \infty)$ telle que $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n})\,dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Si $\phi(t) > 0, \frac{d}{dt}\phi(t) \geqslant 0, \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) \geqslant 0$ dans $(0\ ,\ \infty)$ et si $\frac{d}{dt}\phi(t)t/\phi(t)$ et $\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\,t^2/\phi(t)$ sont croissantes (au sens large) avec t, alors il existe un noyau de Dirichlet κ_0 et une constante $c \geqslant 0$ tels que $\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n}$.

Enfin l'auteur remercie sincèrement Monsieur le Professeur J. Deny qui s'est intéressé à son travail et lui a donné nombreux conseils.

2. Préliminaires.

On commencera avec des résultats élémentaires sur les noyaux de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$.

PROPOSITION 1. — *Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui. Alors il existe une fonction $\Phi(t)$ finie, continue, non-négative, convexe et croissante au sens large dans $(0\ ,\ \infty)$ et une constante $c \geqslant 0$ telle que*

$$\kappa = \Phi(|x|^{2-n})\,dx + c\epsilon. \tag{1}$$

Démonstration. — On voit facilement qu'il existe une fonction $u \geqslant 0$ localement sommable dans $\mathbf{R}^n$ et sous-harmonique en dehors de 0 telle que $\kappa = u(x)\,dx + c\,\epsilon$, où $c = \kappa(\{O\})$. Comme u est invariante par rotation, u est finie et continue dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Posons, pour tout $x \neq O \in \mathbf{R}^n$, $\Phi(|x|^{2-n}) = u(x)$; alors Φ est une fonction $\geqslant 0$, finie et continue dans $(0\ ,\ \infty)$. La sous-harmonicité de u donne la convexité de Φ. Soit f une fonction $\geqslant 0$ finie, continue, invariante par rotation et portée par $B(O\,;1)$ telle que $\int f(x)\,dx = 1$. Comme $\lim_{|x|\to\infty} \kappa * f(x) = 0$ (cf. la définition d'un noyau de Frostman-Kunugui) et $u(x) \leqslant u * f(x)$ sur $CB(O\,;1)$, on a $\lim_{t\to 0} \Phi(t) = 0$. Ceci et la convexité de Φ montrent que Φ est croissante au sens large. La démonstration est ainsi complète.

Evidemment Φ est uniquement déterminée et s'appelle la fonction convexe associée à κ.

Pour simplifier les notations, on note respectivement C_K et M_K l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans $\mathbf{R}^n$ à support compact et l'ensemble des fonctions mesurables et bornées dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles et à support compact. On désigne par C_K^+ et M_K^+ leurs sous-ensembles des fonctions $\geqslant 0$.

Soit κ un noyau de convolution sur $\mathbf{R}^n$. On dit que κ satisfait au principe classique du maximum si, quelle que soit f de M_K^+, $u_f \leqslant 1$ presque partout (noté désormais p.p.) sur $\mathbf{R}^n$ dès que $u_f \leqslant 1$ p.p. sur $\{x \in \mathbf{R}^n \; ; f(x) > 0\}$, où u_f est la densité de $\kappa * (f dx)$ par rapport à dx.

On dit que κ est de type positif si, pour $f \in M_K$ quelconque, $\int u_f f dx \geqslant 0$.

La proposition suivante a été essentiellement obtenue par K. Kunugui (cf. [12]).

PROPOSITION 2. — *Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$. Alors*

1) *κ satisfait au principe classique du maximum,*

2) *κ est de type positif.*

Démonstration. — Soit Φ la fonction convexe associée à κ. Pour $f \in M_K^+$ quelconque, la fonction $\int \Phi(|x-y|^{2-n}) f(y)\, dy$ de x est finie, continue dans $\mathbf{R}^n$ et sous-harmonique en dehors du support de $f dx$, $\operatorname{supp}(f dx)$. Comme $\lim\limits_{|x| \to \infty} \int \Phi(|x-y|^{2-n}) f(y)\, dy = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\int \Phi(|x-y|^{2-n}) f(y)\, dy \leqslant \sup \left\{ \int \Phi(|z-y|^{2-n}) f(y)\, dy \; ; f(z) > 0 \right\}.$$

Ceci et la proposition 1 donnent immédiatement (1). L'énoncé (2) résulte de (1) et du théorème 5 de [11].

On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel topologique des fonctions infiniment dérivables dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs complexes et à support compact.

Une distribution u dans $\mathbf{R}^n$ s'appelle un laplacien généralisé si, quelle que soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs réelles, $u(f) \leqslant 0$ dès que $f(\mathrm{O}) = \max\limits_{x \in \mathrm{R}^n} f(x)$. Voir, par exemple, [5].

PROPOSITION 3. – *Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$. Alors $\Delta\kappa$ est un laplacien généralisé.*

Démonstration – Soit Φ la fonction convexe associée à κ. Comme Φ est finie, continue et convexe dans $(0, \infty)$, $\mathrm{D}_{-}\Phi(t)$ existe, où $\mathrm{D}_{-}\Phi(t) = \lim\limits_{s \uparrow t} \dfrac{\Phi(s) - \Phi(t)}{s + t}$. On a $\mathrm{D}_{-}\Phi(t) \geqslant 0$. Posons, pour un entier $m \geqslant 1$,

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \in (0, m^{n-2}) \\ \mathrm{D}_{-}\Phi(m^{n-2})(t - m^{n-2}) + \Phi(m^{n-2}), & t \in (m^{n-2}, \infty). \end{cases}$$

Alors Φ_m est continue, convexe, croissante au sens large dans $(0, \infty)$. On voit facilement que la suite $(\Phi_m)_{m=1}^{\infty}$ converge d'une manière croissante vers Φ avec $m \uparrow \infty$. Posons $\kappa_m = \Phi_m(|x|^{2-n})\, dx + \kappa(\{\mathrm{O}\})\, \epsilon$. Alors κ_m est un noyau de Frostman-Kunugui et la suite $(\Delta\kappa_m)_{m=1}^{\infty}$ converge vers $\Delta\kappa$ au sens des distributions lorsque $m \to \infty$. Donc il suffit de montrer que, pour $m \geqslant 1$ quelconque, $\Delta\kappa_m$ est un laplacien généralisé. Dans ce cas, on peut supposer $\kappa(\{\mathrm{O}\}) = 0$. Comme $\Delta\kappa_m$ est égale à une mesure positive dans $\mathbf{R}^n - \{\mathrm{O}\}$ et $\Delta\kappa_m = 0$ dans $\mathrm{B}\left(\mathrm{O}\,; \dfrac{1}{m}\right) - \{\mathrm{O}\}$, il existe une mesure positive σ_m portée par $\mathrm{CB}\left(\mathrm{O}\,; \dfrac{1}{m}\right)$ telle que, au sens des distributions,

$$\Delta\kappa_m = -(n-2)\, \omega_n\, \mathrm{D}_{-}\Phi(m^{n-2})\, \epsilon + \sigma_m$$

dans $\mathbf{R}^n$, où ω_n est l'aire de la sphère d'unité. Posons

$$c_m = (n-2)\, \omega_n\, \mathrm{D}_{-}\Phi(m^{n-2}).$$

Comme κ_m est de type positif (cf. la proposition 2), $-\Delta\kappa_m$ l'est aussi. En rappelant le théorème de Bochner, on voit que, pour $t > 0$ quelconque,

$$\int \exp(-t\, |x|^2)\, d\sigma_m(x) \leqslant c_m\, .$$

En faisant $t \downarrow 0$, on arrive à $\int d\sigma_m \leqslant c_m$. Soit f une fonction réelle de $\mathcal{D}$ vérifiant $f(\mathrm{O}) = \max_{x \in \mathbf{R}^n} f(x)$. Alors on a

$$\Delta\kappa_m(f) = -c_m f(\mathrm{O}) + \int f(x)\, d\sigma_m(x) \leqslant \left(\int d\sigma_m - c_m\right) f(\mathrm{O}) \leqslant 0.$$

Donc $\Delta\kappa_m$ est un laplacien généralisé, et la démonstration est complète.

Rappelons qu'une fonction définie-négative ψ dans $\mathbf{R}^n$ est une fonction continue à valeurs complexes vérifiant $\psi(0) \geqslant 0$, $\psi(-x) = \bar{\psi}(x)$ et, pour tout entier $m \geqslant 1$, toute famille $(x^i)_{i=1}^m$ de points de $\mathbf{R}^n$ et toute famille $(c_i)_{i=1}^m$ de nombres complexes tels que $\sum_{i=1}^m c_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi(x^i - x^j)\, c_i \overline{c_j} \leqslant 0 \tag{2}$$

(voir, par exemple, [1] et [5]).

La proposition suivante est déjà connue (cf. le chapitre III dans [5]).

Proposition 4. – *Une distribution u dans $\mathbf{R}^n$ est un laplacien généralisé si et seulement si u est à croissance lente et la transformée $\hat{u}$ de u est de la forme $\hat{u} = -\psi(x)\, dx$, où ψ est une fonction définie-négative.*

Ecrivons le théorème de Lévy-Khinchine (cf. par exemple, [5]). A une fonction définie-négative ψ dans $\mathbf{R}^n$, on peut associer une constante $c \geqslant 0$, une forme linéaire $\mathrm{L}(x)$, une forme hermitienne $\mathrm{Q}(x) \geqslant 0$ et une mesure positive dans $\mathbf{R}^n - \{\mathrm{O}\}$ vérifiant

$$\int |x|^2 / (1 + |x|^2)\, d\nu(x) < \infty$$

telles que l'on ait

$$\psi(x) = c + \mathrm{L}(x)\sqrt{-1} + \mathrm{Q}(x) + \int \Big(1 + \frac{2\pi\sqrt{-1}\, x \cdot y}{1 + |y|^2} - \exp(-2\pi\sqrt{-1}\, x \cdot y)\Big)\, d\nu(y),$$

où $x \cdot y$ désigne le produit scalaire. Dans ce cas, la décomposition est unique.

On dit que ν est la mesure singulière associée à ψ.

Remarque 1. – Soit ψ une fonction définie-négative dans $\mathbf{R}^n$ et u le laplacien généralisé tel que $\hat{u} = -\psi(x)\,dx$. Alors, en dehors de O, u est égal à la mesure singulière ν associée à ψ.

En effet, soit f une fonction de $\mathcal{D}$ telle que $\operatorname{supp}(f) \not\ni \mathrm{O}$. Comme, pour tout le polynôme p, la formule de Parseval donne

$$\int \hat{f}(x)\, p(x)\, dx = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} u(f) &= -\int \overline{\hat{f}(x)}\, \psi(x)\, dx \\ &= \lim_{m\to\infty} \iint \overline{\hat{f}(x)} \Big(\exp\big(-2\pi\sqrt{-1}\, x\cdot y\big) \\ &\qquad - \frac{2\pi\sqrt{-1}\, x\cdot y}{1+|y|^2} - 1\Big)\, d\nu_m(y)\, dx \\ &= \lim_{m\to\infty} \int \overline{\hat{f}(x)}\, \nu_m(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int f d\nu_m = \int f d\nu, \end{aligned}$$

où $\nu_m = \nu$ sur $\mathrm{CB}\left(\mathrm{O}\,;\frac{1}{m}\right)$ et $\nu_m = 0$ dans $\mathrm{B}\left(\mathrm{O}\,;\frac{1}{m}\right)$. Donc $u = \nu$ dans $\mathrm{C}\{\mathrm{O}\}$.

Remarque 2. – Soit ψ une fonction définie-négative dans $\mathbf{R}^n$. Si ψ est invariante par rotation, alors il existe deux constantes $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$ et une mesure positive ν en dehors de O invariante par rotation et vérifiant $\int |x|^2 / (1 + |x|^2)\, d\nu(x) < \infty$ telles que

$$\psi(x) = c_1 + c_2\,|x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x\cdot y))\, d\nu(y). \qquad (3)$$

Réciproquement la fonction de la forme comme (3) est une fonction définie-négative invariante par rotation.

Soit u le laplacien généralisé tel que $\hat{u} = -\psi(x)\,dx$. Alors u est aussi invariant par rotation. D'après la remarque 1, la mesure singulière ν associée à ψ est invariante par rotation. Donc on peut écrire

$$\psi(x) = c_1 + Q(x) + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y))\, d\nu(y),$$

où c_1 est une constante $\geqslant 0$ et où $Q(x)$ est une forme hermitienne $\geqslant 0$. On voit donc que $Q(x)$ est aussi invariante par rotation. Ceci donne, avec une constante $c_2 \geqslant 0$, $Q(x) = c_2 |x|^2$, d'où la remarque 2.

On dit qu'un noyau de convolution κ sur $\mathbf{R}^n$ est un noyau de Dirichlet si κ est à croissance lente et si $\hat{\kappa}$ est de la forme $\hat{\kappa} = \dfrac{1}{\psi}\,dx$, où ψ est une fonction définie-négative dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles telle que $\dfrac{1}{\psi}$ soit localement sommable (cf. [1]).

La proposition suivante est un résultat très connu donné par A. Beurling et J. Deny (cf. [1]).

Proposition 5. — *Un noyau de Dirichlet est un noyau d'un espace de Dirichlet spécial.*

Rappelons qu'un espace de Dirichlet spécial D sur $\mathbf{R}^n$ est un espace hilbertien dont les éléments sont des fonctions localement sommables dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles (ou bien à valeurs complexes)(4) et qui vérifie les quatre conditions suivantes :

a) A un compact F dans $\mathbf{R}^n$ quelconque, on peut associer une constante $A(F) > 0$ telle que, quelle que soit u de D,

$$\int_F |u|\, dx \leqslant A(F)\, \|u\|.$$

b) $C_K \cap D$ est dense dans D et dans C_K.

c) Pour toute la contraction normale T (5) et pour toute u de D, $T \cdot u \in D$ et $\|T \cdot u\| \leqslant \|u\|$.

(4) Plus précisément tout élément de D est une classe de fonctions p.p. égales.

(5) Une contraction normale T est une application de $\mathbf{R}^1$ sur elle-même vérifiant $T(0) = 0$ et $|Ta - Tb| \leqslant |a - b|$ $(a, b \in \mathbf{R}^1)$.

d) Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $u \in \mathrm{D}$ quelconques, $\mathrm{U}_x u \in \mathrm{D}$ et $\|\mathrm{U}_x u\| = \|u\|$, où $\mathrm{U}_x u$ est la fonction obtenue de u par la translation de x.

On note ici $\|\cdot\|$ la norme dans D. La condition (a) donne que, pour $f \in \mathrm{M}_\mathrm{K}$ quelconque, il existe une fonction u_f de D, et une seule telle que, quelle que soit u de D,

$$(u_f , u) = \int u(x) f(x)\, dx,$$

où $(\cdot , \cdot)$ est le produit scalaire associé. On dit que u_f est le potentiel de f dans D. A. Beurling et J. Deny [1] ont montré que, à un espace de Dirichlet spécial D, on peut associer d'une manière unique un noyau de convolution κ tel que, pour $f \in \mathrm{M}_\mathrm{K}$ quelconque,

$$\kappa * (f dx) = u_f\, dx.$$

On appelle κ le noyau de D.

Définissons le balayage pour les noyaux de convolution. On dit qu'un noyau de convolution κ sur $\mathbf{R}^n$ vérifie le principe du balayage sur tout ouvert si, pour une mesure positive μ dans $\mathbf{R}^n$ à support compact et pour un ouvert ω dans $\mathbf{R}^n$, il existe une mesure positive μ' portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait :

(B.1) $\kappa * \mu \geqslant \kappa * \mu'$.

