ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE LAMOUREUX

Holonomie et feuilles exceptionnelles

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 4 (1976), p. 273-300

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_4_273_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 4 (1976), 273-300.

HOLONOMIE
ET FEUILLES EXCEPTIONNELLES

par Claude LAMOUREUX

Nous mettons en évidence et démontrons dans ce travail des relations très précises entre le type d'une feuille, la structure de son adhérence et ses sécants d'homotopie et d'homologie.

Les feuilletages $\mathcal{F}$ considérés sont de codimension 1, transversalement orientés et transversalement de classe C^2; les variétés feuilletées X sont compactes ou non compactes, de topologie à base dénombrable; si le bord ∂X n'est pas vide, chacune de ses composantes est une feuille de $\mathcal{F}$.

L'énoncé détaillé et complet de ces relations dans diverses situations est donné aux paragraphes 1), 7) et 8) sous la forme de quatre théorèmes.

Ces quatre théorèmes, notés A, B, C, D, sont du type Poincaré-Bendixson ou du type Denjoy-Reeb-Sacksteder.

C'est-à-dire qu'ils affirment, sous des hypothèses très variées, qu'une feuille F non captée (*), au sens de [2], est propre ou dense. Dans le premier cas, et si F n'est pas fermée, l'enveloppe $\overline{F} - F$ est une réunion non vide de feuilles propres, toutes fermées non compactes; dans le second cas, $\overline{F} - F$ est une réunion de feuilles denses et de feuilles propres non compactes.

Introduction.

Nous donnerons dans cette introduction seulement quelques conséquences élémentaires plus ou moins directes des théorèmes de structure obtenus.

(*) L'adhérence d'une feuille captée contient un lacet d'holonomie infinie.

Le théorème 1 suivant sera démontré par l'emploi simultané des théorèmes A et B :

THÉORÈME 1. — *Une feuille exceptionnelle de sécant d'homotopie abélien de type fini est captée.*

Quelques compléments à la démonstration du théorème 1 permettent également de démontrer le

COROLLAIRE 1. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sans holonomie d'une variété X admettant un revêtement fini de groupe fondamental abélien de type fini. Alors $\mathcal{F}$ ne possède aucune feuille exceptionnelle.*

Le corollaire 1 est une généralisation directe des résultats de Denjoy et Sacksteder [8] sur la non-existence de feuilles exceptionnelles dans les feuilletages C^2 sans holonomie des variétés compactes.

Le théorème 1 est une généralisation directe des résultats de Lamoureux sur le captage des feuilles exceptionnelles des feuilletages C^2 des variétés compactes.

Toutefois, la démarche suivie pour démontrer les théorèmes A et B, donc pour démontrer le théorème 1, est *radicalement* différente de celle suivie dans le cas compact. Des contre-exemples simples montrent en effet que l'existence d'ensembles minimaux n'est nullement garantie dans le cas non compact, et que le feuilletage au voisinage d'une feuille propre, et même d'une feuille fermée F, est loin de posséder, si F n'est pas compacte, les propriétés de régularité bien connues des feuilletages des voisinages des feuilles compactes.

Le théorème 2 suivant est un cas particulier du théorème C :

THÉORÈME 2. — *Une feuille exceptionnelle de sécant d'homologie de type fini et de rang inférieur ou égal à 1 est une feuille captée.*

Nous ramènerons la démonstration du corollaire 2 suivant à la situation décrite dans le théorème 2 :

COROLLAIRE 2. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sans holonomie d'une variété X de groupe $H_1(X, Z)$ de type fini et de rang inférieur ou égal à 1. Alors $\mathcal{F}$ ne possède aucune feuille exceptionnelle.*

Nous obtenons également grâce au théorème D le captage de nombreuses feuilles exceptionnelles dont le sécant d'homologie est de rang strictement supérieur à 1. Il en résulte par exemple le :

THÉORÈME 3. — *Soit* F *une feuille exceptionnelle dont le sécant d'homologie est par exemple de type fini et pour laquelle* $(i_F)_* \pi_1(F, x_0)$ *contient le commutateur de* $\pi_1(X, x_0)$. *Alors* F *est une feuille captée.*

Le théorème 3 nous permet alors de caractériser, à la façon de Moussu-Roussarie [7], en généralisant de plus [7] grâce à une démonstration nouvelle, certains feuilletages sans holonomie des variétés non compactes, dans lesquelles les résultats de Sacksteder [8] rappelés plus haut ne sont plus applicables.

La méthode suivie est essentiellement topologique : elle repose sur l'emploi de notre notion de sécant d'homotopie et de sécant d'homologie, qui permet l'utilisation d'une partie de nos résultats antérieurs.

L'introduction de ces deux notions pourrait sembler peu naturelle, malgré leur rôle crucial dans les énoncés des théorèmes 1, 2 et 3. Nous renvoyons aux démonstrations des théorèmes 1, 2, 3 pour une justification nouvelle, ne s'appuyant pas sur l'efficacité de ces théorèmes : il se trouve en effet que l'on peut lire directement dans la structure algébrique de ces sécants, si une feuille non captée est propre ou dense; il en résulte incidemment que la feuille en question ne saurait être exceptionnelle. Nous explicitons davantage ce phénomène dans la Proposition 1 du paragraphe 9, où la situation est telle que la seule considération du sécant d'homologie d'une feuille permet de décider si cette feuille est fermée ou partout dense dans la variété X.

Le présent travail généralise considérablement un preprint antérieur [6]; certains aspects de la méthode suivie ont été esquissés dans la conclusion de [3].

0. Notions préliminaires.

Il suffit de démontrer les résultats annoncés lorsque le feuilletage étudié est transversalement orientable : les feuilletages considérés ici seront donc tous *transversalement orientés*.

Par *transversale fermée* au feuilletage $\mathscr{F}$ en un point x_0, nous entendons une application t continue de S^1, pointé et orienté, dans X telle que : t est transverse à $\mathscr{F}$, t est compatible avec les orientations en présence, t est une application pointée de (S^1, y_0) dans (X, x_0), X désignant la variété feuilletée par $\mathscr{F}$, de point-base x_0. Ainsi, la classe d'homotopie τ de t est un élément bien défini de $\pi_1(X, x_0)$, d'où aussi la classe $\{\tau\} = h_*(\tau)$ de cette transversale fermée dans $H_1(X; Z)$, cf. 6).

La notion de sécant d'homotopie définie en [2] est rappelée en [4] et détaillée en [5]. Il en est de même pour la notion de *feuille captée* et de phénomènes de captage, cf. aussi [3]. Pour la notion de *sécant d'homologie*, voir [2] ou 6) du présent travail.

L'*injection* canonique pointée de la feuille étudiée (F, x_0) dans la variété feuilletée par $\mathscr{F}$ (X, x_0) est notée i_F. Jusqu'en 5) inclus, les symboles $\alpha, \alpha', \ldots, \beta, \ldots, \tau, \tau'$ seront réservés aux éléments du sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ du feuilletage $\mathscr{F}$ en x_0 ; les symboles $\lambda, \lambda', \mu, \nu, \ldots$ seront réservés aux éléments de $(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$; les lettres m, n, p, ... désigneront des éléments de Z. En 6), 7), 8), 9), ces mêmes symboles, entre accolades, $\{\alpha\}, \ldots, \{\lambda\}, \ldots$ désigneront les classes d'homologie images respectives des classes d'homotopie précédentes par l'homomorphisme h_* de Hurewicz de $\pi_1(X, x_0)$ sur $H_1(X; Z)$.

Nous ne rappellerons pas la notion de feuille propre, bien connue. Une feuille de $\mathscr{F}$ sera ici dite *dense* si elle est partout dense dans un ouvert non vide de X. Les feuilles *exceptionnelles* sont, suivant Denjoy, celles qui ne sont ni propres, ni denses.

1. Énoncé des théorèmes A et B, démonstration du théorème 1.

Nous démontrons le théorème 1 par l'absurde, en étudiant plus généralement la topologie d'une feuille F, qui n'est pas captée et dont le sécant d'homotopie est abélien de type fini.

