ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-JACQUES RISLER

Le théorème des zéros pour les idéaux de fonctions différentiables en dimension 2 et 3

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 3 (1976), p. 73-107

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_3_73_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 3 (1976), 73-107

LE THÉORÈME DES ZÉROS POUR LES IDÉAUX DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES EN DIMENSION 2 et 3

par Jean-Jacques RISLER

Introduction.

Ce travail constitue le chapitre deux de ma thèse.

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, I un idéal de l'anneau $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ des fonctions de classe C^∞ sur U ; on dit que I a la propriété des zéros si toute fonction $f \in \mathcal{E}(\mathrm{U})$ nulle sur l'ensemble V(I) des zéros de I appartient à I.

La notion d'idéal réel (cf. § 1) permet de caractériser les idéaux ayant la propriété des zéros dans le cas algébrique réel, et dans le cas des germes analytiques réels ([10]).

Le but de ce travail est d'essayer de montrer des résultats analogues pour les idéaux de fonctions différentiables ; il y a là de sérieuses difficultés, mais des résultats positifs pour les idéaux engendrés par un nombre fini de fonctions analytiques (§ 2), en dimension 2 (pour un idéal de type fini), et en dimension 3 pour un idéal principal (§ 6).

Le résultat central est le théorème 4.1 qui peut être considéré comme une généralisation au cas différentiable de la théorie de l'équisingularité en codimension 1 de Zariski, l'équisingularité étant définie à l'aide d'éclatements.

1. Préliminaires.

DEFINITION 1.1. — *Soient* A *un anneau commutatif,* I *un idéal de* A. *On dit que* I *est réel s'il satisfait à la condition suivante :*

$$f_i \in \mathrm{A}\,(1 \leqslant i \leqslant p) \quad \text{et} \quad f_1^2 + \cdots + f_p^2 \in \mathrm{I} \Rightarrow f_i \in \mathrm{I}\,(1 \leqslant i \leqslant p).$$

DEFINITION 1.2. – *Soient* A *un anneau commutatif,* I *un idéal de* A. *On appelle racine réelle de* I, *et l'on note* $\sqrt[R]{\mathrm{I}}$ *l'ensemble des éléments* f *de* A *vérifiant la condition suivante : il existe un entier* $n > 0$ *et des éléments* $g_1, \ldots, g_k$ *de* A *tels que :*

$$f^{2n} + g_1^2 + \cdots + g_k^2 \in \mathrm{I}.$$

Il est facile de voir que $\sqrt[R]{\mathrm{I}}$ est le plus petit idéal réel contenant I (cf. [10]). La notion d'idéal réel permet de caractériser les idéaux ayant la propriété des zéros dans le cas réel. On a en particulier le théorème suivant ([10]) :

THEOREME 1.3. – *Soit* I *un idéal de l'anneau* $\mathbf{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ *(anneau des séries convergentes en n variables et à coefficients réels) ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) I *à la propriété des zéros (i.e. toute série nulle sur le germe* V(I) *des zéros de* I *appartient à* I*)*

b) *l'idéal* I *est réel* (i.e. $\mathrm{I} = \sqrt[R]{\mathrm{I}}$).

Ce théorème a été étendu au cas formel par J. Merrien ([11]).

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, notons $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ l'anneau des fonctions indéfiniment différentiables sur U, et $\mathcal{F}_n(0) = \mathcal{F}_n$ l'anneau $\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ des séries formelles à n variables. On a une application surjective T : $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{F}_n$ qui fait correspondre à une fonction sa série de Taylor à l'origine.

Soit $f \in \mathcal{F}_n$, et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\mathrm{T}(\varphi) = f$. Si X est un germe de fermés de $\mathbf{R}^n$ à l'origine, on dit que f est nulle sur X si pour tout $\alpha > 0$, il existe un voisinage Ω_α de 0 tel que $\forall\, x \in \Omega_\alpha \cap \mathrm{X}$, $|\varphi(x)| \leqslant \|x\|^\alpha$. (cf. [12]).

