ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HENRI BUCHWALTER

Quelques curieuses topologies sur $M_\mu(T)$ et $M_\beta(T)$

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 2 (1977), p. 61-77

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_2_61_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 2 (1977), 61-77.

QUELQUES CURIEUSES TOPOLOGIES SUR $M_\sigma(T)$ ET $M_\beta(T)$

par Henri BUCHWALTER

Introduction.

Rappelons très sommairement quelques définitions et notations classiques. Dans tout l'article T désigne un espace complètement régulier séparé quelconque, auquel on associe son compactifié de Stone-Čech βT et son replété υT (ou « real compactification » de Hewitt) [6], [3]. On associe aussi à T l'algèbre $C^\infty(T)$ de ses fonctions continues et bornées, ainsi que l'espace $M_\beta(T) = C^\infty(T)'$ des mesures de Radon sur βT, muni de sa norme d'espace dual. On rappelle que l'espace $M_\sigma(T)$ [12] est celui des mesures $\mu \in M_\beta(T)$ qui sont σ-régulières, c'est-à-dire telles que pour toute suite $f_n \downarrow 0$ dans $C^\infty(T)$ on ait $\mu(f_n) \to 0$.

On topologise d'habitude l'espace $M_\beta(T)$ de deux façons différentes : soit avec sa norme d'espace dual, soit avec la topologie faible $\sigma(M_\beta, C^\infty)$, dite topologie étroite. Les deux manières ont leurs avantages et leurs inconvénients : par exemple la topologie de la norme est évidemment complète mais on n'en connaît pas très bien le dual; au contraire la topologie étroite donne l'espace $C^\infty(T)$ pour dual mais elle n'est pas complète. On peut alors se demander s'il est possible de construire sur les espaces $M_\sigma(T)$ et $M_\beta(T)$ des topologies assez faciles à manier, qui soient complètes et donnant $C^\infty(T)$ pour dual. Un essai dans ce sens a été fait pour l'espace $M_\sigma(T)$ par Berruyer-Ivol dans [1]. Mais il nous semble que jusque-là cette sorte de question a été assez négligée pour l'espace $M_\beta(T)$.

Or il existe un outil particulièrement utilisable et qui conduit, comme on le verra, à des situations relativement

« curieuses ». C'est celui des partitions continues de l'unité sur T, déjà exploité d'ailleurs de différentes manières par de Marco-Wilson [5], Rome [10], Sentilles-Wheeler [11], et plus récemment Bucchioni [2] pour les mesures vectorielles. Pour bien préciser maintenant les choses signalons que nous appelons partition continue de l'unité sur T toute suite $\varphi = (\varphi_n)$ de $C^\infty(T)$ telle que $\varphi_n \geqslant 0$ et $\Sigma\varphi_n = 1$. Nous abandonnons ici les partitions continues de l'unité indexées par des ensembles non dénombrables d'indices, en même temps que nous abandonnons aussi l'exigence de finitude locale de la famille des supports (supp φ_n). Pour simplifier on dira que $\varphi = (\varphi_n)$ est une pcu et on désignera par Φ l'ensemble de toutes les pcu sur T.

Il est facile de voir que pour toute $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$ et toute $\mu \in M_\beta(T)$ la suite $(\mu(\varphi_n))$ est un élément de l'espace $l^1 = l^1(\mathbf{N})$; c'est donc aussi un élément de tous les espaces $l^p = l^p(\mathbf{N})$, $1 \leqslant p < +\infty$ et de l'espace $c_0 = c_0(\mathbf{N})$. L'idée est alors de placer sur $M_\beta(T)$ et sur son sous-espace $M_\sigma(T)$ la topologie $\mathcal{T}_p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, définie par le système des semi-normes

$$\|\mu\|_{\varphi,p} = \|(\mu(\varphi_n))\|_p, \quad \varphi \in \Phi$$

où $\|\,.\,\|_p$ désigne la norme de l'espace l^p. Les principaux résultats sont alors les suivants, en désignant par $M_{\sigma,p}(T)$ et $M_{\beta,p}(T)$ les espaces $M_\sigma(T)$ et $M_\beta(T)$ munis de la topologie $\mathcal{T}_p$.

1. Les espaces $M_{\sigma,1}(T)$ et $M_{\beta,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ sont des elc complets.

2. Pour $1 < p \leqslant +\infty$, $M_\sigma(T)$ est dense dans $M_{\beta,p}(T)$ et le dual de $M_{\beta,p}(T)$ est l'espace $C^\infty(T)$.

3. Pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ les bornés de $M_{\beta,p}(T)$ sont les bornés en norme.

4. La topologie de $M_{\beta,p}(T)$ induit sur T sa propre topologie. L'espace T est total dans $M_{\sigma,1}(T)$ et dans chaque $M_{\beta,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$ mais son adhérence $\overline{T}$ dans ces espaces est toujours υT.

5. Les espaces $M_{\beta,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, ont tous les mêmes parties relativement compactes.

6. Les espaces $M_{\sigma,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, ont tous les

mêmes parties relativement compactes, qui sont aussi les parties faiblement (ou étroitement) relativement compactes, qui sont aussi les parties précompactes, qui sont enfin les traces sur $M_\sigma(T)$ des parties relativement compactes communes des espaces $\dot{M}_{\beta,p}(T)$.

7. Pour tout compact K de $M_{\beta,p}(T)$ la trace de K sur $M_\sigma(T)$ est compacte dans $M_{\sigma,p}(T)$ (bien que $M_{\sigma,p}(T)$ soit dense dans $M_{\beta,p}(T)$ pour $1 < p \leqslant +\infty$).