D'un point de vue purement algébrique *a priori*, nous nous trouvons immédiatement devant l'alternative suivante : ou bien l'hypothèse A, énoncée ci-dessous, est vérifiée, ou bien elle n'est pas vérifiée. Cette hypothèse est la suivante :

HYPOTHÈSE A. — *Quelles que soient les deux transversales fermées à* $\mathcal{F}$ *se coupant au point* x_0 *de la feuille* F, *de classes respectives* τ *et* τ' *dans* $\pi_1(X, x_0)$, *il existe un lacet de la feuille* F, *d'origine* x_0, *de classe* λ *dans* $\pi_1(X, x_0)$, *et deux entiers relatifs non tous deux nuls* m *et* m', *tels que l'on ait dans* $\pi_1(X, x_0)$ *la relation suivante :*

$$\tau^m = \lambda . \tau'^{m'}.$$

L'hypothèse A est la transcription algébrique d'un phénomène purement géométrique; dans le cas d'une feuille simplement connexe par exemple, cette hypothèse se traduit aisément à l'aide du nombre $d(F, \mathcal{F})$, cf. [5][6]. Cette décomposition en deux cas n'est nullement arbitraire : elle s'avère indispensable dans la mesure où les conclusions des théorèmes A et B qui suivent sont radicalement opposées.

Démonstration du théorème 1. — Pour démontrer le théorème 1 par l'absurde, il suffit de démontrer les deux théorèmes nettement plus précis suivants, puisqu'une feuille exceptionnelle est, précisément, une feuille qui n'est ni propre, ni dense :

THÉORÈME A. — *Soit une feuille* F *vérifiant l'hypothèse* A, *non captée, dont le sécant d'homotopie est de type fini et abélien. Alors* F *est propre et d'enveloppe composée de feuilles fermées coupées par aucune transversale fermée.*

THÉORÈME B. — *Soit une feuille* F *ne vérifiant pas l'hypothèse* A, *non captée, dont le sécant d'homotopie est abélien, mais de type fini ou infini. Alors* F *est dense.*

2. Démonstration de la propriété P.

Dans tout ce paragraphe, les hypothèses du théorème A sont vérifiées; le point-base x_0 de X est fixe dans la feuille

F étudiée; rappelons que l'injection pointée de F dans X est notée i_F.

Le but de ce paragraphe est de préparer la démonstration du théorème A; les lemmes 1 à 6 nous permettront de démontrer la propriété P suivante :

Propriété P. — *Si* $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ *n'est pas vide, il existe un élément* α *de* $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ *et un nombre entier strictement positif* $n = MK$ *tels que pour tout élément* β *de* $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, *on peut trouver une classe* $\lambda(\beta)$ *de* $\pi_1(X, x_0)$, *représentable par un lacet de* F, *et un entier positif non nul* $r(\beta)$, *pour lesquels on ait dans* $\pi_1(X, x_0)$ *la relation*

$$\beta^{MK} = \lambda(\beta) . \alpha^{r(\beta)}.$$

Rappelons que le sécant d'homotopie d'une feuille non captée est sans éléments inversibles, sans élément-unité, sans torsion [5].

Lemme 1. — *Pour toute classe* λ *du sous-groupe*

$$(i_F)_* \pi_1(F, x_0)$$

de $\pi_1(X, x_0)$ *et pour toute classe* τ *du sécant d'homotopie* $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, *nous avons dans* $\pi_1(X, x_0)$ *la relation de commutation*

$$\lambda . \tau = \tau . \lambda.$$

Démonstration. — Une construction devenue habituelle permet de construire une nouvelle transversale fermée au feuilletage $\mathscr{F}$, coupant la feuille F en x_0, de classe d'homotopie dans $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, notée τ', égale à $\lambda . \tau$. On peut donc écrire λ comme la classe $\tau' . \tau^{-1}$. Comme $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ est abélien, τ et τ' commutent. Donc on a aussi

$$\lambda = \tau^{-1} . \tau'.$$

Il en résulte que $\tau' = \lambda . \tau = \tau . \lambda$.

Remarque importante. — Des exemples simples montrent que les groupes $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(F, x_0)$ ne sont pas nécessairement abéliens.

Soit λ une classe de $(i_F)_* \pi_1(F, x_0)$ et soient m et n deux entiers *non tous deux nuls*. Nous dirons que *le triple* (λ, m, n) *relie deux éléments* β *et* γ *de* $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, *pris* *dans cet ordre*, si l'on a

$$\beta^m = \lambda . \gamma^n.$$

LEMME 2. — *Soient deux éléments* β *et* γ *de* $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ *reliés par un triple* (λ, m, n). *Alors* m *et* n *sont de même signe et aucun d'eux n'est nul.*

Démonstration. — Nous savons que m et n ne sont pas tous deux nuls; si l'un des entiers m et n est nul, nous avons $\beta^m = \lambda$ ou $\gamma^n = \lambda^{-1}$. Selon les signes respectifs de m et n, le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ contient alors l'une des quatre classes $\beta^{|m|}.\lambda^{-1}$, $\lambda.\beta^{|m|} = \lambda.\beta^{-m}$, $\lambda.\gamma^{|n|}$, $\lambda^{-1}.\gamma^{|n|} = \lambda^{-1}.\gamma^{-n}$ (pour écrire ces classes, nous utilisons la commutativité fournie par le lemme 1). Donc $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ admet un élément-unité, ce qui est contraire au fait que F n'est pas captée.

Si m et n sont de signes contraires, la construction faite dans l'alinéa précédent et dans la démonstration du lemme 1 montre que $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ contient l'une des deux classes $\beta^{|m|}.\gamma^{|n|}.\lambda^{-1}$, $\gamma^{|n|}.\beta^{|m|}.\lambda$. Mais on a alors l'une des deux relations $\beta^{|m|}.\gamma^{|n|} = \lambda$, $\beta^{|m|}.\gamma^{|n|} = \lambda^{-1}$. Puisque $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ est sans élément-unité, m et n sont de même signe, ce qui démontre le lemme 2.

Un triple (λ, m, n) comme ceux que nous avons déjà considérés sera dit *positif*, si m et n sont tous deux positifs.

LEMME 3. — *Deux éléments quelconques* β *et* γ *de* $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ *sont toujours reliés par un triple positif.*

Démonstration. Compte tenu de l'hypothèse A, nous avons toujours une relation de la forme $\beta^m = \lambda.\gamma^n$, où λ est une classe de $(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$. D'après le lemme 2, m et n sont de même signe et non nuls. Si m et n sont positifs, la relation $\beta^m = \lambda.\gamma^n$ (resp. $\gamma^n = \lambda^{-1}.\beta^m$) montre que β et γ (resp. γ et β) sont reliés par un triple positif. Sinon il suffit de considérer les relations $\beta^{-m} = \lambda^{-1}.\gamma^{-n}$, ou $\gamma^{-n} = \lambda.\beta^{-m}$. C.Q.F.D.

Il y a de nombreux triples positifs reliant deux éléments β et γ de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$: à partir d'un triple (λ, m, n), on peut par exemple construire les triples (λ^p, pm, pn); avec deux triples (λ, m, n) et (λ', m', n'), on peut construire le triple

$(\lambda.\lambda', m+m', n+n')$, etc... Mais tous les triples possibles vérifient la propriété suivante :

Lemme 4. — *Soient deux triples* (λ, m, n) *et* $(\lambda', m' n')$, *reliant les éléments* β *et* γ *de* $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$. *Alors*

$$m/n = m'/n'.$$

Démonstration. — Nous avons $\beta^m = \lambda.\gamma^n$ et $\beta^{m'} = \lambda'.\gamma^{n'}$, avec m, m', n, n' tous non nuls, et tous positifs, compte tenu des lemmes 2 et 3. Calculons $\beta^{mm'}$ de deux façons différentes en utilisant la commutativité fournie par le lemme 1 : il vient $\lambda^{m'}.\gamma^{nm'} = \lambda'^m.\gamma^{n'm}$. Posons $k = n'm - nm'$. Nous avons l'une des deux relations $\gamma^{|k|} = \lambda^{m'}.\lambda'^{-m}$ ou

$$\gamma^{|k|} = \lambda'^m.\lambda^{-m'}.$$

Comme $\gamma^{|k|}$ appartient à $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ dès que $|k|$ est non nul (parce que le sécant d'homotopie est un semi-groupe), et puisqu'il ne doit contenir aucune classe de

$$(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$$

(parce que F est non captée), alors $k = 0$. C.Q.F.D.

