

JEAN-CLAUDE TOUGERON

**Solutions d'un système d'équations analytiques
réelles et applications**

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 3 (1976), p. 109-135

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_109_0

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ANALYTIQUES RÉELLES ET APPLICATIONS

par Jean-Claude TOUGERON

Dans cet article, nous démontrons que toute solution formelle $\bar{y}(x)$ d'un système d'équations analytiques réelles $f(x, y) = 0$ se relève en une solution C^∞ $y(x)$, homotope à une solution analytique $Y(x)$, aussi proche que l'on veut de $\bar{y}(x)$ pour la topologie de Krull. Si le système d'équations est polynomial (ou plus généralement de Nash), on peut supposer que $Y(x)$ est de Nash ; si, en outre, $\bar{y}(x)$ est déjà analytique, on peut supposer que $y(x) = \bar{y}(x)$ et que la déformation transformant $y(x)$ en $Y(x)$ est analytique. Ce résultat précise un théorème de M. Artin [1] ; la démonstration suit assez fidèlement celle d'Artin ; toutefois, certaines différences (on applique une fois de plus le théorème des fonctions implicites) nous ont obligé à revoir la démonstration (§ 1).

Ce théorème se révèle un outil remarquable pour aborder le genre de problème suivant. Fixons d'abord quelques notations : soient $\mathcal{G}(x)$ l'anneau des germes de fonctions numériques C^∞ à l'origine de \mathbf{R}^n ; $\mathbf{R}\{x\}$ l'anneau des germes de fonctions analytiques à l'origine de \mathbf{R}^n , à valeurs réelles ; $\mathbf{R}[[x]]$ l'anneau des séries formelles en x à coefficients réels ; $\mathcal{N}(x)$ l'anneau des germes de fonctions de Nash réelles à l'origine de \mathbf{R}^n . (Rappelons que $\mathcal{N}(x)$ est le sous-anneau de $\mathbf{R}\{x\}$ formé des germes algébriques sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{R}(x)$). On a des inclusions : $\mathcal{N}(x) \rightarrow \mathbf{R}\{x\} \rightarrow \mathcal{G}(x)$ et une projection : $\mathcal{G}(x) \ni \varphi \rightarrow \hat{\varphi} \in \mathbf{R}[[x]]$ associant à tout germe, sa série de Taylor à l'origine. Cette dernière application est d'ailleurs surjective (théorème de Borel). Soit $\bar{\Gamma}$ un idéal de $\mathbf{R}[[x]]$; les problèmes que nous envisageons sont de trois sortes :

1) Peut-on relever \bar{I} en un idéal de type fini I de $\mathfrak{G}(x)$ ayant de bonnes propriétés ? Par exemple, on peut exiger que I soit un idéal "fermé", ou que $V(I)$, germe des zéros de I , soit stratifiable et possède des propriétés analogues à celles d'un ensemble analytique.

2) Sous certaines hypothèses raisonnables sur \bar{I} , peut-on relever \bar{I} en un idéal I tel que $V(I)$ soit difféomorphe (C^∞ ou C^ν , ν fini) à un germe d'ensemble de Nash ? De même, soit I un idéal de $\mathbf{R}\{x\}$; sous certaines hypothèses, le germe $V(I)$ est-il difféomorphe (C^∞ ou C^ν , ν fini) à un germe d'ensemble de Nash ?

3) Peut-on relever \bar{I} en un idéal de type fini I de $\mathfrak{G}(x)$ et construire une "bonne" déformation C^∞ de $V(I)$ en un germe d'ensemble de Nash ? Bien entendu, le même problème se pose pour un idéal I de $\mathbf{R}\{x\}$, en exigeant alors que la déformation soit analytique.

Dans cet article, nous abordons essentiellement les problèmes (2) et (3) (les problèmes (1) seront étudiés dans un article ultérieur). Par exemple, si I est un idéal de $\mathbf{R}\{x\}$ tel que $V(I)$ soit cohérent et admette une singularité isolée à l'origine de \mathbf{R}^n (resp. $V(I \otimes \mathbf{C})$ admet une singularité isolée à l'origine de \mathbf{C}^n), nous démontrons^R que $V(I)$ est C^ν -difféomorphe pour tout ν fini (resp. C^ω -difféomorphe) à un germe d'ensemble de Nash (§ 2). On généralise ainsi des résultats bien connus lorsque $V(I)$ est une intersection complète.

Dans le paragraphe 3, nous construisons diverses déformations et démontrons entre autres le résultat suivant : tout germe d'ensemble analytique Σ à l'origine de \mathbf{R}^n peut être déformé (par une déformation plate) en un germe d'ensemble de Nash Σ_1 ; si $\Sigma = \Sigma_0$ est irréductible (resp. normal), chaque Σ_t est irréductible (resp. normal) ; enfin, l'entier $\nu \geq 0$ étant fixé, on peut supposer que Σ_t et Σ ont, pour tout $t \in [0,1]$, un contact d'ordre ν à l'origine (i.e. : $\mathcal{J}(\Sigma_t) + m^{\nu+1} = \mathcal{J}(\Sigma) + m^{\nu+1}$, m : idéal maximal de $\mathbf{R}\{x\}$).

1. Solutions d'un système d'équations analytiques.

Posons $x = (x_1, \dots, x_n)$; $y = (y_1, \dots, y_p)$ et soit $\mathbf{R}\{x ; y\}$ l'anneau des séries convergentes à coefficients réels en les variables x, y . Nous avons précédemment défini les anneaux $\mathfrak{U}(x)$, $\mathbf{R}\{x\}$, $\mathbf{R}[[x]]$, $\mathfrak{G}(x)$. Si $\varphi \in \mathfrak{G}(x)^p$, désignons par $\hat{\varphi} \in \mathbf{R}[[x]]^p$ sa série de Taylor à l'origine (l'application $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ est surjective) ; si $\psi, \psi' \in \mathbf{R}[[x]]^p$ et $\nu \in \mathbf{N}$, nous écrirons $\psi \stackrel{\nu}{\simeq} \psi'$ lorsque $\psi - \psi'$ est ν -plate à l'origine. Enfin,

soit \mathcal{G} l'anneau des germes en $\{0\} \times [0,1]$ des applications C^∞ de $\mathbf{R}^n \times [0,1]$ dans \mathbf{R} ; si $y(x, t) \in \mathcal{G}^p$, on note $y_t(x) \in \mathcal{G}(x)^p$ le germe d'application $C^\infty : x \rightarrow y(x, t)$.

DEFINITION 1.1. — Soit $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_q(x, y)) \in \mathbf{R}\{x, y\}^q$ telle que $f(0,0) = 0$ et soient $y(x), y'(x) \in \mathcal{G}(x)^p$ telles que $y(0) = y'(0) = 0$ et $f(x, y(x)) = f(x, y'(x)) = 0$. Si $\nu \in \mathbf{N}$, les deux solutions $C^\infty y(x), y'(x)$, du système $f(x, y) = 0$, seront dites ν -homotopes, s'il existe $y(x, t) \in \mathcal{G}^p$ telle que :

$$\forall t \in [0,1]. \quad \hat{y}_t(x) \stackrel{p}{\simeq} \hat{y}(x) \tag{1.1.1}$$

$$f(x, y(x, t)) = 0 \tag{1.1.2}$$

$$y_0(x) = y(x) \text{ et } y_1(x) = y'(x) \tag{1.1.3}$$

Le théorème suivant précise un résultat de M. Artin [1] sur les solutions formelles d'un système d'équations analytiques :

THEOREME 1.2 — Soit $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_q(x, y)) \in \mathbf{R}\{x, y\}^q$ telle que $f(0,0) = 0$, et soit $\bar{y}(x) \in \mathbf{R}[[x]]^p$ telle que $\bar{y}(0) = 0$ et $f(x, \bar{y}(x)) = 0$. Alors :

(i) Il existe $y(x) \in \mathcal{G}(x)^p$, solution C^∞ du système $f(x, y) = 0$ vérifiant $\hat{y}(x) = \bar{y}(x)$, et pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, une solution analytique $Y^\nu(x) \in \mathbf{R}\{x\}^p$, ν -homotope à $y(x)$.

(ii) Si f est polynomial (et plus généralement, si f est de Nash), on peut supposer que pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, $Y^\nu(x) \in \mathcal{N}(x)^p$.

(iii) Si f est de Nash et si $\bar{y}(x) \in \mathbf{R}\{x\}^p$, on peut supposer que $y(x) = \bar{y}(x)$, que l'homotopie est analytique, et que pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, $Y^\nu(x) \in \mathcal{U}(x)^p$.

Ainsi, toute solution formelle d'un système analytique se relève en une solution C^∞ , ν -homotope pour tout $\nu \in \mathbf{N}$ à une solution analytique. La démonstration du théorème 1.2 (nous démontrons (i), les deux autres parties admettent des preuves analogues) suit pas à pas celle du théorème d'Artin. Nous procédons par récurrence sur $n = \dim \mathbf{R}\{x\}$. Si $n = 0$, le résultat est trivial. Soit $n \geq 1$: nous supposons le théorème démontré lorsque $\dim \mathbf{R}\{x\} \leq n - 1$, et nous le démontrons lorsque $\dim \mathbf{R}\{x\} = n$.

LEMME 1.3. — Soient $\Delta(x, y) \in \mathbf{R}\{x; y\}$; $\bar{y}(x) \in \mathbf{R}[[x]]^p$ tels que $\bar{y}(0) = 0$; $\Delta(0, 0) = 0$; $f(x, \bar{y}(x)) = \mathbf{0}$; $\Delta(x, \bar{y}(x)) \neq 0$. Il existe $w(x) \in \mathfrak{G}(x)^p$ telle que $\hat{w}(x) = \bar{y}(x)$ et pour tout $v' \in \mathbf{N}$, $w(x, t) \in \underline{\mathfrak{G}}$ telle que :

$$\forall t \in [0, 1], \hat{w}_t(x) \underset{v'}{\leq} \bar{y}(x) \quad (1.3.1)$$

$\forall i = 1, \dots, q$ il existe $\xi_i(x, t) \in \underline{\mathfrak{G}}$ telle que

$$f_i(x, w(x, t)) = \xi_i(x, t) \cdot \Delta(x, w(x, t))^2 \quad (1.3.2)$$

$$w_0(x) = w(x) \text{ et } w_1(x) \text{ est analytique} \quad (1.3.3)$$

Preuve. — Après un éventuel changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $\Delta(x, \bar{y}(x))^2$ est régulière d'ordre s en x_n . D'après le théorème de préparation formel, en posant $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et $\bar{y}(x) = (\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_p(x))$:

$$\bar{y}_j(x) = \bar{q}_j(x) \cdot \Delta(x, \bar{y}(x))^2 + \bar{z}_j(x) \quad (1.3.4)$$

où $\bar{z}_j(x) = \sum_{k=1}^s x_n^{s-k} (\bar{y}_{j,k}(x') + y_{j,k}^0)$; $\bar{q}_j(x) \in \mathbf{R}[[x]]$;

$$\bar{y}_{j,k}(x') \in \mathbf{R}[[x']] \quad \text{et} \quad \bar{y}_{j,k}(0) = 0; y_{j,k}^0 \in \mathbf{R}.$$

En outre, $\bar{z}_j(0) = 0$, i.e. $y_{j,s}^0 = 0$.