Si I est un idéal de $\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$, on notera $\mathrm{V}_f(\mathrm{I})$ la "variété formelle de I" ; $\mathrm{V}_f(\mathrm{I})$ est l'ensemble des germes de fermés en 0 de $\mathbf{R}^n$ sur lesquels tous les éléments de I s'annulent. Le théorème de J. Merrien s'énonce alors :

THEOREME 1.4. – *Soit* I *un idéal de l'anneau* $\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *toute série nulle sur la variété formelle* $\mathrm{V}_f(\mathrm{I})$ *appartient à* I.

b) I *est réel.*

Remarque 1.5. – Il résulte immédiatement du théorème 1.3 (resp. du théorème 1.4) que si I est idéal de $\mathbf{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ (resp. de $\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$), l'idéal des séries nulles sur V(I) (resp. sur $V_f(I)$) est égal à $\sqrt[R]{I}$.

Nous noterons $\mathcal{E}(U)$ l'anneau des fonctions différentiables sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{E}_C(U)$ l'anneau des fonction différentiables à valeur complexe.

Un idéal I de type fini de $\mathcal{E}(U)$ est dit de Łojasiewicz s'il existe $f \in I$ satisfaisant à l'inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble des zéros V(I), i.e. si pour tout compact $K \subset U$, il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha \geqslant 0$ telles que

$$\forall\, x \in K, \quad |f(x)| \geqslant C d(x, V(I))^{\alpha}$$

(cf. [6], p. 102).

Un idéal I de type fini est dit fermé s'il est fermé pour la topologie naturelle ("topologie de Whitney") sur $\mathcal{E}(U)$ (cf. [2], p. 29). Si $x \in U$, on note $\mathcal{F}_n(x)$ l'anneau des séries formelles au point x et $T_x(I)$ l'idéal de $\mathcal{F}_n(x)$ engendré par les séries de Taylor au point x des éléments de I.

Voici les principales propriétés des idéaux fermés que nous utiliserons :

PROPOSITION 1.6. – *Soit* I *un idéal fermé et de type fini non nul de* $\mathcal{E}(U)$. *Alors*

a) *si* $x \in U$, $T_x I$ *est un idéal non nul de* $\mathcal{F}_n(x)$, *si* U *est connexe* ([9], p. 30),

b) I *est un idéal de Łojasiewicz* ([6], p. 103),

c) *si* V(I) *désigne l'ensemble des zéros de* I, *l'ensemble des points lisses de* V(I) *est dense dans* V(I) ([5]),

d) *pour qu'un élément* $f \in \mathcal{E}(U)$ *appartienne à* I, *il faut et il suffit que* $T_x f \in T_x I \ \ \forall x \in U$ ([2]).

(Cette dernière propriété caractérise les idéaux fermés).

Exemples.

1) si I est engendré par un nombre fini de fonctions analytiques sur U, I est fermé ([2], p. 82) ;

2) soit $\varphi(x)$ une fonction différentiable d'une variable qui soit $\geqslant 0$ et nulle sur un ensemble de Cantor. Alors la fonction $y^2 - \varphi(x)$ engendre dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ un idéal fermé (cf. [6], p. 104) bien qu'elle soit loin de ressembler à une fonction analytique.

Le problème abordé dans ce chapitre est le suivant : caractériser les idéaux de type fini ayant la propriété des zéros.

Ce problème a été étudié par J. Bochnak dans [1], où il fait la conjecture suivante :

Soit I un idéal de type fini de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(Z) toute fonction différentiable nulle sur V(I) appartient à I

(C) I est fermé et I est réel.

Remarques.

1) Il y a peu d'espoir d'obtenir un théorème raisonnable pour les idéaux non de type fini (cf. [1], pour un exemple).