8. Pour tout espace T non pseudocompact les espaces $M_{\sigma,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$, sont non quasi complets mais leurs parties précompactes sont relativement compactes.

Ce dernier résultat est particulièrement intéressant en ce sens qu'il fournit des exemples très simples d'espaces p-semi-réflexifs au sens de Dazord-Jourlin [4]. De tels exemples existent déjà bien entendu mais ils sont souvent obtenus avec des espaces de fonctions continues construits de façon très spéciale [7], [8], [13]. A notre connaissance seul Wheeler [13] donne un tel exemple avec un espace de mesures, en construisant une topologie convenable sur un espace $l^1(I)$ avec card $I = \aleph_2$. La grande généralité de 8, permet aisément, comme on voit en prenant $T = N$, de construire explicitement sur l'espace $l^1 = l^1(\mathbf{N})$ des topologies $\mathscr{T}_p$, $1 < p \leqslant +\infty$ p-semi-réflexives et non quasi complètes.

1. Les compactologies $\mathscr{H}_q$ sur $C^\infty(T)$.

L'abandon de la condition de finitude locale sur la famille des supports $(\operatorname{supp}\varphi_n)$ d'une pcu $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$ n'est en réalité pas gênant, et va apporter au contraire des propriétés intéressantes. On a déjà :

Lemme 1.1. — *On fixe* $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$.

a) Pour toute $\xi = (\xi_n) \in l^\infty$ *la fonction* $\Sigma\xi_n\varphi_n$ *est continue et bornée sur* T.

b) L'ensemble $H_{\varphi,\infty} = \{\Sigma\xi_n\varphi_n ;\ \|\xi\|_\infty \leqslant 1\}$ *est équicontinu et uniformément borné.*

Preuve. — En fixant $t_0 \in T$ et $\varepsilon > 0$, on obtient un entier N tel que $\sum_{n>N} \varphi_n(t_0) < \frac{\varepsilon}{8}$. Comme la fonction

$\sum\limits_{n>N} \varphi_n = 1 - \sum\limits_{n \leqslant N} \varphi_n$ est continue il existe un voisinage V de t_0 pour lequel on a $\sum\limits_{n>N} \varphi_n(t) < \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout $t \in V$. En posant $f = \Sigma\xi_n\varphi_n$, avec $\|\xi\|_\infty \leqslant 1$, on obtient alors pour tout $t \in V$

$$|f(t) - f(t_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n \geqslant N} |\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)|$$

ce qui assure la preuve de b) et par conséquent celle de a).

Fixons maintenant un couple (p, q) d'exposants conjugués $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors la boule unité A_q de l^q est compacte et métrisable pour la topologie faible σ_q égale à $\sigma(l^q, l^p)$ si $q > 1$ et à $\sigma(l^1, c_0)$ si $q = 1$.

Il suit facilement de là et du lemme (1.1) que l'application

$$U_\varphi : \xi \longrightarrow \Sigma\xi_n\varphi_n$$

de l^q dans $C^\infty(T)$ est continue pour la topologie σ_q et la topologie sur $C^\infty(T)$ de la convergence simple sur T. On peut alors introduire les disques équicontinus

$$H_{\varphi,q} = \{\Sigma\xi_n\varphi_n ; \|\xi\|_q \leqslant 1\}$$

de $C^\infty(T)$, qui sont les images $U_\varphi(A_q)$, et qui sont tous contenus dans le disque $H_{\varphi,\infty}$. On a :

PROPOSITION 1.2. — *a) Pour chaque q fixé, les disques $H_{\varphi,q}$ forment la base d'une compactologie $\mathscr{H}_q$ sur $C^\infty(T)$.*

b) Pour $q = 1$, le disque $H_{\varphi,1}$ est l'enveloppe disquée simplement fermée de la suite (φ_n).

Preuve. — L'assertion b) est classique. Quant à l'assertion a) il suffit de montrer que les parties $H_{\varphi,q}$ forment, quand φ varie dans Φ, une famille filtrante croissante. Or pour $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$ et $\psi = (\psi_n) \in \Phi$ on peut poser $\zeta = (\zeta_n)$ avec

$$\zeta_{2n} = \frac{1}{2}\varphi_n ; \qquad \zeta_{2n+1} = \frac{1}{2}\psi_n$$

pour construire un élément $\zeta \in \Phi$ tel que $H_{\zeta,q}$ contienne $\frac{1}{2}(H_{\varphi,q} \cup H_{\psi,q})$. □

La liaison avec les espaces $M_\sigma(T)$ et $M_\beta(T)$ va se faire plus loin et sera conséquence du résultat suivant :

PROPOSITION 1.3. — *On fixe* $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$. *On a la formule de commutation*

$$\mu(\Sigma\xi_n\varphi_n) = \Sigma\xi_n\mu(\varphi_n)$$

dans chacun des deux cas :

a) $\mu \in M_\beta(T)$ et $\xi \in c_0$;

b) $\mu \in M_\sigma(T)$ *et* $\xi \in l^\infty$.