(B.2) $\kappa * \mu = \kappa * \mu'$ (au sens des mesures) dans ω.

Proposition 6 ([1] et [3]).– *Soit κ un noyau de Dirichlet sur R^n. Alors on a :*

1) *κ est symétrique par rapport à* O *et s'annule à l'infini.*

2) *κ est injectif*(6).

3) *κ vérifie le principe du balayage sur tout ouvert.*

4) *κ vérifie le principe de domination ; c'est-à-dire, pour $f, g \in \mathrm{M}_\mathrm{K}^+$ quelconques, $u_f \leqslant u_g$* p.p. *sur* R^n *dès que $u_f \leqslant u_g$ p.p. sur l'ensemble $\{x \in \mathrm{R}^n ; f(x) > 0\}$, où $\kappa * (f dx) = u_f\, dx$.*

5) *κ vérifie le principe de positivité des masses ; c'est-à-dire, pour des mesures positives μ et ν quelconques, $\int d\mu \leqslant \int d\nu$ dès que*

(6) Ceci signifie que, pour une mesure réelle μ, $\mu = 0$ dès que $\kappa * \mu$ a un sens et que $\kappa * \mu = 0$.

$\kappa * (\mu + \nu)$ a un sens et que $\kappa * \mu \leqslant \kappa * \nu$.

Examinons encore le balayage pour les noyaux de Dirichlet.

Remarque 3. – Soit κ un noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$. Alors, pour une mesure positive μ telle que $\kappa * \mu$ ait un sens et pour un ouvert ω dans $\mathbf{R}^n$, il existe une seule mesure positive μ'_ω portée par $\bar{\omega}$ et vérifiant (B.1), (B.2) et (B.3) :

(B.3) Pour une mesure positive ν quelconque, $\kappa * \nu \geqslant \kappa * \mu'_\omega$ dès que $\kappa * \nu \geqslant \kappa * \mu$ dans ω.

En effet, d'après l'injectivité de κ et (B.3), une telle mesure positive est uniquement déterminée dès qu'elle existe. Donc on montrera seulement l'existence de μ'_ω. Soit $(\omega_m)_{m=1}^\infty$ une suite d'ouverts relativement compacts telle que $\bar{\omega}_m \subset \omega_{m+1}$ et $\bigcup_{m=1}^\infty \omega_m = \omega$.

D'abord on suppose que $\operatorname{supp}(\mu)$ est compact. D'après la proposition 6, il existe une mesure positive μ'_m portée par $\bar{\omega}_m$ et vérifiant (B.1) et (B.2) pour μ et ω_m. D'après (4) et (5) de la proposition 6, $(\kappa * \mu'_m)_{m=1}^\infty$ est croissante et $\int d\mu'_m \leqslant \int d\mu$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Donc on peut supposer que $(\mu'_m)_{m=1}^\infty$ converge vaguement vers la limite μ'_ω lorsque $m \to \infty$. Comme, pour $f \in C_K$ quelconque, $\lim_{|x| \to \infty} \kappa * f(x) = 0$ et $\left(\int d\mu'_m\right)_{m=1}^\infty$ est bornée, on a

$$\lim_{m\to\infty} \int \kappa * f d\mu'_m = \int \kappa * f d\mu'_\omega,$$

d'où

$$\lim_{m\to\infty} \kappa * \mu'_m = \kappa * \mu'_m \text{ (vaguement).}$$

On voit alors que μ'_ω vérifie (B.1) et (B.2) pour μ et ω. Soit ν une mesure positive telle que $\kappa * \nu \geqslant \kappa * \mu$ dans ω. Alors, pour $m \geqslant 1$ quelconque, $\kappa * \mu'_m \leqslant \kappa * \nu$ dans ω. Comme $\operatorname{supp}(\mu'_m) \subset \omega$, on a $\kappa * \mu'_m \geqslant \kappa * \nu$, d'après (4) de la proposition 6. En faisant $m \uparrow \infty$, on voit que μ'_ω vérifie (B.3), et donc μ'_ω est la mesure demandée.

Montrons notre remarque. On pose $\mu_m = \mu$ sur $B(O\,; m) \cap CB(O\,; m-1)$ et $\mu_m' = 0$ dans son complément ($m = 1, 2, \ldots$). Soit $\mu'_{m,\omega}$ la mesure positive portée par $\bar{\omega}$ et vérifiant (B.1), (B.2) et (B.3) pour μ_m' et ω. Posons $\mu_\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \mu'_{m,\omega}$; alors on voit facilement que μ_ω' est la mesure demandée.

On dit que μ_ω' est la mesure balayée de μ sur ω relativement à κ. On a toujours $\int d\mu \geqslant \int d\mu_\omega'$.

Remarque 4. – *Soient κ un noyau de Dirichlet et ω_1 , ω_2 deux ouverts dans $\mathbf{R}^n$ tels que $\omega_1 \subset \omega_2$. Alors, pour une mesure positive μ telle que $\kappa * \mu$ ait un sens, $\mu'_{\omega_1} \geqslant \mu'_{\omega_2}$ dans ω_1.*

En remarquant que μ'_{ω_1} est aussi la mesure balayée de μ'_{ω_2} sur ω_1 relativement à κ, on voit l'inégalité demandée.

La proposition suivante est déjà connue (cf. [6]).

PROPOSITION 7. – *Soit κ un noyau de Dirichlet dont la transformée de Fourier $\hat{\kappa}$ est de la forme $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi}\, dx$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1) *Pour une mesure positive μ à support compact et un ouvert ω quelconques, $\int d\mu = \int d\mu_\omega^1$ dès que $C\omega$ est compact.*

2) $\psi(O) = 0$.

3) $\int d\kappa = \infty$.

Soit κ un noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$ et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ. Si, pour une mesure réelle μ, la fonctionnelle $C_K \cap D \ni \phi \longrightarrow \int \phi d\mu$ est bornée dans D, alors il existe $u_\mu \in D$ unique telle que $(u_\mu\,, \phi) = \int \phi d\mu$. On dit aussi que u_μ est le potentiel de μ dans D.

Remarque 5 (cf. [1]). – *Si* μ est positive et u_μ existe dans D, alors $\kappa * \mu$ a un sens et $\kappa * \mu = u_\mu \, dx$.

Pour simplifier la notation, on note

$$\mathcal{E}(\kappa) = \{\mu : \text{mesure réelle} \; ; u_\mu \text{ existe dans D}\} \tag{4}$$

et $\overset{+}{\mathcal{E}}(\kappa)$ la totalité des mesures positives appartenant à $\mathcal{E}(\kappa)$.

3. Une extension de la formule de Riesz.

On connaît bien la formule de décomposition de Riesz pour les noyaux de Riesz-Frostman. Dans ce paragraphe, on discutera une généralisation de cette formule. D'abord on prépare un lemme.

LEMME 1. – *Soit* $\psi \neq 0$ *une fonction définie-négative sur* $\mathbf{R}^n$ *invariante par rotation. Alors* $\frac{1}{\psi}$ *est localement sommable.*

Démonstration. – D'après la remarque 2, on peut écrire

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) \, d\nu(y),$$

où c_i est une constante $\geqslant 0$ ($i = 1, 2$) et où ν est une mesure positive invariante par rotation dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. Comme $\psi \neq 0$, $(c_1, c_2, \nu) \neq (0, 0, 0)$. Comme $n \geqslant 3$, on voit que si $c_1 > 0$ ou bien $c_2 > 0$, $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable. Supposons que $c_1 = c_2 = 0$ et $\nu \neq 0$. Comme ν est invariante par rotation, on a $\psi(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. On choisit un nombre $t > 0$ tel que $\int_{0 < |y| < t} |y|^2 \, d\nu(y) > 0$. On a alors

$$\varliminf_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) \, d\nu(y)}{|x|^2} \geqq \varliminf_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\int (1 - \cos(2\pi x \cdot y)) \, d\nu'_t(y)}{|x|^2}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\int (\pi x \cdot y)^2 \, d\nu'_t(y)}{|x|^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{n} \int |y|^2 \, d\nu'_t(y) > 0,$$

où ν'_t désigne la restriction de ν sur B(O ; t). Donc $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable, d'où le lemme 1.

THEOREME 1. – *A un noyau de Frostman-Kunugui* $\kappa_1 \neq 0$ *sur* R^n, *on peut associer un noyau de Dirichlet* κ_2 *invariant par rotation, et un seul tel que l'on ait*

$$\kappa_1 * \kappa_2 = r^{2-n}. \tag{5}$$

Réciproquement, à un noyau de Dirichlet κ_1 *sur* R^n *invariant par rotation, on peut associer un noyau de Frostman-Kunugui* $\kappa_2 \neq 0$, *et un seul tel que l'égalité analogue à (5) ait lieu.*

Démonstration. – Soit $\kappa_1 \neq 0$ un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$. D'après les propositions 3 et 4, il existe une fonction définie-négative ψ invariante par rotation telle que

$$\widehat{\Delta\kappa_1} = -(n-2)\,\omega_n\,\psi(x)\,dx.$$

Comme $\Delta\kappa_1 \neq 0$, $\psi \neq 0$, et donc le lemme 1 donne que $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable. Il existe un noyau de Dirichlet κ_2 tel que $\hat{\kappa}_2 = \frac{1}{\psi}\,dx$ (cf. [1]). Remarquons que $\Delta\kappa_1$ peut être considérée comme une mesure positive en dehors de O et que $\int_{|x|\geq 1} d(\Delta\kappa_1) < \infty$ (voir la remarque 1) ; alors on voit que $(-\Delta\kappa_1) * \kappa_2$ a un sens et

$$(-\Delta\kappa_1) * \kappa_2 = (n-2)\,\omega_n\,\epsilon.$$

Soit ϵ'_m la mesure balayée de ϵ sur $\overline{\mathrm{C}\mathrm{B}(\mathrm{O}\,;m)}$ relativement au noyau κ_2. Comme $\mathrm{supp}\,(\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \subset \overline{\mathrm{B}(\mathrm{O}\,;m)}$, $\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m))$ a un sens et

$$\begin{aligned} -\Delta\,(\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m))) &= (-\Delta\kappa_1) * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \\ &= ((-\Delta\kappa_1) * \kappa_2) * (\epsilon - \epsilon'_m) \\ &= (n-2)\,\omega_n\,(\epsilon - \epsilon'_m) \end{aligned}$$

Comme $-\Delta\,(r^{2-n} - \kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \geq 0$ au sens des distributions dans $\mathbf{R}^n$ et $\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m))$ s'annule à l'infini, on a

$$\kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \leqslant r^{2-n}.$$

On voit facilement que $(\kappa_2 * \epsilon'_m)_{m=1}^{\infty}$ est décroissante. Comme κ_2 s'annule à l'infini et $\int d\epsilon'_m \leqslant 1$ (voir la proposition 6), $(\kappa_2 * \epsilon'_m)_{m=1}^{\infty}$ converge d'une manière décroissante vers 0 lorsque $m \uparrow \infty$. D'après le théorème de Beppo-Levi dans la théorie de l'intégration, $\kappa_1 * \kappa_2$ a un sens et

$$\kappa_1 * \kappa_2 = \lim_{m \to \infty} \kappa_1 * (\kappa_2 * (\epsilon - \epsilon'_m)) \text{ (vaguement).}$$

Donc $\kappa_1 * \kappa_2 \leqslant r^{2-n}$. Comme $\Delta (r^{2-n} - \kappa_1 * \kappa_2) = 0$, on voit que κ_2 est un noyau de Dirichlet demandé. Evidemment un noyau de Dirichlet κ_2 vérifiant $(-\Delta\kappa_1) * \kappa_2 = (n-2)\,\omega_n \epsilon$ est uniquement déterminé.

Réciproquement, soit κ_1 un noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$ invariant par rotation. On désigne par u le laplacien généralisé tel que

$$u * \kappa_1 = -\epsilon.$$

D'après la proposition 4 et la remarque 2, on peut écrire, pour $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque,

$$u(\phi) = -c_1\, \phi(\mathrm{O}) + c_2\, \Delta\phi(\mathrm{O}) - \lim_{m \to \infty} \int_{|x| \geqslant \frac{1}{m}} (\phi(\mathrm{O}) - \phi(\mathrm{O})\, d\nu(x),$$

où c_i est une constante $\geqslant 0$ $(i = 1, 2)$ et où ν est une mesure positive en dehors de O invariante par rotation telle que

$$\int |x|^2/(1 + |x|^2)\, d\nu(x) < \infty.$$

D'après $\int_{|x| \geqslant 1} d\nu < \infty$, la convolution $-u * r^{2-n}$ est définie au sens des distributions. Comme ν est invariante par rotation, on a, pour $\phi \geqslant 0 \in \mathcal{D}$ quelconque,

$$\infty > \lim_{m \to \infty} \int_{|y| \geqslant \frac{1}{m}} (r^{2-n} * \phi(x) - r^{2-n} * \phi(x - y))\, d\nu(y) \geqslant 0$$

dans $\mathbf{R}^n$. Alors on voit immédiatement que $-u * r^{2-n} \geqslant 0$ au sens des distributions. Par conséquent $-u * r^{2-n}$ est égal à un noyau de convolution κ_2 s'annulant à l'infini. Comme $\Delta\kappa_2 = (n-2)\,\omega_n\, u$, κ_2

est un noyau de Frostman-Kunugui. De la même manière que dans la première partie, on voit que $\kappa_1 * \kappa_2$ a un sens et $\kappa_1 * \kappa_2 = r^{2-n}$. L'injectivité de κ_1 donne l'unicité de κ_2. La démonstration est ainsi complète.

Le théorème 1 donne immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit* D_{FK} *l'ensemble formé par tous les noyaux de Frostman-Kunugui et de Dirichlet. Alors, pour* $\kappa_1 \in D_{FK}$ *quelconque, il existe* $\kappa_2 \in D_{FK}$, *et un seul tel que* $\kappa_1 * \kappa_2 = r^{2-n}$.

Dans ce cas, κ_2 s'appelle le noyau dual de κ_1 par rapport à r^{2-n}.

On donnera une condition pour qu'un noyau de Dirichlet appartienne à D_{FK}. La proposition suivante jouera un rôle important dans cet article.