A tout couple ordonné (β, γ) d'éléments de $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, nous pouvons donc associer, d'après les lemmes 3 et 4, le rapport bien défini m/n d'un triple positif quelconque (λ, m, n) reliant β et γ.

Le nombre rationnel positif associé au couple (γ, β) est l'inverse de celui associé au couple (β, γ). La donnée de ces nombres rationnels et une structure d'ordre sur Q définissent sur $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ une structure particulière, notée $\mathscr{S}$. Malgré l'importance de cette structure dans les cas les plus généraux, nous étudierons seulement dans la suite de ce travail la structure induite par $\mathscr{S}$ sur un ensemble Γ de générateurs de $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, entre lesquels les seules relations, dans le semi-groupe $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, sont les relations de commutation.

Soient deux éléments de Γ. Nous dirons qu'ils sont en *relation* R si, et seulement si, ils sont reliés par un triple positif (λ, m, n). Cette relation R vérifie la propriété suivante :

Lemme 5. — *La relation* R *définie sur* Γ *dans les lignes précédentes est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — La relation R est réflexive, puisque l'on a $\beta^1 = \beta^1$. Elle est symétrique, car $\beta^m = \lambda . \gamma^m$ s'écrit aussi $\gamma^m = \lambda^{-1} . \beta^m$. Enfin elle est transitive, puisque

$$\beta^m = \lambda . \gamma^{m'} \qquad \text{et} \qquad \gamma^n = \mu . \delta^{n'}$$

entraînent, grâce au lemme 1, $\beta^{mn} = (\lambda^n . \mu^{m'})\, \delta^{m'n'}$.

Comme le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ est de type fini par hypothèse chaque classe d'équivalence de R contient un nombre fini d'éléments de Γ, et le nombre de ces classes d'équivalence est fini. Nous noterons ces classes par

$$c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_p.$$

LEMME 6. — *Pour tout i, il existe un nombre entier strictement positif K_i et un élément α_i de Γ représentant la classe c_i, tels que pour tout élément β du semi-groupe engendré dans $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ par les éléments de Γ qui sont R-équivalents à α_i, on ait la propriété suivante :*

il existe une classe $\lambda_i(\beta)$ de $(i_F)_* \pi_1(F, x_0)$ et un nombre entier strictement positif $r_i(\beta)$ qui dépendent seulement de β, tels que $\beta^{K_i} = \lambda_i(\beta) . \alpha_i^{r_i(\beta)}$.

Démonstration. — Soit $\alpha_i = \alpha_{i,1}$ un générateur de Γ représentant la classe c_i. Soient $\alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,k}, \ldots, \alpha_{i,k(i)}$ les éléments de Γ différents de α_i et représentant la classe c_i. Tout élément β du semi-groupe engendré dans $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ par ces $\alpha_{i,k}$, pour i fixe, s'écrit alors $\beta = \prod_{k=1}^{k(i)} \alpha_{i,k}^{\beta_k}$, où les β_k sont des entiers positifs ou nuls.

Puisque $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ est sans élément-unité et sans torsion, la somme $\beta_1 + \cdots + \beta_{k(i)}$ n'est pas nulle; de plus, la décomposition écrite est unique, à des permutations près, permises par le lemme 1.

Par hypothèse, il existe, pour tout i, $(k(i) - 1)$ entiers strictement positifs $m_{i,k}$, tels que pour tout k variant de 2 à $k(i)$, nous avons une relation du genre

$$\alpha_{i,k}^{m_{i,k}} = \lambda_{i,k} . \alpha_i^{m_{i,k}},$$

où les classes $\lambda_{i,k}$ appartiennent à $(i_F)_* \pi_1(F, x_0)$.

Soit K_i le plus petit commun multiple des nombres

$$m_{i,2}, \ldots, m_{i,k(i)}.$$

Il vient alors

$$\beta^{k_i} = \prod_{k=1}^{k(i)} \alpha_{i,k}^{k_i.\beta_k} = \prod_{k=1}^{k(i)} \alpha_{i,k}^{m_{i,k}.\beta_k.k_i/m_{i,k}},$$

où chaque quotient $K_i/m_{i,k}$ est un entier strictement positif, d'après la définition de K_i.

D'après les relations entre α_i et les $\alpha_{i,k}$ écrites plus haut, et compte tenu du lemme 1, on a alors :

$$\begin{aligned}\beta^{k_i} &= \alpha_{i,1}^{k_i.\beta_1} \cdot \prod_{k=2}^{k(i)} (\lambda_{i,k} \,.\, \alpha_i^{m_{i,k}})^{\beta_k.k_i/m_{i,k}}, \\ &= \left(\prod_{k=2}^{k(i)} \lambda_{i,k}^{\beta_k.k_i/m_{i,k}}\right) \cdot \alpha_{i,1}^{k_i.\beta_1} \cdot \prod_{k=2}^{k(i)} \alpha_{i,1}^{\beta_k.k_i}.\end{aligned}$$

Il est clair que β^{k_i} est de la forme désirée $\lambda_i(\beta)\,.\,\alpha_i^{r_i(\beta)}$; il suffit de poser par exemple :

$$\lambda_i(\beta) = \prod_{k=2}^{k(i)} \lambda_{i,k}^{\beta_k.k_i/m_{i,k}}, \quad \text{et}, \quad r_i(\beta) = K_i \cdot \sum_{k=1}^{k(i)} \beta_k.$$

En effet, $\lambda_i(\beta)$ est bien une classe de $(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$, qui est un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$, parce qu'il en est de même des $\lambda_{i,k}$ et parce que les β_k et les $K_i/m_{i,k}$ sont des entiers; de plus, $r_i(\beta)$ est un entier strictement positif, car il en est de même de K_i et de $\beta_1 + \cdots + \beta_{k(i)}$.

Le lemme 6 est donc démontré.

L'étude algébrique de $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ qui précède va nous permettre maintenant d'aborder la démonstration de la propriété P :

Soit un triple positif (λ, m, n) reliant un couple (α_i, α_j) d'éléments de Γ : si cela signifie que l'on a $\alpha_i^m = \lambda\,.\,\alpha_j^n$, avec $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Dès que i est différent de j, α_i et α_j ne sont pas R-équivalents, d'après la définition des α_i. Donc si i est différent de j, m est différent de n, et le rapport m/n, bien défini d'après le lemme 4, est différent de 1.

Si m est (strictement) supérieur à n, nous dirons que α_i est supérieur à α_j, ce que nous noterons $\alpha_i > \alpha_j$ (resp. $\alpha_i < \alpha_j$ si $m < n$).

Cette notation est justifiée dans la mesure où la nouvelle relation introduite est une *relation d'ordre total au sens strict* sur cette famille (α_i) d'éléments de Γ. En effet, si $i \neq j$, on a toujours $\alpha_i < \alpha_j$, ou $\alpha_i > \alpha_j$, d'après les lemmes 2, 3, 4. Les deux relations ne peuvent avoir lieu simultanément, puisque le lemme 4 a montré que le rapport m/n associé au couple (α_i, α_j) est bien défini. Enfin cette relation est transitive : si $\alpha_i > \alpha_j$ et si $\alpha_j > \alpha_k$, alors on a des relations de la forme $\alpha_i^m = \lambda . \alpha_j^n$ avec $m > n$ et $\alpha_j^{p'} = \mu . \alpha_k^q$ avec $p' > q$, où les entiers m, n, p', q sont strictement positifs. On en déduit alors, compte tenu du lemme 1,

$$\alpha_i^{mp'} = (\lambda^{p'} . \mu^n) . \alpha_k^{nq},$$

avec $mp' > nq$, ce qui entraîne que $\alpha_i > \alpha_k$.

Puisqu'ici Γ est un ensemble fini, il contient exactement un élément qui est plus grand que tous les autres, au sens de cette structure d'ordre. Nous le notons α. A une renumérotation près des éléments α_i de Γ, nous pouvons supposer que α égale α_1.

Pour tout i supérieur ou égal à 2, nous avons une relation du genre $\alpha_i^{m_i} = \lambda_i . \alpha^{n_i}$, avec $n_i > m_i$. Nous notons par M le plus petit commun multiple des $m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_p$. Il en résulte les $(p-1)$ égalités $\alpha_i^{\mathrm{M}} = \lambda_i^{\mathrm{M}} . \alpha^{n_i . \mathrm{M}/m_i}$, où chaque $n_i . \mathrm{M}/m_i$ est un entier strictement supérieur à M.