Preuve. — Rappelons déjà que la suite $(\mu(\varphi_n))$ est élément de l^1 puisque l'on a

$$\sum_1^N |\mu(\varphi_n)| \leqslant |\mu| \left(\sum_i^N \varphi_n \right) \leqslant \|\mu\|$$

pour tout entier N. En posant

$$f_N = \sum_{n>N} \xi_n\varphi_n$$

on voit que la suite (f_N) converge uniformément vers zéro si $\xi \in c_0$, ce qui fournit aisément *a*). Pour obtenir *b*) on se ramène à supposer $\xi_n \geqslant 0$; on a alors $f_N \downarrow 0$ donc $\mu(f_N) \to 0$ pour toute $\mu \in M_\sigma(T)$, ce qui suffit. □

Il importe maintenant de déterminer les duals des espaces compactologiques $(C^\infty(T), \mathscr{H}_q)$, c'est-à-dire les espaces de formes linéaires sur $C^\infty(T)$ dont les restrictions aux parties équicontinues $H_{\varphi,q}$, $\varphi \in \Phi$, sont continues quand on munit chacune de ces parties de la topologie de la convergence simple sur T.

THÉORÈME 1.4.

a) On a $(C^\infty(T), \mathscr{H}_q)^* = M_\beta(T)$ *pour* $q < +\infty$.

b) On a $(C^\infty(T), \mathscr{H}_\infty)^* = M_\sigma(T)$.

Preuve. — *a*) Fixons $\mu \in M_\beta(T)$ et $\varphi \in \Phi$. D'après la propriété de commutation (1.3.*a*) et la définition de l'application $U_\varphi : l^q \to C^\infty(T)$, on voit que la fonction composée $\mu_0 U_\varphi$ est une forme linéaire sur l^q dont la restriction à la boule A_q est σ_q-continue. La compacité de la boule A_q pour σ_q permet alors de vérifier que μ est bien continue sur $H_{\varphi,q} = U_\varphi(A_q)$. Réciproquement soit μ une forme linéaire sur $C^\infty(T)$ telle que $\mu \notin M_\beta(T)$. Il existe donc une suite (f_n) dans $C^\infty(T)$, telle que $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ et $|\mu(f_n)| \geqslant 2^n$. On pose alors $\varphi_n = 2^{-n}f_n$ pour $n \geqslant 1$ et $\varphi_0 = 1 - \sum_1^\infty \varphi_n$, ce qui fournit la suite $\varphi = (\varphi_n)_{n\geqslant 0} \in \Phi$. Or $\varphi_n \to 0$ dans $H_{\varphi,q}$ et $|\mu(\varphi_n)| \geqslant 1$, ce qui prouve que μ n'est pas élément du dual $(C^\infty(T), \mathscr{H}_q)^*$.

b) On démontre de la même façon que ci-dessus que toute $\mu \in M_\sigma(T)$ est continue sur $H_{\varphi,\infty}$, en remplaçant (1.3.*a*) par (1.3.*b*). Réciproquement fixons $\mu \in (C^\infty(T), \mathscr{H}_\infty)^*$. On a déjà $\mu \in M_\beta(T)$ d'après la preuve de *a*). Pour voir que μ appartient à $M_\sigma(T)$, il suffit, ce qui est classique, de prouver que μ est simplement continue sur chaque partie $H \subset C^\infty(T)$, équicontinue métrisable (pour la topologie de la convergence simple) et uniformément bornée. Or d'après le théorème (3.5) de Rome [10], adapté au cas particulier d'une partie H métrisable ([10], p. 57-58), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une pcu $\varphi = (\varphi_n)$ dénombrable et une suite (t_n) de points de T telles que

$$\|f - \Sigma f(t_n)\varphi_n\| \leqslant \varepsilon$$

pour toute $f \in H$. Or en supposant H contenue dans la boule unité de $C^\infty(T)$, on voit que toute $f \in H$ est égale à ε près en norme à une fonction $g \in H_{\varphi,\infty}$, l'application $f \to g$ étant même simplement continue de H dans $H_{\varphi,\infty}$. Il en résulte aisément la continuité simple de μ sur H, ce qui termine tout. □

2. Les topologies $\mathscr{T}_p$ sur $M_\beta(T)$ et $M_\sigma(T)$.

D'après le théorème (1.4) on voit que $M_\beta(T)$ apparaît comme dual de certains espaces compactologiques. En utilisant les résultats généraux de [3], que l'on peut aisément retrouver comme conséquence du théorème de Banach-Grothendieck, on voit qu'en plaçant sur $M_\beta(T)$ et $M_\sigma(T)$ la topologie, notée $\mathscr{T}_p$ pour des raisons qui apparaîtront plus loin, de la convergence uniforme sur les parties $H \in \mathscr{H}_q$, on obtient immédiatement des elc *complets*

$M_{\beta,p}(T) = (M_\beta(T), \mathscr{T}_p)$ pour $1 < p \leqslant + \infty$ et $M_{\sigma,1}(T) = (M_\sigma(T), \mathscr{T}_1)$ pour $p = 1$, elc complets donnant tous comme dual l'espace $C^\infty(T)$.

Les semi-normes définissant la topologie $\mathscr{T}_p$ sont déterminées par les pcu $\varphi \in \Phi$ selon

$$\| \mu \|_{\varphi, p} = \operatorname{Sup} \{ | \mu(\Sigma \xi_n \varphi_n) | ; \quad \| \xi \|_q \leqslant 1]$$

de sorte que d'après les formules de commutation (1.3) on obtient :

$$\| \mu \|_{\varphi, p} = \| (\mu(\varphi_n)) \|_p \qquad \text{pour} \qquad \mu \in M_{\beta, p}(T) \qquad \text{et} \qquad p > 1$$
$$\| \mu \|_{\varphi, 1} = \| (\mu(\varphi_n)) \|_1 \qquad \text{pour} \qquad \mu \in M_{\sigma, 1}(T).$$

ce qui signifie encore que la topologie $\mathscr{T}_p$ est une topologie initiale associée au système d'applications linéaires $V_\varphi : M_\beta(T) \to l^p$, où les $V_\varphi : \mu \to (\mu(\varphi_n))$ sont transposées des applications $U_\varphi : l^q \to C^\infty(T)$.