PROPOSITION 8. — *Soit* κ *un noyau de Dirichlet invariant par rotation dont la transformée de Fourier est de la forme* $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi}\, dx$ *et* ν *la mesure singulière associée à* ψ. *On note, pour* $t > 0$ *quelconque,* $\nu_t = \nu$ *sur* $CB(O\,;t)$ *et* $\nu_t = 0$ *dans* $B(O\,;t)$. *Si, pour tout* $t > 0$, $\nu \neq \nu_t$ *et*

$$\left(\int d\nu_t\right) \kappa \geqslant \kappa * \nu_t, \tag{6}$$

alors κ *est un noyau de Frostman-Kunugui.*

Démonstration. — Soit u le laplacien généralisé tel que $-u * \kappa = \epsilon$. Comme ν est invariante par rotation, on peut écrire, pour $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque,

$$u(\phi) = -c_1\, \phi(0) + c_2\, \Delta\phi(0) - \lim_{m \to \infty} \int_{|x| \geqslant \frac{1}{m}} (\phi(O) - \phi(x))\, d\nu(x),$$

où c_1 et c_2 sont des constantes $\geqslant 0$ (voir la proposition 4 et la remarque 2). Supposons que κ ne soit pas un noyau de Frostman-Kunugui ; alors il existe un nombre $\rho > 0$, une fonction $\phi \geqslant 0$ de $\mathcal{D}$ vérifiant

$$\operatorname{supp}(\phi) \subset B(O\,;\rho)$$

et un point y de $C\overline{B(O\,;\rho)}$ tels que $\Delta\kappa * \phi(y) < 0$. Donc il existe un nombre $t_0 > 0$ tel que, pour $t \in (0\,, t_0)$ quelconque,

$$\kappa * \phi(y) > \kappa * \phi * s_t(y),$$

où l'on rappelle que s_t désigne la mesure uniforme sur $S(O\,;t)$ telle que $\int ds_t = 1$. Comme ν est invariante par rotation et $\nu \neq \nu_{t_0}$,

$$\lim_{m\to\infty} \int (\kappa * \phi(y) - \kappa * \phi(y-z))\, d(\nu_{1/m} - \nu_{t_0})(z) > 0.$$

Ceci et l'inégalité (6) donnent que

$$-u * \kappa * \phi(y) = c_1 \kappa * \phi(y) - c_2 \Delta\kappa * \phi(y)$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \int_{|z|\geq \frac{1}{m}} (\kappa * \phi(y) - \kappa * \phi(y-z))\, d\nu(z) > 0.$$

D'autre part, $-u * \kappa * \phi(y) = 0$, car $y \notin \operatorname{supp}(\phi)$. On arrive donc à une contradiction. Par conséquent κ est un noyau de Frostman-Kunugui, et la démonstration est ainsi complète.

4. La régularité des noyaux de Dirichlet et des mesures balayées.

Commençons avec une proposition connue.

PROPOSITION 9 ([8]). – *Soit κ un noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$. Si κ est absolument continu (par rapport à la mesure de Lebesgue), alors il existe une fonction $K \geq 0$ semi-continue inférieurement telle que $\kappa = K(x)\,dx$ et que le noyau-fonction K satisfasse au principe de continuité*(7).

On discutera la continuité de K pour un noyau de Dirichlet κ invariant par rotation. D'abord on préparera trois lemmes.

LEMME 2. – *Soit κ un noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$. Si $\kappa(\{O\}) > 0$, alors, pour $\mu \in \mathcal{E}^+(\kappa)$, μ est absolument continue.*

En effet, la remarque 5 donne que $\kappa * \mu$ est absolument continu.

(7) Ceci signifie que, pour une mesure positive μ à support compact, la fonction $K * \mu$ est finie et continue dès que la restriction de $K * \mu$ sur $\operatorname{supp}(\mu)$ l'est aussi.

Comme $\kappa * \mu \geqslant \kappa(\{O\})\mu$, μ est aussi absolument continue.

LEMME 3 ([1]). – *Soit κ un noyau de Dirichlet, ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$ et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est égal à κ. Alors, pour $\mu \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ à support compact,*

$$\|u_\mu\|^2 = \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2}{\psi(x)} dx,$$

où u_μ est le potentiel de μ dans D. Réciproquement, pour une mesure positive μ à support compact quelconque, $\mu \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ et l'égalité analogue a lieu dès que $\int |\hat{\mu}(x)|^2/\psi(x)\, dx < \infty$.

LEMME 4. – *Soit κ un noyau de Dirichlet et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ. Alors, pour $\mu \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ et un entier $m \geqslant 1$ quelconques, μ_m appartient à $\mathcal{E}^+(\kappa)$ et $\|u_{\mu_m}\| \leqslant m^{1-n/2}\|u_\mu\|$, où μ_m est la mesure définie par $\int f d\mu_m = \int f(mx) d\mu(x)$ pour toute $f \in C_K$.*

Démonstration. – Posons $\nu_m = \mu$ dans $B(O\,; m)$ et $\nu_m = 0$ sur $CB(O; m)$; alors $(u_{\nu_m})_{m=1}^{\infty}$ converge fortement vers u_μ dans D lorsque $m \to \infty$. Donc il suffit de supposer que $\operatorname{supp}(\mu)$ est compact. Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Comme, pour tout le nombre réel t, $m^2(1 - \cos t) \geqslant 1 - \cos mt$, on a $m^2\psi(x) \geqslant \psi(mx)$ dans $\mathbf{R}^n$. D'après le lemme 3,

$$\|u_{\mu_m}\|^2 = \int \frac{|\hat{\mu}(mx)|^2}{\psi(x)} dx = m^{-n} \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2}{\psi\left(\frac{1}{m}x\right)} dx$$

$$\leqslant m^{2-n} \int \frac{|\hat{\mu}(x)|^2}{\psi(x)} dx = m^{2-n}\|u_\mu\|^2,$$

d'où le lemme 4.

THEOREME 2. — *Soit* κ *un noyau de Dirichlet sur* R^n *invariant par rotation et* D *l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est* κ. *Si, pour tout* $t > 0$, $s_t \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ *et l'application* $(0, \infty) \ni t \longrightarrow \|u_{s_t}\|$ *est localement bornée, alors il existe une fonction* $\mathrm{K} \geqslant 0$ *invariante par rotation, continue au sens large dans* R^n *et finie en dehors de* O *telle que* $\kappa = \mathrm{K}(x)\,dx$, $\lim_{|x| \to \infty} \mathrm{K}(x) = 0$ *et le noyau-fonction* K *vérifie le principe de continuité.*

Démonstration. — Montrons d'abord que κ est absolument continu. Soit ϵ'_m la mesure balayée de ϵ sur $\overline{\mathrm{CB}\left(\mathrm{O}\,;\dfrac{1}{m}\right)}$ relativement au noyau κ. Alors ϵ'_m est invariante par rotation et on a $\int d\epsilon'_m \leqslant 1$. Donc il existe une mesure positive λ_m sur $\left[\dfrac{1}{m}, \infty\right)$ telle que $\epsilon'_m = \int s_t d\lambda_m(t)$ et $\int d\lambda_m \leqslant 1$. Posons $\alpha = \sup\left\{\|u_{s_t}\|\,;\,\dfrac{1}{m} \leqslant t \leqslant \dfrac{2}{m}\right\}$; alors, pour tout $t \in \left[\dfrac{1}{m}, \infty\right)$, le lemme 4 donne $\|u_{s_t}\| \leqslant \alpha$. Comme, pour $\phi \in \mathrm{C_K} \cap \mathrm{D}$ quelconque,

$$\int \phi d\epsilon'_m = \int \phi\, ds_t\, d\lambda_m(t)$$

$$= \int (u_{s_t}, \phi)\, d\lambda_m(t) \leqslant \|\phi\| \int \|u_{s_t}\|\, d\lambda_m(t) \leqslant \alpha\, \|\phi\|,$$

où $(\cdot\,,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans D, la fonctionnelle linéaire $\mathrm{C_K} \cap \mathrm{D} \ni \phi \to \int \phi d\epsilon'_m$ est bornée dans D. Donc $\epsilon'_m \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ et $\|u_{\epsilon'_m}\| \leqslant \alpha$. Comme $(u_{\epsilon'_m})_{m=1}^{\infty}$ converge d'une manière croissante vers κ dans $\mathrm{R}^n - \{\mathrm{O}\}$ avec $m \uparrow \infty$ et, d'après le lemme 2, $\kappa(\{\mathrm{O}\}) = 0$, κ est absolument continu.

D'après la proposition 9, il existe une fonction $\mathrm{K} \geqslant 0$ semi-continue inférieurement telle que $\kappa = \mathrm{K}(x)\,dx$ et K vérifie le principe de continuité. Evidemment K est invariante par rotation et, pour $\mu \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ quelconque, $u_\mu = \mathrm{K} * \mu$ p.p. sur R^n.

Montrons que K est finie et continue dans $\mathrm{R}^n - \{\mathrm{O}\}$ et

$$\lim_{|x| \to \infty} \mathrm{K}(x) = 0.$$

On prend une suite $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset C_K^+$ telle que $\mathrm{supp}(f_k) \subset B\left(O\,;\frac{1}{k}\right)$, $f_k(x) = f_k(-x)$ et $\int f_k\,dx = 1$. Soit $t > 0$ quelconque ; posons $g_k = s_t * f_k$. Alors $(u_{g_k})_{k=1}^{\infty}$ converge fortement vers u_{s_t} dans D lorsque $k \longrightarrow \infty$. Comme K est semi-continue inférieurement, on a :

$$\|u_{s_t}\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|u_{g_k}\|^2 = \lim_{k\to\infty}\int K * g_k(x) g_k(x)\,dx \geqslant \int K * s_t(x)\,ds_t(x).$$

Donc $K * s_t$ est égale à une constante $\geqslant 0$ sur $S(O\,;t) = \mathrm{supp}(s_t)$. Le principe de continuité pour K donne que $K * s_t$ est finie et continue dans $\mathbf{R}^n$. Soit m un entier $\geqslant 1$ quelconque. La famille $(u_{s_t})_{t \geqslant 1/m}$ est bornée dans D. Comme, pour $\phi \in C_K \cap D$ quelconque, la fonction (u_{s_t}, ϕ) de t est finie et continue dans $(0\,,\infty)$ et $\lim_{t\to\infty} (u_{s_t}, \phi) = 0$, $\left(\frac{1}{m}, \infty\right) \ni t \longrightarrow u_{s_t}$ est faiblement continue dans D et $\lim_{t\to\infty} u_s = 0$ (faiblement). En particulier, la fonction $(u_{s_t}, u_{\epsilon'_m})$ de t est finie et continue dans $\left(\frac{1}{m}, \infty\right)$ et tend vers 0 lorsque $t \longrightarrow \infty$. Comme $u_{\epsilon'_m} = K$ p.p. sur $CB\left(O\,;\frac{1}{m}\right)$, on a, pour $t > \frac{1}{m}$ quelconque,

$$\begin{aligned}(u_{s_t}, u_{\epsilon'_m}) &= \lim_{k\to\infty} (u_{s_t * f_k}, u_{\epsilon'_m}) = \lim_{k\to\infty} \int u_{\epsilon'_m} (s_t * f_k)\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int K(s_t * f_k)\,dx = \lim_{k\to\infty} K * s_t * f_k(O) \\ &= K * s_t(O) = \int K(x)\,ds_t(x),\end{aligned}$$

car $K * s_t$ est finie et continue. Comme m est quelconque, on voit que la fonction $\int K(x)\,ds_t(x)$ de t est finie et continue dans $(0\,,\infty)$ et tend vers 0 lorsque $t \longrightarrow \infty$. La fonction K étant invariante par rotation, on peut écrire $K(x) = \int K(y)\,ds_{|x|}(y)$ en dehors de O et donc K est finie et continue en dehors de O et $\lim_{|x|\to\infty} K(x) = 0$.

Montrons finalement $\lim_{|x|\to 0} K(x) = \infty$. Supposons que

$$\varliminf_{|x|\to 0} K(x) < \infty.$$

Alors il existe une suite $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ de nombres > 0 telle que $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ et que $\left(\int K(x)\, ds_{t_k}(x)\right)_{k=1}^{\infty}$ soit bornée. Pour tout l'entier $m \geqslant 1$, on a

$$\|u_{\epsilon'_m}\|^2 \leqslant \int K(x)\, d\epsilon'_m(x) = \lim_{k\to\infty} \int K * s_{t_k}(x)\, d\epsilon'_m(x)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int K * \epsilon'_m(x)\, ds_{t_k}(x)$$

$$\leqq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int K(x)\, ds_{t_k}(x).$$

Donc $(u_{\epsilon'_m})_{m=1}^{\infty}$ est bornée dans D. Comme $K = \lim_{k\to\infty} u_{\epsilon'_k}$ p.p., on a $K \in D$. Soit $\phi \in C_K \cap D$ quelconque. Alors

$$\max_{x\in R^n} |\phi(x)| = \max_{x\in R^n} |(K, U_x\phi)| = \max_{x\in R^n} \|K\|\, \|U_x\phi\| = \|K\|\, \|\phi\|.$$

Comme $C_K \cap D$ est dense dans D, tout l'élément de D est une fonction finie et continue. En particulier, K est finie et continue. Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Alors $\frac{1}{\psi}$ est sommable. Comme $\overline{\lim}_{|x|\to\infty} \frac{\psi(x)}{|x|^2} < \infty$ et $n \geqslant 3$, ceci est une contradiction. On voit donc que $\lim_{|x|\to 0} K(x) = \infty$.

Remplaçons K(O) par $+\infty$ si c'est nécessaire ; alors on voit que K est la fonction demandée. La démonstration est ainsi complète.

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du théorème 2.

COROLLAIRE 2. — *Soit κ un noyau de Dirichlet invariant par rotation dont la transformée de Fourier est de la forme $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Si κ vérifie la condition suivante* (1) *ou bien* (2), *alors la même conclusion a lieu.*

(1) $\underline{\lim}_{|x|\to\infty} \frac{\psi(x)}{|x|^2} > 0.$

(2) *Il existe $t_0 > 0$ tel que $s_{t_0} \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ et la mesure singulière associée à ψ est décroissante par rapport à $r = |x| > 0$*[8].

Démonstration. – Supposons d'abord que κ vérifie (1). Il est bien connu que, pour $t > 0$ quelconque, $s_t \in \mathcal{E}^+(r^{2-n})$ et l'application

$$(0\,,\infty) \ni t \longrightarrow \int \frac{|\hat{s}_t(x)|^2}{|x|^2}\,dx$$

est continue. Ecrivons, avec deux constantes $c_1 \geqslant 0$ et $c_2 \geqslant 0$,

$$\psi(x) = c_1 + c_2\,|x|^2 + \int (1 - \cos(2\,\pi x \cdot y))\,d\nu(y)$$

(cf. la remarque 2). La condition (1) donne que $c_2 > 0$. Ceci et le lemme 3 donnent que $s_t \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ et l'application $(0\,,\infty) \ni t \longrightarrow \|u_{s_t}\|$ est localement bornée, d'où la même conclusion.