Soit enfin K le plus petit commun multiple des

$$\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_i, \ldots, \mathrm{K}_p.$$

Tout élément β de $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathscr{F})$ est, de façon unique à des permutations près, de la forme $\beta = \prod_{i=1}^{p} \beta_i$, où pour tout i, β_i est un élément du semi-groupe engendré dans $\Pi\mathrm{S}(x_0, \mathscr{F})$ par ceux des générateurs de Γ qui sont équivalents, pour la relation R, à α_i.

Appliquons alors le lemme 6, compte tenu du lemme 1 et du fait que K/K_i est un nombre entier strictement positif pour tout i :

$$\beta^{\mathrm{K}} = \prod_{i=1}^{p} \beta_i^{\mathrm{K}} = \prod_{i=1}^{p} (\beta_i^{\mathrm{K}_i})^{\mathrm{K}/\mathrm{K}_i} = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i(\beta_i)^{\mathrm{K}/\mathrm{K}_i} . \alpha_i^{r_i(\beta) . \mathrm{K}/\mathrm{K}_i},$$

où $r_1(\beta_1) + \cdots + r_p(\beta_p)$ est un entier strictement positif.

En élevant ces égalités à la puissance M, nous obtenons, d'après les relations précédentes et le choix de M:

$$\beta^{MK} = \left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i(\beta_i)^{K/K_i}\right)^M \cdot \prod_{i=1}^{p} \alpha_i^{r_i(\beta_i).K/K_i.M}$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i(\beta_i)^{K/K_i)}\right)^M \cdot \prod_{i=1}^{p} \alpha^{n_i.M/m_i.r_i(\beta_i).K/K_i}.$$

Ainsi β^{MK} est de la forme voulue $\mu(\beta).\alpha^{r(\beta)}$ si nous posons :

$$\mu(\beta) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i(\beta_i)^{MK/K_i}$$

et
$$r(\beta) = \sum_{i=1}^{p} n_i.M/m_i.r_i(\beta_i).K/K_i.$$

En effet, la classe $\mu(\beta)$ est représentable par un lacet de la feuille F, puisqu'il en est de même des classes $\lambda_i(\beta_i)$ et puisque les nombres M et K/K_i sont entiers; de plus, le nombre $r(\beta)$ est un nombre entier strictement positif, car il en est de même des $n_i.M/m_i$, des K/K_i et d'au moins l'un des $r_i(\beta_i)$.

Remarquons que le choix de la classe α, tel que nous l'avons fait, est canonique à R-équivalence près; il permet aussi d'avoir la relation $r(\beta) \geqslant M.\ K$.

3. Démonstration du théorème A.

Pour démontrer le théorème A, il suffit de démontrer que toute transversale fermée à $\mathcal{F}$ coupant la feuille F ne la rencontre qu'en un nombre fini de points, d'après [4], voir aussi [5] pour plus de détails.

Supposons donc qu'il existe une transversale fermée rencontrant F en une infinité de points différents. Alors le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ du feuilletage transversalement orienté $\mathcal{F}$ au point x_0, choisi dans la feuille F, n'est pas vide.

Nous savons alors d'après [4, 5] qu'il existe dans le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ de la feuille F étudiée et contenant le point-base x_0, un élément τ vérifiant la propriété suivante : pour tout nombre entier strictement positif N, il existe N éléments de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, notés $\tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots, \tau_N$, tels que l'on ait, dans $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$:

$$(1) \qquad \tau = \tau_1 . \tau_2 . \ \ldots \ . \tau_n . \ \ldots \ . \tau_N$$

Appliquons la propriété P à cette classe τ de $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$. Il existe une classe μ de $(i_F)_* \pi_1(F, x_0)$ et un entier positif r, supérieur ou égal à MK, tels que

$$(2) \qquad \tau^{MK} = \mu . \alpha^r.$$

Choisissons maintenant un nombre entier N strictement supérieur à $r.M^{-1}.K^{-1}$ et appliquons (1) avec cette valeur de N. Compte tenu du fait que $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$ est abélien, il en résulte

$$(3) \qquad \tau^{MK} = \tau_1^{MK} . \tau_2^{MK} . \ \ldots \ . \tau_n^{MK} . \ \ldots \ . \tau_N^{MK}$$

Appliquons maintenant la propriété P à chacune des classes τ_n de $\Pi S(x_0, \mathscr{F})$, $n = 1, \ldots, N$. Il existe N classes μ_n appartenant à $(i_F)_* \pi_1(F, x_0)$ et N entiers positifs r_n supérieurs ou égaux à M.K, tels que, pour tout n variant de 1 à N, on ait

$$(4_n) \qquad \tau_n^{MK} = \mu_n . \alpha^{r_n}$$

Reportons les égalités (2) et (4_n) dans (3). Compte tenu de la commutativité fournie par le lemme 1, il vient

$$(5) \qquad \mu . \alpha^r = \mu_1 . \ \ldots \ . \mu_n . \ \ldots \ . \mu_N . \alpha^{r_1} . \ \ldots \ . \alpha^{r_n} . \ \ldots \ . \alpha^{r_N}.$$

Cela s'écrit encore

$$(6) \qquad \alpha^r = \mu' . \alpha^R$$

à condition de poser $\mu' = \mu^{-1} . \mu_1 . \ \ldots \ . \mu_n . \ \ldots \ . \mu_N$ et

$$R = r_1 + \cdots + r_n + \cdots + r_N.$$

Puisque la classe α n'est pas nulle et est sans torsion, et puisque l'on a $\alpha = 1_X . \alpha$, avec $1_X = (i_F)_* 1_F$, l'application du lemme 4 aux deux triples (μ', r, R) et $(1_X, 1, 1)$ entraîne

$$(7) \qquad r = R$$

Mais nous avons aussi, d'après le choix de N,

$$(8) \qquad R \geqslant MK + \cdots + MK = NMK > r$$

La contradiction fournie par (7) et (8) démontre alors le théorème A.

4. Remarques sur le théorème A; un complément.

i) *Relations avec nos résultats antérieurs.* — La démonstration du théorème A est algébrique et utilise la propriété P, de ce travail, puis l'existence d'une classe τ infiniment divisible dans le semi-groupe $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, de [4, 5]. Le théorème A contient, en les généralisant, nos résultats de [5] : il suffit de remarquer en effet, que pour une feuille non captée de nombre $d(\mathrm{F}, \mathcal{F})$ égal à 1, la propriété P est trivialement vérifiée, dès que l'on prend $\mathrm{MK} = 1$, $\mu(\beta)$ égal à l'élément-unité 1_{X} de $\pi_1(\mathrm{X}, x_0)$, et α égal au générateur du semi-groupe cyclique $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$: il résulte qu'inversement, l'hypothèse A est vérifiée pour une telle feuille de $\mathcal{F}$.

ii) *Variantes du théorème* A. — Le théorème A s'applique aussi, plus généralement, à des feuilles, de sécant d'homotopie abélien de type fini et vérifiant l'hypothèse A, mais qui peuvent être captées. C'est le cas par exemple, lorsque le feuilletage étudié est indifféremment avec ou sans holonomie, mais est sans éléments évanouissants au sens de Novikov (actions localement libres de groupes), ou est transversalement analytique, etc... (cf. [5]).

iii) *Une autre généralisation du théorème* A. — Le théorème A, ainsi que sa démonstration, peuvent s'écrire, dans un cadre beaucoup plus général, en termes d'homotopie libre de transversales fermées coupant F et de lacets contenus dans la feuille F.

iv) *Une troisième généralisation du théorème* A. — Lorsque $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ n'est plus de type fini, nous ne pouvons plus démontrer la propriété P, en général, et *a priori* le théorème A semblerait ne pas pouvoir s'étendre à ce cas.

En fait, il est très facile de trouver des exemples de sécants d'homotopie abéliens non finiment engendrés, pour laquelle la propriété P est effectivement vérifiée (cf. feuilletages produits des variétés $\mathrm{M} \times \mathrm{S}^1$ de groupe fondamental abélien non finiment engendrés).

Pour le cas où $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ n'est plus de type fini, nous ferons ici seulement deux remarques concernant deux directions nettement différentes.

D'une part on peut supposer que le quotient de $\pi_1(X, x_0)$ par $(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$ est bien défini, puis étudier dans ce quotient l'image de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, comme nous l'avons fait précédemment en 1), 2), 3), lorsque cette image est abélienne de type fini.