Posons : $\bar{z}(x) = (\bar{z}_1(x), \dots, \bar{z}_p(x))$; visiblement, $\Delta(x, \bar{y}(x)) - \Delta(x, \bar{z}(x))$ appartient à l'idéal engendré dans $\mathbf{R}[[x]]$ par les $\bar{y}_j(x) - \bar{z}_j(x)$, et donc d'après (1.3.4), $\Delta(x, \bar{y}(x))$ et $\Delta(x, \bar{z}(x))$ engendrent le même idéal dans $\mathbf{R}[[x]]$; en outre, $\Delta(x, \bar{z}(x))^2$ est régulière d'ordre s en x_n . Introduisons des variables auxiliaires $y_{j,k}$ et posons :

$$z_j = \sum_{k=1}^s x_n^{s-k} (y_{j,k} + y_{j,k}^0)$$

et $z = (z_1, \dots, z_p)$.

Si x' et les $y_{j,k}$ sont nuls : $\Delta(x, z) = \Delta(x, \bar{z}(x))$. Il en résulte que $\Delta(x, z)$ est régulière d'ordre s en x_n . D'après le théorème de préparation analytique : $f_i(x, z) = P_i(x; \{y_{j,k}\}) \cdot \Delta(x, z)^2 + \sum_{l=1}^s x_n^{s-l} \cdot g_{i,l}(x'; \{y_{j,k}\})$ où $P_i \in \mathbf{R}\{x; \{y_{j,k}\}\}$; $g_{i,l} \in \mathbf{R}\{x'; \{y_{j,k}\}\}$. (1.3.5)

Par substitution, on déduit de l'égalité (1.3.5) :

$$f_i(x, \bar{z}(x)) = P_i(x; \{\bar{y}_{j,k}(x')\}) \cdot \Delta(x, \bar{z}(x))^2 + \sum_{l=1}^s x_n^{s-l} \cdot g_{i,l}(x'; \{\bar{y}_{j,k}(x')\}) \quad (1.3.6)$$

Mais $f_i(x, \bar{z}(x)) = f_i(x, \bar{z}(x)) - f_i(x, \bar{y}(x))$ est divisible par $\Delta(x, \bar{y}(x))^2$, donc par $\Delta(x, \bar{z}(x))^2$, laquelle est régulière d'ordre s en x_n . D'après l'unicité de la division (1.3.6) :

$$g_{i,l}(x'; \{\bar{y}_{j,k}(x')\}) = 0 \quad (1.3.7)$$

D'après l'hypothèse de récurrence ($\dim \mathbf{R}\{x'\} = n - 1$), il existe des $y_{j,k}(x') \in \mathfrak{G}(x')$ tels que $\hat{y}_{j,k}(x') = \bar{y}_{j,k}(x')$ et, pour tout $\nu' \in \mathbf{N}$, des germes $C^\infty y_{j,k}(x', t)$ tels que :

$$\forall j, \forall k, \forall t \in [0, 1] \quad \hat{y}_{j,k,t}(x') \stackrel{p}{\approx} \bar{y}_{j,k}(x') \quad (1.3.8)$$

$$\forall i, \forall l \quad g_{i,l}(x'; \{y_{j,k}(x', t)\}) = 0 \quad (1.3.9)$$

$$y_{j,k,0}(x') = y_{j,k}(x') \text{ et } y_{j,k,1}(x') \text{ est analytique.} \quad (1.3.10)$$

Posons : $z_j(x, t) = \sum_{k=1}^s x_n^{s-k} (y_{j,k}(x', t) + y_{j,k}^0)$ et $z(x, t) =$

$(z_1(x, t), \dots, z_p(x, t))$. Enfin, soit $q_j(x) \in \mathfrak{G}(x)$ telle que $\hat{q}_j(x) = \bar{q}_j(x)$ et soit $Q_j(x)$ le polynôme de Taylor de degré ν' de $q_j(x)$. Considérons le système d'équations implicites en l'inconnue $y = (y_1, \dots, y_p)$:

$$y_j = ((1 - t) q_j(x) + t Q_j(x)) \cdot \Delta(x, y)^2 + z_j(x, t), \quad j = 1, \dots, p \quad (1.3.11)$$

D'après le théorème des fonctions implicites ordinaire, ce système admet une solution unique $w(x, t) = (w_1(x, t), \dots, w_p(x, t)) \in \underline{\mathfrak{G}}^p$, telle que $w(0, t) = 0$. Posons $w_0(x) = w(x)$; visiblement, $w(x)$ est indépendant de ν' ; en outre, $\hat{w}(x) = \bar{y}(x)$, car $\hat{w}(x)$ est d'après (1.3.11), l'unique solution nulle à l'origine du système :

$$y_j = \bar{q}_j(x) \cdot \Delta(x, y)^2 + \bar{z}_j(x)$$

(car $\hat{z}_{j,0}(x) = \bar{z}_j(x)$, d'après 1.3.10 et $\hat{q}_j(x) = \bar{q}_j(x)$) et il suffit de comparer avec (1.3.4)). Vérifions que $w(x)$ et $w(x, t)$ vérifient les conditions (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) du lemme.

Vérifions (1.3.1). Ecrivons (1.3.11) sous la forme $y = \mu(x, y, t)$. D'après (1.3.8), le polynôme de Taylor de degré ν' de $\mu_t(x, y)$ à l'origine, est indépendant de t . Il en résulte que les $w_t(x)$ ont même polynôme de Taylor de degré ν' , d'où (1.3.1).

Vérifions (1.3.2). D'après (1.3.5) et (1.3.9) :

$$f_i(x, z(x, t)) = P_i(x ; \{y_{j,k}(x', t)\}) \cdot \Delta(x, z(x, t))^2$$

$w(x, t)$ étant solution du système (1.3.11), on voit immédiatement que $\Delta(x, w(x, t))$ et $\Delta(x, z(x, t))$ engendrent le même idéal dans $\underline{\mathfrak{G}}$; en outre, on vérifie que $f_i(x, w(x, t)) - f_i(x, z(x, t))$ est divisible dans $\underline{\mathfrak{G}}$ par $\Delta(x, w(x, t))^2$. Ceci démontre (1.3.2).

Enfin, nous savons déjà que $w_0(x) = w(x)$; en outre, $w_1(x)$ est d'après (1.3.11) solution du système : $y_j = Q_j(x) \cdot \Delta(x, y)^2 + z_{j,1}(x)$. Ce système est analytique, d'après (1.3.10), et donc $w_1(x)$ est analytique.

1.4. *Preuve de 1.2.* — On peut supposer (cf. [1], la preuve est exactement la même) $q \leq p$, et si $\delta(x, y) = \frac{D(f_1, \dots, f_q)}{D(y_q, \dots, y_q)}$ que $\delta(x, \bar{y}(x)) \neq 0$. Posons $\Delta(x, y) = x_n \cdot \delta(x, y)$; alors $\Delta(x, \bar{y}(x)) \neq 0$ et $\Delta(0, 0) = 0$. Appliquons le lemme 1.3 à la solution $\bar{y}(x)$ et à $\Delta(x, y)$. D'après (1.3.1) et (1.3.2), si $\nu' \geq \nu$ est assez grand :

$$\forall t \in [0, 1] \quad , \quad \hat{\xi}_{i,t}(x) \leq 0 \quad (1.4.1)$$

En outre, puisque $\hat{w}_0(x) = \hat{w}(x) = \bar{y}(x)$:

$$\hat{\xi}_{i,0}(x) = 0 \quad (1.4.2)$$

Puisque $w_1(x)$ est analytique :

$$\xi_{i,1}(x) \text{ est analytique} \quad (1.4.3)$$

Considérons alors le système d'équations implicites :

$$g_i(x, t ; Y) = f_i(x, Y + w(x, t)) = 0 \quad i = 1, \dots, q.$$

D'après (1.3.2) :

$$g_i(x, t ; 0) = f_i(x, w(x, t)) = \xi_{i,t}(x) \cdot \left(\frac{D(g_1, \dots, g_q)}{D(Y_1, \dots, Y_q)}(x, t ; 0) \right)^2$$

D'après le théorème des fonctions implicites [2], (1.4.1), (1.4.2) et (1.4.3), il existe $Y(x, t) \in \underline{\mathcal{G}}^p$ telle que :

$$g_i(x, t; Y(x, t)) = f_i(x, Y(x, t) + w(x, t)) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, q$$

$$\forall t \in [0, 1], \hat{Y}_t(x) \stackrel{\nu}{\simeq} 0$$

$$\hat{Y}_0(x) = 0 \text{ et } Y_0(x) \text{ est indépendant de } \nu$$

$Y_1(x)$ est analytique.

Posons $y(x) = Y_0(x) + w(x)$: $y(x)$ est une solution C^∞ du système $f(x, y) = 0$ telle que $\hat{y}(x) = \bar{y}(x)$; en outre, $y(x, t) = Y(x, t) + w(x, t)$ est une ν -homotopie transformant $y(x)$ en une solution analytique $Y^\nu(x) = Y_1(x) + w_1(x)$.

COROLLAIRE 1.5. — Soient A et B deux \mathbf{R} -algèbres analytiques ; \tilde{A} et \tilde{B} les algèbres C^∞ associées à A et B respectivement. Tout morphisme formel de A dans B , i.e. tout \mathbf{R} -homomorphisme de \hat{A} dans \hat{B} , se relève en un morphisme C^∞ de \tilde{A} dans \tilde{B} .