2) L'implication Z) $\Rightarrow$ C) est immédiate, car si un idéal I vérifie Z, il est évidemment réel et il est fermé car la limite d'une suite de fonctions de I est nulle sur V(I) donc appartient à I par (Z).

Nous démontrons cette conjecture complètement dans le cas où $\mathrm{U} \subset \mathbf{R}^2$ et dans le cas où I est un idéal principal dans $\mathbf{R}^3$, et donnons des théorèmes qui permettront probablement de l'aborder dans le cas général.

2. Idéaux réels de type fini de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ (U ouvert de $\mathbf{R}^n$).

LEMME 2.1. — *Soit* I *un idéal de* $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ *qui soit de type fini, fermé et réel ; si* V *est un ouvert non vide de* $\mathbf{R}^n$ *tel que* $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, I $\mathcal{E}(\mathrm{V})$ (*restriction de* I *à* V) *vérifie encore ces trois propriétés.*

On sait que I $\mathcal{E}$(V) est encore de type fini et fermé ([6], p. 98). Montrons qu'il est réel : soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des éléments de $\mathcal{E}(\mathrm{V})$ tels que $\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_p^2 \in \mathrm{I}\,\mathcal{E}(\mathrm{V})$; soient x un point de V, ψ une fonction de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ égale à 1 au voisinage de x et à 0 à l'extérieur de V : les fonctions $\psi\varphi_i$ peuvent être considérées comme des éléments de $\mathcal{E}(\mathrm{U})$ et l'on a $\Psi^2(\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_p^2) \in \mathrm{I}$, d'où $\psi\varphi_i \in \mathrm{I}$ puisque I est réel.

Comme ψ est égale à 1 au voisinage de x, cela implique

$$T_x \varphi_i \in T_x\ (I\,\mathcal{E}(V)) \quad \text{d'où} \quad \varphi_i \in I\,\mathcal{E}(V)$$

puisque $I\,\mathcal{E}(V)$ est fermé (1.6.).

Si f est un élément de $\mathcal{E}(U)$, le symbole Tf désignera la série de Taylor de f à l'origine de $\mathbf{R}^n$.

PROPOSITION 2.2. – *Soit* I *un idéal de* $\mathcal{E}(U)$ *qui soit de Łojasiewicz au voisinage de* $0 \in V(I) \subset U$.

Alors si $g \in \mathcal{E}(U)$ est nulle sur V(I), la série de Taylor Tg de g en 0 est nulle sur la variété formelle $V_f(TI)$.

Démonstration. – Soient $f_1, \ldots, f_p$ des générateurs de I. Posons $\varphi = f_1^2 + \cdots + f_p^2$; φ est nulle en 0 et satisfait à une inégalité de Łojasiewicz, i.e. il existe un nombre $\alpha > 0$ et une constante C tels que $|\varphi(x)| \geqslant C d(x, V)^\alpha$ au voisinage de 0 (V désigne l'ensemble $V(I) = V(\varphi)$).

D'autre part, on a $V_f(TI) = V_f(T\varphi)$, et par définition, il existe pour tout entier $q \geqslant 0$ un ouvert non vide Ω_q contenant 0 tel que l'on ait :

$$|\varphi(x)| \leqslant \|x\|^q \qquad \forall\ x \in \Omega_q \cap F,$$

F désignant un représentant quelconque d'un élément de $V_f(T\varphi)$.

On a donc :

$$C d(x, V)^\alpha \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \|x\|^q ,$$

soit :

$$C d(x, V)^\alpha \leqslant \|x\|^q \qquad \forall\ x \in \Omega_q \cap F.$$

D'autre part, le théorème des accroissements finis implique qu'il existe une constante C_1 telle que l'on ait :

$$|g(x) - g(y)| \leqslant C_1\ d(x, y)$$

pour x et y voisins de 0.