D'autre part, on peut démontrer dans certains cas que l'hypothèse A ne peut être vérifiée si $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ n'est pas de type fini, cf. [6] et le cas où $(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$ est de type fini, sans que $\pi_1(X, x_0)$ soit de type fini.

v) *Exemples.* — Le théorème A s'applique évidemment aux feuilles des feuilletages produits des variétés de la forme $M \times S^1$ ou $M \times R$. L'existence d'exemples plus complexes a été indiquée en [5, 6].

vi) *Un complément et la démonstration du corollaire* 1. — Pour démontrer le corollaire 1, il suffit de remarquer qu'un sous-groupe d'un groupe abélien finiment engendré est un groupe abélien finiment engendré, puis d'appliquer le complément suivant du théorème A :

COMPLÉMENT AU THÉORÈME A. — *La conclusion du théorème* A *reste vérifiée lorsque le sécant d'homotopie de la feuille* F *n'est pas finiment engendré, si le groupe* $G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ *qu'il engendre dans* $\pi_1(X, x_0)$ *est abélien et finiment engendré.*

Démonstration du complément au théorème A. — Soit donc F une feuille non captée dont le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, en tant que semi-groupe, est abélien, mais non finiment engendré.

Soit $G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ le sous-groupe finiment engendré de $\pi_1(X, x_0)$ par les éléments de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$.

Considérons deux éléments quelconques $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}'$ de $G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$. L'hypothèse A entraîne qu'il existe des entiers n, n' non tous deux nuls, et un élément λ de $i_*\pi_1(F, x_0)$ tels que $\mathfrak{d}^n = \lambda . \mathfrak{d}'^{n'}$.

Cette propriété du groupe finiment engendré $G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ nous permet de lui appliquer les constructions algébriques faites lors de la démonstration du théorème A; il existe ainsi un entier N strictement positif et un élément α de

$$G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$$

ayant la propriété suivante :

tout élément β de $G\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ est tel que

$$\beta^N = \lambda(\beta).\alpha^{r(\beta)}$$

où $\lambda(\beta)$ est un élément de $i_*\pi_1(F, x_0)$, et où $r(\beta)$ est un entier de signe quelconque.

En particulier, tout élément τ de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ s'écrit, après élévation à la puissance N, sous la forme $\lambda(\tau).\alpha^{r(\tau)}$.

Puisqu'une feuille non captée n'est coupée par aucune transversale fermée homotope à zéro, alors le nombre $r(\tau)$ intervenant dans l'expression de τ^N est non nul, quel que soit l'élément τ de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$.

De plus, le signe de $r(\tau)$ ne dépend pas non plus de l'élément τ de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$. En effet $\tau_1^N = \lambda(\tau_1).\alpha^r(\tau_1)$ et

$$\tau_2^N = \lambda(\tau_2).\alpha^{r(\tau_2)}$$

avec par exemple $r(\tau_1) > 0$ et $r(\tau_2) < 0$ entraîne que l'élément $\lambda' = \tau_1^{N.|r(\tau_2)|}.\tau_2^{N.r(\tau_1)}$ appartient à la fois à $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ et à $i_*\pi_1(F, x_0)$, ce qui est impossible pour la feuille non captée F.

Bien que la classe α n'appartienne pas en général au sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$, et bien que $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ ne soit pas en général finiment engendré, nous pouvons tout de même conclure. En effet, $\Pi S(x_0, \mathcal{F})^N$ est un sous-semi-groupe de $i_*\pi_1(F, x_0).Z^+(\alpha)$, où $Z^+(\alpha)$ désigne le semi-groupe cyclique, nécessairement infini, de générateur α.

La fin de la démonstration du théorème A montre qu'un tel semi-groupe, lorsqu'il ne contient pas d'élément-unité, ne contient aucun élément infiniment divisible de façon non triviale ; ainsi la feuille F est propre et d'enveloppe composée de feuilles fermées.

Le complément au théorème A est donc démontré.

5. Démonstration du théorème B.

Considérons la feuille F non captée de l'énoncé du théorème B. Son sécant d'homotopie est abélien de type quelconque, et le lemme 1 lui reste applicable.

Puisque l'hypothèse A n'est pas vérifiée, par hypothèse, il existe deux éléments τ et τ' de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ vérifiant la propriété suivante :

quels que soient les nombres entiers m et m' non tous deux nuls et quelle que soit la classe λ de $(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$, on a $\tau^m \neq \lambda . \tau'^{m'}$.

Soient deux transversales fermées t et t' représentant respectivement les classes τ et τ'. Puisque τ et τ' commutent, les transversales t et t' sont « x_0-élémentairement homotopiquement indépendantes » au sens de [2]. Nous pouvons alors appliquer le théorème 3 de [2], et la feuille F est dense, ce qui démontre le théorème B.

6. Sécant d'homologie; propriétés.

Nous rappelons ici brièvement la définition du sécant d'homologie d'une feuille F d'un feuilletage transversalement orienté $\mathcal{F}$ et quelques-unes de ses propriétés cf. Théorème 2 de [2].

Soit $H_1(X)$ le premier groupe d'homologie singulière à supports compacts et à coefficients entiers de l'espace topologique X feuilleté par $\mathcal{F}$.

DEFINITION. — *Le sécant d'homologie du feuilletage transversalement orienté* $\mathcal{F}$ *en la feuille* F *de* $\mathcal{F}$, *noté* $HS(F, \mathcal{F})$, *est l'ensemble des éléments de* $H_1(X)$ *qui peuvent être représentés par une transversale fermée orientée de* $\mathcal{F}$ *coupant la feuille* F.

Propriétés. — *i*) Le sécant d'homologie $HS(F, \mathcal{F})$ est, à un isomorphisme canonique près, indépendant de l'orientation de $\mathcal{F}$; il vérifie la même propriété fonctorielle que le sécant d'homotopie du paragraphe 1 de [5], il est donc en particulier invariant par conjugaison topologique.

(ii) Le sécant d'homologie $HS(F, \mathcal{F})$ est un sous-semi-groupe du groupe d'homologie $H_1(X)$. Il est donc abélien.

iii) Le sécant d'homologie $HS(F, \mathcal{F})$ n'est pas vide, dès que la feuille F n'est pas une feuille fermée.

iv) L'homomorphisme de groupes h_* de $\pi_1(X, x_0)$ sur $H_1(X)$, où x_0 est contenu dans la feuille F, induit un homomorphisme surjectif de semi-groupe de $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ sur $HS(F, \mathcal{F})$.

v) Si F est une feuille non captée nulle part dense, et si $\mathscr{F}$ est transversalement de classe C^2, alors $HS(F, \mathscr{F})$ est sans élément-unité [2], donc sans torsion, sans éléments inversibles dans $HS(F, \mathscr{F})$, sans éléments idempotents. De plus,

$$HS(F, \mathscr{F}) \cap (i_G)_* H_1(G)$$

est vide, pour toute feuille G de $\mathscr{F}$, d'après le chapitre VI de notre thèse cf. [3].

7. Démonstration du théorème 2. Énoncé et démonstration du théorème C.

Le théorème 2 s'avère être un cas particulier du théorème C, énoncé et démontré ci-dessous. Le théorème C concerne les feuilles nulle part denses et non captées, qui vérifient l'hypothèse C suivante :

HYPOTHÈSE C. — *Quels que soient les deux éléments* $\{\beta\}$ *et* $\{\gamma\}$ *du sécant d'homologie* $HS(F, \mathscr{F})$, *il existe un élément* $\{\lambda\}$ *de* $(i_F)_* H_1(F)$ *et deux entiers* m *et* m' *non tous deux nuls tels que l'on ait, dans* $H_1(X)$, *l'égalité*

$$m\{\beta\} + m'\{\gamma\} = \{\lambda\}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème C :

THÉORÈME C. — *Soit* F *une feuille vérifiant l'hypothèse* C, *non captée, nulle part dense, dont le sécant d'homologie est de type fini. Alors* F *est propre et d'enveloppe composée de feuilles fermées coupées par aucune transversale fermée.*

Démonstration du théorème C. — Rappelons que, d'après la propriété v) de 6), le sécant d'homologie de $\mathscr{F}$ en F, $HS(F, \mathscr{F})$, est sans élément-neutre. Cette propriété algébrique a déjà été utilisée lors de la démonstration de la propriété P et de la démonstration du théorème A. L'analogie formelle entre l'hypothèse A et l'hypothèse C permet alors d'appliquer au sécant d'homologie, toutes les démonstrations de nature algébrique faites en 2) et 3), puis d'en tirer les mêmes conséquences topologiques sur le type de la feuille F étudiée et sur la structure de son enveloppe dans X :

les seules modifications à apporter sont dues au fait que la loi de semi-groupe de $HS(F, \mathscr{F})$ est notée additivement, comme celle de $H_1(X)$, que le lemme 1 résulte trivialement ici de la commutativité des groupes d'homologie, et que les classes α, β, γ, resp. λ, μ, δ, sont maintenant des classes d'homologie $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$ $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$, $\{\delta\}$ de $H_1(X)$ contenues dans $HS(F, \mathscr{F})$, resp. dans $(i_F)_*H_1(F)$. Le théorème C est donc démontré.