2. Analyticité et algébricité des variétés à singularité isolée.

Soit I un idéal de $A = \mathbf{R}\{x\}, \mathbf{R}[[x]]$ ou $\mathcal{G}(x)$. Si $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n$, on note $J_k(I)$ l'idéal engendré dans A par I et tous les jacobiens $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in A$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$; on note $\sigma_k(I)$ l'idéal engendré par tous les $\delta \in A$ tels que $\delta \cdot I$ soit contenu dans un sous-idéal de I engendré par k éléments ; enfin, on pose : $\mathcal{R}_k(I) = J_k(I) \cap \sigma_k(I)$.

DEFINITION 2.1. — Un idéal I de $\mathbf{R}\{x\}$ ou $\mathcal{G}(x)$ est elliptique, s'il existe $\varphi \in I$, des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$, telles que $|\varphi(x)| \geq C|x|^\alpha$ dans un voisinage de l'origine de \mathbf{R}^n (φ est un représentant de φ). Un idéal I de $\mathbf{R}[[x]]$ est elliptique s'il existe $\varphi \in \mathcal{G}(x)$ tel que φ soit elliptique (i.e. l'idéal engendré par φ est elliptique) et $\hat{\varphi} \in I$.

2.2. Soit V un germe d'ensemble analytique à l'origine de \mathbf{R}^n . On vérifie facilement que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) V est analytique cohérent et $V \setminus \{0\}$ est un germe de variété analytique de codimension k (éventuellement vide)⁽¹⁾.

(ii) Il existe un idéal I de $\mathbb{R}\{x\}$ vérifiant $V(I) = V$, tel que $\mathcal{R}_k(I)$ soit elliptique.

2.3. Soit I un idéal de *type fini* de $\mathcal{G}(x)$. On démontre (cf. [3], chap. V), l'équivalence des deux conditions suivantes :

(i) L'idéal I est fermé (i.e. I est induit par un idéal fermé de type fini de $\mathcal{G}(U)$, U voisinage ouvert de l'origine de \mathbb{R}^n) et $\mathcal{R}_k(\hat{I})$ est elliptique.

(ii) L'idéal $\mathcal{R}_k(I)$ est elliptique.

Visiblement, si l'une des deux conditions précédentes est satisfaite, $V(I) \setminus \{0\}$ est un germe de variété C^∞ de codimension k (éventuellement vide).

Soit $\mathcal{G}_\nu(x)$ l'anneau des germes de fonctions numériques de classe C^ν à l'origine de \mathbb{R}^n .

THEOREME 2.4. — Soit \bar{I} un idéal de $\mathbb{R}[[x]]$ tel que $\mathcal{R}_k(\bar{I})$ soit elliptique. Alors, il existe I , idéal fermé (de type fini) de $\mathcal{G}(x)$ vérifiant $\hat{I} = \bar{I}$, et pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, un difféomorphisme de classe C^ν à l'origine de \mathbb{R}^n (C^∞ en dehors de 0) transformant l'idéal I . $\mathcal{G}_\nu(x)$ en un idéal de $\mathcal{G}_\nu(x)$ engendré par des germes de Nash (donc, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, $V(I)$ est C^ν -difféomorphe à un germe d'ensemble de Nash⁽²⁾ vérifiant les conditions 2.2 ; en outre, I vérifie les conditions 2.3).

Preuve. — Par hypothèse, il existe une famille $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_p$ de générateurs de l'idéal \bar{I} et $\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_s \in \mathbb{R}[[x]]$ tels que :

(i) A tout $i = 1, \dots, s$, on peut associer une suite :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p,$$

et des $\bar{\xi}_{ijl} \in \mathbb{R}[[x]]$ tels que, pour $j = 1, \dots, p$

$$\bar{\delta}_i \cdot \bar{\varphi}_j = \sum_{l=1}^k \bar{\xi}_{ijl} \cdot \bar{\varphi}_{i_l}$$

(1) Il existe des germes d'ensembles analytiques réels, admettant une singularité isolée à l'origine et non cohérents, par exemple le germe des zéros de $x_1^3 - x_3 x_2^3$ à l'origine de \mathbb{R}^3 .

(2) Un germe d'ensemble de Nash est toujours la réunion de certaines composantes analytiques irréductibles d'un germe de variété algébrique.

(ii) L'idéal engendré par les $\bar{\delta}_i$ est elliptique ; de même que l'idéal engendré par les $\bar{\varphi}_j$ et tous les jacobiens : $\frac{D(\bar{\varphi}_{a_1}, \dots, \bar{\varphi}_{a_2})}{D(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_2})}$

D'après le théorème 1.2, il existe $\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x) ; \delta_1(x), \dots, \delta_s(x)$ et des $\xi_{ijl}(x)$, tous éléments de $\mathfrak{G}(x)$, tels que pour tout i et j :

$$\delta_i(x) \cdot \varphi_j(x) = \sum_{l=1}^k \xi_{ijl}(x) \cdot \varphi_{i_l}(x) \quad (2.4.1)$$

$$\text{et} \quad \hat{\varphi}_j(x) = \bar{\varphi}_j ; \hat{\delta}_i(x) = \bar{\delta}_i ; \hat{\xi}_{ijl}(x) = \bar{\xi}_{ijl} \quad (2.4.2)$$

En outre, pour tout $\nu' \in \mathbb{N}$, il existe des $\varphi_j(x, t), \delta_i(x, t), \xi_{ijl}(x, t)$ appartenant à $\underline{\mathfrak{G}}$ tels que :

$$\forall t \in [0, 1], \hat{\varphi}_{j,t}(x) \stackrel{\nu'}{\cong} \hat{\varphi}_j(x) ; \hat{\delta}_{i,t}(x) \stackrel{\nu'}{\cong} \hat{\delta}_i(x) ; \hat{\xi}_{ijl,t}(x) \stackrel{\nu'}{\cong} \hat{\xi}_{ijl}(x) \quad (2.4.3)$$

Pour tout i et tout j :

$$\delta_i(x, t) \cdot \varphi_j(x, t) = \sum_{l=1}^k \xi_{ijl}(x, t) \cdot \varphi_{i_l}(x, t) \quad (2.4.4)$$

$\varphi_{j,0}(x) = \varphi_j(x) ; \delta_{i,0}(x) = \delta_i(x) ; \xi_{ijl,0}(x) = \xi_{ijl}(x)$; en outre, $\varphi_{j,1}(x), \delta_{i,1}(x), \xi_{ijl,1}(x)$ sont de Nash.

Soit I_t l'idéal engendré par les $\varphi_{j,t}(x), 1 \leq j \leq p$, dans $\mathfrak{G}(x)$. D'après (2.4.1), (2.4.2) et 2.3, l'idéal $I_0 = I$ (indépendant de ν') vérifie $\hat{I} = \bar{I}$; en outre, I est fermé de type fini. L'entier ν étant fixé, il suffit de montrer que si ν' est assez grand, il existe un difféomorphisme de classe C^{ν} qui transforme $I_0 \cdot \mathfrak{G}_{\nu}(x)$ en $I_1 \cdot \mathfrak{G}_{\nu}(x)$ (I_1 est de Nash d'après 2.4.5)).

Posons $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_p(x, t))$ et soit $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) : \underline{\mathfrak{G}}^n \rightarrow \underline{\mathfrak{G}}^p$ la matrice jacobienne de $\varphi(x, t)$. Le théorème résultera du lemme suivant :

LEMME 2.5. — Si ν' est assez grand, on a :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \cdot u(x, t) + v(x, t) \cdot \varphi(x, t)$$

où $u(x, t), v(x, t)$ sont des matrices $n \times 1$ et $p \times p$ respectivement, à coefficients de classe C^{ν} , vérifiant :

$$u(0, t) = 0 ; \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 ; v(0, t) = 0.$$

Preuve. — Posons $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$, $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_k \leq n$ et soit $\Delta_{i, \underline{\beta}}(x, t)$ le jacobien $\frac{D(\varphi_{i_1}(x, t), \dots, \varphi_{i_k}(x, t))}{D(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_k})}$ (on rappelle que la suite (i_1, \dots, i_k) est associée à i , $1 \leq i \leq s$). Démontrons tout d'abord que :

$$\delta_i(x, t) \cdot \Delta_{i, \underline{\beta}}(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \cdot u_{i, \underline{\beta}}(x, t) + v_{i, \underline{\beta}}(x, t) \cdot \varphi(x, t) \quad (2.5.1)$$

où $u_{i, \underline{\beta}}$ et $v_{i, \underline{\beta}}$ sont de classe C^∞ et $u_{i, \underline{\beta}, t}(x) \stackrel{p'}{\simeq} 0$; $v_{i, \underline{\beta}, t}(x) \stackrel{p'}{\simeq} 0$.

Pour simplifier, posons $\delta_i = \delta$; $\Delta_{i, \underline{\beta}} = \Delta$; et supposons que $(i_1, \dots, i_k) = (\beta_1, \dots, \beta_k) = (1, \dots, k)$, ce qui n'est pas restrictif.

Posons $\varphi(x, t) = (\varphi^1(x, t), \varphi^2(x, t))$, avec $\varphi^1 = (\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_k(x, t))$; $\varphi^2 = (\varphi_{k+1}(x, t), \dots, \varphi_p(x, t))$. Puisque Δ est l'un des mineurs d'ordre k de la matrice jacobienne $\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}$, d'après (2.4.3) :

$$\Delta(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(x, t) \cdot u^1(x, t) \quad (2.5.2)$$

où $u^1(x, t)$ est C^∞ et, $\forall t \in [0, 1]$, $u^1_t(x) \stackrel{p'}{\simeq} 0$.

D'après (2.4.4) et (2.4.3) :

$$\delta(x, t) \cdot \varphi^2(x, t) = \xi(x, t) \cdot \varphi^1(x, t)$$

où $\xi(x, t)$ est une matrice $(p - k) \times k$ à coefficients C^∞ ; puis par dérivation :

$$\delta(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(x, t) = \xi(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(x, t) + \sum_{i=1}^p \varphi_i(x, t) \cdot \xi^i(x, t) \quad (2.5.3)$$

$$\delta(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}(x, t) = \xi(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(x, t) + \eta(x, t) \cdot \varphi(x, t) \quad (2.5.4)$$

où $\xi^i(x, t)$, $\eta(x, t)$ sont respectivement des matrices $(p - k) \times n$ et $(p - k) \times p$ à coefficients C^∞ , avec $\forall t \in [0, 1]$, $\eta_t(x) \stackrel{p'}{\simeq} 0$.