Comme par hypothèse g est nulle sur V et que

$$d(x, V) = \inf_{y \in V} d(x, y),$$

on en déduit :

$$|g(x)| \leqslant C_1\, d(x, V),$$

d'où
$$|g(x)| \leqslant C' \|x\|^{\frac{q}{\alpha}}$$

ce qui implique bien que Tg est nulle sur $V_f(T\varphi) = V_f(TI)$.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 2.3. – *Soit* I *un idéal de* $\mathcal{E}(U)$ *qui soit de type fini et de Łojasiewicz. Alors si* $0 \in V(I)$, *et* $g \in \mathcal{E}(U)$ *est nulle sur* V(I), Tg *appartient à tous les idéaux premiers réels de* $\mathcal{F}_n$ *qui contiennent* TI (i.e. $Tg \in \sqrt[R]{TI}$).

En effet, soit $\mathcal{P}$ un idéal premier réel de $\mathcal{F}_n$ tel que $TI \subset \mathcal{P}$; on a $V_f(TI) \supset V_f(\mathcal{P})$ et la proposition 2.1. implique que Tg est nulle sur $V_f(\mathcal{P})$. Le corollaire 2.3. résulte alors du théorème des zéros formel 1.4.

COROLLAIRE 2.4. (J. Bochnak, [1]). – *Soit* I *un idéal de* $\mathcal{E}(U)$ *engendré par un nombre fini de fonctions analytiques qui soit réel.*

Alors toute fonction $g \in \mathcal{E}(U)$ *nulle sur* V(I) *appartient à* I. *Autrement dit,* I *satisfait à la propriété* (Z).

Démonstration. – Soit $g \in \mathcal{E}(U)$ nulle sur V(I). Comme I est fermé, pour montrer que $g \in I$, il suffit de voir que $T_x g \in T_x I\ \forall x \in U$. Prenons $x = 0 \in V(I)$, et soient $\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_p$ des générateurs analytiques de I, $f_1, \ldots, f_p$ leurs germes en 0.

L'idéal $(f_1, \ldots, f_p)$ est alors réel dans l'anneau $\mathcal{O}_n$: cela résulte facilement du lemme 2.1. et de la platitude de l'anneau des germes en 0 des fonctions différentiables sur $\mathcal{O}_n$ ([2]). D'après le théorème 1.3. $(f_1, \ldots, f_p)$ est l'idéal de toutes les séries convergentes nulles sur V (I). Il résulte alors de [2], p. 90 que l'idéal $(f_1, \ldots, f_p)\mathcal{F}_n = TI$ est l'idéal de toutes les séries formelles nulles sur le germe de V (I) en 0. La proposition 2.2., applicable parce que un idéal fermé est de Łojasiewicz, implique alors que $Tg \in TI$.

Remarque. – La démonstration de J. Bochnak est différente, mais s'appuie aussi sur le théorème 1.3.

PROPOSITION 2.5. – *Soit* $I \subset \mathcal{E}(U)$ *un idéal fermé de type fini et réel. Supposons que le point* 0 *soit isolé dans l'ensemble* $V(I)$. *Il existe alors un voisinage* V *de* 0, *tel que* $I\,\mathcal{E}(V) = (x_1, \ldots, x_n)$ (*où* x_i *désigne la* i^{eme} *fonction coordonnée sur* $\mathbf{R}^n$).

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin d'un lemme :

LEMME 2.6. – *Soit* $I \subset \mathcal{E}(U)$ *un idéal de type fini et de Łojasiewicz au voisinage de* $0 \in V(I)$, *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) 0 *est isolé dans* $V(I)$,

b) $V_f(TI) = \{0\}$.

Démonstration. – a) ⇒ b) : soit φ la somme des carrés des générateurs de I ; φ est de Łojasiewicz et vérifie dont une inégalité de la forme $|\varphi(x)| \geqslant C\,\|x\|^\alpha$ pour x assez proche de 0. Cela entraîne immédiatement que $V_f(T\varphi) = V_f(TI) = \{0\}$.

b) ⇒ a) : cette implication est vraie sans hypothèse sur I : on a par hypothèse $V_f(TI) = V_f(T\varphi) = \{0\}$, et donc il existe un nombre α et un voisinage V de 0 tels que

$$|\varphi(x)| \geqslant \|x\|^\alpha \quad \forall x \in V$$

(par définition de la variété formelle de $T\varphi$), ce qui entraîne que 0 est isolé dans $V(I)$.

c.q.f.d.