Démonstration du théorème 2. — Puisque le sécant d'homologie $HS(F, \mathscr{F})$ est de rang au plus égal à 1, l'hypothèse C est automatiquement vérifiée. Si ce sécant d'homologie est finiment engendré, il suffit alors d'appliquer le théorème C. Si ce sécant d'homologie est seulement contenu dans un sous-groupe finiment engendré de $H_1(X)$, il faut avoir préalablement appliqué, dans ce cadre homologique, tous les développements algébriques permettant de démontrer le complément au théorème A du paragraphe 6).

8. Le théorème D et le théorème 3.

Dans ce paragraphe, nous étudions certaines feuilles non captées dont le sécant d'homologie, de type fini ou non, ne vérifie plus l'hypothèse C.

Plus précisément, le théorème D nous permettra d'affirmer que de telles feuilles doivent être denses.

Il en résulte alors, compte tenu du théorème C, le captage de certaines feuilles exceptionnelles de sécant d'homologie de type fini ou contenu dans un groupe d'homologie de type fini.

Des théorèmes de captage de feuilles exceptionnelles ont été déjà annoncés en [2] dans le cas non compact, puis en [3] (conditions H.C. et F.B. dans le cas non compact; dans le cas compact, au chapitre 3 de notre thèse publié aux Annales de l'Institut Fourier, 24, fasc. 4, 1974, p. 229-240).

La considération détaillée d'exemples de feuilletages construits dans ce but montre que, pour conclure au captage de toute feuille exceptionnelle, de sécant d'homotopie non abélien par exemple, il faut posséder un minimum d'informations sur la famille des homomorphismes $(i_F)_*$ de $H_1(F)$ dans

$H_1(X)$, où F décrit l'espace des feuilles X mod $\mathcal{F}$ du feuilletage $\mathcal{F}$ de la variété connexe X.

Nous avons choisi pour l'exposé qui va suivre un cas intermédiaire, qui est déjà suffisamment général, comme nous le verrons par la suite : *soit* F *une feuille d'un feuilletage transversalement orienté d'une variété* X *connexe pointée par un point* x_0 *de* F; *la feuille* F *est dite vérifier la condition* E, *si le commutateur de* $\pi_1(X, x_0)$ *est contenu dans* $(i_F)_*\pi_1(F, x_0)$.

Le théorème D s'énonce alors ainsi :

Théorème D. — *Soit* F *une feuille ne vérifiant pas l'hypothèse* C *et vérifiant la condition* E. *Alors* F *n'est pas fermée, et si* F *n'est pas captée,* F *est dense.*

Démonstration du théorème D. — Puisqu'une feuille captée n'est jamais une feuille fermée, il suffit, pour démontrer le théorème D, de démontrer que, si la feuille F était nulle part dense, ce serait une feuille captée. Nous supposons donc la feuille F nulle part dense.

Puisque la feuille F ne vérifie pas l'hypothèse C, il existe deux transversales fermées orientées t et t' à $\mathcal{F}$ en un point-base fixé x_0 de la feuille F, telles que pour tout lacet l de la feuille F d'origine x_0 et pour tout couple (n, n') d'entiers non tous deux nuls, nous avons dans $H_1(X)$ la relation $n\{\tau\} + n'\{\tau'\} \neq \{\lambda\}$, où $\{\lambda\}$ désigne la classe d'homologie du lacet l dans $H_1(X)$. En particulier, $HS(F, \mathcal{F})$ est non vide.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que le sécant d'homologie $HS(F, \mathcal{F})$ est sans élément neutre. En effet, supposons qu'il existe une transversale fermée orientée t'' à $\mathcal{F}$ en x_0, dont la classe d'homologie $\{\tau''\}$ soit l'élément neutre de $H_1(X)$. Alors la classe d'homotopie τ'' de t'' dans $\pi_1(X, x_0)$ est bien définie, et c'est un produit de commutateurs dans $\pi_1(X, x_0)$, soit $\tau'' = \gamma_1 . , \ldots . \gamma_n$. Mais chaque classe γ_i s'écrit aussi $(i_F)_*(\lambda_i)$, où λ_i est la classe d'homotopie dans $\pi_1(F, x_0)$ d'un lacet l_i de la feuille F, puisque la feuille F vérifie la condition E. Il en résulte que $\tau'' = (i_F)_*(\lambda)$, où λ est la classe d'homotopie $\lambda_1 . \ldots . \lambda_n$ du lacet de la feuille F obtenu par composition des l_i. Le sécant d'homotopie $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ contient donc l'élément-unité 1_X, $1_X = \tau''.(i_F)_*(\lambda^{-1})$, et la feuille F est captée.

Dans ces conditions, le sécant d'homologie $HS(F, \mathscr{F})$ ne rencontre pas le sous-groupe $(i_F)_* H_1(F)$ de $H_1(X)$. En particulier, nous savons que $n\{\tau\} + n'\{\tau'\}$ n'est pas l'élément neutre de $H_1(X)$, quels que soient les deux nombres entiers non tous deux nuls n et n'. Cela signifie que le groupe $H(t, t')$ engendré dans $H_1(X)$ par $\{\tau\}$ et $\{\tau'\}$ est abélien de rang exactement égal à deux.

Considérons maintenant le commutateur $\tau . \tau' . \tau^{-1} . \tau'^{-1}$ de $\pi_1(X, x_0)$. Puisque la condition E est vérifiée par la feuille F, c'est aussi la classe d'homotopie $(i_F)_*(\lambda)$ d'un lacet l d'origine x_0 et contenu dans la feuille F. Compte tenu de la représentation habituelle des surfaces compactes de dimension 2, l'homotopie de l au lacet obtenu en parcourant t' en sens inverse à l'orientation de $\mathscr{F}$, puis t en sens inverse, puis t' dans le sens direct, puis t dans le sens direct, peut être considérée comme une application continue φ de M^2 dans X, où M^2 est le complémentaire d'un petit disque ouvert du tore T^2. En notant par m et p un méridien et un parallèle du tore T^2, ne rencontrant pas ce petit disque, nous pouvons supposer que la restriction de φ à m définit le lacet transverse t, que la restriction de φ à p définit le lacet t', et que $\varphi(y_0) = x_0$, où $y_0 = m \cap p$ est le point-base de M^2. D'après le choix de φ, $\varphi_*(\{m\}) = \{\tau\}$ et

$$\varphi_*(\{p\}) = \{\tau'\} :$$

donc φ_* induit un isomorphisme de $H_1(M^2)$ sur $H(t, t')$. Puisque t et t' sont deux transversales fermées, nous pouvons supposer que φ est en position générale par rapport au feuilletage transversalement C^2 $\mathscr{F}$, sans qu'il y ait eu besoin de changer φ dans un voisinage convenablement choisi de $m \cup p$. Nous pouvons aussi supposer que ∂M^2 est une feuille (sans singularités) du feuilletage transversalement C^2, orientable, avec singularités $\mathscr{G}$ induit, par l'application φ et par le feuilletage $\mathscr{F}$ transversalement orientable et transversalement C^2, sur la variété orientable M^2. Remarquons que ∂M^2 ne rencontre pas $m \cap p$ et que la restriction de φ au bord ∂M^2 de M^2 ne peut certainement pas être le lacet l; toutefois la restriction de φ à ∂M^2 définit un lacet homologue à l.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons aussi supposer que l'adhérence $\overline{F}$ de F dans X de la feuille nulle part dense F ne rencontre pas l'image par φ des points singuliers du feuilletage $\mathscr{G}$ de M^2, en réutilisant la démonstration du lemme de [3] p. 244.