D'après (2.5.2), (2.5.3) et (2.5.4) :

$$\delta(x, t) \cdot \Delta(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}(x, t) = \delta(x, t) \frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(x, t) \cdot u^1(x, t) + \\ + \eta'(x, t) \cdot \varphi(x, t)$$

où $\eta'(x, t)$ est une matrice à coefficients C^∞ , vérifiant $\forall t \in [0, 1]$, $\eta'_t(x) \stackrel{v'}{\cong} 0$. Visiblement, (2.5.1) résulte de l'égalité précédente et de (2.5.2).

Par hypothèse, l'idéal engendré dans $\mathfrak{G}(x)$ par $\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)$ et les $\delta_i(x) \cdot \frac{D(\varphi_{\alpha_1}(x), \dots, \varphi_{\alpha_k}(x))}{D(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_k})}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq p$, $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k \leq n$, est elliptique. Puisque $\delta_i(x) \cdot \subset (\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_k}(x))$, on a $\delta_i(x)^2 \cdot J_k(I) \subset J_k(\varphi_{i_1}(x), \dots, \varphi_{i_k}(x))$ (vérification immédiate). Ainsi l'idéal engendré par $\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)$ et les $\delta_i(x) \cdot \Delta_{i, \beta, 0}(x)$ est elliptique. Il existe donc $\psi(x)$ appartenant à cet idéal et des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que :

$$|\underline{\psi}(x)| \geq C|x|^\alpha$$

D'après 2.4.3, les $\varphi_{j, t}(x)$ et $\delta_{i, t}(x) \cdot \Delta_{i, \beta, t}(x)$ ont un jet d'ordre $v' - 1$ à l'origine, indépendant de t . Si $v' - 1 \geq \alpha$, il existe donc $\psi(x, t)$ appartenant à l'idéal engendré dans \mathfrak{G} par $\varphi_1(x, t), \dots, \varphi_p(x, t)$ et les $\delta_i(x, t) \cdot \Delta_{i, \beta}(x, t)$ ($1 \leq i \leq s$, $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k \leq n$) tel que, si $t \in [0, 1]$ et $|x|$ est assez petit :

$$|\underline{\psi}(x, t)| \geq C'|x|^\alpha \quad (2.5.5)$$

D'après (2.5.1) :

$$\psi(x, t) \cdot - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \cdot u'(x, t) + v'(x, t) \cdot \varphi(x, t)$$

avec :

$$u'_t(x) \stackrel{v'}{\cong} 0 ; v'_t(x) \stackrel{v'}{\cong} 0$$

Ainsi, pour $x \neq 0$:

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{u'(x, t)}{\psi(x, t)} + \frac{v'(x, t)}{\psi(x, t)} \cdot \varphi(x, t)$$

D'après (2.5.5) et (2.5.6), si ν' est assez grand par rapport à α et ν , les quotients $\frac{u'(x, t)}{\psi(x, t)}$ et $\frac{v'(x, t)}{\psi(x, t)}$ se prolongent en des germes de classe C^ν en $\{0\} \times [0, 1]$, nuls ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à x sur $\{0\} \times [0, 1]$; ceci démontre le lemme. /

Preuve de 2.4 (fin). – La démonstration est standard (cf. [3], chap. VIII, § 3). D'après le théorème classique sur les solutions d'un système d'équations différentielles, il existe $\tau(x, t) = (\tau_1(x, t), \dots, \tau_n(x, t))$, de classe C^ν , tel que :

$$\tau(0, t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x}(0, t) \equiv 1_{\mathbb{R}^n} \quad ; \quad \tau(x, 0) = x$$

et :

$$u(\tau(x, t), t) = \frac{\partial \tau}{\partial t}(x, t)$$

D'après le même théorème, il existe $M(x, t)$ matrice $p \times p$ à coefficients de classe C^ν , telle que : $M(0, t) \equiv M(x, 0) \equiv 1_{\mathbb{R}^p}$, et :

$$v(\tau(x, t), t) = M^{-1}(x, t) \cdot \frac{\partial M}{\partial t}(x, t)$$

D'après 2.5 et ce qui précède :

$$\frac{\partial}{\partial t} (M(x, t) \cdot \varphi(\tau(x, t), t)) = M(x, t) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(x, t), t) \cdot u(\tau(x, t), t) + \right.$$

$$\left. v(\tau(x, t), t) \cdot \varphi(\tau(x, t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau(x, t), t) \right) = 0$$

Il en résulte que :

$$M(x, t) \cdot \varphi(\tau(x, t), t) = M(x, 0) \cdot \varphi(\tau(x, 0), 0) = \varphi(x)$$

Visiblement, $x \rightarrow \tau_1(x)$ est un difféomorphisme de classe C^ν à l'origine de \mathbb{R}^n (C^∞ en dehors de l'origine) qui transforme $I_1 \cdot \mathcal{E}_\nu(x)$ en $I_0 \cdot \mathcal{E}_\nu(x)$, c.q.f.d. /

On démontre de même, en appliquant la partie (iii) du théorème 1.2, le résultat suivant :

THEOREME 2.4'. — Soit I un idéal de $\mathbf{R}\{x\}$ tel que $\mathcal{R}_k(I)$ soit elliptique. Alors, pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, il existe un difféomorphisme de classe C^ν à l'origine de \mathbf{R}^n (analytique en dehors de 0) transformant l'idéal $I \cdot \mathfrak{G}_\nu(x)$ en un idéal de $\mathfrak{G}_\nu(x)$ engendré par des germes de Nash (donc, pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, $V(I)$ est C^ν -difféomorphe à un germe d'ensemble de Nash).

Une question analogue à celle résolue par le théorème 2.4 est la suivante : soit \bar{I} un idéal de $\mathbf{R}[[x]]$; l'algèbre $\mathbf{R}[[x]]/\bar{I}$ est-elle isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique ? Ceci est évidemment faux sans hypothèses supplémentaires sur \bar{I} . Par exemple, soit \bar{I} l'idéal engendré dans $\mathbf{R}[[x_1, x_2, x_3]]$ par :

$$x_3(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3) \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3) \quad (x_1^2 + x_2^2 - (1 + x_1)x_3) \\ (x_1^2 + x_2^2 - \gamma(x_1)x_3)$$

où γ est une série non convergente telle que $\gamma(0) = 2$; la "variété formelle réelle $V(\bar{I})$ " admet une singularité isolée à l'origine et donc le théorème 2.4 lui est applicable ; cependant, $\gamma(x)$ est liée de manière intrinsèque à la "variété formelle complexe $V(\bar{I} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ " (cf. [2], page 220, l'exemple s'inspire de Whitney [4]). Ainsi $\mathbf{R}[[x]]/\bar{I}$ ne peut être isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique. En modifiant l'exemple, on peut d'ailleurs supposer que $\mathbf{R}[[x]]/\bar{I}$ est intègre.

Le théorème suivant est démontré par H. Hironaka [5], dans le cas analytique ; la démonstration se transpose sans difficulté au cas formel :

THEOREME 2.6. — Soit \bar{I} un idéal de $\mathbf{R}[[x]]$ tel que $\mathbf{R}[[x]]/\bar{I}$ soit réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$. Posons pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, $\bar{I}_\nu = \bar{I} + J_k(\bar{I})^\nu$ (3). Il existe un entier $\nu_0 \geq 2$ vérifiant la condition suivante :

Pour toute algèbre $\mathbf{R}[[x]]/\bar{J}$, réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$, la condition $\mathbf{R}[[x]]/\bar{I}_{\nu_0} \simeq \mathbf{R}[[x]]/\bar{J}_{\nu_0}$ implique

$$\mathbf{R}[[x]]/\bar{I} \simeq \mathbf{R}[[x]]/\bar{J}$$

(3) L'algèbre $\mathbf{R}[[x]]/\bar{I}$ étant réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$, les idéaux $J_k(\bar{I})$ et $\mathfrak{a}_k(\bar{I})$ ont même racine (voir [3], chap. II).

THEOREME 2.7.⁽⁴⁾ — *Avec les hypothèses et notations du théorème 2.6, supposons que $\mathbf{R}[[x]]/\bar{\mathbf{I}}_{\nu_0}$ soit isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique (resp. de Nash) ; alors $\mathbf{R}[[x]]/\bar{\mathbf{I}}$ est isomorphe à la complétée d'une algèbre analytique (resp. de Nash).*

Preuve. — Nous démontrons uniquement le cas analytique. On peut supposer que $\bar{\mathbf{I}}_{\nu_0}$ est égal à $\hat{\mathbf{J}}$, où \mathbf{J} est un idéal de $\mathbf{R}\{x\}$. D'après le théorème d'Artin-Rees, il existe $\nu_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\bar{\mathbf{I}}_{\nu_0} \cap \hat{m}^{\nu_1} \subset \hat{m}$. $\bar{\mathbf{I}}_{\nu_0}$ (m désigne l'idéal maximal de $\mathbf{R}\{x\}$ et donc \hat{m} est l'idéal maximal de $\mathbf{R}[[x]]$). D'après 3.8, version analytique, il existe un idéal \mathbf{I} de $\mathbf{R}\{x\}$ tel que : $\mathbf{I} \subset \mathbf{J}$; $\mathbf{R}\{x\}/\mathbf{I}$ est réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$; $\hat{\mathbf{I}} + \hat{m}^{\nu_1+1} = \bar{\mathbf{I}} + \hat{m}^{\nu_1+1}$.

Puisque $\mathbf{I} \subset \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{J}_k(\bar{\mathbf{I}})^{\nu_0}$, on a $\mathbf{J}_k(\mathbf{I}) \subset \mathbf{J}_k(\bar{\mathbf{I}})$ et donc :

$$\hat{\mathbf{I}}_{\nu_0} = \hat{\mathbf{I}} + \widehat{\mathbf{J}_k(\mathbf{I})}^{\nu_0} \subset \bar{\mathbf{I}} + \mathbf{J}_k(\bar{\mathbf{I}})^{\nu_0} = \bar{\mathbf{I}}_{\nu_0}$$

Visiblement : $\hat{\mathbf{I}}_{\nu_0} + \hat{m}^{\nu_1} = \bar{\mathbf{I}}_{\nu_0} + \hat{m}^{\nu_1}$ et donc :

$$\bar{\mathbf{I}}_{\nu_0} \subset \hat{\mathbf{I}}_{\nu_0} + (\hat{m}^{\nu_1} \cap \bar{\mathbf{I}}_{\nu_0}) \subset \bar{\mathbf{I}}_{\nu_0} + \hat{m} \cdot \bar{\mathbf{I}}_{\nu_0}.$$

D'après le lemme de Nakayama : $\bar{\mathbf{I}}_{\nu_0} = \hat{\mathbf{I}}_{\nu_0}$; d'après le théorème 2.6, les algèbres $\mathbf{R}[[x]]/\hat{\mathbf{I}}$ et $\mathbf{R}[[x]]/\bar{\mathbf{I}}$ sont isomorphes.