Il est alors loisible pour $p > 1$ de considérer l'espace $M_{\sigma,p}(T)$ obtenu en munissant $M_\sigma(T)$ du système des semi-normes $\| . \|_{\varphi, p}$, c'est-à-dire obtenu comme sous-espace topologique de $M_{\beta,p}(T)$. Pour $p = 1$ on peut aussi placer sur $M_\beta(T)$ la topologie définie par les semi-normes $\| . \|_{\varphi,1}$, obtenant l'espace $M_{\beta,1}(T)$. On prendra garde alors que cette topologie $\mathscr{T}_1$ sur $M_{\beta,1}(T)$ n'est pas celle de la convergence uniforme sur les parties $H_{\varphi,\infty}$ puisque la formule de commutation (1.3) n'est pas valable en général lorsque l'on a $\mu \in M_\beta(T)$ et $\xi \in l^\infty$.

En désignant par $M_\sigma(T)$ et $M_\beta(T)$ ces espaces avec leur topologie de la norme on obtient en résumé un tableau récapitulatif, où les flèches représentent des applications canoniques continues.

$$\begin{tikzcd}
M_\sigma(T) \arrow[r] \arrow[d] & M_{\sigma,1}(T) \arrow[r] \arrow[d] & M_{\sigma,p}(T) \arrow[r] \arrow[d] & M_{\sigma,\infty}(T) \arrow[r] \arrow[d] & \sigma(M_\sigma, C^\infty) \arrow[d] \\
M_\beta(T) \arrow[r] & M_{\beta,1}(T) \arrow[r] \arrow[d, "V_\varphi"] & M_{\beta,p}(T) \arrow[r] \arrow[d, "V_\varphi"] & M_{\beta,\infty}(T) \arrow[r] \arrow[d, "V_\varphi"] & \sigma(M_\beta, C^\infty) \\
 & l^1 \arrow[r] & l^p \arrow[r] & c_0 &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte aisément que les espaces $M_{\beta,p}(T)$ ont les mêmes bornés qui sont les bornés en norme. De même les espaces $M_{\sigma,p}(T)$ ont aussi les mêmes bornés qui sont les bornés en norme.

Finalement on peut écrire :

PROPOSITION 2.1.

a) Les espaces $M_{\sigma,1}(T)$ *et* $M_{\beta,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$ *sont des elc complets ayant le même dual fort, qui est l'espace de Banach* $C^\infty(T)$.

b) Les espaces $M_{\sigma,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$ *sont des sous-espaces denses des espaces* $M_{\beta,p}(T)$.

c) L'espace $M_{\beta,1}(T)$ *est complet.*

Preuve. — Celle de *a*) résulte de considérations compactologiques [3] et du théorème (1.4). Celle de *b*) provient du théorème de Hahn-Banach, une fois connu le dual $M_{\beta,p}(T)' = C^\infty(T)$. Quant à celle de *c*), c'est une conséquence du fait que $M_{\beta,1}(T)$ possède une base de voisinages formée des disques

$$B_{\varphi,\varepsilon} = \{\mu : \Sigma|\mu(\varphi_n)| \leqslant \varepsilon\}$$

Or ces disques $B_{\varphi,\varepsilon}$ sont manifestement fermés pour la topologie étroite. De sorte que la condition (VF) de voisinages fermés est réalisée entre les espaces $M_{\beta,1}(T)$ et $M_{\beta,\infty}(T)$, et ce dernier espace étant complet, on voit alors qu'il en est de même de $M_{\beta,1}(T)$. □

Le résultat de densité exprimé par (2.1.*b*) admet une généralisation. Remarquons tout d'abord que les parties $H_{\varphi,q}$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, étant toutes équicontinues, les topologies $\mathcal{C}_p$ induisent toutes sur l'espace T sa propre topologie. Si l'on note par $\Delta = \Delta(T)$ la boule unité de $C^\infty(T)$ et par Δ^0_β et Δ^0_σ les boules unité polaires de Δ dans $M_\beta(T)$ et $M_\sigma(T)$, on constate aussitôt que Δ^0_β et Δ^0_σ sont les bipolaires de T dans $M_\beta(T)$ et $M_\sigma(T)$. D'où :

PROPOSITION 2.2. — *L'espace* T *est un sous-espace topologique total dans chacun des elc* $M_{\sigma,1}(T)$ *et* $M_{\beta,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$.

Remarque. — Pour chaque $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$ la suite (φ_n) peut se prolonger en une suite $\varphi^\upsilon = (\varphi^\upsilon_n)$ sur le repleté υT

de T et $\varphi^\upsilon \in \Phi^\upsilon$. Il s'ensuit que l'on peut topologiquement identifier les espaces $M_{\beta,p}(T)$ et $M_{\beta,p}(\upsilon T)$. En particulier υT apparaît aussi comme un sous-espace topologique de $M_{\beta,p}(T)$. La complétude de l'espace $M_{\sigma,1}(T)$ garantit alors facilement que υT est un sous-espace fermé de $M_{\sigma,1}(T)$, donc aussi de $M_{\beta,1}(T)$. Comme T est dense dans υT, on voit donc que l'on a $\overline{T} = \upsilon T$ dans l'espace $M_{\sigma,1}(T)$. Lorsqu'on considère l'espace $M_{\beta,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$, le problème se pose alors de déterminer l'adhérence $\overline{T}$ de T. Compte tenu du fait que βT est fermé dans $M_{\beta,p}(T)$ (puisque les points $u \in \beta T$ sont les mesures multiplicatives) et que T est total dans $M_{\beta,p}(T)$ on peut penser qu'on obtiendra $\overline{T} = \beta T$. Or il n'en est rien en général et le résultat obtenu, qui est surprenant, est $\overline{T} = \upsilon T$. Avant d'en fournir une preuve il convient d'abord d'examiner dans quelle mesure les espaces $M_{\sigma,p}(T)$ et $M_{\beta,p}(T)$ sont différents.