Supposons que κ vérifie (2). On peut supposer que $t_0 = 1$. D'après les lemmes 3 et 4, il suffit de montrer que, pour tout entier $m \geqslant 1$.

$$\sup_{\frac{1}{m} \leqslant t \leqslant 1} \int \frac{|\hat{s}_t(x)|^2}{\psi(x)}\,dx < \infty. \tag{7}$$

Comme $\hat{s}_t(x) = \hat{s}_1(tx)$, (7) se déduit de

$$\inf \left\{ \frac{\psi(tx)}{\psi(x)}\,;\ x \neq 0,\ 1 \leqslant t \leqslant m \right\} > 0,$$

car $s_1 \in \mathcal{E}^+(\kappa)$. Comme ν est invariante par rotation, il existe une mesure positive λ dans $(0\,,\infty)$ telle que $\nu = \int s_t d\lambda(t)$. Soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de C_K^+ telle que f_k soit invariante par rotation,

$$\operatorname{supp}(f_k) \subset B\left(O\,;\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \int f_k\,dx = 1.$$

Comme la fonction $\int f_k(x-y)\,d\nu(y)$ de x est décroissante par rap-

---

([8]) Pour une fonction f de C_K^+ invariante par rotation et un nombre $t > 0$ vérifiant $B(O\,;t) \supset \operatorname{supp}(f)$, la fonction $\int f(x-y)\,d\nu(y)$ de x est définie sur $CB(O\,;t)$ et invariante par rotation. On dit que ν est décroissante par rapport à r si, pour toute $f \in C_K^+$ invariante par rotation et pour tout $t > 0$ vérifiant $B(O\,;t) \supset \operatorname{supp}(f)$, $\int f(x-y)\,d\nu(y)$ est décroissante au sens large lorsque $r\,(\geqslant t)$ est croissant.

port à $r \left(\geqslant \frac{1}{k}\right)$, il existe une fonction finie et continue $\lambda_k \geqslant 0$ sur $\left[\frac{1}{k}, \infty\right)$ telle que $\left(\int f_k(x-y)\,d\nu(y)\right) dx = \int s_t \lambda_k(t)\,dt$ sur CB $\left(O\,; \frac{1}{k}\right)$ et la fonction $\lambda_k(t)/t^{n-1}$ de t soit décroissante au sens large sur $\left[\frac{1}{k}, \infty\right)$. Soit $t \in [1, m]$ quelconque. Pour une fonction $g \geqslant 0$ finie et continue dans $(0, \infty)$ à support compact quelconque, on a

$$\int g(ts)\,d\lambda(s) = \lim_{k\to\infty} \int g(ts)\,\lambda_k(s)\,ds = \frac{1}{t} \lim_{k\to\infty} \int g(s)\,\lambda_k\left(\frac{s}{t}\right) ds$$

$$\geqslant \frac{1}{t^n} \lim_{k\to\infty} \int g(s)\,\lambda_k(s)\,ds = \frac{1}{t^n} \int g(s)\,d\lambda(s),$$

et donc, pour $x \in \mathbf{R}^n$ quelconque,

$$\psi(tx) = c_1 + c_2 t^2 |x|^2 + \int\int (1 - \cos(2t\pi x \cdot y))\,ds_u(y)\,d\lambda(u)$$

$$= c_1 + c_2 t^2 |x|^2$$

$$+ \iint (1 - \cos(2\pi x \cdot y))\,ds_{tu}(y)\,d\lambda(u) \geqslant \frac{1}{t^n} \psi(x),$$

d'où $\inf \left\{ \frac{\psi(tx)}{\psi(x)}\,; x \neq 0,\ 1 \leqslant t \leqslant m \right\} \geqslant 1/m^n > 0$. On voit ainsi que la même conclusion a lieu. La démonstration est complète.

Discutons ensuite la continuité absolue des mesures balayées. Rappelons d'abord le théorème de représentation par A. Beurling et J. Deny ([1]).

PROPOSITION 10. — *Soit κ un noyau de Dirichlet, ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$ et D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ. Alors il existe une constante $c \geqslant 0$, une forme*

---

(9) On dit que $Q(f, g)$ possède la propriété locale si $Q(f, g) = 0$ dès que f est égale à une constante dans un certain voisinage de $\mathrm{supp}(g)$ ou bien que g est égale à une constante dans un certain voisinage de $\mathrm{supp}(f)$.

hermitienne $Q(f, g) \geqslant 0$ *sur* $C_K \cap D$ *possédant la propriété locale*(9) *telles que, pour toutes* $f, g \in C_K \cap D$,

$$(f, g) = c \int fg dx + Q(f, g)$$
$$+ \frac{1}{2} \iint (f(x + y) - f(x))(g(x + y) - g(x))\, d\nu(y)\, dx, \quad (8)$$

où ν *est la mesure singulière associée à* ψ. *Dans ce cas,* c *et* $Q(f, g)$ *sont uniquement déterminées.*

En utilisant la présente proposition, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 11. — *Soit* κ *un noyau de Dirichlet sur* $\mathbf{R}^n$ *tel que* $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. *Supposons que la mesure singulière associée à* ψ *possède la densité continue* $\alpha(x)$ *en dehors de* O. *Pour une mesure positive* μ *dans* $\mathbf{R}^n$ *à support compact et un ouvert* ω *dans* $\mathbf{R}^n$ *quelconques, il existe une fonction finie et continue* $f'_{\mu,\omega}$ *dans* ω, *et une seule telle que* $\mu'_\omega = f'_{\mu,\omega}\, dx$ *dans* ω *dès que* $\mathrm{supp}(\mu) \cap \overline{\omega} = \emptyset$ *et que* $C\omega$ *est compact, où* μ'_ω *est la mesure balayée de* μ *sur* ω *relativement à* κ. *Dans ce cas, on a, pour* $x \in \omega$,

$$f'_{\mu,\omega} = \int \alpha(x - y)\, d(\kappa * \mu - \kappa * \mu'_\omega)(y). \quad (9)$$

Démonstration. — Ecrivons g la fonction définie par la partie droite de (9). Alors g est finie et continue dans ω. Pour la proposition 11, il suffit de montrer que, pour tout $\phi \in C_K \cap D$ à support dans ω, $\int \phi d\mu'_\omega = \int \phi g dx$, car $C_K \cap D$ est dense dans C_K. On choisit un nombre $t > 0$ vérifiant $\mathrm{supp}(\phi) + B(O\,;t) \subset \omega$. Soit f une fonction de C_K^+ symétrique par rapport à O et vérifiant

$$\mathrm{supp}(f) \subset B(O\,;t).$$

Comme $(\kappa * \mu - \kappa * \mu'_\omega) * f$ appartient à $C_K \cap D$ et

$$\mathrm{supp}(\phi) \cap (\mathrm{supp}((\kappa * \mu - \kappa * \mu'_\omega) * f) \cup \mathrm{supp}(\mu)) = \emptyset,$$

la proposition 10 donne que

$$\int \phi * f d\mu'_\omega = \int \phi(x)(\mu'_\omega - \mu) * f(x)\,dx$$

$$= (\kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f, \phi)$$

$$= \frac{1}{2}\iint (\phi(x+y) - \phi(x))(\kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x+y)$$

$$- \kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x))\,\alpha(y)\,dy\,dx$$

$$= \iint \phi(x)(\kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x)$$

$$- \kappa * (\mu'_\omega - \mu) * f(x+y))\,\alpha(y)\,dy\,dx$$

$$= \iint \kappa * (\check{\mu} - \check{\mu}'_\omega) * (\phi * f)(y)\,\alpha(y)\,dy$$

où $\int h d\check{\mu} = \int h(-x)\,d\mu(x)$ pour toute $h \in C_K$. En faisant $fdx \longrightarrow \epsilon$ (vaguement), on a $\int \phi\, d\mu'_\omega = \int \phi g dx$. La démonstration est ainsi complète.

En particulier, on note, pour $t > 0$ quelconque, $f'_t(x\,;\kappa)$ la fonction $f'_{\epsilon, C\overline{B(O\,;t)}}$ obtenue dans la proposition 11. En posant $f'_t(x\,;\kappa) = 0$ dans $\overline{B(O\,;t)}$, on peut supposer que f'_t est une fonction sommable dans $\mathbf{R}^n$ (cf. la proposition 7). Pour un entier $m \geqslant 1$, on note encore

$$f'_{t,m}(x\,;\kappa) = \begin{cases} f'_{t-1/m}(x\,;\kappa) & \text{sur} \quad C\overline{B(O\,;t)} \\ 0 & \text{dans} \quad \overline{B(O\,;t)} \end{cases} \tag{10}$$

dès que $t > \dfrac{1}{m}$.

COROLLAIRE 3. – *Soit κ un noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$ invariant par rotation et vérifiant la même condition que ci-dessus. Alors il existe une fonction $c(t\,;\kappa)$ dans $(0\,,\infty)$ telle que*

$$0 \leqslant c(t\,;\kappa) \leqslant 1 - \int f'_t\,dx$$

et

$$\epsilon'_t = c(t\,;\kappa)\,s_t + f'_t(x\,;\kappa)\,dx \tag{11}$$

où ϵ'_t est la mesure balayée de ϵ sur $\overline{\mathrm{CB}\,(\mathrm{O}\,;t)}$ relativement à κ.

En effet, évidemment ϵ'_t est aussi invariante par rotation et on a $\epsilon'_t = f'_t(x)\,dx$ dans $\overline{\mathrm{CB}\,(\mathrm{O}\,;t)}$, d'après la proposition 11. Comme $\operatorname{supp}(\epsilon'_t) \subset \mathrm{CB}\,(\mathrm{O}\,;t)$, on voit facilement qu'il existe une telle fonction. D'après le principe de positivité des masses, on a

$$c\,(t\,;\kappa) + \int f'_t\,(x)\,dx \leqslant 1.$$

Posons, pour un entier $m \geqslant 1$,

$$c_m\,(t\,;\kappa) = c\left(t - \frac{1}{m}\,;\kappa\right) + \int_{|x| \leqslant t} f'_{t-1/m}\,(x)\,dx \tag{12}$$

dès que $t > \dfrac{1}{m}$; alors $c_m\,(t\,;\kappa)$ est une fonction définie dans $\left(\dfrac{1}{m}, \infty\right)$.

Proposition 12. – *Soit κ un noyau de Dirichlet sur R^n invariant par rotation tel que $\hat{\kappa} = \dfrac{1}{\psi}dx$. Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ vérifiant $s_{t_0} \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ et que la mesure singulière associée à ψ possède la densité continue $\alpha(x)$ décroissante au sens large par rapport à $r = |x| > 0$.*

Alors on a :

1) *Les applications* $(0\,,\infty) \ni t \longrightarrow \epsilon'_t$ *et* $(0\,,\infty) \ni t \longrightarrow \kappa * \epsilon'_t$ *sont vaguement continues.*

2) *La fonction $\int d\epsilon'_t$ de t est continue.*

3) *Pour un entier $m \geqslant 1$ quelconque, la fonction $c_m\,(t\,;\kappa)$ est continue dans $\left(\dfrac{1}{m}, \infty\right)$.*

Démonstration. – D'après le théorème 2 et le corollaire 2, il existe une fonction $\mathrm{K} \geqslant 0$ continue au sens large dans $\mathbf{R}^n$ et finie en dehors de O telle que $\lim\limits_{|x| \to \infty} \mathrm{K}\,(x) = 0$, $\kappa = \mathrm{K}\,(x)\,dx$ et que K vérifie le principe de continuité. Evidemment K est aussi invariante par rotation.

Soit $t > 0$ quelconque et $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ une suite dans $(0, \infty)$ tendant vers t $(m \longrightarrow \infty)$ quelconque. Comme $\int d\epsilon'_{t_m} \leqslant 1$, $(\epsilon'_{t_m})_{m=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Soit ϵ''_t un point vaguement adhérent de $(\epsilon'_{t_m})_{m=1}^{\infty}$ quelconque. Comme $\lim\limits_{|x| \to \infty} \mathrm{K}(x) = 0$, on a $\mathrm{K} * \epsilon'_t = \mathrm{K} * \epsilon''_t$ p.p. dans $\mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)$. De la même manière que dans le théorème 2 et dans le corollaire 2, on voit que $\mathrm{K} * \epsilon'_t$ et $\mathrm{K} * \epsilon''_t$ sont finies et continues. Donc $\mathrm{K} * \epsilon'_t = \mathrm{K} * \epsilon''_t$ sur $\mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)$. Comme $\mathrm{supp}(\epsilon'_t) \cup \mathrm{supp}(\epsilon''_t) \subset \mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)$, le principe de domination pour κ donne que $\kappa * \epsilon'_t = \kappa * \epsilon''_t$, et donc $\epsilon'_t = \epsilon''_t$, d'après l'injectivité de κ. Par conséquent $(0, \infty) \ni t \longrightarrow \epsilon'_t$ et $(0, \infty) \ni t \longrightarrow \kappa * \epsilon'_t$ sont vaguement continues.

On voit facilement que la fonction $\int d\epsilon'_t$ de t est continue (d'après la proposition 7, il suffit de considérer le cas $\int d\kappa < +\infty$).

Montrons finalement que $c_m(t\,;\kappa)$ est continue dans $\left(\frac{1}{m}, \infty\right)$. Comme $t \longrightarrow (\kappa - \kappa * \epsilon'_t)$ est vaguement continue et

$$f'_t(x) = \int \alpha(x-y)\, d(\kappa - \kappa * \epsilon'_t)(y)$$

dans $\overline{\mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)}$, on voit que, pour $x \in \mathbf{R}^n$, $t > \frac{1}{m}$ et une suite $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ tendant vers $t\,(k \longrightarrow \infty)$ quelconques, $\lim\limits_{k \to \infty} f'_{t_k,m}(x) = f'_{t,m}(x)$ dans $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,;t) \cup \overline{\mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)}$. Posons $\alpha_{1/m} = 0$ dans $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,;1/m)$ et $\alpha_{1/m} = \alpha$ en dehors de $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,;1/m)$; alors, pour k assez grand, $f'_{t_k,m} \leqq \mathrm{K} * \alpha_{1/m}$ sur $\mathbf{R}^n$. On remarque ici que $\int \alpha_{1/m}\, dx < \infty$. Le théorème de Lebesgue donne que $\lim\limits_{k \to \infty} \int f'_{t_k,m}\, dx = \int f'_{t,m}\, dx$, et donc la fonction $\int f'_{t,m}\, dx$ de t est finie et continue dans $\left(\frac{1}{m}, \infty\right)$. Comme

$$c_m(t\,;\kappa) = \int d\epsilon'_{t-1/m} - \int f'_{t,m}\, dx,$$

on voit que $c_m(t\,;\kappa)$ est continue dans $\left(\frac{1}{m}, \infty\right)$. La démonstration est ainsi complète.

5. Les noyaux de Dirichlet et la condition(*).

Rappelons d'abord la condition (*) pour une fonction dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$.

Soit α *une fonction finie et continue* $\geqslant 0$ *dans* $\mathbf{R}^n - \{O\}$. *On dit que* α *vérifie la condition* (*) *si, pour* $t' \geqslant t > 0$ *et une constante* $c \geqslant 0$ *quelconques,*

$$\alpha(x) \geqslant c \int \alpha(x-y)\, ds_t(y)$$

sur $\mathrm{CB}(O\,;t')$ *dès que la même inégalité a lieu sur* $S(O\,;t')$.

Remarque 6. — Soit α une fonction finie et continue > 0 dans $\mathrm{R}^n - \{O\}$ invariante par rotation. Alors pour que α vérifie la condition (*), il faut et il suffit que, pour tout $t > 0$, la fonction

$$\int \alpha(x-y)\, ds_t(y)/\alpha(x)$$

dans $\mathrm{C}\overline{\mathrm{B}(O;t)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x|$ $(> t)$ croît.

Cela résulte immédiatement de la définition.