En particulier, on a le résultat suivant (comparer avec 2.4) :

COROLLAIRE 2.8. — *Soit $\bar{\mathbf{I}}$ un idéal de $\mathbf{R}[[x]]$ tel que $\mathcal{R}_k(\bar{\mathbf{I}})$ contienne une puissance de \hat{m} ; alors $\mathbf{R}[[x]]/\bar{\mathbf{I}}$ est isomorphe à la complétée d'une algèbre de Nash.*

Preuve. — Si $\bar{\mathbf{I}}$ contient une puissance de \hat{m} , le résultat est trivial ; sinon, $\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{I}}' \cap \bar{\mathbf{I}}''$, où $ht \bar{\mathbf{I}}'' \geq n$ et les idéaux premiers associés à $\bar{\mathbf{I}}'$ sont de hauteur $< n$ (considérer la décomposition primaire de $\bar{\mathbf{I}}$). Visiblement, $\mathcal{R}_k(\bar{\mathbf{I}}')$ contient une puissance de \hat{m} ; il existe donc $\delta \in \mathcal{R}_k(\bar{\mathbf{I}}')$, non diviseur de zéro dans $\mathbf{R}[[x]]/\bar{\mathbf{I}}'$; d'après le critère 3.6, chap. II, [3], $\mathbf{R}[[x]]/\bar{\mathbf{I}}'$ est réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$, donc isomorphe à la complétée d'une algèbre de Nash, d'après 2.7. Le corollaire 2.8 est alors évident.

Remarques 2.9. —

(i) Pour appliquer le théorème 2.7, il suffit de connaître un idéal \mathbf{J} de $\mathbf{R}\{x\}$ tel que $\bar{\mathbf{I}} \subset \hat{\mathbf{J}} \subset \bar{\mathbf{I}}_{\nu_0}$. En effet, des inclusions précédentes, on

(4) Les résultats de ce théorème sont contenus dans [8].

déduit les égalités : $J_k(\hat{J}) = J_k(\bar{I})$ et $\bar{I}_{\nu_0} = \hat{J}_{\nu_0}$; ainsi, $R[[x]]/\bar{I}_{\nu_0}$ est la complétée d'une algèbre analytique.

(ii) Les théorèmes 2.4 et 2.7 sont bien connus lorsque l'idéal \bar{I} est une intersection complète. Dans ce cas, on a des résultats plus précis [6].

(iii) Pour terminer, signalons le problème suivant. Soient I, I' deux idéaux fermés de type fini de $\mathcal{E}\{x\}$ tels que $\hat{I} = \hat{I}'$ et $\mathcal{R}_k(\hat{I})$ est elliptique. Existe-t-il un isomorphisme d'algèbres différentiables

$$\tau^* : \mathcal{E}(x)/I \rightarrow \mathcal{E}(x)/I',$$

tel que $\hat{\tau}^*$ soit l'application identique ? Cela est vrai lorsque \hat{I} est une intersection complète.

3. Applications aux déformations.

Soit \mathcal{O} l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles au voisinage de $0 \times [0, 1]$ dans $\mathbf{R}^n \times [0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, on a un homomorphisme $\Pi_t : \mathcal{O} \ni \varphi \rightarrow \varphi_t(x) \in \mathbf{R}\{x\}$; si \underline{M} est un module de type fini sur \mathcal{O} , on pose $\underline{M}_t = \underline{M} \otimes_{\Pi_t} \mathbf{R}\{x\}$; de même, si $\mathcal{C}(\underline{M})$ est un complexe de \mathcal{O} -modules, on note $\mathcal{C}(\underline{M})_t$ le complexe : $\mathcal{C}(\underline{M}) \otimes_{\Pi_t} \mathbf{R}\{x\}$.

D'après le théorème des sisygies, tout module de type fini M sur $\mathbf{R}\{x\}$ admet une résolution de longueur $\leq n$, i.e. il existe un complexe exact $\mathcal{C}(M)$:

$$0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\lambda_n} L_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\lambda_1} L_0$$

où les L_i sont des modules libres de type fini sur $\mathbf{R}\{x\}$; les λ_i des homomorphismes de $\mathbf{R}\{x\}$ -modules et $\text{coker } \lambda_1 = M$.

DEFINITION 3.1. — Soit $\nu \in \mathbf{N}$; une ν -déformation de $\mathcal{C}(M)$ (en un complexe de Nash) est la donnée d'un complexe $\mathcal{C}(\underline{M})$ de \mathcal{O} -modules :

$$0 \longrightarrow \underline{L}_n \xrightarrow{\lambda_n} \underline{L}_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{L}_1 \xrightarrow{\lambda_1} \underline{L}_0$$

où $\underline{L}_i = L_i \otimes_{\mathbf{R}\{x\}} \mathcal{O}$; $\underline{M} = \text{coker } \lambda_1$, et :

(i) $\mathcal{C}(\underline{M})_0 = \mathcal{C}(M)$.

(ii) $\mathcal{C}(\underline{M})_1$ est de Nash, i.e. pour tout i , $\lambda_{i,1}$ est de Nash.

(iii) $\forall t \in [0, 1], \mathcal{C}(\underline{M})_t \xrightarrow{\nu} \mathcal{C}(M)$, i.e. pour tout i et tout t : $\Delta_{i,t} \xrightarrow{\nu} \lambda_i$.

D'après 1.2 (iii), il existe toujours une ν -déformation de $\mathcal{C}(M)$. En fait, on a le résultat plus précis suivant :

THEOREME 3.2. — Soit M un module de type fini sur $\mathbf{R}\{x\}$ et soit $\mathcal{C}(M)$ une résolution de longueur $\leq n$ de M . Pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, il existe une ν -déformation $\mathcal{C}(\underline{M})$ de $\mathcal{C}(M)$ en un complexe de Nash telle que $\mathcal{C}(\underline{M})$ soit exact et $\forall t \in [0, 1], \mathcal{C}(\underline{M})_t$ soit exact.

Ainsi, pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, on peut construire une déformation analytique \underline{M} de M en un module de Nash, qui soit *plate* et *tangente à l'ordre ν à l'identité*. Nous dirons alors que \underline{M} est une ν -déformation de M en un module de Nash.

Avant d'aborder la démonstration du théorème, signalons deux cas particuliers :

(3.2.1) Supposons que $M = \mathbf{R}\{x\}/(\varphi)$, où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathbf{R}\{x\}^k$ et $ht(\varphi) = k$ (cas d'une intersection complète). Le complexe de l'algèbre extérieure $\Lambda(\varphi)$ (cf. [7], Chap. IV), associé canoniquement à la suite φ , est une résolution de M . Soit φ_ν le polynôme de Taylor de degré ν de φ à l'origine, et posons $\underline{\varphi} = (1 - t)\varphi + t\varphi_\nu$. Visiblement, si ν est assez grand, les complexes de l'algèbre extérieure $\Lambda(\underline{\varphi})$ et $\Lambda(\underline{\varphi})_t$ sont tous exacts. Il suffit donc de prendre pour $\mathcal{C}(\underline{M})$, le complexe $\Lambda(\underline{\varphi})$.

(3.2.2) Si M est un module libre (ou zéro), toute résolution $\mathcal{C}(M)$ de M se scinde. Il en résulte facilement que toute ν -déformation $\mathcal{C}(\underline{M})$ de $\mathcal{C}(M)$ est un complexe exact ; de même, chacun des $\mathcal{C}(\underline{M})_t$ est exact. Les conditions du théorème 3.2 sont donc trivialement satisfaites.

(3.2.3) Enfin, si $\mathcal{C}'(M)$ et $\mathcal{C}(M)$ sont deux résolutions de M , il existe une troisième résolution $\mathcal{C}''(M)$ et des suites exactes de complexes :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}'(M) \rightarrow \mathcal{C}''(M) \rightarrow \mathcal{C}'(0) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}'(M) \rightarrow \mathcal{C}''(M) \rightarrow \mathcal{C}(0) \rightarrow 0$$

($\mathcal{C}'(0)$ et $\mathcal{C}(0)$) sont deux résolutions de zéro).

Preuve de 3.2. — Associons tout d'abord au couple $(M, \mathcal{C}(M))$ une famille finie de modules sur $\mathbf{R}\{x\}$ (famille notée M_i) ; des résolutions

$\mathfrak{C}(M_i)$ de longueur $\leq n$ de ces modules ; enfin, des suites exactes de complexes liant ces différentes résolutions (l'ensemble de ces suites exactes sera noté $\mathfrak{R}(M, \mathfrak{C}(M))$).

Soit $0 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_{s+1} = M$ une suite croissante de sous-modules de M telle que $P_i = N_{i+1}/N_i \simeq \mathbf{R}\{x\}/\mathfrak{p}_i$ où \mathfrak{p}_i est un idéal premier (cf. [3], chap. I). Pour tout $i = 0, \dots, s$, soit (φ^i) une intersection complète telle qu'on ait une suite exacte (cf. [3], chap. I) :

$$0 \rightarrow P_i \rightarrow \mathbf{R}\{x\}/(\varphi^i) = Q_i \rightarrow M_i \rightarrow 0.$$

Soient $\mathfrak{C}(M_i)$, $\mathfrak{C}(P_i)$ des résolutions de longueur $\leq n$ de M_i et P_i respectivement. Alors, on peut construire une résolution $\mathfrak{C}(Q_i)$ de Q_i et par récurrence sur $i = 2, \dots, s+1$, une résolution $\mathfrak{C}'(N_i)$ de N_i , telles qu'on ait des suites exactes de complexes :

$$0 \rightarrow \mathfrak{C}(P_i) \rightarrow \mathfrak{C}(Q_i) \rightarrow \mathfrak{C}(M_i) \rightarrow 0 \quad (3.2.4)$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{C}'(N_i) \rightarrow \mathfrak{C}'(N_{i+1}) \rightarrow \mathfrak{C}(P_i) \rightarrow 0 \quad (3.2.5)$$

D'après (3.2.3), il existe une résolution $\mathfrak{C}''(M)$ de M et des suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathfrak{C}'(M) \rightarrow \mathfrak{C}''(M) \rightarrow \mathfrak{C}'(0) \rightarrow 0 \quad (3.2.6)$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{C}(M) \rightarrow \mathfrak{C}''(M) \rightarrow \mathfrak{C}(0) \rightarrow 0 \quad (3.2.7)$$

De même, d'après (3.2.1) et (3.2.3), il existe une résolution $\mathfrak{C}'(Q_i)$ de Q_i et des suites exactes :

$$0 \rightarrow \Lambda(\varphi^i) \rightarrow \mathfrak{C}'(Q_i) \rightarrow \mathfrak{C}''(0) \rightarrow 0 \quad (3.2.8)$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{C}(Q_i) \rightarrow \mathfrak{C}'(Q_i) \rightarrow \mathfrak{C}'''(0) \rightarrow 0 \quad (3.2.9)$$

Notons $\mathfrak{R}(M, \mathfrak{C}(M))$ l'ensemble des suites exactes de complexes (3.2.4), \dots , (3.2.9).