Démontrons maintenant la proposition 2.5.

Le lemme implique que l'idéal de $\mathcal{F}_n$ nul sur $V_f(TI)$ est l'idéal maximal ; l'idéal maximal de $\mathcal{F}_n$ est donc la racine réelle de TI : il existe des séries $\varphi_i \in \mathcal{F}_n$ et des nombres entiers α_i tels que :

$$x_1^{2\alpha_1} + \ldots + x_n^{2\alpha_n} + \varphi_1^2 + \ldots + \varphi_p^2 \in TI \quad \text{(cf. 1.2.).}$$

Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ tel que $V \cap V(I) = \{0\}$; relevons les φ_i en des fonctions $\widetilde{\varphi}_i$ différentiables sur V telles que $T\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$. Comme $I\,\mathcal{E}(V)$ est fermé et que 0 est le seul zéro de $I\,\mathcal{E}(V)$, on a :

$$x_1^{2\alpha_1} + x_n^{2\alpha_n} + \widetilde{\varphi}_1^2 + \ldots + \widetilde{\varphi}_p^2 \in I\,\mathcal{E}(V).$$

On a donc $x_i \in I\,\mathcal{E}(V)$ puisque $I\,\mathcal{E}(V)$ est réel (lemme 2.1.).

COROLLAIRE 2.7. – *Soit* $\mathrm{I} = (f_1, \ldots, f_p)$ *un idéal fermé réel de* $\mathcal{E}(\mathrm{U})$. *Alors si* $p < n$, $\mathrm{V}(\mathrm{I})$ *n'a pas de point isolé.*

PROPOSITION 2.8. – *Soit* I *un idéal de type fini fermé et réel de* $\mathcal{E}(\mathrm{U})$, *et soit g une fonction différentiable nulle sur* $\mathrm{V}(\mathrm{I})$.

Alors l'ensemble des points x de $\mathrm{V}(\mathrm{I})$ *pour lesquels* $\mathrm{T}_x g \notin \mathrm{T}_x \mathrm{I}$ *n'a pas de point isolé.*

Démonstration. – Supposons $0 \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$, et que pour tout point x d'un voisinage V de 0, on ait $\mathrm{T}_x g \in \mathrm{T}_x \mathrm{I}$; il s'agit de montrer que $\mathrm{T}g \in \mathrm{TI}$. (Le symbole T signifiant la série de Taylor en 0). D'après la proposition 2.2., $\mathrm{T}g$ est nulle sur $\mathrm{V}_f(\mathrm{TI})$, et donc $\mathrm{T}g$ appartient à la racine réelle de TI (2.3.) ; il existe ainsi un entier p et des séries φ_i tels que :

$$(\mathrm{T}g)^{2p} + \varphi_1^2 + \ldots + \varphi_r^2 \in \mathrm{TI}.$$

Relevons les φ_i en des fonctions différentiables $\widetilde{\varphi}_i$ sur V telles que $\mathrm{T}\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$.

La fonction $\psi = g^2 (g^{2p} + \widetilde{\varphi}_1^2 + \ldots + \widetilde{\varphi}_2^2)$ est telle que $\mathrm{T}_x \psi \in \mathrm{T}_x \mathrm{I}$ $\forall x \in \mathrm{V}$; comme I (V) est fermé, $\psi \in \mathrm{I}$, et comme I (V) est réel, $g^{p+1} \in \mathrm{I}$.

On a donc $g \in \mathrm{I}$, par le même raisonnement que plus haut, d'où $\mathrm{T}g \in \mathrm{TI}$.

c.q.f.d.