PROPOSITION 13. — *Soit* α *une fonction finie et continue* $\geqslant 0$ *dans* $\mathbf{R}^n - \{O\}$ *invariante par rotation et vérifiant la condition* (*). *Alors* $\alpha(x) > 0$ *dans* $\mathbf{R}^n - \{O\}$ *ou bien* $\alpha = 0$. *En particulier, si* $\alpha \neq 0$ *et* $\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\, \alpha(x)\, dx < \infty$, *alors* α *est sous-harmonique dans* $\mathbf{R}^n - \{O\}$ *et strictement décroissante lorsque* $r = |x|$ (> 0) *croît.*

Démonstration. — Posons $A = \{x \in C\{O\}\ ;\alpha(x) = 0\}$ est supposons que $A \neq \emptyset$. Posons $t_0 = \sup\{|y|\ ; y \in A\}$. On montrera d'abord que $A = \overline{B(O\,;t_0)} \cap C\{O\}$. Supposons que $A \neq \overline{B(O\,;t_0)} \cap C\{O\}$. Alors il existe $t_1 > 0$ tel que $A \cap \overline{(B(O\,;t_1) \cap CA)} = S(O\,;t_1)$. On peut choisir $t, t' \in (0\ ;\ \infty)$ et une constante $c > 0$ tels que

$$0 < t < t_1/2 < t' < t_1\ ,\int \alpha(x-y)\,ds_t(y) > 0$$

sur $S(O\,;t_1)$ et $\alpha(x) \geqslant c\int \alpha(x-y)\,ds_t(y)$ sur $S(O\,;t')$. D'après la condition $(*)$, on a $\alpha(x) \geqslant c\int \alpha(x-y)\,ds_t(y)$ sur $S(O\,;t_1)$. Mais cela est en contradiction avec $\alpha(x) = 0$ sur $S(O\,;t_1)$, et donc $\overline{A} \supset \overline{B(O;t_0)}$, d'où $A = \overline{B(O\,;t_0)} \cap C\{O\}$. Par conséquent, pour la première conclusion, il suffit de montrer que $t_0 = \infty$. Supposons $t_0 < \infty$. Soit t un nombre tel que $0 < t < t_0/4$. Alors $\alpha(x) = 0$ et $\int \alpha(x-y)\,ds_t(y) = 0$ sur $S(O\,;t_0/2)$, et donc, d'après la condition $(*)$,

$$\alpha(x) \geqslant \int \alpha(x-y)\,ds_t(y)$$

sur $S(O;t_0)$, d'où $\int \alpha(x-y)\,ds_t(y) = 0$ sur $S(O\,;t_0)$. Comme α est invariante par rotation, cela est en contradiction avec la définition de t_0. On voit ainsi que $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ ou $\alpha \equiv 0$.

Montrons la deuxième partie. Supposons qu'il existe un point $x_0 \neq O$ de $\mathbf{R}^n$ tel que α ne soit pas sous-harmonique dans un certain voisinage de x_0. Posons $t_0 = |x_0|$. Alors on peut choisir $t \in (0\ ,\ t_0)$ tel que $\alpha(x_0) > \int \alpha(x_0-y)\,ds_t(y)$. On a $\alpha(x) > \int \alpha(x-y)\,ds_t(y)$ sur $S(O;t_0)$. Comme $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ (cf. la première partie), on a $\alpha(x) > \int \alpha(x-y)\,ds_t(y)$ sur $CB(O\,;t_0)$, d'après la condition $(*)$. Posons $\psi(x) = 1 - \hat{s}_t(x)$ sur $\mathbf{R}^n$; alors ψ est définie-négative et $\frac{1}{\psi}$ est localement sommable, d'après le lemme 1. Donc il existe un noyau de Dirichlet κ tel que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi}dx$. On a $\int d\kappa = \infty$ (cf. la proposition 7). Comme $\alpha(x) > 0$ dans $R^n - \{O\}$, il existe une fonction $f \neq 0 \in C_K^+$ invariante par rotation telle que $\mathrm{supp}(f) \subset B(O\,;t_0 - t)$ et $\alpha(x) \geqslant \kappa * f(x)$ sur $CB(O\,;t_0 - t) \cap \overline{B(O\,;t_0)}$. Comme

$$\int_{|x| \geqslant t_0} \alpha(x)\, dx < \infty, \ \sup\{\kappa * f(x) - \alpha(x) \ ; \ x \in CB(O; t_0)\} > 0,$$

et donc il existe un point $y \in CB(O; t_0)$ tel que

$$\kappa * f(y) - \alpha(y) = \sup\{\kappa * f(x) - \alpha(x) \ ; \ x \in CB(O \ ; t_0)\},$$

car $\lim\limits_{|x| \to \infty} \kappa * f(x) = 0$. Par conséquent on a

$$\kappa * f(y) - \alpha(y) \geqslant \int (\kappa * f(y-z) - \alpha(y-z))\, ds_t(z).$$

Mais cela est en contradiction avec $\alpha(y) > \int \alpha(y-z)\, ds_t(z)$ et

$$(\epsilon - s_t) * \kappa * f(y) = f(y) = 0,$$

d'où α est sous-harmonique dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ Soit $\phi(t)$ une fonction définie dans $(0, \infty)$ telle que $\phi(|x|^{2-n}) = \alpha(x)$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. De la même manière que dans la proposition 1, ϕ est finie, continue, convexe et croissante au sens large. En vertu de la convexité de ϕ et de $\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \alpha(x)\, dx < \infty$, ϕ est strictement croissante avec t, et donc α est strictement décroissante lorsque r croît. La démonstration est ainsi complète.

D'après la remarque 6 et la proposition 13, on voit facilement la remarque suivante :

Remarque 7. – Soit α la même fonction que dans la proposition 13. Alors, pour tout $t > 0$ et toute mesure positive μ dans $\mathbf{R}^n$ invariante par rotation et portée par $B(O \ ; t)$,

$$\alpha(x) \geqslant \int \alpha(x-y)\, d\mu(y)$$

sur $CB(O \ ; t)$ dès que la même inégalité a lieu sur $S(O; t)$.

On remarque ici qu'il existe une mesure positive λ sur $[0, t)$ telle que $\mu = \int s_\rho \, d\lambda(\rho)$, où $s_0 = \epsilon$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Riesz (cf. [13]).

THEOREME 3. — *Soit* κ *un noyau de Dirichlet sur* $\mathbf{R}^n$ *invariant par rotation tel que* $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. *Supposons qu'il existe* $t_0 > 0$ *tel que* $s_{t_0} \in \mathcal{E}^+(\kappa)$ *et que la mesure singulière associée à* ψ *possède la densité continue* $\alpha(x)$ *dans* $\mathbf{R}^n - \{O\}$. *Si* α *vérifie la condition* (*), *alors, pour* $t > 0$ *quelconque, il existe une mesure positive* λ_t *sur* $[t, \infty)$ *telle que l'on ait*

$$\alpha(x)\, dx = \int \epsilon'_\rho \, d\lambda_t(\rho) \tag{13}$$

sur $\mathrm{CB}(O\,;t)$, *où* ϵ'_ρ *est la mesure balayée de* ϵ *sur* $\overline{\mathrm{CB}(O\,;\rho)}$ *relativement à* κ.

D'après la proposition 12, l'intégrale droite de (13) est définie au sens des mesures.

Remarque 8. — Soit γ un nombre tel que $0 < \gamma < 2$. On dit que $|x|^{\gamma-n}dx$ est le noyau de Riesz-Frostman d'ordre γ. On sait que $|x|^{\gamma-n}dx$ est un noyau de Dirichlet, sa transformée de Fourier est, avec une constante $c_\gamma > 0$, $1/c_\gamma |x|^\gamma$ et que la mesure singulière associée à $c_\gamma |x|^\gamma$ est, avec une constante $c'_\gamma > 0$, $c'_\gamma\, |x|^{-\gamma-n}dx$. M. Riesz [13] a montré que, pour $t > 0$,

$$|x|^{-\gamma-n}dx = c''_\gamma \int_t^\infty \epsilon'_\rho \rho^{-\gamma-1} (\rho^2 - t^2)^{\frac{\gamma}{2}-1} d\rho$$

dans $\mathrm{CB}(O\,;t)$, où c''_γ est une constante > 0 et où ϵ'_ρ est la mesure balayée de ϵ sur $\overline{\mathrm{CB}(O\,;\rho)}$ relativement à $|x|^{\gamma-n}\, dx$. Dans § 6, on montrera que la fonction $|x|^{-\gamma-n}$ de x vérifie la condition (*).

Pour montrer le théorème 3, on utilisera les trois lemmes suivants.

LEMME 5. — *Soit* $\kappa = \mathrm{K}(x)\, dx$ *un noyau de Dirichlet sur* $\mathbf{R}^n$ *invariant par rotation, où* K *est une fonction vérifiant les mêmes conditions que dans le théorème 2. Supposons les mêmes conditions que dans le théorème 3 et encore que* $\alpha(x) > 0$ *dans* $\mathbf{R}^n - \{O\}$. *Alors, pour tout nombre donné* δ *vérifiant* $0 < \delta < 1$, *il existe une famille* $(s_{t,\delta})_{0<t<\infty}$ *de fonctions* $\geqslant 0$ *dans* $\mathbf{R}^n$, *invariante par rotation, telle que l'on ait :*

a) $s_{t,\delta}(x) = 0$ *dans* $\mathrm{B}(O\,;t) \cup \mathrm{CB}(O\,;t+\delta)$.

b) $s_{t,\delta}(x)$ *est finie et continue comme une fonction sur* CB (O ; t).

c) $\int s_{t,\delta}(x)\,dx = 1$.

d) $|K * s_t(x) - K * s_{t,\delta}(x)| < \delta$ *sur* $\mathbf{R}^n$.

e) $s_{t,\delta}(x)/\alpha(x)$ *est décroissante lorsque* r ($\geqslant t$) *croît.*

f) *L'application* $(0, \infty) \ni t \to s_{t,\delta}(x)dx$ *est vaguement continue.*

g) *Pour un intervalle fermé* $[a, b]$ *et un nombre positif* ξ *quelconques, il existe un nombre* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $t \in [a, b]$ *et* $x, y \in$ CB (O ; t) *vérifiant* $|x - y| < \eta$,

$$\left| \frac{s_{t,\delta}(x)}{\alpha(x)} - \frac{s_{t,\delta}(y)}{\alpha(y)} \right| < \xi.$$

Démonstration. – Soit D l'espace de Dirichlet spécial dont le noyau est κ. On note $\|\cdot\|$ la norme dans D. D'après la proposition 13 et le corollaire 2, on a, pour $t > 0$ quelconque, $s_t \in \mathcal{E}^+(\kappa)$. Comme la fonction $\|u_{s_t}\|$ de t est localement bornée (cf. le corollaire 2), le lemme 4 donne que, pour $t_0 > 0$ quelconque, $\sup_{t \geqslant t_0} \|u_{s_t}\| < \infty$ et $\lim_{t \to \infty} \|u_{s_t}\| = 0$. Evidemment, pour $\phi \in C_K \cap D$ quelconque, la fonction $\int \phi\, ds_t$ de t est finie et continue, et donc $(0, \infty) \ni t \longrightarrow u_{s_t}$ est faiblement continue dans D. Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa} = \frac{1}{\psi} dx$. Comme, pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout nombre $a > 0$, $\inf \left\{ \frac{\psi(atx)}{\psi(ax)} ; 1 \leqslant t \leqslant m \right\} \geqslant 1/m^n$ sur $\mathbf{R}^n$ (cf. la démonstration du corollaire 2), on a

$$\lim_{r \to t} \int \frac{|\hat{s}_r(x)|^2}{\psi(x)}\, dx = \int \frac{|\hat{s}_t(x)|^2}{\psi(x)} dx$$

d'après le théorème de Lebesgue. Donc la fonction $\|u_{s_t}\|$ de t est continue dans $(0, \infty)$. On voit ainsi que $(0, \infty) \ni t \longrightarrow u_{s_t}$ est fortement continue dans D et que $\lim_{t \to \infty} \|u_{s_t}\| = 0$.

On sait déjà que, pour tout $t > 0$, $K * s_t$ est finie et continue dans $\mathbf{R}^n$. Posons

$$M(x, t) = K * s_t(x) = K * s_t * s_{|x|}(O)$$

dans $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$. Comme, pour $t \neq 0$ et $x \neq O$, on a

$$M(x, t) = (u_{s_t}, u_{s_{|x|}}),$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire associé, M est finie et continue dans $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$ et s'annule à l'infini. En remarquant la continuité uniforme de M sur tout compact, on voit qu'il existe une application continue $(0, \infty) \ni t \longrightarrow \delta_t \in (0, \delta)$ telle que, pour $t \in (0, \infty)$, $t' \in (t, t + \delta_t)$ et $x \in \mathbf{R}^n$ quelconques, $|M(x, t) - M(x, t')| < \delta$ et que, pour un entier $m \geqslant 1$ quelconque, $\min \{\delta_t ; 1/m \leqslant t \leqslant m\} > 0$. Soit y_t un point de $S(O ; t + \delta_t)$ et posons

$$s'_{t,\delta}(x) = \begin{cases} \alpha(x) - \alpha(y_t) & \text{si } x \in CB(O ; t) \cap B(O ; t + \delta_t) \\ 0 & \text{si } x \in B(O ; t) \cup CB(O ; t + \delta_t) \end{cases}$$

Alors, d'après la proposition 13, $s_{t,\delta}(x) > 0$ sur $CB(O ; t) \cap B(O ; t + \delta_t)$.

Posons

$$s'_{t,\delta}(x) = \left(\int s'_{t,\delta}(x)\, dx\right)^{-1} s'_{t,\delta}(x) ;$$

alors on obtient une famille $(s_{t,\delta})_{0<t<\infty}$ de fonctions $\geqslant 0$.

Montrons qu'elle est une famille demandée. On voit facilement qu'elle vérifie les conditions (a), (b), (c), (d), (e) et (f). Comme les fonctions $\int s'_{t,\delta}(x)\, dx$ et $|y_t|$ de t sont continues, la fonction

$$\left(\int s'_{t,\delta}(x)\, dx\right)^{-1} \frac{\alpha(x) - \alpha(y_t)}{\alpha(x)}$$

de (x, t) est finie et continue dans $(\mathbf{R}^n - \{O\} \times (0, \infty)$. En remarquant sa continuité uniforme sur tout compact, on voit que la condition (g) est vérifiée. Le lemme 5 est ainsi démontré.

Rappelons la notation $f'_{t,m}(x ; \kappa)$ définie dans (10).

LEMME 6. — *Supposons les mêmes conditions que dans le lemme 5. Soient* $[a\ ,\ b]$, m *et* δ *un intervalle fermé* $\subset (0\ ,\ \infty)$, *un entier* $> 1/a$ *et un nombre* > 0. *Alors il existe un nombre* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $t \in [a\ ,\ b]$ *et tout* $x\ ,\ y \in \mathrm{CB}\ (\mathrm{O}\ ; t) \cap \mathrm{B}(\mathrm{O}\ ; b)$ *vérifiant* $|x - y| < \eta$,

$$\left| \frac{f'_{t,m}(x\ ;\ \kappa)}{\alpha(x)} - \frac{f'_{t,m}(y\ ;\ \kappa)}{\alpha(y)} \right| < \delta .$$

Démonstration. — Soit α' une fonction > 0, finie et continue dans $\mathbf{R}^n$ telle que $\alpha'(x) = \alpha(x)$ sur $\mathrm{CB}\left(\mathrm{O}\ ;\ \dfrac{1}{m}\right)$. Alors, pour $t > \dfrac{1}{m}$ quelconque,

$$f'_{t,m}(x\ ;\ \kappa) = \alpha' * (\kappa - \kappa * \epsilon'_{(t-1/m)})(x)$$

sur $\mathrm{CB}(\mathrm{O}\ ; t)$. D'après la proposition 12, l'application $t \to \kappa - \kappa * \epsilon'_t$ est vaguement continue, et donc la fonction $\dfrac{\alpha' * (\kappa - \kappa * \epsilon'_t)(x)}{\alpha(x)}$ de $(x\ ,\ t)$ est finie et continue dans $(\mathbf{R}^n - \{\mathrm{O}\}) \times (0\ ,\ \infty)$. En remarquant sa continuité uniforme sur tout compact, on voit le lemme 6.