Répétant avec le couple $(M_{i_1}, \mathfrak{C}(M_{i_1}))$ ce que l'on a fait avec $(M, \mathfrak{C}(M))$, on associe à M_{i_1} des modules $M_{i_1 i_2}$; des résolutions $\mathfrak{C}(M_{i_1 i_2})$ de ces modules ; et des familles de suites exactes de complexes $\mathfrak{R}(M_{i_1}, \mathfrak{C}(M_{i_1}))$. En itérant, on construit par récurrence sur l , des modules $M_{i_1} \dots i_l$; des résolutions $\mathfrak{C}(M_{i_1} \dots i_l)$, et des systèmes de suites exactes de complexes $\mathfrak{R}(M_{i_1} \dots i_{l-1}, \mathfrak{C}(M_{i_1} \dots i_{l-1}))$.

Soit $\nu \in \mathbb{N}$; d'après le théorème 1.2 appliqué au système $\mathcal{L}(\underline{M}, \mathcal{C}(\underline{M}))$, il existe des ν -déformations $\mathcal{C}(\underline{P}_i)$, $\mathcal{C}(\underline{Q}_i)$, etc. . . de $\mathcal{C}(\underline{P}_i)$, $\mathcal{C}(\underline{Q}_i)$, etc. . . et des suites exactes de complexes de $\underline{\mathcal{C}}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{P}_i) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{Q}_i) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{M}_i) \rightarrow 0 \quad (3.2.10)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{N}_i) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{N}_{i+1}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{P}_i) \rightarrow 0 \quad (3.2.11)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{M}) \rightarrow \mathcal{C}''(\underline{M}) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{0}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{M}) \rightarrow \mathcal{C}''(\underline{M}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{0}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Lambda(\underline{\varphi}^i) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{Q}_i) \rightarrow \mathcal{C}''(\underline{0}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{Q}_i) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{Q}_i) \rightarrow \mathcal{C}'''(\underline{0}) \rightarrow 0$$

Si ν est assez grand, d'après (3.2.1) et (3.2.3), les complexes $\Lambda(\underline{\varphi}^i)$ et $\mathcal{C}'(\underline{0})$, $\mathcal{C}(\underline{0})$, $\mathcal{C}''(\underline{0})$, $\mathcal{C}'''(\underline{0})$ sont exacts, ainsi que $\Lambda(\underline{\varphi}^i)_t$, $\mathcal{C}'(\underline{0})_t$, etc. . . ; il en résulte (considérer les quatre dernières suites exactes) que pour tout $j \geq 1$, $H_j(\mathcal{C}'(\underline{Q}_i)) = H_j(\mathcal{C}(\underline{Q}_i)) = 0$; $H_j(\mathcal{C}'(\underline{M})) = H_j(\mathcal{C}''(\underline{M})) = H_j(\mathcal{C}(\underline{M}))$, et des égalités analogues en mettant partout t en indices.

Soit $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Supposons que tout $i = 0, \dots, s$, et tout $j \geq q$: $H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_i)) = 0$ et $H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_i)_t) = 0$, $t \in [0, 1]$. En considérant les deux suites exactes (3.2.10) et (3.2.11), modulo les égalités précédentes : $H_j(\mathcal{C}(\underline{P}_i)) = 0$ et $H_j(\mathcal{C}(\underline{P}_i)_t) = 0$, et donc : $H_j(\mathcal{C}'(\underline{N}_i)) = 0$, $H_j(\mathcal{C}'(\underline{N}_i)_t) = 0$, si $j \geq q - 1$. En particulier, $H_j(\mathcal{C}(\underline{M})) = 0$ et $H_j(\mathcal{C}(\underline{M})_t) = 0$, pour $j \geq q - 1$.

En fait, on peut appliquer le théorème 1.2. aux systèmes $\mathcal{L}(\underline{M}, \mathcal{C}(\underline{M}))$, $\mathcal{L}(\underline{M}_{i_1}, \mathcal{C}(\underline{M}_{i_1}))$, $\mathcal{L}(\underline{M}_{i_1 i_2}, \mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2}))$, . . . , $\mathcal{L}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_n}, \mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_n}))$. Puisque $H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_n})) = 0$ et $H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_n})_t) = 0$ si $j \geq n + 1$ (les complexes considérés sont de longueur $\leq n$), on aura d'après la remarque précédente et pourvu que ν soit assez grand :

$$H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}})) = 0 \text{ et } H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}})_t) = 0, \text{ si } j \geq n ;$$

$$H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}})) = 0 \text{ et } H_j(\mathcal{C}(\underline{M}_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}})_t) = 0,$$

$$\text{si } j \geq n - 1 ; \text{ etc. . .}$$

enfin : $H_j(\mathcal{C}(\underline{M})) = 0$ et $H_j(\mathcal{C}(\underline{M})_t) = 0$, si $j \geq 1$, c.q.f.d./

Remarque 3.3. — On peut compléter le théorème 3.2 de multiples façons, en astreignant la déformation à vérifier certaines conditions. Par exemple, soient N_1, \dots, N_s un nombre fini de modules de type fini sur $\mathcal{R}(x)$ tels que, pour $i = 1, \dots, s$, le module $M \otimes_{\mathcal{R}(x)} N_i$ soit de dimension de Krull nulle, i.e. un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie. Alors, on peut choisir la déformation \underline{M} de M de telle sorte que, $\forall t \in [0, 1]; \forall j = 0, 1, \dots, n; \forall i = 1, \dots, s$:

$$\mathrm{TOR}_j^{\mathcal{R}(x)}(\underline{M}_t, N_i) \simeq \mathrm{TOR}_j^{\mathcal{R}(x)}(M, N_i)$$

En particulier,

$$\chi(\underline{M}_t, N_i) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim_{\mathbf{R}} \mathrm{TOR}_j^{\mathcal{R}(x)}(\underline{M}_t, N_i) = \chi(M, N_i),$$

i.e. la multiplicité d'intersection de \underline{M}_t avec chacun des N_i reste constante au cours de la déformation.

Nous allons préciser le théorème 3.2 lorsque M est une algèbre analytique $A = \mathbf{R}\{x\}/I$.

THEOREME 3.4. — Soit $A = \mathbf{R}\{x\}/I$ une algèbre analytique réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$. Alors, pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, il existe une ν -déformation \underline{A} de A en une algèbre de Nash telle que pour tout $t \in [0, 1]$, \underline{A}_t soit réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$.

Preuve. — Supposons tout d'abord que I est un idéal premier de hauteur k . Soit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathbf{R}\{x\}^k$ tel que l'idéal (φ) soit de hauteur k et tel que I soit un idéal premier associé à $B = \mathbf{R}\{x\}/(\varphi)$. On a une suite exacte de $\mathbf{R}\{x\}$ -modules :

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow 0$$

Il existe des complexes $\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(B), \mathcal{C}(M)$, résolutions de longueur $\leq n$ de A, B, M respectivement, et une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathcal{C}(B) \rightarrow \mathcal{C}(M) \rightarrow 0$$

On peut supposer, si I est engendré par q éléments, que $\mathcal{C}(A)$ est un complexe de la forme :

$$\dots \rightarrow \mathbf{R}\{x\}^p \xrightarrow{\lambda_2} \mathbf{R}\{x\}^q \xrightarrow{\lambda_1} \mathbf{R}\{x\}.$$

Enfin, d'après (3.1.3), il existe une résolution $\mathcal{C}'(\underline{B})$ de \underline{B} et des suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{B}) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{B}) \rightarrow \mathcal{C}(0) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Lambda(\underline{\varphi}) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{B}) \rightarrow \mathcal{C}'(0) \rightarrow 0$$

où $\mathcal{C}(0)$ et $\mathcal{C}'(0)$ sont des résolutions de zéro. D'après le théorème 1.2, il existe $\underline{\varphi} = (\underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}_k) \in \underline{\mathcal{O}}^k$ et des complexes de $\underline{\mathcal{O}}$ -modules $\mathcal{C}(\underline{A})$, $\mathcal{C}(\underline{B})$, $\mathcal{C}(\underline{M})$ etc... tels que $\Lambda(\underline{\varphi})$, $\mathcal{C}(\underline{A})$, $\mathcal{C}(\underline{M})$ etc... soient des ν -déformations de $\Lambda(\varphi)$, $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(B)$, $\mathcal{C}(M)$ etc... respectivement, et des suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{B}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{M}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{B}) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{B}) \rightarrow \mathcal{C}(0) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \Lambda(\underline{\varphi}) \rightarrow \mathcal{C}'(\underline{B}) \rightarrow \mathcal{C}'(0) \rightarrow 0$$

D'après le théorème 3.2, on peut supposer que tous ces complexes sont exacts ainsi que les complexes obtenus en mettant t en indice. On en déduit une injection :

$$0 \rightarrow \underline{A} = \underline{\mathcal{O}}/\underline{I} \rightarrow \underline{B} = \underline{\mathcal{O}}/(\underline{\varphi})$$

ainsi qu'une injection, pour $t \in [0, 1]$:

$$0 \rightarrow \underline{A}_t = \mathbf{R}\{x\}/\underline{I}_t \rightarrow \underline{B}_t = \mathbf{R}\{x\}/(\underline{\varphi}_t)$$

Ainsi, tout idéal premier associé à \underline{A}_t est associé à \underline{B}_t , donc de hauteur $\leq k$, car $(\underline{\varphi}_t)$ est une intersection complète si ν est assez grand. En outre, $\mathcal{C}(\underline{A}_t)$ est de la forme :

$$\dots \rightarrow \mathbf{R}\{x\}^p \xrightarrow{\lambda_{2,t}} \mathbf{R}\{x\}^q \xrightarrow{\lambda_{1,t}} \mathbf{R}\{x\}.$$

Soit $\sigma'_k(\underline{I}_t)$ (resp. $\sigma'_k(\underline{I})$) l'idéal engendré par les mineurs d'ordre $q - k$ de la matrice $\lambda_{2,t}$ (resp. λ_2). Si ν est assez grand,

$$ht \sigma'_k(\underline{I}_t) \geq ht \sigma'_k(\underline{I}) ;$$

de même, on aura : $ht J_k(\underline{I}_t) \geq ht J_k(\underline{I})$.