Proposition 2.3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) L'espace T *est pseudocompact.*

b) L'un des espaces $M_{\sigma,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$, *est quasi-complet.*

c) On a $M_{\sigma,p}(T) = M_{\beta,p}(T)$ *pour* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Preuve. — Lorsque T est pseudocompact on a $\upsilon T = \beta T$ et $M_\sigma(T) = M_\beta(T)$ d'où les implications évidentes $a \Longrightarrow c$ et $c \Longrightarrow b$. Supposons maintenant $M_{\sigma,p}(T)$ quasi-complet pour p fixé, $1 < p \leqslant +\infty$. Alors la boule unité Δ_σ^0 est complète, donc fermée, dans l'espace $M_{\beta,p}(T)$ de sorte que $\Delta_\sigma^0 = \Delta_\beta^0$ par bipolarité de T. Ainsi $M_\sigma(T) = M_\beta(T)$ et tout est dit. □

Le résultat $\overline{T} = \upsilon T$ annoncé plus haut n'est pas direct. Il est conséquence des lemmes suivants :

Lemme 2.4. — *On fixe* $u \in \beta T \setminus \upsilon T$. *Alors il existe une suite* $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ *dans* $C^\infty(T)$ *telle que :*

a) $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$ *et* $u(\varphi_n) = 0$ *pour tout* n.

b) La suite $(\operatorname{supp} \varphi_n)$ *est disjointe et localement finie sur* T.

c) De plus $u\left(\sum_1^\infty \varphi_n\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

Preuve. — On suit ici une idée de A. Deaibès. On sait déjà qu'il existe une fonction $f \geqslant 1$, continue sur T, non bornée, telle que la prolongée canonique f^β par continuité sur βT, à valeurs finies ou infinies, soit telle que $f^\beta(u) = +\infty$. Pour tout $n \geqslant 1$ on pose

$$U_n = \left\{ t \in T;\ |f(t) - n| < \frac{3}{4} \right\}$$
$$Z_n = \left\{ t \in T;\ |f(t) - n| \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

La suite (Z_n) est un recouvrement de T; la suite (U_n) est localement finie sur T et chacune des suites (U_{2n}) et (U_{2n-1}) est disjointe. Par séparation normale des noyaux disjoints Z_n et $T \setminus U_n$, on voit qu'il existe, pour chaque n, une fonction continue g_n telle que $0 \leqslant g_n \leqslant 1$ vérifiant

$$g_n = 1 \text{ sur } Z_n \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp} g_n \subset U_n.$$

Posons $g' = \sum_{n \geqslant 1} g_{2n}$ et $g'' = \sum_{n \geqslant 1} g_{2n-1}$, qui sont des fonctions continues positives majorées par 1. Le fait que les Z_n recouvrent T assure $g' + g'' \geqslant 1$, de sorte que $u(g') + u(g'') \geqslant 1$. Il s'ensuit que l'on a $u(g') \geqslant \frac{1}{2}$ ou $u(g'') \geqslant \frac{1}{2}$. Dans la première hypothèse on obtient la suite (φ_n) cherchée en posant $\varphi_n = g_{2n}$; dans la seconde en posant $\varphi_n = g_{2n-1}$. □

Lemme 2.5. — *On fixe $u \in \beta T \setminus \upsilon T$. Alors il existe une suite $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$ telle que, pour tout $t \in T$ et tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ on ait*

$$\|u - \varepsilon_t\|_{\varphi, p} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Preuve. — On désigne évidemment par ε_t la mesure de Dirac au point $t \in T$. A partir de la suite $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ du lemme 1 on construit $\psi = \sum_1^\infty \varphi_n$ puis $\varphi_0 = 1 - \psi$. Alors la suite $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ est élément de Φ. De plus on a

$$|(u - \varepsilon_t)(\varphi_n)| = \begin{cases} |\alpha - \psi(t)| \text{ si } n = 0 \\ \text{avec} \quad \alpha = u(\psi) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \varphi_n(t) \quad \text{si} \quad n \geqslant 1. \end{cases}$$

La suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ étant à supports disjoints on a

$$\sup_{n\geqslant 1} \varphi_n(t) = \sum_1^\infty \varphi_n(t) = \psi(t)$$

$$\sum_1^\infty \varphi_n^p(t) = \psi^p(t) \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant p < +\infty$$