LEMME 7. — *Soient* κ *et* α *les mêmes que dans le théorème 3 et supposons que* α *vérifie la condition* $(*)$ *et* $\alpha(x) > 0$ *dans* $\mathbf{R}^n - \{\mathrm{O}\}$. *Posons, pour un entier* $m \geqslant 1\ ,\ t \in \left(\dfrac{1}{m}\ ,\ \infty\right)$ *et* $\phi \in \mathrm{C_K}$,

$$\epsilon'_{t,m} = c_m(t\ ;\ \kappa)\, s_{t,1/m}\, dx + f'_{t,m}(x\ ;\ \kappa)\, dx\ ,\ \widetilde{\phi}_m(t) = \int \phi d\epsilon'_{t,m}$$

et $\widetilde{\phi}(t) = \int \phi\, d\epsilon'_t$. *Alors, pour* $\phi \in \mathrm{C_K}$ *quelconque,* $(\widetilde{\phi}_m)_{m=1}^{\infty}$ *converge uniformément vers* $\widetilde{\phi}$ *sur tout compact lorsque* $m \to \infty$.

Démonstration. — Posons $\epsilon''_{t,m} = c_m(t\ ;\ \kappa)\, s_t + f'_{t,m}(x\ ;\ \kappa)\, dx$ et $\widetilde{\phi}'_m(t) = \int \phi d\epsilon''_{t,m}$. Comme $0 < c_m(t\ ;\ \kappa) < 1$ et $\int \phi(x)\, s_{t,1/m}(x)\, dx$ converge uniformément vers $\int \phi ds_t$ sur tout compact lorsque $m \longrightarrow \infty$, il suffit de montrer que $(\widetilde{\phi}'_m)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $\widetilde{\phi}$ sur tout compact lorsque $m \longrightarrow \infty$. Comme $\int d\epsilon'_t \leqslant \int d\epsilon''_{t,m} \leqslant 1$, il suffit de le montrer dans le cas où ϕ est infiniment dérivable. On a

$$\phi(x) = -(n-2)\,\omega_n \int |x-y|^{2-n}\, \Delta\phi(y)\, dy$$

et d'après la proposition 12, on voit que les fonctions de (x, t) $\int |x-y|^{2-n}\, d\epsilon'_{t,m}(y)$ et $\int |x-y|^{2-n}\, d\epsilon_t(y)$ sont finies et continues dans $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$.

Par conséquent il suffit de montrer que $\left(\int |x-y|^{2-n}\, d\epsilon''_{t,m}\right)_{m=1}^{\infty}$ converge d'une façon monotone vers $\int |x-y|^{2-n}\, d\epsilon'_t(y)$ lorsque $m \uparrow \infty$, d'après le théorème de Dini. Supposons $m < k$. Alors, d'après la remarque 4, $f'_{t,m}(x\,;\kappa) \leqslant f'_{t,k}(x\,;\kappa)$ sur $\mathbf{R}^n$ et, d'après le principe de positivité de masse, on a $\int d\epsilon'_{(t-1/m)} \geqslant \int d\epsilon'_{(t-1/k)}$. Donc

$$c_m(t\,;\kappa) \geqslant c_k(t\,;\kappa).$$

En vertu de la continuité vague de $t \longrightarrow \epsilon'_t$ (cf. la proposition 12), $(\epsilon''_{t,m})_{m=1}^{\infty}$ converge vaguement vers ϵ'_t lorsque $m \longrightarrow \infty$. Par conséquent $\left(\int |x-y|^{2-n}\, d\epsilon''_{t,m}(y)\right)_{m=1}^{\infty}$ converge d'une manière décroissante vers $\int |x-y|^{2-n}\, d\epsilon'_t(y)$ lorsque $m \longrightarrow \infty$, comme cela résulte de la formule

$$\int |x-y|^{2-n}\, d\epsilon''_{t,m}(y) = \left(\int d\epsilon'_{t-1/m}\right) \mathrm{U}_t(x) - \omega_n \int_t^{\infty} [\mathrm{U}_t(x) - \mathrm{U}_s(x)]\, s^{n-1}\, h_{t,m}(s)\, ds,$$

où on a posé $\mathrm{U}_t(x) = |x|^{2-n}$ pour $|x| \geqslant t$, $\mathrm{U}_t(x) = t^{2-n}$ pour $|x| \leqslant t$, et $h_{t,m}(|x|) = f'_{t,m}(x)$. La démonstration est ainsi complète.

Démonstration du théorème 3. – On peut supposer $\alpha \neq 0$. Alors, d'après la proposition 13, on a $\alpha(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$. On voit que les trois derniers lemmes s'appliquent à notre démonstration, d'après le corollaire 2. On montrera seulement qu'il existe une mesure positive λ sur $[1, \infty)$ telle que $\alpha_1(x)dx = \int \epsilon'_t d\lambda(t)$, où $\alpha_1(x) = \alpha(x)$ sur $\mathrm{CB}(O; 1)$ et $\alpha_1(x) = 0$ dans $\mathrm{B}(O; 1)$. De la même manière, on arrivera à la conclusion du théorème 3. Posons

$$g_{t,m}(x) = c_m(t; \kappa)\, s_{t,1/m}(x) + f'_{t,m}(x; \kappa)$$

sur $\mathbf{R}^n$, où $s_{t,1/m}$ est la fonction obtenue dans le lemme 5. Alors on a $g_{t,m}(x) > 0$ sur $\mathrm{CB}(O; t)$. Posons $\beta_m(t) = \int g_{t,m}(x)dx$; alors β_m est finie et continue dans $(0, \infty)$, d'après la proposition 12. En vertu du principe de positivité de masse, on a $\beta_m \leqslant 1$. Soit k un entier $\geqslant 2$. On pose, pour $m \geqslant 2$ quelconque,

$$a_{m,k} = \min_{1 \leqslant t \leqslant k} \beta_m(t) > 0.$$

D'après les lemmes 5 et 6, il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que, pour $t \in [1, k]$ et $x, y \in \mathrm{CB}(O; t) \cap \overline{\mathrm{B}(O; k)}$ vérifiant $|x - y| < \dfrac{1}{p}$,

$$\left| \frac{g_{t,m}(x)}{\alpha(x)} - \frac{g_{t,m}(y)}{\alpha(y)} \right| < \frac{1}{m},$$

car $c_m(t ; \kappa) < 1$. En vertu de la condition $(*)$ pour α, $\dfrac{f'_{t,m}(x; \kappa)}{\alpha(x)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x|$ $(\geqslant t)$ croît (voir aussi la remarque 7). D'après le lemme 5, $\dfrac{s_{t,1/m}(x)}{\alpha(x)}$ est aussi décroissante au sens large lorsque r $(\geqslant t)$ croît. Donc la fonction $\dfrac{g_{t,m}(x)}{\alpha(x)}$ de x l'est aussi. Soit d_0 une constante > 0 telle que $\alpha(x) = d_0 g_{1,m}(x)$ sur $\mathrm{S}(O; 1)$. Alors on a $\alpha(x) \geqslant d_0 g_{1,m}(x)$ sur $\mathrm{CB}(O; 1)$. Soit d_1

une constante $\geqslant 0$ telle que $\alpha(x) = d_0 g_{1,m}(x) + d_1 g_{(1+1/p),m}(x)$ sur $S(O\,;1+1/p)$. Alors $\alpha(x) \geqslant d_0 g_{1,m}(x) + d_1 g_{(1+1/p)}(x)$ sur $CB\left(O\,;1+\frac{1}{p}\right)$. On obtient, par récurrence, une famille $(d_j)_{j=0}^{(k-1)p-1}$ de constantes $\geqslant 0$ telle que

$$\alpha(x) \geqslant \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x)$$

sur $CB(O\,;1)$ et que, pour un entier i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant (k-1)p-1$,

$$\alpha(x) = \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x) = \sum_{j=0}^{i} d_j g_{(1+j/p),m}(x)$$

sur $S\left(O\,;1+\frac{i}{p}\right)$. Pour tout $x \in CB(O\,;1) \cap B(O\,;k)$, on choisit un entier i tel que

$$0 \leqslant i \leqslant (k-1)p-1 \quad \text{et} \quad 1+\frac{i}{p} \leqslant |x| < 1+\frac{i+1}{p}$$

Soit y un point de $S\left(O; 1+\frac{j}{p}\right)$. Comme $g_{t,m}$ et α sont invariantes par rotation,

$$\left|\frac{\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x)}{\alpha(x)} - 1\right|$$
$$= \left|\frac{\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(x)}{\alpha(x)} - \frac{\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j g_{(1+j/p),m}(y)}{\alpha(y)}\right|$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j \left|\frac{g_{(1+j/p),m}(x)}{\alpha(x)} - \frac{g_{(1+j/p),m}(y)}{\alpha(y)}\right| < \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j\,.$$

Comme

$$\int \alpha_1(x)\,dx \geqslant \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j \int g_{(1+j/p),m}(x)\,dx \geqslant a_{m,k} \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j\,,$$

on a

$$\sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j \leqslant \frac{1}{a_{m,k}} \int \alpha_1(x)\, dx.$$

Posons $b_{m,k} = \int \alpha_1(x)\, dx / a_{m,k}$; alors $(b_{m,k})_{m=2}^{\infty}$ est bornée, car, pour $t > \frac{1}{m}$ quelconque, $\int g_{t,m}(x)\, dx = \int d\epsilon'_{(t-1/m)}$. On pose

$$\lambda_{m,k} = \sum_{j=0}^{(k-1)p-1} d_j\, \epsilon_{(1+j/p)},$$

où $\epsilon_{(1+j/p)}$ désigne la mesure d'unité au point $1 + \frac{j}{p}$ dans R^1. Alors on a $\mathrm{supp}(\lambda_{m,k}) \subset [1, k]$, $\int d\lambda_{m,k} \leqslant b_{m,k}$,

$$\left(1 - \frac{1}{m} b_{m,k}\right) \alpha_1(x) \leqslant \int g_{t,m}(x)\, d\lambda_{m,k}(t) \tag{14}$$

dans $\mathrm{B}(\mathrm{O}; k)$ et

$$\int g_{t,m}(x)\, d\lambda_{m,k}(t) \leqslant \alpha_1(x) \tag{15}$$

sur $\mathbf{R}^n$. Comme la suite $(\lambda_{m,k})_{m=2}^{\infty}$ est vaguement bornée, on peut supposer qu'elle converge vaguement vers la limite λ_k lorsque $m \longrightarrow \infty$. On a $\mathrm{supp}(\lambda_k) \subset [1, k]$. D'après le lemme 7, pour $\phi \in \mathrm{C_K}$ quelconque, la suite $\left(\int \phi(x)\, g_{t,m}(x)\, dx\right)_{m=2}^{\infty}$ de fonctions de t converge uniformément vers $\int \phi\, d\epsilon'_t$ sur $[1, k]$ lorsque $m \longrightarrow \infty$, et donc on a

$$\lim_{m \to \infty} \iint \phi(x)\, g_{t,m}(x)\, dx\, d\lambda_{m,k}(t) = \iint \phi(x)\, d\epsilon'_t(x)\, d\lambda_k(t)$$

Comme ϕ est quelconque, $\left(\int \epsilon'_{t,m}\, d\lambda_{m,k}\right)_{m=2}^{\infty}$ converge vaguement vers $\int \epsilon'_t\, d\lambda_k(t)$ dans $\mathbf{R}^n$ lorsque $m \longrightarrow \infty$, où $\epsilon'_{t,m} = g_{t,m}(x)\, dx$. Regardons (14) et (15) ; en faisant tendre m vers l'infini, on a

$$\alpha_1(x)\, dx = \int \epsilon'_t\, d\lambda_k(t)$$

dans $B(O;k)$ et

$$\alpha_1(x)dx \geqslant \int \epsilon'_t d\lambda_k(t)$$

dans $\mathbf{R}^n$. Considérons finalement la suite $(\lambda_k)_{k=2}^{\infty}$ de mesures positives dans $(0, \infty)$. En rappelant la forme de $\lambda_{m,k}$, on voit que $\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}$, $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ dans $(0, k)$ et $\mathrm{supp}(\lambda_k) \subset [1, k]$. Donc $(\lambda_k)_{k=2}^{\infty}$ converge vaguement vers la limite λ lorsque $k \longrightarrow \infty$. Comme $\lambda \geqslant \lambda_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$,

$$\int \epsilon'_t d\lambda_k(t) \leqslant \int \epsilon'_t d\lambda(t) \leqslant \alpha_1(x)dx,$$

d'où $\alpha_1(x)dx = \int \epsilon'_t d\lambda(t)$. La démonstration est ainsi complète.

En utilisant les théorèmes 1 et 3, on donne une condition suffisante pour qu'un noyau de Frostman-Kunugui soit un noyau de Dirichlet.

THEOREME 4. — *Soit $\kappa \neq 0$ un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$ de classe C^2 en dehors de O et α la densité continue de $\Delta\kappa$ en dehors de O. Si α vérifie la condition $(*)$, alors κ est de la forme*

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n}$$

où κ_0 est un noyau de Dirichlet et où c est une constante $\geqslant 0$.

Démonstration. — D'après le théorème 1, il existe un noyau de Dirichlet κ' sur $\mathbf{R}^n$ invariant par rotation tel que

$$\kappa * \kappa' = \frac{1}{(n-2)\omega_n} r^{2-n}$$

Soit ψ la fonction définie-négative telle que $\hat{\kappa}' = \dfrac{1}{\psi}dx$. Comme $(\Delta\kappa) * \kappa' = -\epsilon$, la remarque 1 donne que la mesure singulière associée à ψ est $\alpha(x)dx$. Notons

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x \cdot y))\alpha(y)dy,$$

où c_1 et c_2 sont de constantes $\geqslant 0$.

Supposons $\alpha = 0$. Alors $c_1 > 0$ ou bien $c_2 > 0$. Comme

$$-\Delta\,\kappa = c_1\,\epsilon - \frac{c_2}{4\pi^2}\,\Delta,$$

on a $\kappa = \dfrac{c_1}{(n-2)\,\omega_n}\, r^{2-n} + \dfrac{c_2}{4\pi^2}\,\epsilon$, car κ s'annule à l'infini. Donc κ est un noyau de Dirichlet.

Supposons $\alpha \neq 0$. Posons

$$\psi_0(x) = c_2\,|x|^2 + \int (1 - \cos(2\pi x\cdot y))\,\alpha(y)\,dy$$

sur $\mathbf{R}^n$; alors ψ_0 est définie-négative et invariante par rotation. D'après le lemme 1, il existe un noyau de Dirichlet κ_0' invariant par rotation tel que $\widehat{\kappa_0'} = \dfrac{1}{\psi_0}\,dx$. D'après le théorème 1, il existe un noyau de Frostman-Kunugui κ_0 tel que

$$\kappa_0 * \kappa_0' = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\, r^{2-n}.$$

Si $c_1 > 0$, alors $\int d\kappa' < \infty$ et $\kappa_0' - \kappa' = c_1\,\kappa_0' * \kappa'$, et donc

$$\kappa_0 * \kappa' = \kappa_0 * \kappa_0' * (\epsilon - c_1\,\kappa') = \frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\,(r^{2-n} - c_1\, r^{2-n} * \kappa')$$
$$= \left(\kappa - \frac{c_1}{(n-2)\,\omega_n}\, r^{2-n}\right) * \kappa'.$$

En vertu de l'injectivité de κ', on a $\kappa_0 = \kappa - \dfrac{c_1}{(n-2)\,\omega_n}\, r^{2-n}$. Posons $c = \dfrac{c_1}{(n-2)\,\omega_n}$; alors on a

$$\kappa = \kappa_0 + c r^{2-n}.$$

Si $c_1 = 0$, évidemment $\kappa = \kappa_0$.