Soit f la feuille du feuilletage avec singularités $\mathscr{G}$ contenant le point y_0. Puisque $\varphi(y_0) = x_0$, l'adhérence de f dans M^2 ne contient aucun point singulier de $\mathscr{G}$; elle est compacte, non vide puisque f ne rencontre pas ∂M^2, et elle est d'intérieur vide, puisque F est nulle part dense dans X. Nous pouvons donc appliquer à la feuille f les lemmes de [3], affirmant que la feuille f est soit captée par un cycle-limite de $\mathscr{G}$, soit une feuille compacte de $\mathscr{G}$.

Dans le premier cas, il en résulte que la feuille F de $\mathscr{F}$, qui contient $\varphi(f)$ par définition de f, est une feuille captée du feuilletage $\mathscr{F}$, ce qui fournit la contradiction cherchée, et termine la démonstration du théorème D dans ce cas.

Pour terminer la démonstration (par l'absurde) du théorème D, il suffit donc de considérer seulement le cas où la feuille f est compacte. Puisque l'adhérence $\bar{f}$ de la feuille f dans M^2 ne contient aucun point singulier du feuilletage orientable $\mathscr{G}$, la feuille f peut être considérée d'au moins une façon comme un lacet r de M^2. Mais f rencontre, au point y_0, les deux lacets m et p qui sont partout transverses à $\mathscr{G}$. Les coefficients d'intersection de la feuille f avec m et p ne sont pas nuls, donc $\{\rho\} = n\{m\} + n'\{p\}$ avec n et n' non tous deux nuls, où ρ désigne la classe d'homotopie du lacet r dans $\pi_1(M^2, y_0)$ et $\{\rho\}$ sa classe d'homologie dans $H_1(M^2)$.

En appliquant φ_* à l'égalité précédente, nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi_*(\{\rho\}) = \{\varphi_*(\rho)\} = \{\varphi \circ r\} = (i_F)_*(\{\rho'\}) &= \varphi_*(n\{m\} + n'\{p\}) \\ &= n\{\tau\} + n'\{\tau'\},\end{aligned}$$

où n et n' sont deux entiers non tous deux nuls et où ρ' désigne la classe d'homotopie du lacet $r' = \varphi \circ r$ de la feuille F dans $\pi_1(F, x_0)$, définie seulement à une conjugaison près puisque $\varphi \circ r$ n'est pas un lacet pointé passant pas x_0. Mais d'après le choix des deux transversales fermées t et t', l'égalité $(i_F)_*(\{\rho'\}) = n\{\tau\} + n'\{\tau'\}$ entraîne $n = n' = 0$; cette contradiction montre que f ne peut pas être une feuille compacte de $\mathscr{G}$.

En définitive, la feuille F doit être captée, si elle n'est pas dense, et le théorème D est démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit* F *une feuille exceptionnelle vérifiant la condition* E *dont le sécant d'homologie est de type fini.*

Alors F *est captée.*

Démonstration du théorème 3. — Si la feuille F vérifie l'hypothèse C, elle est captée : puisque F est nulle part dense et de sécant d'homologie de type fini, elle devrait être propre si elle n'était pas captée, d'après le théorème C.

Si la feuille F ne vérifie pas l'hypothèse C, elle est captée : puisque F vérifie la condition E, elle devrait être dense si elle n'était pas captée, d'après le théorème D.

Le théorème 3 est donc démontré.

9. Remarques conçernant les théorèmes 1, 2, 3. Applications du théorème 3.

Les théorèmes 1, 2, 3 entraînent évidemment que certains feuilletages sans feuilles captées, c'est-à-dire sans holonomie, n'admettent aucune feuille exceptionnelle, cf. un problème posé par Reeb en 1961 aux Annales de l'Institut Fourier.

La condition E est vérifiée pour toute feuille d'un feuilletage sans holonomie d'une variété compacte, d'après les travaux de Sacksteder sur les feuilletages sans holonomie et les travaux de Reeb sur les feuilletages définis par une feuille fermée.

Dans de tels feuilletages, le sécant d'homotopie des feuilles n'a aucune raison d'être abélien, et les théorèmes 1 et 2 ne peuvent être appliqués ; c'est alors *uniquement* le théorème 3 qui permet de redémontrer le fait que le feuilletage ne possède aucune feuille exceptionnelle.

En revanche, nous avons mis en évidence un feuilletage C^∞ sans holonomie d'une variété, évidemment non compacte, de premier groupe d'homologie de type fini, dans lequel le sécant d'homotopie du feuilletage est abélien en tout point, mais dans lequel aucune feuille ne vérifie la condition E.

Dans un tel feuilletage, c'est *uniquement* d'après le théorème 1 que nous pouvons affirmer l'absence de feuilles exceptionnelles.

Nous terminerons par quelques applications du théorème 3 qui permettent de généraliser [7] aux variétés non compactes :

dans toute la suite de ce paragraphe, $\mathcal{G}$ désigne un feuilletage transversalement orienté, tranversalement de classe C^2, d'une variété V connexe de premier groupe d'homologie de type fini.

PROPOSITION 1. — *Si le feuilletage* $\mathcal{G}$ *de* V *est sans holonomie, si toutes ses feuilles vérifient la condition* E *et s'il existe une transversale fermée* t *coupant toutes les feuilles de* $\mathcal{G}$, *alors :*

— *une feuille de* $\mathcal{G}$ *est fermée si, et seulement si, elle vérifie l'hypothèse* C;

— *une feuille de* $\mathcal{G}$ *est dense si, et seulement si, elle ne vérifie pas l'hypothèse* C.

Démonstration. — Soit F une feuille nulle part dense de $\mathcal{G}$; elle n'est pas captée et son sécant d'homologie est de type fini ou est un sous-semi-groupe d'un groupe de type fini. Si elle ne vérifiait pas l'hypothèse C, nous pourrions lui appliquer le théorème D, pour conclure qu'elle est captée, ce qui est impossible. Elle vérifie donc l'hypothèse C et nous pouvons lui appliquer le théorème C : si la feuille F n'était pas fermée, son enveloppe serait une réunion non vide de feuilles fermées, coupées par aucune transversale fermée; cela est impossible puisque t est une transversale fermée coupant toutes les feuilles de $\mathcal{G}$; donc F est fermée.

Soit G une feuille dense de $\mathcal{G}$. Nous démontrons par l'absurde que G ne vérifie pas l'hypothèse C. Supposons donc l'hypothèse C vérifiée par G. Nous ne pouvons pas en général appliquer le théorème C à la feuille G, parce qu'elle est dense, ni les théorèmes A et B, parce que le sécant d'homotopie de G n'est pas nécessairement abélien. Toutefois nous pouvons utiliser le fait qu'il existe une transversale fermée à $\mathcal{G}$ coupant G en une infinité de points. Comme G vérifie l'hypothèse C, toute la partie algébrique de la démonstration du théorème C peut être utilisée; elle nous permet d'affirmer que le sécant d'homologie de la feuille G, qui est de type fini ou qui est contenu dans un groupe de type fini, contient un élément neutre. Puisque la feuille G vérifie la condition E, nous pouvons reprendre les arguments du troisième alinéa de la démonstration du théorème D. Le sécant d'homotopie de $\mathcal{G}$ en tout point de G contient l'élément unité et la feuille G doit être captée. Cela constitue la contradiction désirée, puisque $\mathcal{G}$ est sans holonomie.

Réciproquement, une feuille de $\mathcal{G}$ vérifiant l'hypothèse C est dense, d'après le théorème D. Nous avons donc démontré la seconde condition nécessaire et suffisante énoncée dans la proposition 1; il en résulte qu'une feuille de $\mathcal{G}$ est nulle part dense, si, et seulement si, elle vérifie l'hypothèse C. Or une telle feuille est propre, d'après le théorème C; elle est même fermée, d'après le premier alinéa de la démonstration de la proposition 1. La proposition est donc démontrée.

Proposition 2. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un feuilletage de* V *sans feuilles fermées, dans lequel toute feuille vérifie la condition* E. *Si* $\mathcal{G}$ *est sans holonomie, toutes les feuilles de* $\mathcal{G}$ *sont partout denses dans* V.