D'après [3] (proposition 3.6, chapitre II), on a :

$$ht \mathcal{R}_k(\underline{I}) = ht \sigma'_k(\underline{I}) \cap J_k(\underline{I}) > k ;$$

d'où $ht \mathcal{R}_k(\underline{I}_t) = ht \sigma'_k(\underline{I}_t) \cap J_k(\underline{I}_t) > k$; puisque tous les idéaux premiers associés à $\underline{A}_t = \mathbf{R}\{x\}/\underline{I}_t$ sont de hauteur k , il existe donc $\delta \in \mathcal{R}_k(\underline{I}_t)$ non diviseur de zéro dans \underline{A}_t . D'après la proposition 3.6, chapitre II de [3], \underline{A}_t est réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$, c.q.f.d.

Considérons le cas général et posons : $I = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s$ où les \mathfrak{p}_i sont premiers de hauteur k . Démontrons le théorème par récurrence sur s . Si $s = 1$, cela résulte de ce qui précède. Supposons le théorème démontré jusqu'à l'ordre $s - 1$, et démontrons le pour I. Posons $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s$; $A' = \mathbf{R}\{x\}/\mathfrak{p}_1$; $A'' = \mathbf{R}\{x\}/\mathfrak{q}$. On a un diagramme commutatif où les lignes et colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{q} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{q} & \longrightarrow & \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{q} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{R}\{x\} & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{R}\{x\} \oplus \mathbf{R}\{x\} & \xrightarrow{p} & \mathbf{R}\{x\} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' \oplus A'' & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Les flèches verticales sont évidentes ; δ est l'application diagonale : $\xi \rightarrow (\xi, \xi)$; p la projection : $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \xi_1 - \xi_2$. Il existe donc des résolutions de longueur $\leq n$: $\mathcal{C}(A), \mathcal{C}(A' \oplus A''), \mathcal{C}(B)$ de $A, A' \oplus A'', B$ respectivement telles qu'on ait une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{C}(A' \oplus A'') \xrightarrow{P} \mathcal{C}(B) \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{C}^0(A) = \mathbf{R}\{x\}$; $\mathcal{C}^0(A' \oplus A'') = \mathbf{R}\{x\} \oplus \mathbf{R}\{x\}$; $\mathcal{C}^0(B) = \mathbf{R}\{x\}$ et $\Delta^0 = \delta$; $P^0 = p$ ($\mathcal{C}^i(A)$ désigne le $i^{\text{ème}}$ module du complexe $\mathcal{C}(A)$, etc...).

D'après le théorème 3.2, il existe des complexes exacts $\mathcal{C}(\underline{A})$, $\mathcal{C}(\underline{D})$, $\mathcal{C}(\underline{B})$, ν -déformations de $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{C}(A' \oplus A'')$ et $\mathcal{C}(B)$ respectivement, et des suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{A}) \xrightarrow{\underline{A}} \mathcal{C}(\underline{D}) \xrightarrow{\underline{P}} \mathcal{C}(\underline{B}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{A})_t \xrightarrow{\underline{A}_t} \mathcal{C}(\underline{D})_t \xrightarrow{\underline{P}_t} \mathcal{C}(\underline{B})_t \rightarrow 0, \quad t \in [0, 1],$$

tels que : $\mathcal{C}^\circ(\underline{A}) = \underline{\mathcal{O}}$; $\mathcal{C}^\circ(\underline{D}) = \underline{\mathcal{O}} \oplus \underline{\mathcal{O}}$; $\mathcal{C}^\circ(\underline{B}) = \underline{\mathcal{O}}$ et $\underline{\Delta}^\circ = \delta$;
 $\underline{P}^\circ = p(\delta(\xi)) = (\xi, \xi)$; $p(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 - \xi_2$.

On en déduit, pour tout $t \in [0, 1]$, une suite exacte :

$$0 \rightarrow \underline{A}_t \rightarrow \underline{D}_t \rightarrow \underline{B}_t \rightarrow 0$$

où l'injection de $\underline{A}_t = \mathbf{R}\{x\}/\underline{I}_t \rightarrow \underline{D}_t = (\mathbf{R}\{x\} \oplus \mathbf{R}\{x\})/\underline{J}_t$ est induite par l'application diagonale.

Soient $\mathcal{C}(A')$ (resp. $\mathcal{C}(A'')$) une résolution de A' (resp. A'') obtenue à partir d'une résolution de \mathfrak{p}_1 (resp. \mathfrak{q}). Puisque

$$\mathcal{C}(A') \oplus \mathcal{C}(A'')$$

est une résolution de $A' \oplus A''$, il existe d'après (3.2.3) une résolution $\mathcal{C}'(A' \oplus A'')$ de $A' \oplus A''$ telle qu'on ait des suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(A') \oplus \mathcal{C}(A'') \rightarrow \mathcal{C}'(A' \oplus A'') \rightarrow \mathcal{C}(0) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(A' \oplus A'') \rightarrow \mathcal{C}'(A' \oplus A'') \rightarrow \mathcal{C}'(0) \rightarrow 0$$

les flèches :

$$\mathcal{C}^\circ(A') \oplus \mathcal{C}^\circ(A'') \rightarrow \mathcal{C}'^\circ(A' \oplus A'')$$

et
$$\mathcal{C}^\circ(A' \oplus A'') \rightarrow \mathcal{C}'^\circ(A' \oplus A'')$$

étant l'application identique, les modules étant identifiés à $\mathbf{R}\{x\} \oplus \mathbf{R}\{x\}$.

D'après le théorème 3.2, il existe des complexes exacts $\mathcal{C}(\underline{D}')$, $\mathcal{C}(\underline{A}')$, $\mathcal{C}(\underline{A}'')$, ν -déformations de $A' \oplus A''$, A' , A'' respectivement, tels que $\forall t \in [0, 1]$, $\mathcal{C}(\underline{D}')_t$, $\mathcal{C}(\underline{A}')_t$, $\mathcal{C}(\underline{A}'')_t$ soient exacts, et des suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{A}') \oplus \mathcal{C}(\underline{A}'') \rightarrow \mathcal{C}(\underline{D}') \rightarrow \mathcal{C}(0) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{C}(\underline{D}) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{D}') \rightarrow \mathcal{C}'(0) \rightarrow 0$$

D'après les deux suites exactes précédentes :

$$\underline{D}'_t \sim \underline{A}'_t \oplus \underline{A}''_t \sim \underline{D}_t.$$

En outre, d'après la première partie de cette démonstration et l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que \underline{A}'_t et \underline{A}''_t sont réduites et équidimensionnelles de dimension $n - k$. Modulo l'isomorphisme : $\underline{D}_t \sim \underline{A}'_t \oplus \underline{A}''_t$, on a donc une injection : $0 \rightarrow \underline{A}_t \rightarrow \underline{A}'_t \oplus \underline{A}''_t$ déduite de l'application diagonale $\mathbf{R}\{x\} \rightarrow \mathbf{R}\{x\} \oplus \mathbf{R}\{x\}$, ce qui implique que \underline{A}_t est réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$, c.q.f.d./

THEOREME 3.5. — Soit $A = \mathbf{R}\{x\}/I$ une algèbre analytique normale (resp. intègre) de dimension $n - k$. Alors, pour tout $\nu \in \mathbf{N}$, il existe une ν -déformation \underline{A} de A en une algèbre de Nash telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, \underline{A}_t soit normale (resp. intègre) de dimension $n - k$.

Preuve. — D'après le théorème 3.7 de [3], l'anneau $A = \mathbf{R}\{x\}/I$ est normal de dimension $n - k$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées : A est réduit et équidimensionnel de dimension $n - k$; $ht(\mathcal{R}_k(I)) \geq k + 2$; pour

$$i = k + 2, \dots, n : ht(H_{i-2}(A)) \geq i + 1.$$

Soit \underline{A} la ν -déformation de A construite dans la preuve du théorème 3.4 ; d'après ce théorème, pour tout $t \in [0, 1]$, \underline{A}_t est réduite et équidimensionnelle de dimension $n - k$; en outre, si ν est assez grand, on voit facilement (la hauteur d'un idéal est une fonction semi-continue inférieurement, cf. [3], proposition 5.3) que :

$$ht(\mathcal{R}_k(\underline{I}_t)) \geq ht(\mathcal{R}_k(I)) ; ht(H_{i-2}(\underline{A}_t)) \geq ht(H_{i-2}(A)),$$

d'où le résultat si A est normale.

Le principe de la démonstration dans le cas intègre est le suivant. On traite d'abord le cas où la clôture intégrale de A dans son corps des fractions est une algèbre analytique (évidemment normale) B . On construit alors une ν -déformation $\underline{i} : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ de l'injection $i : A \rightarrow B$ de telle sorte que, $\forall t \in [0, 1]$, $\underline{i}_t : \underline{A}_t \rightarrow \underline{B}_t$ soit injective. D'après ce qui précède, on peut supposer que \underline{B}_t est normale ; il en résulte alors que \underline{A}_t est intègre. Le cas général se ramène à cette situation en raisonnant sur la complexifiée de A .

On peut étendre dans plusieurs directions les résultats précédents. D'abord, avec les notations du début de ce paragraphe 3, supposons que les éléments $\lambda_i^{\alpha\beta}$ des matrices λ_i vérifient certaines relations algébriques (ou de Nash) en nombre fini $F_j(\lambda_i^{\alpha\beta}) = 0$; alors, dans l'énoncé du théorème 3.2, on peut supposer que les éléments $\underline{\lambda}_i^{\alpha\beta}$ des matrices $\underline{\lambda}_i$ du complexe $\mathcal{C}(\underline{M})$ vérifient les mêmes relations, i.e. $F_j(\underline{\lambda}_i^{\alpha\beta}) = 0$.