Montrons que κ_0 est un noyau de Dirichlet. On suppose d'abord $c_2 \neq 0$. D'après le corollaire 2, on a, pour tout $t > 0$, $s_t \in \mathcal{E}^+(\kappa_0')$.

Donc le théorème 3 donne que, pour $t > 0$ quelconque, il existe une mesure positive λ_t sur $[t\ ,\ \infty)$ telle que

$$\alpha_t(x)\,dx = \int \epsilon'_\rho\, d\lambda_t(\rho),$$

où $\alpha_t(x) = 0$ dans $\mathrm{B}(\mathrm{O}\,;t)$, $\alpha_t(x) = \alpha(x)$ sur $\mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)$ et où ϵ'_ρ est la mesure balayée de ϵ sur $\overline{\mathrm{CB}(0\,;\rho)}$ relativement à κ'_0. Comme $\psi_0(\mathrm{O}) = 0$, la proposition 7 donne que, pour tout $\rho > 0$, $\int d\epsilon'_\rho = 1$,

et donc on a $\int d\lambda_t = \int \alpha_t(x)\,dx < \infty$. Comme $\alpha \neq \alpha_t$ et

$$\kappa'_0 * (\alpha_t\, dx) = \int \kappa'_0 * \epsilon'_\rho\, d\lambda_t(\rho) \leqslant \left(\int d\lambda_t\right)\kappa'_0 = \left(\int \alpha_t(x)\,dx\right)\kappa'_0\ ,$$

on obtient, d'après la proposition 8, que κ'_0 est un noyau de Frostman-Kunugui, et donc κ_0 est un noyau de Dirichlet, d'après le théorème 1.

Supposons que $c_2 = 0$. Pour un entier $m \geqslant 1$, posons

$$\psi_m(x) = \frac{1}{m}|x|^2 + \psi_0(x)$$

sur $\mathbf{R}^n$; alors il existe un noyau de Dirichlet κ'_m invariant par rotation tel que $\widehat{\kappa'_m} = \dfrac{1}{\psi_m}dx$. Soit κ_m un noyau de Frostman-Kunugui tel que $\kappa_m * \kappa'_m = \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n} r^{2-n}$. On voit alors que κ'_m est aussi un noyau de Frostman-Kunugui et que κ_m est un noyau de Dirichlet. Evidemment $(\Delta\kappa'_m)_{m=1}^\infty$ converge vers $\Delta\kappa'_0$ au sens des distributions dans $\mathbf{R}^n$ lorsque $m \longrightarrow \infty$. Donc $\Delta\kappa'_0 \geqslant 0$ au sens des distributions en dehors de O. Comme $\kappa'_0 \neq 0$ et κ'_0 s'annule à l'infini, κ'_0 est un noyau de Frostman-Kunugui et donc, en utilisant encore le théorème 1, κ_0 est un noyau de Dirichlet. La démonstration est ainsi complète.

Dans le théorème 4, nous ne savons pas maintenant si $\kappa_0 + cr^{2-n}$ est toujours un noyau de Dirichlet.

Pour $p \geqslant 0$ quelconque, on note G_p le noyau de Dirichlet sur $\mathbf{R}^n$ dont la transformée de Fourier est égale à $(p + 4\pi^2|x|^2)^{-1}\,dx$. Evidemment $\mathrm{G}_0 = \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n} r^{2-n}$ et G_p est égal à une fonction > 0

continue au sens large dans $\mathbf{R}^n$ et infiniment dérivable en dehors de O.

Remarque 9. – a) La famille $(G_p)_{p \geqslant 0}$ est une résolvante ; c'est-à-dire, pour $p \geqslant 0$, $q > 0$ quelconques, $G_p - G_q = (q - p)\, G_p * G_q$ et $\lim_{p \to 0} G_p = G_0$.

b) il existe une fonction $0 < a(p, t) < 1$ continue dans $(0, \infty) \times (0, \infty)$ telle que, pour $t \in (0, \infty)$ quelconque, la fonction $a(p, t)$ de p soit infiniment dérivable et strictement croissante et que $\dfrac{1}{a(p, t)}\, s_t$ soit la mesure balayée de ϵ sur $\mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)$ relativement à G_p.

c) Soient $x, y \in \mathbf{R}^n - \{\mathrm{O}\}$ donnés. Si $|x| < |y|$, alors la fonction $\dfrac{G_p(y)}{G_p(x)}$ de p est strictement décroissante lorsque p croît.

En effet, (a) est bien connu. Comme $(-\Delta + p\epsilon) * G_p = \epsilon$, la mesure balayée de ϵ sur $\overline{\mathrm{CB}(\mathrm{O}\,;t)}$ relativement à G_p est portée par $\mathrm{S}(\mathrm{O}\,;t)$ et invariante par rotation, et donc elle est proportionnelle à s_t. En l'écrivant $\dfrac{1}{a(p, t)}\, s_t$, on peut définir la fonction $a(p, t)$ dans $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Elle est évidemment finie et continue et on a $a(p, t) > 1$. Comme $\dfrac{d}{dp} G_p = - G_p * G_p$ et

$$a(p, t) = \frac{G_p * s_t(x_t)}{G_p(x_t)},$$

où $|x_t| = t$, la fonction $a(p, t)$ de p est infiniment dérivable. Soient $0 < p < q$ quelconques. Comme $G_p = G_q * (\epsilon + (q - p)\, G_p)$, on voit facilement $a(p, t)\, G_p * s_t < a(q, t)\, G_p * s_t$, d'où

$$a(p, t) < a(q, t).$$

On choisit encore une constante $b > 0$ tel que $bG_q * s_{|x|} = G_p$ sur $\mathrm{S}(\mathrm{O}\,;|x|)$. Comme $G_p = G_q * (\epsilon + (q - p)\, G_p)$, on a $bG_q * s_{|x|} < G_p$. dans $\overline{\mathrm{CB}}\,(\mathrm{O}\,;|x|)$, d'où $bG_q * s_{|x|}(y) < G_p(y)$. Comme

$$G_q * s_{|x|} = a(q, |x|)\, G_q$$

sur $CB(O\,;|x|)$, on a $\dfrac{G_q(x)}{G_p(x)} > \dfrac{G_q(y)}{G_p(y)}$, d'où (*c*).

Le théorème 4 donne immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4. — *Soit* λ *une mesure positive sur* $[0\,,\infty)$ *telle que* $\int_1^\infty \frac{1}{p}\, d\lambda(p) < \infty$ *et soit c une constante* $\geqslant 0$. *Alors* $c\epsilon + \int G_p\, d\lambda(p)$ *est un noyau de Dirichlet dès que* $(\lambda\,, c) \neq (0\,,0)$.

Démonstration. — On peut supposer $c = 0$. D'après (a) de la remarque 9, il suffit de le montrer dans le cas où $\lambda(\{0\}) = 0$. Comme $\int_1^\infty \frac{1}{p}\, d\lambda(p) < \infty$ et $\lim_{p\to\infty} pG_p = \epsilon$ (vaguement), le noyau de convolution $\int G_p\, d\lambda(p)$ a un sens. Donc il suffit de montrer que la fonction $\int pG_p\, d\lambda(p)$ dans $R^n - \{O\}$ vérifie la condition (*), car $\Delta G_p = pG_p$ en dehors de O. On a, pour $t > 0$,

$$\left(\int pG_p\, d\lambda(p)\right) * s_t = \int a(p\,,t)\, pG_p\, d\lambda(p)$$

dans $CB(O\,;t)$. Soient $x\,, y \in \overline{CB(O\,;t)}$ et supposons $|x| < |y|$. Comme la fonction $a(p\,,t)$ de p est croissante et la fonction $\dfrac{G_p(y)}{G_p(x)}$ de p est décroissante, on a

$$\frac{\int pG_p(y)\, d\lambda(p)}{\int pG_p(x)\, d\lambda(p)} \geqslant \frac{\int a(p\,,t)\, pG_p(y)\, d\lambda(p)}{\int a(p\,,t)\, pG_p(x)\, d\lambda(p)}$$

et donc $\dfrac{\left(\int pG_p(x)\, d\lambda(p)\right) * s_t}{\int pG_p(x)\, d\lambda(p)}$ est décroissante lorsque $r = |x|$ $(\geqslant t)$ croît. La démonstration est ainsi complète.

6. Applications du théorème 4.

Ce paragraphe sera consacré à l'étude des conditions suffisantes plus concrètes pour qu'un noyau de Frostman-Kunugui soit un noyau de Dirichlet.

Remarque 10. — Soit α une fonction > 0 en dehors de O de classe C^2 et invariante par rotation. Si α vérifie la condition $(*)$, alors $\dfrac{\Delta\alpha(x)}{\alpha(x)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x|$ croît.

En effet, soient $x, y \in \mathbf{R}^n - \{O\}$ et supposons $|x| < |y|$. En vertu de la condition $(*)$ pour α, on a, pour $0 < t < |x|$ quelconque,

$$\frac{\frac{1}{t^2}\left(\int \alpha(x-z)\,ds_t(z) - \alpha(x)\right)}{\alpha(x)} \geqslant \frac{\frac{1}{t^2}\left(\int \alpha(y-z)\,ds_t(z) - \alpha(y)\right)}{\alpha(y)}.$$

En faisant $t \downarrow 0$, on arrive à l'inégalité $\dfrac{\Delta\alpha(x)}{\alpha(x)} \geqslant \dfrac{\Delta\alpha(y)}{\alpha(y)}$, d'où la remarque 10.

Si $\int_{|x|\geqslant 1} \alpha(x)\,dx < \infty$, on a $\Delta\alpha \geqslant 0$ en dehors de O, d'après la proposition 13. Réciproquement on aura le lemme suivant :

LEMME 8. — *Soit α une fonction > 0 dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ de classe C^2 et invariante par rotation. Supposons que $\Delta\alpha > 0$ en dehors de O et que $\int_{|x|\geqslant 1} \alpha(x)\,dx < \infty$. Si, pour $t > 0$ quelconque, la fonction $\dfrac{\int \Delta\alpha(x-y)\,ds_t(y)}{\int \alpha(x-y)\,ds_t(y)}$ de x dans $\complement \overline{B(O;t)}$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x|$ $(\geqslant t)$ croît, alors α vérifie la condition $(*)$.*

Démonstration. — Soit ϕ la fonction dans $(0, \infty)$ définie par $\phi(|x|^{2-n}) = \alpha(x)$; alors ϕ est de classe C^2. Comme α est sous-harmonique dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ et $\int_{|x|\geqslant 1} \phi(|x|^{2-n})\,dx < \infty$, ϕ est convexe et strictement croissante avec t. On a aussi $\lim_{t \downarrow 0} \phi(t) = 0$. Par conséquent α est strictement décroissante lorsque $r (> 0)$ croît, et on a $\lim_{|x| \to \infty} \alpha(x) = 0$. Supposons que α ne vérifie pas la condition $(*)$. Alors il existe $t_0 > 0$ et $x_1, x_2 \in C\overline{B(O\,; t_0)}$ tels que $|x_1| < |x_2|$ et

$$\frac{\alpha(x_2)}{\alpha(x_1)} < \frac{\int \alpha(x_2 - y)\, ds_{t_0}(y)}{\int \alpha(x_1 - y)\, ds_{t_0}(y)} .$$

Posons $t_1 = |x_1|$ et, pour $t \in [0, t_1)$ quelconque,

$$f(t) = \frac{\int \alpha(x_2 - y)\, ds_t(y)}{\int \alpha(x_1 - y)\, ds_t(y)},$$

où $s_0 = \epsilon$. Alors f une fonction finie et continue sur $[0, t_1)$ et de classe C^1 dans $(0, t_1)$. Comme $\lim_{|x| \to \infty} \alpha(x) = 0$, on a, pour $x_i\,(i = 1, 2)$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int \alpha(x_i - y)\, ds_t(z) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{(n-2)\,\omega_n h} \int \Delta\alpha(x_i - y)\, dy \int |y - z|^{2-n}\, d(s_t - s_{t+h})(z) \\ &= \frac{t^{1-n}}{\omega_n} \int_{|y| \leqslant t} \Delta\alpha(x_i - y)\, dy = t^{1-n} \int_0^t \rho^{n-1}\, d\rho \int \Delta\alpha(x_i - y)\, ds_\rho(y). \end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{df}{dt}(t) = t^{1-n} \frac{\int_0^t \rho^{n-1}\, d\rho \int \Delta\alpha(x_1 - y)\, ds_\rho(y)}{\int \alpha(x_1 - y)\, ds_t(y)}$$

$$\times \left(\frac{\int_0^t \rho^{n-1}\, d\rho \int \Delta\alpha(x_2 - y)\, ds_\rho(y)}{\int_0^t \rho^{n-1}\, d\rho \int \Delta\alpha(x_1 - y)\, ds_\rho(y)} - \frac{\int \alpha(x_2 - y)\, ds_t(y)}{\int \alpha(x_1 - y)\, ds_t(y)} \right).$$

Soit $\tilde{t} \in [0, t_0]$ vérifiant $f(\tilde{t}) = \max\{f(t) ; t \in [0, t_0]\}$. Alors on a $f(\tilde{t}) > f(0)$ et $\tilde{t} \neq 0$. Comme, pour $t \in [0, \tilde{t}]$ quelconque,

$$\frac{\int \Delta\alpha(x_2 - y)\, ds_t(y)}{\int \Delta\alpha(x_1 - y)\, ds_t(y)} \leqslant f(t) \leqslant f(\tilde{t})$$

et f n'est pas constante sur $[0, \tilde{t}]$, on a $\frac{df}{dt}(\tilde{t}) < 0$. Mais cela est en contradiction avec la définition de $\tilde{t}$. La démonstration est ainsi complète.

Regardons la présente démonstration ; alors on voit la remarque suivante :

Remarque 11. – Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur $\mathbf{R}^n$. Si $\Delta^2\kappa \geqslant 0$ au sens des distributions en dehors de O, alors il existe une fonction $\phi \geqslant 0$ finie, continue, croissante au sens large et convexe dans $(0, \infty)$, et une seule telle que $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n})\, dx$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$.

En effet, comme $\Delta\kappa$ définit une mesure positive dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$ et $\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2}\, d\Delta\kappa(x) < \infty$, on l'obtient de la même manière que dans la proposition 1. Dans ce cas, on a $\lim_{t \downarrow 0} \phi(t) = 0$.