Démonstration de la proposition 2. — Supposons que $\mathcal{G}$ possède une feuille nulle part dense F. Alors F ne vérifie pas l'hypothèse C, sinon, la feuille F vérifiant la condition E, nous pourrions utiliser le théorème D pour conclure au captage de la feuille F. D'autre part il est impossible que F vérifie l'hypothèse C : la feuille F vérifierait toutes les hypothèses du théorème C et l'adhérence de F dans V devrait contenir une feuille fermée de $\mathcal{G}$, ce qui est contraire aux hypothèses de la Proposition 2. Donc toute feuille de $\mathcal{G}$ est dense; puisque V est connexe, toute feuille de $\mathcal{G}$ est donc partout dense dans V.

La conclusion de la proposition 2 implique l'existence d'une transversale fermée coupant toutes les feuilles de $\mathcal{G}$; d'autre part l'hypothèse faite sur $\mathcal{G}$ dans la proposition 2 entraîne l'absence de feuilles-ressorts. Il en résulte que la proposition 4 qui va suivre sera une réciproque de la proposition 2.

Avant de pouvoir démontrer les propositions 3 et 4 ci-dessous, il nous faut énoncer et démontrer trois lemmes :

LEMME 7. — *Dans un feuilletage* $\mathcal{G}$ *sans feuilles compactes d'une variété compacte connexe* V, *il existe une transversale fermée rencontrant toutes les feuilles de* $\mathcal{G}$.

Démonstration. — Le lemme 7 est la reproduction de la propriété 4 d'une précédente Note (1970, 270 A, p. 1659), démontrée en I *c)* de notre thèse d'une façon directe, utilisant la compacité de V puis la connexité de V, relativement à un recouvrement de V par des (ouverts) saturés de transversales fermées, et n'utilisant donc pas la notion de composante de Novikov d'un feuilletage.

LEMME 8. — *S'il existe une transversale fermée rencontrant toutes les feuilles de* $\mathcal{G}$, *tout ensemble fermé* S *saturé pour* $\mathcal{G}$ *contient un ensemble fermé saturé minimal de* $\mathcal{G}$.

Démonstration. — Soit t une telle transversale fermée. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fermés saturés non vides S' contenus dans S : nous l'ordonnons par la relation d'inclusion. Il est alors inductif : l'intersection d'une famille I totalement ordonnée S_i de $\mathcal{S}$ est un fermé saturé qui est non vide, puisqu'il contient $K = \mathrm{Im}\,(t) \cap \left(\bigcap_{i \in I} S_i\right)$, qui est aussi $\bigcap_{i \in I} (\mathrm{Im}\,(t) \cap S_i)$; or K est non vide puisque c'est l'intersection de la famille totalement ordonnée par l'inclusion des compacts non vides $\mathrm{Im}\,(t) \cap S_i$.

LEMME 9 (Cf. Lemme de [7]). — *Si toute feuille de* $\mathcal{G}$ *vérifie la condition* E *et si* $\mathcal{G}$ *est transversalement analytique ou sans éléments évanouissants au sens de Novikov, alors* $\mathcal{G}$ *est sans feuilles-ressorts.*

Démonstration. — D'après [3], le sécant d'homologie d'une feuille-ressort admet un élément neutre. Puisque la condition E est vérifiée, le sécant d'homotopie de $\mathcal{G}$ en tout point d'une feuille-ressort F contient un élément qui est un produit de classes de la feuille F, d'après un argument précédent, il contient alors un élément-unité, et le feuilletage contient alors une transversale fermée homotope à zéro, ce qui est en contradiction avec les hypothèses du lemme 9.

PROPOSITION 3. — *Si $\mathcal{G}$ est sans feuilles-ressorts, ou bien si $\mathcal{G}$ est transversalement analytique, ou sans éléments évanouissants au sens de Novikov, et si toute feuille de $\mathcal{G}$ vérifie la condition* E, *alors $\mathcal{G}$ ne possède aucun ensemble fermé saturé minimal exceptionnel.*

Remarque. — Pour démontrer la proposition 3, il suffit qu'il existe dans tout ensemble fermé saturé minimal non réduit à une feuille fermée, une feuille vérifiant la condition E.

Démonstration. — Soit F une feuille d'un ensemble E minimal exceptionnel de $\mathcal{G}$: alors F est une feuille exceptionnelle et toute feuille de E est dense dans E. La feuille F est une feuille qui est captée, d'après le théorème 3. Comme E est fermé et minimal, la feuille G de $\mathcal{G}$ par laquelle F est captée est une feuille de E qui est captée par elle-même. C'est donc une feuille-ressort : mais cela est impossible parce que $\mathcal{G}$ est sans feuilles-ressorts, par hypothèse ou par l'intermédiaire de la conclusion du lemme 9.

PROPOSITION 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage de* V *dans lequel toutes les feuilles vérifient la condition* E, *sont non fermées, et sont coupées par une transversale donnée t de $\mathcal{G}$.*

Si $\mathcal{G}$ est sans feuilles-ressorts, ou bien sans éléments évanouissants au sens de Novikov, ou bien transversalement analytique, alors $\mathcal{G}$ est sans holonomie et toute feuille de $\mathcal{G}$ est partout dense dans V.

Démonstration de la proposition 4. — Nous pouvons appliquer le lemme 8 au fermé saturé V de la transversale fermée t : le feuilletage $\mathcal{G}$ possède donc au moins un ensemble fermé saturé minimal E. Par hypothèse, E n'est pas réduit à une feuille fermée. D'autre part, E n'est pas exceptionnel, d'après la proposition 3. Donc E est identique à V ; comme E est minimal, toute feuille de V est partout dense dans V, puisque V est connexe grâce à l'existence de t.

Mais il est facile de vérifier que l'existence d'une feuille F de $\mathcal{G}$ qui serait captée par une feuille G partout dense dans V entraînerait que la feuille G soit une feuille-ressort. Or cela est impossible, soit par hypothèse, soit par une seconde application de la proposition 3. Donc $\mathcal{G}$ est sans feuilles captées, c'est-à-dire sans holonomie.

Remarques. — Une action localement libre et C^2 de R^{n-1} sur V^n est sans feuilles ressorts, d'après Sacksteder [8].

2) Puisqu'une variété compacte a évidemment son premier groupe d'homologie de type fini, la proposition 3 s'applique dans le cas particulier où V est compacte. La proposition 3 généralise donc au cas non compact à l'aide de notre étude du sécant d'homotopie et du sécant d'homologie le théorème 1 de Moussu-Roussarie [7] obtenu à l'aide des travaux de Sacksteder [8].

De même, le contenu du lemme 8 nous permet d'affirmer que la proposition 4 généralise, par une démonstration nouvelle, le théorème 2 de Moussu-Roussarie [7] au cas non compact.

3) Remarquons enfin que lorsque les feuilles de $\mathcal{G}$ vérifient toutes la condition E parce que $\pi_1(V)$ est abélien, il est évidemment plus naturel et plus rapide d'utiliser les théorèmes A et B pour démontrer les propositions 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Lamoureux, Sur les ensembles minimaux, Journées Trajectoriennes, Strasbourg, juin 1970, XII.

[2] C. Lamoureux, Foliations of codimension one of not necessarily compact spaces. Differentialtopologie: speziell Blätterungen. Oberwolfach, mai 1971. (Théorème 3, cf. Feuilles non captées et feuilles denses. *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble, XXV, fasc. 2 (1975), 285.

[3] C. Lamoureux, Feuilletages des variétés compactes et non compactes, *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble, XXVI, fasc. 2 (1976), 221.

[4] C. Lamoureux, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 274, sér. A (1972), 31.

[5] C. Lamoureux, Sur quelques phénomènes de captage, *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble, XXIII, fasc. 4 (1973), 229.

[6] C. Lamoureux, Sur des feuilles simplement connexes d'adhérence éventuellement sans composante connexe compacte. Preprint annoncé aux *C.R. Acad. Sci. Paris*, 279, sér. A (1974), 813.

[7] R. Moussu et R. Roussarie, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 271, sér. A (1970), 240.

[8] R. Sacksteder, *American Journal of Mathematics*, 87 (1965), 79.

Manuscrit reçu le 17 septembre 1975

Proposé par G. Reeb.

Claude Lamoureux,

64, boulevard Arago

75013 Paris.