Il résulte de là que pour $p = +\infty$:

$$\|u - \varepsilon_t\|_{\varphi,\infty} = \operatorname{Max}\{|\alpha - \psi(t)|\,;\ \psi(t)\} \geqslant \frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{1}{4}$$

et que, pour $1 \leqslant p < +\infty$:

$$\|u - \varepsilon_t\|_{\varphi,p} = [|\alpha - \psi(t)|^p + \psi^p(t)]^{\frac{1}{p}}$$
$$\geqslant \operatorname{Max}\{|\alpha - \psi(t)|\,;\ \psi(t)\} \geqslant \frac{1}{4}.$$

ce qui termine tout. □

On peut maintenant énoncer le résultat principal

THÉORÈME 2.6. — *On a* $\overline{\mathrm{T}} = \upsilon\mathrm{T}$ *dans chacun des espaces* $\mathrm{M}_{\beta,p}(\mathrm{T})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Preuve. — Pour tout $u \in \upsilon\mathrm{T}$ et toute $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$, il existe un point $t \in \mathrm{T}$ tel que $u(\varphi_n) = \varphi_n(t)$ pour tout n [6]; donc $\|u - \varepsilon_t\|_{\varphi,p} = 0$ et ainsi $\upsilon\mathrm{T}$ est contenu dans l'adhérence $\overline{\mathrm{T}}$. Mais comme $\overline{\mathrm{T}}$ est a priori contenue dans $\beta\mathrm{T}$, le lemme (2.5) signifie exactement l'égalité $\overline{\mathrm{T}} = \upsilon\mathrm{T}$. □

3. Compacité dans les espaces $\mathrm{M}_{\beta,p}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}_{\sigma,p}(\mathrm{T})$.

Reprenons le diagramme des espaces $\mathrm{M}_{\beta,p}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}_{\sigma,p}(\mathrm{T})$ décrit au début du paragraphe 2. Les topologies étroites $\sigma(\mathrm{M}_\beta, \mathrm{C}^\infty)$ et $\sigma(\mathrm{M}_\sigma, \mathrm{C}^\infty)$ sont exactement les topologies faibles des espaces $\mathrm{M}_{\beta,p}(\mathrm{T})$, $1 < p \leqslant +\infty$ et $\mathrm{M}_{\sigma,p}(\mathrm{T})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Par contre la topologie étroite $\sigma(\mathrm{M}_\beta, \mathrm{C}^\infty)$ est strictement moins fine en général que la topologie faible de l'espace $\mathrm{M}_{\beta,1}(\mathrm{T})$.

Cela étant on peut chercher à déterminer les compacts de ces espaces. En tenant compte de la complétude des espaces $\mathrm{M}_{\sigma,1}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}_{\beta,p}(\mathrm{T})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et du fait que leurs topologies sont les topologies initiales associées aux applications V_φ, on a :

THÉORÈME 3.1. — *Les espaces* $M_{\beta,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *ont tous les mêmes parties relativement compactes, qui sont les parties bornées* K *telles que l'on ait, pour chaque* $\varphi \in \Phi$:

$$\operatorname*{Sup}_{\mu \in K} |\mu(\varphi_n)| \to 0.$$

Preuve. — Les parties relativement compactes de $M_{\beta,1}(T)$ [resp. de $M_{\beta,\infty}(T)$] sont les parties K dont l'image par chacune des applications V_φ, $\varphi \in \Phi$, est relativement compacte dans l^1 [resp. dans c_0], puisque précisément $M_{\beta,1}(T)$ et $M_{\beta,\infty}(T)$ sont complets. Ce sont donc les parties bornées K de $M_\beta(T)$ qui vérifient respectivement les conditions

(C_1) Pour toute $\varphi \in \Phi$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour toute partie finie $J \subset [N+1, \infty)$ et toute $\mu \in K$ on ait

$$\Big|\sum_{n \in J} \mu(\varphi_n)\Big| \leqslant \varepsilon.$$

(C_∞) Pour toute $\varphi \in \Phi$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$ et toute $\mu \in K$ on ait $|\mu(\varphi_n)| \leqslant \varepsilon$.

Il s'agit donc de prouver l'équivalence de (C_1) et (C_∞), autrement dit l'implication $(C_\infty) \Longrightarrow (C_1)$.

Or supposons (C_1) non vérifiée. Il existe alors $\varphi \in \Phi$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'on puisse trouver une suite $(J_k)_{k \geqslant 1}$ de parties finies disjointes de $\mathbf{N}$ et une suite (μ_k) dans K telles que

$$\Big|\sum_{n \in J_k} \mu_k(\varphi_n)\Big| > \varepsilon.$$

Posons $L = \cup J_k$ et $\psi_k = \sum_{n \in J_k} \varphi_n$ pour chaque k. Alors la fonction $\sum_1^\infty \psi_k = \sum_{n \in L} \varphi_n$ est continue [d'après (1.1)], positive et majorée par 1, donc $\psi_0 = 1 - \sum_1^\infty \psi_k$ est continue et positive. Il suit de là que la suite $\psi = (\psi_k)_{k \geqslant 0}$ détermine un élément $\psi \in \Phi$ pour lequel on a $|\mu_k(\psi_k)| > \varepsilon$ pour tout k, ce qui contredit la condition (C_∞). □

Donnons immédiatement deux conséquences intéressantes :

Corollaire 3.2. — *Pour toute partie relativement compacte* K *des espaces* $M_{\beta,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *l'enveloppe solide*

$$s(K) = \{\nu\,;\ \exists \mu \in K \ \textit{telle que}\ |\nu| \leqslant |\mu|\}$$

est encore relativement compacte.