Préparons encore le lemme suivant :

LEMME 9. – *Soit ϕ une fonction > 0, convexe et croissante au sens large dans $(0, \infty)$ de classe C^1 et supposons que $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\, t$ est croissante au sens large avec t. Soient $t, a_1, a_2 \in (0, \infty)$ vérifiant $t < a_1 \leqslant a_2$ et posons $x_1 = (a_1, 0, \ldots, 0)$, $x_2 = (a_2, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Si, pour $y_1, y_2 \in S(O; t)$, $|x_1 - y_1| \leqslant |x_1 - y_2|$, alors on a*

$$\frac{\phi(|x_2 - y_1|^{2-n})}{\phi(|x_1 - y_1|^{2-n})} \leqslant \frac{\phi(|x_2 - y_2|^{2-n})}{\phi(|x_1 - y_2|^{2-n})}.$$

Démonstration. – Posons $\theta_1 = \angle y_1 O x_1$ et $\theta_2 = \angle y_2 O x_1$ $(0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi)$;

alors $|x_i - y_j| = (a_i^2 + t^2 - 2a_i t \cos\theta_j)^{1/2}$ $(i, j = 1, 2)$. Comme $|x_1 - y_1| \leqslant |x_1 - y_2|$, on a $\theta_1 \leqslant \theta_2$. On pose

$$p_i(\theta) = (a_i^2 + t^2 - 2a_i t \cos\theta)^{1/2} \quad (i = 1, 2; 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

et

$$f(\theta) = \frac{\phi(p_2(\theta)^{2-n})}{\phi(p_1(\theta)^{2-n})}.$$

Alors il suffit de montrer que $f(\theta)$ est croissante au sens large avec θ. Calculons la dérivée f' de f ; alors, pour $\theta \in (0, \pi)$ quelconque,

$$\frac{1}{t(n-2)\sin\theta} \cdot \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$$

$$= \frac{a_1 p_1(\theta)^{-n} \phi'(p_1(\theta)^{2-n})}{\phi(p_1(\theta)^{2-n})} - \frac{a_2 p_2(\theta)^{-n} \phi'(p_2(\theta)^{2-n})}{\phi(p_2(\theta)^{2-n})}$$

$$= \frac{a_1}{p_1(\theta)^2} \cdot \frac{\phi'(p_1(\theta)^{2-n})}{\phi(p_1(\theta)^{2-n})}(p_1(\theta))^{2-n} - \frac{a_2}{p_2(\theta)^2} \cdot \frac{\phi'(p_2(\theta)^{2-n})}{\phi(p_2(\theta)^{2-n})}(p_2(\theta))^{2-n}.$$

Comme $0 < t < a_1 \leqslant a_2$, on a $\dfrac{a_1}{p_1(\theta)^2} \geqslant \dfrac{a_2}{p_2(\theta)^2}$. Ayant

$$p_1(\theta)^{2-n} \geqslant p_2(\theta)^{2-n}$$

et $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,t$ étant croissante au sens large avec t, on a $f'(\theta) \geqslant 0$. Le lemme 9 et ainsi démontré.

Montrons notre deuxième théorème principal.

THEOREME 5. — *Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur* $\mathbf{R}^n$ *et* Φ *la fonction convexe associée à* κ. *Supposons que* κ *possède la densité* K *de classe* C^4 *en dehors de* O. *Si les deux conditions suivantes* (1) *et* (2) *sont vérifiées, alors* κ *est de la forme*

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n},$$

où κ_0 *est un noyau de Dirichlet et où c est une constante* $\geqslant 0$.

(1) $\Delta K > 0$ *dans* $\mathbf{R}^n - \{O\}$ *et* $\dfrac{\Delta^2 K(x)}{\Delta K(x)}$ *est décroissante au sens large lorsque* $r = |x|$ (> 0) *croît.*

(2) $\dfrac{\Phi'''(t)}{\Phi''(t)}$ *t est croissante au sens large avec t* (> 0), *où* $\Phi'' = \dfrac{d^2\Phi}{dt^2}$ *et* $\Phi''' = d^3 \Phi/dt^3$.

Démonstration. – Montrons d'abord que $\Delta^2 K(x) > 0$ en dehors de O. Supposons qu'il existe $x_0 \neq O \in R^n$ tel que $\Delta^2 K(x_0) \leqslant 0$. Comme $\Delta^2 K$ est invariante par rotation et $\dfrac{\Delta^2 K(x)}{\Delta K(x)}$ est décroissante au sens large lorsque $r > 0$ croît, on a $\Delta^2 K \leqslant 0$ sur $CB(O\,;t_0)$, où $t_0 = |x_0|$. Comme $\Delta K > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$, on peut choisir une fonction $G > 0$ finie et continue dans $\mathbf{R}^n$ telle que $G = \Delta K$ sur $CB(O\,;t_0)$. Soit f une fonction $\neq 0$ de C_K^+ portée par $B(O\,;t_0)$. Alors on peut choisir une fonction $g \in C_K^+$ portée par $B(O\,;t_0)$ telle que

$$r^{2-n} * f(x) \leqslant G * g(x)$$

sur $B(O\,;2t_0)$. Comme $G * g - r^{2-n} * f$ est surharmonique en dehors de $CB(O\,;2t_0)$ et on a $\lim\limits_{|x|\to\infty} (G * g(x) - r^{2-n} * f(x)) \geqslant 0$, on a aussi $G * g(x) \geqslant r^{2-n} * f(x)$ sur $CB(O\,;2t_0)$, et donc $\int G(x)\,dx = \infty$. Mais cela est en contradiction avec $\int_{|x|\geqq 1} \Delta K(x)\,dx < \infty$ (cf. la proposition 3 et la remarque 1), d'où $\Delta^2 K(x) > 0$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$.

Rappelons la remarque 11 ; alors on voit qu'il existe une fonction $\phi > 0$ croissante et convexe dans $(0\,,\infty)$ telle que $\lim\limits_{t\downarrow 0} \phi(t) = 0$ et $\Delta K(x) = \phi(|x|^{2-n})$ en dehors de O. Evidemment ϕ est de classe C^2. Comme $\phi(t) = (n-2)^2\, \Phi''(t)\, t^{2(n-1)/(n-2)}$, on a

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\, t = \frac{\Phi'''(t)}{\Phi''(t)}\, t + \frac{2(n-1)}{n-2}. \tag{16}$$

condition (2), $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)}\, t$ est croissante au sens large avec t.

Montrons que ΔK vérifie la condition (*). Posons, pour $t \geqslant 0$,

$$d_t(x) = \frac{\int \Delta^2 K(x-y)\, ds_t(y)}{\int \Delta K(x-y)\, ds_t(y)}$$

dans $\overline{CB(O;t)}$, où $s_0 = \epsilon$. D'après le lemme 8, il suffit de montrer que, pour $t > 0$ quelconque, $d_t(x)$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x|$ ($> t$) croît. Soient $a_1, a_2 \in (0, \infty)$ tels que $t < a_1 \leqslant a_2$ et posons $x_1 = (a_1, 0, \ldots, 0)$, $x_2 = (a_2, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Pour $\theta \in [0, \pi]$ quelconque, on note

$$\widetilde{\alpha}_i(\theta) = \Delta K(x_i - y_\theta) \quad \text{et} \quad \widetilde{d}_i(\theta) = d_0(x_i - y_\theta) \quad (i = 1, 2),$$

où y_θ est un point de $S(0;t)$ tel que $\angle x_1 O y_\theta = \theta$. Evidemment y_θ n'est pas unique dès que $\theta \neq 0$. Mais, ΔK et d_0 étant invariantes par rotation, on voit que $\widetilde{\alpha}_i$ et $\widetilde{d}_i$ sont bien définies sur $[0, \pi]$. Elles sont finies et continues sur $[0, \pi]$. Soit $\widetilde{s}_t$ la mesure positive sur $[0, \pi]$ définie par $\int \widetilde{f} d\widetilde{s}_t = \int f ds_t$ pour toute la fonction $\widetilde{f}$ finie et continue sur $[0, \pi]$, où f est la fonction sur $S(O;t)$ définie par $f(y) = \widetilde{f}(\angle x_1 O y)$. D'après le lemme 9, $\dfrac{\widetilde{\alpha}_2(\theta)}{\widetilde{\alpha}_1(\theta)}$ est croissante au sens large avec θ. Comme d_0 est décroissante au sens large lorsque $r (> 0)$ croît, $\widetilde{d}_i$ est décroissante au sens large sur $[0, \pi]$ $(i = 1, 2)$ et on a $\widetilde{d}_1(\theta) \geqslant \widetilde{d}_2(\theta)$ sur $[0, \pi]$. Donc on a

$$\frac{\int \Delta K(x_2 - y)\, ds_t(y)}{\int \Delta K(x_1 - y)\, ds_t(y)} = \frac{\int \widetilde{\alpha}_2(\theta)\, d\widetilde{s}_t(\theta)}{\int \widetilde{\alpha}_1(\theta)\, d\widetilde{s}_t(\theta)} \geqslant \frac{\int \widetilde{\alpha}_2(\theta)\, \widetilde{d}_1(\theta)\, d\widetilde{s}_t(\theta)}{\int \widetilde{\alpha}_1(\theta)\, \widetilde{d}_1(\theta)\, d\widetilde{s}_t(\theta)}$$

$$\geqslant \frac{\int \widetilde{\alpha}_2(\theta)\, \widetilde{d}_2(\theta)\, d\widetilde{s}_t(\theta)}{\int \widetilde{\alpha}_1(\theta)\, \widetilde{d}_1(\theta)\, d\widetilde{s}_t(\theta)} = \frac{\int \Delta^2 K(x_2 - y)\, ds_t(y)}{\int \Delta^2 K(x_1 - y)\, ds_t(y)},$$

d'où $d_t(x_1) \geqslant d_t(x_2)$. Comme $d_t(x)$ est invariante par rotation et a_1, a_2 sont quelconques, $d_t(x)$ est décroissante au sens large lorsque $r = |x|$ ($> t$) croît. Ainsi ΔK vérifie la condition (*). D'après le théorème 4, on arrive à notre conclusion. La démonstration est complète.

Remarque 12. — Dans le présent théorème, si Φ vérifie encore la condition suivante (3), alors κ est un noyau de Dirichlet.

$$(3) \quad \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0.$$

Le corollaire suivant est un résultat immédiat du théorème 5.

COROLLAIRE 5. — *Soit κ un noyau de Frostman-Kunugui sur* $\mathbf{R}^n$ *et supposons que* $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n})\,dx$ *en dehors de* O, *où* ϕ *est une fonction* > 0 *convexe et croissante au sens large dans* $(0\,,\infty)$ *de classe* C^2. *Si* $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,t$ *et* $\dfrac{\phi''(t)}{\phi(t)}\,t^2$ *sont croissantes au sens large avec* t, *alors* κ *est de la forme*

$$\kappa = \kappa_0 + cr^{2-n},$$

où κ_0 *est un noyau de Dirichlet et où* c *est une constante* $\geqslant 0$.

Démonstration. — On a

$$\frac{\Delta\phi(|x|^{2-n})}{\phi(|x|^{2-n})} = (n-2)^2\,\frac{\phi''(|x|^{2-n})}{\phi(|x|^{2-n})}\,(|x|^{2-n})^2\,\frac{1}{|x|^2}$$

en dehors de O. Donc κ vérifie la condition (1) dans le théorème 5. D'après (16), on voit que κ vérifie la condition (2) dans le théorème 5. Par conséquent le théorème 5 donne le corollaire 5.

Considérons le noyau de Riesz-Frostman $r^{\gamma-n}$ $(0 < \gamma \leqslant 2)$. On note symboliquement $r^{\gamma-n}$ le noyau de convolution $|x|^{\gamma-n}\,dx$ dans $\mathbf{R}^n$. Le corollaire 6 est déjà connu (cf. [10]). On l'obtient directement.

COROLLAIRE 6. — *Soit* λ *une mesure positive* $\neq 0$ *sur* $(0\,,2]$ *vérifiant* $\displaystyle\int \frac{1}{\gamma}\,d\lambda(\gamma) < \infty$. *Alors* $\displaystyle\int r^{\gamma-n}\,d\lambda(\gamma)$ *est un noyau de Dirichlet sur* $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. — Posons $\kappa = \int r^{\gamma-n}\,d\lambda(\gamma)$. Comme

$$\int_{|x|\leq 1} d\kappa = \omega_n \int \frac{1}{\gamma}\,d\lambda(\gamma) < \infty,$$

κ est un noyau de convolution. Il suffit de le montrer dans le cas où $\lambda(\{2\}) = 0$, car $\displaystyle\lim_{\beta \uparrow 2}\Big(\int r^{\gamma-n}\,d\lambda(\gamma) + \lambda(\{2\})\,(r^{\beta-n} - r^{2-n})\Big) = \kappa$.

Posons

$$\phi(t) = \int t^{\frac{n+2-\gamma}{n-2}} (n-\gamma)(2-\gamma)\, d\lambda(\gamma)$$

dans $(0, \infty)$; alors on a $\Delta\kappa = \phi(|x|^{2-n})\, dx$ en dehors de O. Un calcul élémentaire donne que $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)}\, t$ et $\dfrac{\phi''(t)}{\phi(t)}\, t^2$ sont croissantes au sens large avec t. Comme $\lambda(\{2\}) = 0$, κ vérifie la condition (3) dans la remarque 12. Par conséquent κ est un noyau de Dirichlet.

Remarque 13. – Soit λ une mesure positive dans $(0, 2)$ de masse totale finie et posons $\alpha(x) = \int |x|^{-\gamma-n}\, d\lambda(\gamma)$ en dehors de O. Alors α vérifie la condition (*), car on a, avec une constante $c_\gamma > 0$, $\Delta |x|^{2-\gamma-n} = |x|^{-\gamma-n}/c_\gamma$ dans $\mathbf{R}^n - \{O\}$, et donc

$$\alpha(x) = \Delta \int |x|^{2-\gamma-n}\, c_\gamma\, d\lambda(\gamma) \text{ dans } \mathbf{R}^n - \{O\}.$$

En vertu du théorème 3, on voit, que pour tout $t > 0$, $\alpha_t dx$ est représentée par l'intégrale (13).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, U.S.A., 45 (1959), 208-215.

[2] G. Choquet et J. Deny, Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Théorème de dualité et applications, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 246 (1956), 764-767.

[3] G. Choquet et J. Deny, Aspects linéaires de la théorie du potentiel. Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 250 (1960), 4260-4262.

[4] J. Deny, Principe complet du maximum et contractions, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 15 (1965), 259-271.

[5] C.S. Herz, Analyse harmonique à plusieurs variables, Sém. Math. d'Orsay, 1965/66.

[6] M. ITÔ, On total masses of balayaged measures, *Nagoya Math. J.*, 30 (1967), 263-278.

[7] M. ITÔ, The singular measure of a Dirichlet space, *Nagoya Math. J.*, 32 (1968), 337-359.

[8] M. ITÔ, Sur la régularité des noyaux de Dirichlet, *C. R. Acad. Sc.* Paris, 268 (1969), 867-868.

[9] M. ITÔ, Remarque sur la somme des résolvantes, *Proc. Japan Acad.*, 46 (1970), 243-245.

[10] M. ITÔ, Sur les sommes des noyaux de Dirichlet, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 271 (1970), 937-940.

[11] M. ITÔ, Sur les principes divers du maximum et le type positif, *Nagoya Math. J.*, 44 (1971), 133-164.

[12] K. KUNUGUI, Etude sur la théorie du potentiel généralisé, *Osaka Math., J.*, 2 (1950), 63-102.

[13] M. RIESZ, Intégrales de Rieman-Liouville et potentiels, *Acta Sc. Math. Szeged*, 9 (1938), 1-42.

Manuscrit reçu le 21 mai 1976
Proposé par G. Choquet.

Masayuki ITÔ,
Département de Mathématiques
Université de Nagoya (Japon).