Annales de l'institut Fourier

Paul Koosis

Note sur les fonctions moyenne-périodiques

Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 357-360
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__357_0>

NOTE SUR LES FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

par Paul KOOSIS

Dans le premier paragraphe de sa thèse [1], J. P. KAHANE a présenté un exposé rapide de la théorie des fonctions moyenne-périodiques à une variable, fondé sur la notion de transformée de FOURIER-CARLEMAN d'une fonction moyenne-périodique.

La démonstration que donne J. P. KAHANE du théorème principal (« une fonction dont le spectre est vide est identiquement nulle ») utilise explicitement le théorème de TITCHMARSCH sur le produit de composition (convolution) de deux fonctions, le théorème de PALEY-WIENER, le théorème d'HADAMARD sur la décomposition canonique des fonctions entières. Implicitement, cette démonstration utilise le fait que l'inégalité $|\varphi(w)| < |\psi(w)| < K|w|^{-p}e^{k|v|}$ ($w = u + iv$), portant sur les fonctions entières φ et ψ, en dehors de cercles de rayon ε assez petit entourant les zéros de ψ, entraîne que l'inégalité entre termes extrêmes est valable dans tout le plan (1).

Le but de cette note est de montrer comment on peut éviter de recourir à tous ces arguments. En nous basant sur une idée de L. SCHWARTZ [2], considérablement simplifiée, nous faisons seulement usage de la décomposition canonique de HADAMARD pour les fonctions de type exponentiel fini. Nous obtenons comme corollaires du théorème principal certaines des propositions utilisées comme lemmes dans [1].

§ 1. Une fonction f continue dans $(-\infty, \infty)$ est dite moyenne-périodique s'il existe une mesure non nulle m à support compact

(1) C'est ainsi qu'il faut rectifier, selon J. P. KAHANE, l'argument utilisé p. 45, l. 6, qui, à la lettre, est incorrect.

telle que $m * f \equiv 0$. Soit f une fonction moyenne-périodique, et posons

$$f^{-}(x) = \begin{cases} f(x), & x \leqslant 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Si $m * f \equiv 0$, m étant une mesure à support compact, la fonction $g = m * f^{-}$ est aussi à support compact. Si $M(w)$ et $G(w)$ sont respectivement les transformées de FOURIER de m et de g, on appelle transformée de FOURIER-CARLEMAN de f la fonction, méromorphe dans le plan entier

$$F(w) = \frac{G(w)}{M(w)}.$$

On voit immédiatement que $F(w)$ ne dépend pas du choix de la mesure m pour laquelle $m * f \equiv 0$.

On peut maintenant supposer que le support de m est contenu dans la demi-droite positive. Un simple examen montre alors les faits suivants :

Si $M(a) = 0$, *la fonction* $m_a(x) = \int_0^x e^{ia(x-y)} dm(y)$ *est à support compact, contenu dans le plus petit intervalle contenant le support de* m.

Si de plus a *n'est pas pôle de* $F(w)$, *on a aussi* $m_a * f \equiv 0$ $m_a(x)$ *a pour transformée de Fourier la fonction* $\dfrac{M(w)}{i(w-a)}$.

Leur démonstration est contenu dans celle du théorème 1 de [1], § 1. 5.

§ **2.** Voici la démonstration du théorème principal :

Si $F(w)$ *n'a pas de pôles,* f *se réduit à zéro.*

Soit d'abord $m * f \equiv 0$, $m \neq 0$. On peut, par composition s'il est nécessaire, assurer que $dm(x) = p(x)\,dx$, $p(x)$ ayant une dérivée seconde continue et bornée. $M(w)$ est de type exponentiel fini, donc, d'après un théorème bien connu de HADAMARD,

$$M(w) = Ae^{aw} w^k \prod_n \left(1 - \frac{w}{a_n}\right) e^{w/a_n}$$

où les a_n sont les zéros non nuls de $M(w)$. D'où

$$M'(w) = aM(w) + \frac{kM(w)}{w} + \sum_n \left(\frac{M(w)}{w - a_n} + \frac{M(w)}{a_n}\right) \quad (1)$$

$\dfrac{k\mathrm{M}(w)}{w}$ et $\dfrac{\mathrm{M}(w)}{w - a_n}$ étant respectivement les transformées de Fourier de $p_0(x) = i \int_0^x kp(y)\,dy$ et $p_n(x) = i \int_0^x e^{ia_n(x-y)} p(y)\,dy$, et $p_0 * f = p_n * f \equiv 0$. Considérons alors la série

$$ap(x) + p_0(x) + \sum_n \left(p_n(x) + \frac{p(x)}{a_n} \right). \tag{2}$$

Je dis que cette somme est normalement convergente. En effet, deux intégrations par parties successives donnent

$$p_n(x) = -\frac{p(x)}{a_n} + \frac{1}{a_n} \int_0^x e^{ia_n(x-y)} p'(y)\,dy,$$

$$p_n(x) + \frac{p(x)}{a_n} = ia_n^{-2} \int_0^x (1 - e^{ia_n(x-y)}) p''(y)\,dy.$$

Cette dernière quantité est bornée en module par $\mathrm{C}|a_n|^{-2}$ pour un certain C, car $|p''(y)|$ est borné (²). Comme on sait, par des résultats classiques, que $\sum |a_n|^{-2}$ converge, la série (2) est bien normalement convergente.

La série (2), dont tous les termes sont des fonctions ayant leurs supports contenus dans le même intervalle (le plus petit contenant le support de p) converge donc dans L_1 vers une fonction ayant, d'après (1), $\mathrm{M}'(w)$ pour sa transformée de Fourier. Or c'est la fonction $-ixp(x)$. On a donc $f * xp \equiv 0$, car $p * f = p_0 * f = p_n * f \equiv 0$ pour chaque n. En itérant, on obtient $f * hp \equiv 0$ pour chaque polynôme $h(x)$, et cela entraîne $f \equiv 0$. C.Q.F.D.

Corollaire. — *Si f est moyenne-périodique et nulle sur une demi-droite,* $f \equiv 0$.

Car on peut alors prendre $f = f^-$, donc $g = m * f^- = m * f \equiv 0$ et $\mathrm{F}(w) \equiv 0$ n'a pas de pôles. De là le résultat de J. P. Kahane dans son § 1. 2. suit immédiatement.

(²) En effet, soit $ia_n = \alpha + i\beta$. Si $\alpha < 1$, c'est évident. Sinon, posons $q(y) = e^{-i\beta y} p''(y)$. La dernière intégrale s'écrit $p'(x) - e^{i\beta x} \varphi(x)$, avec $\varphi(x) = \int_0^x e^{\alpha(x-y)} q(y)\,dy$. Les fonctions p, p', p'', q, p_n et φ s'annulent en dehors d'un intervalle $(0, k)$ où $|q(y)| < \mathrm{M}$, et les extrema des parties réelle et imaginaire de $\varphi(x)$ sont donnés par $\mathrm{R}\,(\text{resp } \mathfrak{I})\big(q(x) + \alpha\varphi(x)\big) = 0$, d'où $|\varphi(x)| < \dfrac{2\mathrm{M}}{\alpha}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jean-Pierre KAHANE. Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement... — Annales de l'Institut FOURIER, t. V, 1953-1954, Ch. I § 1, pp. 41-48.
[2] Laurent SCHWARTZ. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. Annals of Mathematics, vol. 48, n° 4, 1947, pp. 857-928, en particulier pp. 895-897.