Preuve. — Elle est remarquable par sa simplicité, ce qui confirme l'intérêt du critère de compacité précédent. Déjà $s(K)$ est bornée. Supposons $s(K)$ non relativement compacte. Il existe alors $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$, $\varepsilon > 0$, une sous-suite (φ_{n_k}), une suite $\nu_k \in s(K)$ et une suite $\mu_k \in K$ telles que

$$|\mu_k|(\varphi_{n_k}) \geqslant |\nu_k(\varphi_{n_k})| > 4\varepsilon.$$

Il existe donc, pour chaque k, une fonction continue g_k telle que $|g_k| \leqslant \varphi_{n_k}$ et $|\mu_k(g_k)| > 2\varepsilon$. En séparant les parties positive et négative de g_k, on voit qu'il existe une fonction continue ψ_k telle que $0 \leqslant \psi_k \leqslant \varphi_{n_k}$ et $|\mu_k(\psi_k)| > \varepsilon$. Il est immédiat, par le raisonnement utilisé dans la preuve de (1.1), que la fonction $\sum_1^\infty \psi_k$ est continue. Ceci permet de construire, en posant $\psi_0 = 1 - \sum_1^\infty \psi_k$, une suite $\psi = (\psi_k)_{k \geqslant 0} \in \Phi$ mettant en défaut la condition de compacité relative de K. □

Corollaire 3.3. — *Dans l'espace* $M_{\beta,1}(T)$ *les parties faiblement relativement compactes sont relativement compactes.*

Preuve. — Si K est faiblement relativement compacte dans $M_{\beta,1}(T)$, elle est déjà bornée et son image $V\varphi(K)$ par toute application V_φ est faiblement relativement compacte dans l'espace l^1. Elle y est donc relativement compacte d'après le lemme de Schur, ce qui fournit la condition (C_1). □

Remarque. — On ne peut démontrer le même résultat avec les espaces $M_{\beta,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$, car cela reviendrait à prouver que toute partie étroitement compacte de $M_\beta(T)$ est compacte dans $M_{\beta,1}(T)$. On prouverait donc que les bornés de $M_\beta(T)$ sont relativement compacts dans $M_{\beta,1}(T)$ ce qui est faux chaque fois que T n'est pas pseudocompact en vertu du résultat suivant :

PROPOSITION 3.4. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'espace* T *est pseudocompact.*

b) T *est relativement compact dans l'espace* $M_{\beta,1}(T)$.

c) βT *est une partie compacte de* $M_{\beta,1}(T)$.

d) *La boule unité* Δ_β^0 *de* $M_{\beta,1}(T)$ *est compacte.*

Preuve.

$a \Longrightarrow b$: Si T est pseudocompact on a $\|\varphi_n\| \to 0$ pour toute $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$ puisque la suite (φ_n) est équicontinue et converge simplement vers zéro. Ceci signifie donc que T est relativement compact dans les espaces $M_{\beta,p}(T)$ d'après le critère de (3.1), d'où *b*).

$b \Longrightarrow d$: D'après *b*) T est relativement compact dans les espaces $M_{\beta,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$; son enveloppe disquée fermée dans chaque $M_{\beta,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$, qui est Δ_β^0, y est donc compacte, d'où *d*) avec le théorème (3.1).

$d \Longrightarrow c$: Puisque βT est fermé dans $M_{\beta,1}(T)$.

$c \Longrightarrow a$: D'après *c*) la topologie de $M_{\beta,1}(T)$ induit sur βT sa topologie de compactifié de Stone-Čech. On a donc $\overline{T} = \beta T$ dans $M_{\beta,1}(T)$ ce qui fournit l'égalité $\beta T = \upsilon T$ avec (2.6) et l'assertion *a*). □

Une autre conséquence importante du théorème (3.1) est la description des parties relativement compactes des espaces $M_{\sigma,p}(T)$. Ici les résultats sont véritablement très satisfaisants puisqu'on a :

THÉORÈME 3.5. — *Les espaces* $M_{\sigma,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *ont tous les mêmes parties relativement compactes, qui sont aussi les parties faiblement (ou étroitement) relativement compactes, qui sont aussi les parties précompactes. Ces parties communes sont exactement les traces sur* $M_\sigma(T)$ *des parties relativement compactes communes des espaces* $M_{\beta,p}(T)$.

Preuve. — Il suffit en définitive de vérifier que toute partie K étroitement relativement compacte dans $M_\sigma(T)$ est relativement compacte dans $M_{\sigma,1}(T)$ et que toute partie K précompacte dans $M_{\sigma,\infty}(T)$ est aussi relativement compacte dans $M_{\sigma,1}(T)$.

Dans le premier cas chacune des images $V_\varphi(K)$ est faiblement relativement compacte dans l^1 car l'application $V_\varphi : M_{\sigma,1}(T) \to l^1$ est faiblement continue, ce qui ramène comme en (3.3) au lemme de Schur, compte tenu de la complétude de l'espace $M_{\sigma,1}(T)$.

Dans le second cas la partie bornée K vérifie la condition (C_∞) puisque chaque image $V_\varphi(K)$ est précompacte dans c_0, donc y est relativement compacte. Il suit de là que K est relativement compacte dans l'espace $M_{\beta,1}(T)$ d'après le théorème (3.1), donc est aussi relativement compacte dans son sous-espace fermé $M_{\sigma,1}(T)$. $\square$

En particulier on a :

Corollaire 3.6. — *Pour tout compact* K *de* $M_{\beta,p}(T)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *la trace de* K *sur* $M_{\sigma,p}(T)$ *est compacte dans* $M_{\sigma,p}(T)$ [*bien que cet espace soit dense dans* $M_{\beta,p}(T)$ *pour* $1 < p \leqslant +\infty$].