Par exemple, supposons que

$$M = R\{x\}^q / N \text{ et } N_1 \otimes_{\mathcal{R}(x)} R\{x\} \subset N \subset N_2 \otimes_{\mathcal{R}(x)} R\{x\}$$

où N_1 et N_2 sont deux sous-modules de $\mathcal{R}(x)^q$, le premier engendré sur $\mathcal{R}(x)$ par $\varphi_1, \dots, \varphi_r$; le second par $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \dots, \varphi_s$; supposons enfin que N est engendré sur $R\{x\}$ par

$$\varphi_1, \dots, \varphi_r, \sum_{j=1}^s \eta_{r+1,j} \varphi_j, \dots, \sum_{j=1}^s \eta_{p,j} \varphi_j$$

où les $\eta_{i,j}$ appartiennent à $R\{x\}$. Les inclusions

$$N_1 \otimes_{\mathcal{R}(x)} R\{x\} \subset N \subset N_2 \otimes_{\mathcal{R}(x)} R\{x\}$$

se traduisent de la manière suivante : M est le conoyau de la matrice $R\{x\}^p \xrightarrow{\lambda_1} R\{x\}^q$ où les colonnes de λ_1 sont :

$$\varphi_1, \dots, \varphi_r, \sum_{j=1}^s \eta_{r+1,j} \varphi_j, \dots, \sum_{j=1}^s \eta_{p,j} \varphi_j.$$

Soit $\mathcal{C}(M) : \dots \rightarrow R\{x\}^p \xrightarrow{\lambda_1} R\{x\}^q$, une résolution de longueur $\leq n$ de M . On peut supposer que le complexe $\mathcal{C}(\underline{M})$ donné par le théorème 3.2 vérifie la condition : les colonnes de $\underline{\lambda}_1$ sont

$$\varphi_1, \dots, \varphi_r, \sum_{j=1}^s \underline{\eta}_{r+1,j} \varphi_j, \dots, \sum_{j=1}^s \underline{\eta}_{p,j} \varphi_j, \quad \text{où } \underline{\eta}_{i,j} \in \underline{\mathcal{O}}.$$

Ainsi, $\underline{M} = \underline{\mathcal{O}}^q / \underline{N}$ avec : $N_1 \otimes_{\mathcal{R}(x)} \underline{\mathcal{O}} \subset \underline{N} \subset N_2 \otimes_{\mathcal{R}(x)} \underline{\mathcal{O}}$

En particulier, on peut compléter comme suit les théorèmes 3.4 et 3.5 :

THEOREME 3.6. — *Supposons, avec les hypothèses de 3.4, 3.5, qu'il existe des algèbres de Nash $A_1 = \mathcal{R}(x)/I_1$ et $A_2 = \mathcal{R}(x)/I_2$ telles que A soit un quotient de $A_1 \otimes_{\mathcal{R}(x)} R\{x\}$ et $A_2 \otimes_{\mathcal{R}(x)} R\{x\}$ un quotient de A . Alors, on peut supposer que la v -déformation \underline{A} est un quotient de $A_1 \otimes_{\mathcal{R}(x)} \underline{\mathcal{O}}$, et $A_2 \otimes_{\mathcal{R}(x)} \underline{\mathcal{O}}$ un quotient de \underline{A} .*

Pour terminer, signalons les versions formelles des théorèmes précédents. Voici d'abord quelques définitions.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $\mathcal{E}(\Omega)$ l'anneau des fonctions numériques de classe C^∞ sur Ω . Si $x \in \Omega$, soit \underline{m}_x^∞ l'idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$ formé des fonctions plates en x . L'anneau $\mathcal{F}_x = \mathcal{E}(\Omega)/\underline{m}_x^\infty$ est isomorphe à $\mathbb{R}[[x]]$. Un complexe \mathcal{C} de $\mathcal{E}(\Omega)$ -modules :

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow L_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0$$

où les L_i sont libres de type fini sur $\mathcal{E}(\Omega)$, est *formellement exact* si, $\forall x \in \Omega$, le complexe $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{E}(\Omega)} \mathcal{F}_x$ est exact. Un complexe exact est formellement exact sauf peut-être en dimension 1 ; un complexe formellement exact n'est pas nécessairement exact.

Soient K un fermé de Ω ; $\mathcal{E}_K(\Omega)$ l'anneau des germes en K des éléments de $\mathcal{E}(\Omega)$. Un complexe de $\mathcal{E}_K(\Omega)$ -modules libres de type fini est *formellement exact* s'il est induit par un complexe formellement exact de $\mathcal{E}(U)$ -modules, pour un certain voisinage ouvert U de K .

Soit $\underline{\mathcal{E}}$ l'anneau des germes de fonctions numériques C^∞ au voisinage de 0 $x \in [0, 1]$ dans \mathbb{R}^n $x \in [0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, on a un homomorphisme $\Pi_t : \underline{\mathcal{E}} \ni \varphi \rightarrow \varphi_t(x) \in \mathcal{E}(x)$; si \underline{M} est un module de type fini sur $\underline{\mathcal{E}}$, on pose : $\underline{M}_t = \underline{M} \otimes_{\Pi_t} \mathcal{E}(x)$; de même, si $\mathcal{C}(\underline{M})$ est un complexe de $\underline{\mathcal{E}}$ -modules, on note : $\mathcal{C}(\underline{M})_t$ le complexe :

$$\mathcal{C}(\underline{M}) \otimes_{\Pi_t} \mathcal{E}(x).$$

Soit \overline{M} un module de type fini sur $\mathbb{R}[[x]]$ et soit $\mathcal{C}(\overline{M})$ un complexe exact de $\mathbb{R}[[x]]$ modules libres de type fini :

$$0 \rightarrow \overline{L}_n \xrightarrow{\overline{\lambda}_n} \overline{L}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{L}_1 \xrightarrow{\overline{\lambda}_1} \overline{L}_0$$

avec $\text{coker } \overline{\lambda}_1 = \overline{M}$.

DEFINITION 3.7. — Soit $\nu \in \mathbb{N}$; une ν -déformation de $\mathcal{C}(\overline{M})$ en un complexe de Nash (resp. en un complexe analytique) est la donnée d'un complexe $\mathcal{C}(\underline{M})$ de $\underline{\mathcal{E}}$ -modules :

$$0 \rightarrow \underline{L}_n \xrightarrow{\underline{\lambda}_n} \underline{L}_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{L}_1 \xrightarrow{\underline{\lambda}_1} \underline{L}_0$$

où les \underline{L}_i sont libres de type fini, $\text{rang } \overline{L}_i = \text{rang } \underline{L}_i$; $\overline{M} = \text{coker } \underline{\lambda}_1$; et :

- (i) $\widehat{\mathfrak{C}(\underline{M})}_0 = \mathfrak{C}(\overline{M})$
- (ii) $\mathfrak{C}(\underline{M})_1$ est de Nash (resp. analytique) i.e. pour tout $i : \underline{\lambda}_{i,1}$ est de Nash (resp. analytique).
- (iii) $\forall t \in [0, 1], \widehat{\mathfrak{C}(\underline{M})}_t \stackrel{v}{\simeq} \mathfrak{C}(\overline{M}),$ i.e. pour tout i et tout $t : \hat{\lambda}_{i,t} \stackrel{v}{\simeq} \bar{\lambda}_i.$

Le résultat analogue aux théorèmes précédents est le suivant (la preuve est identique) :

THEOREME 3.8. – Soit \overline{M} un module de type fini sur $\mathbf{R}[[x]]$ et soit $\mathfrak{C}(\overline{M})$ une résolution libre de longueur $\leq n$ de \overline{M} .

i) Pour tout $v \in \mathbf{N}$, il existe une v -déformation $\mathfrak{C}(\underline{M})$ de $\mathfrak{C}(\overline{M})$ en un complexe de Nash telle que $\mathfrak{C}(\underline{M})$ et $\mathfrak{C}(\underline{M})_t$ soient formellement exacts, pour tout $t \in [0, 1]$ ⁽⁵⁾

ii) En outre, si \overline{M} est une algèbre formelle $\overline{A} = \mathbf{R}[[x]]/\overline{I}$ de dimension $n - k$, réduite et équidimensionnelle (resp. normale, resp. intègre), on peut choisir la v -déformation $\mathfrak{C}(\underline{A})$ de telle sorte que, $\forall t \in [0, 1], \hat{A}_t$ soit de dimension $n - k$, réduite et équidimensionnelle (resp. normale, resp. intègre).

iii) Enfin, supposons qu'il existe des algèbres de Nash $A_1 = \mathfrak{U}(x)/I_1$ et $A_2 = \mathfrak{U}(x)/I_2$ telles que \overline{A} soit un quotient de \hat{A}_1 et \hat{A}_2 un quotient de \hat{A} . Alors, on peut supposer que \underline{A} est un quotient de $A_1 \otimes_{\mathfrak{U}(x)} \underline{\mathfrak{C}}$ et $A_2 \otimes_{\mathfrak{U}(x)} \underline{\mathfrak{C}}$ un quotient de \underline{A} .

(Il existe une version de 3.8 iii) lorsque A_1 et A_2 sont des algèbres analytiques ; nous laissons au lecteur le soin de l'expliciter).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN , On the solutions of analytic equations, *Invent. Math.*, 5 (1968),277-291.
- [2] J.C. TOUGERON , Idéaux de fonctions différentiables, *Ann. Inst. Fourier*, 18 (1968),177-240.

(5) En fait, on peut supposer que $\mathfrak{C}(\underline{M})$ et $\mathfrak{C}(\underline{M})_t, t \in [0, 1]$, sont exacts. Ce résultat, loin d'être immédiat, sera démontré dans un article ultérieur.

- [3] J.C. TOUGERON , Idéaux de fonctions différentiables, *Ergebnisse Der Mathematik*, Band 71 (1972).
- [4] H. WHITNEY , Local properties of analytic varieties, Notes de Princeton.
- [5] H. HIRONAKA , Analytic equivalence of singularities, Notes de l'Université de Göttingen (1965).
- [6] J.C. TOUGERON , \mathcal{G} -stabilité des germes d'applications différentiables, Séminaire d'Analyse de Rennes (1971).
- [7] J.P. SERRE , Algèbre locale, multiplicité, *Lecture notes in Mathematics*, 11 (1965).
- [8] M. ARTIN , Algebraic approximations of structures over complete local rings, Pub. IHES N° 36 (1969).

Manuscrit reçu le 22.4.74

Révisé le 28.4.75

Proposé par B. Malgrange.

Jean-Claude TOUGERON,
Dpt. de Mathématiques
Fac. Sc. Rennes Beaulieu
B.P 25 A
35 031 – Rennes .