Pour énoncer une autre propriété importante, il faut maintenant parler d'espaces p-semi-réflexifs, en suivant donc la terminologie proposée par Dazord-Jourlin [4]. Il s'agit des espaces localement convexes séparés E pour lesquels toute partie précompacte est relativement compacte. Tout espace quasi-complet est évidemment p-semi-réflexif et tout espace p-semi-réflexif est séquentiellement complet. Le premier exemple d'espace p-semi-réflexif et non quasi-complet semble avoir été donné par Ptak [8] en 1954 (ou un espace p-semi-réflexif est appelé « Von-Neumann complet ») : il s'agit de l'espace des fonctions continues à support compact sur l'espace localement compact $[0, \omega_1[$ des ordinaux dénombrables, muni de la topologie de la convergence compacte. D'autres exemples, assez compliqués, ont été donnés par Haydon [7] toujours avec un espace $C_c(X)$, par Wheeler [13], et de nouveau par Rajagopalan-Wheeler [9] lors d'une étude assez systématique. L'exemple de Ptak mis à part, les autres exemples sont assez élaborés et bien loin d'être intuitifs. Ils rentrent dans le cadre des espaces de fonctions continues sur des espaces assez spéciaux pour [7] et [9]. Seul Wheeler construit dans [13] un exemple d'espace de mesures, ce qui revient d'ailleurs à considérer sur un espace $l^1(\mathrm{I})$, avec card $\mathrm{I} = \aleph_2$, une topologie p-semi-réflexive et non quasi-complète.

Nous allons maintenant montrer que les espaces de mesures fournissent effectivement un cadre naturel très général pour la recherche de tels exemples, sans que l'on tombe dans un excès de « pathologie ». Pour cela il suffit de rassembler les énoncés (3.5) et (2.3) pour obtenir :

Théorème 3.7. — *Soit* T *un espace non pseudocompact. Alors les espaces* $M_{\sigma,p}(T)$, $1 < p \leqslant +\infty$, *sont p-semi-réflexifs et non quasi-complets.*

Exemple. — Choisissons pour T l'espace discret **N**. Alors $C^\infty(T) = l^\infty$, $M_\sigma(T) = l^1$ et $M_\beta(T) = [l^\infty]'$. Chaque suite $\varphi = (\varphi_n) \in \Phi$ est déterminée par une matrice infinie

$$A = (\alpha_{n,k})$$

telle que :

a) $\alpha_{n,k} \geqslant 0$.

b) Pour tout $k \geqslant 0$ on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,k} = 1$ selon la liaison $\alpha_{n,k} = \varphi_n(k)$.

La topologie de l'espace $M_{\sigma,p}(\mathbf{N}) = l^1_p$ est décrite par le système des semi-normes

$$\|\xi\|_{A,\infty} = \operatorname*{Sup}_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}\xi_k \right|$$

si $p = +\infty$ et

$$\|\xi\|_{A,p} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}\xi_k \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

si $1 < p < +\infty$.

En résumé on a :

Proposition 3.8. — *Sur l'espace* $l^1 = l^1(\mathbf{N})$ *il existe pour chaque* p *tel que* $1 < p \leqslant +\infty$ *une topologie d'espace p-semi-réflexif non quasi-complet, qui est déterminée par le système filtrant croissant des semi-normes* $\|\,.\,\|_{A,p}$ *où* A *décrit l'ensemble des matrices* $A = (\alpha_{n,k})$ *précédentes.*

Pour toutes ces topologies les bornés sont communs et sont les bornés de l'espace de Banach l^1. *De même les parties pré-*

compactes (ou relativement compactes) sont communes et sont les parties relativement compactes de l'espace de Banach l^1.

Enfin le complété (ou le quasi-complété) de l'espace l^1 *pour toutes ces topologies est l'espace dual* $[l^\infty]'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Berruyer et B. Ivol, Espaces de mesures et compactologies, *Publ. Dép. Math.*, Lyon, 9-1 (1972), 1-35.

[2] D. Bucchioni, Mesures vectorielles et partitions continues de l'unité, *Publ. Dép. Math.*, Lyon, 12-3 (1975), 51-90.

[3] H. Buchwalter, Topologies et compactologies, *Publ. Dép. Math.*, Lyon, 6-2 (1969), 1-74.

[4] J. Dazord et M. Jourlin, Sur quelques classes d'espaces localement convexes, *Publ. Dép. Math.*, Lyon, 8-2 (1971), 39-69.

[5] G. de Marco et R. G. Wilson, Realcompactness and partitions of unity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 30-1 (1971), 189-194.

[6] L. Gillman et M. Jerison, Rings of continuous functions, Van Nostrand, (1960), New-York.

[7] R. Haydon, Sur un problème de H. Buchwalter, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 275 (1972), 1077-1080.

[8] V. Ptak, Compact subsets of convex topological linear spaces, *Czech. Math. J.*, 79-4 (1954), 51-74 (en russe; résumé en anglais).

[9] M. Rajagopalan et R. F. Wheeler, Sequential compactness of X implies a completeness property for C(X), *Canad. J. Math.*, xxviii-1 (1976), 207-210.

[10] M. Rome, L'espace $M^\infty(T)$, *Publ. Dép. Math.*, Lyon, 9-1 (1972), 36-60.

[11] D. Sentilles et R. F. Wheeler, Linear functionals and partitions of unity in $C_b(X)$, *Duke Math. J.*, 41 (1974), 483-496.

[12] V. S. Varadarajan, Measures on topological spaces, *Amer. Math. Soc. Translations*, (2), 48 (1965), 161-228.

[13] R. F. Wheeler, The strict topology for P-spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 41 (1973), 466-472.

Manuscrit reçu le 3 mars 1976
Proposé par G. Choquet.

Henri Buchwalter,
Département de Mathématiques
Université Claude-Bernard, Lyon I
43, bd du 11-Novembre-1918
69621 Villeurbanne.