Nous aurons enfin besoin de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.9. – *Soit* $f \in \mathcal{E}(\mathrm{U})$. *Si* $x \in \mathrm{U}$, *posons*

$$\mathrm{T}_x f = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r},$$

les p_i *étant des éléments irréductibles de* $\mathcal{F}_n(x)$, et $n(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} (n_i)$.

Alors la fonction $x \to n(x)$ *est semi-continue supérieurement.*

Si on note $\mathrm{J}_k(f)$ l'idéal engendré par f et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k, on peut caractériser l'entier $n(x)$ comme étant le plus petit k tel que la dimension de Krull de $\mathcal{F}(x)/\mathrm{J}_k(\mathrm{T}_x f)$ soit strictement inférieure à $n - 1$; la proposition 2.9. résulte alors du théorème de semi-continuité de la dimension d'une algèbre formelle de J.C. Tougeron ([6], p. 39).

3. Transformée stricte d'une fonction différentiable par un éclatement.

Soit W une sous-variété de dimension $n - p$ de $\mathbf{R}^n$. Soit (x, z) un système de coordonnées sur $\mathbf{R}^n$ ($x = (x_1, \ldots, x_p), z = (z_1, \ldots, z_{n-p})$) tel que les équations de W soient donnés par $x_1 = \ldots = x_p = 0$.

Choisissons une carte pour l'éclatement de W dans $\mathbf{R}^n$: cela revient à faire le changement de variables :

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \\ x_2 &= x'_1 x'_2 \\ &\vdots \\ x_p &= x'_1 x'_p \end{aligned}$$

Soit f une fonction différentiable au voisinage de l'origine nulle sur W et telle que sa série de Taylor en 0 $\mathrm{T}f$ ne soit pas nulle. Il existe alors un entier q tel que $f \in (x_1, \ldots, x_p)^q$ et $f \in (x_1, \ldots, x_p)^{q+1}$. Il est alors clair que la fonction différentiable

$$f(x'_1, x'_1 x'_2, \ldots, x'_1 x'_p, z)$$

est divisible par $x_1'^q$. On pose alors :

DEFINITION 3.1. – *On appelle transformée stricte de f la fonction*

$$\hat{f}(x'_1, \ldots, x'_p, z) = x_1'^{-q} f(x'_1, x'_1 x'_2, \ldots, x'_1 x'_p, z).$$

Remarque. – Si f est définie au voisinage de l'origine, $\hat{f}$ est définie au voisinage de la sous-variété d'équations $\begin{cases} x'_1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ de $\mathbf{R}^n$.

La notion d'éclatement est surtout utile, comme en géométrie algébrique ou analytique, lorsque l'ordre de f est constant sur W.

L'ordre de f au point x étant une fonction semi-continue supérieurement de x, il existe un ouvert dense $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{W}$ tel que dans U_1 l'ordre de f soit localement constant. On a alors :

LEMME 3.2. – *Prenons* $0 \in \mathrm{U}_1$. *Soit q un entier tel que l'on ait* $\mathrm{T}f \in (x_1, \ldots, x_p)^q$ *et* $\mathrm{T}f \notin (x_1, \ldots, x_p)^{q+1}$ *dans l'anneau*

$\mathbf{R}[[x, z]]$. *Alors. on a aussi* $f \in (x_1, \ldots, x_p)^q$ *et* $f \notin (x_1, \ldots, x_p)^{q+1}$ *dans* $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. *De plus, l'ordre de* f *à l'origine est égal à* q.

Démonstration. – Posons $(x) = (x_1, \ldots, x_p)$.

La question étant locale, nous pouvons supposer U_1 connexe ; l'hypothèse $Tf \in (x)^q$ implique que l'ordre de f est $\geqslant q$ en 0. f étant nulle sur W par hypothèse, il existe un entier k avec $0 < k \leqslant q$ tel que : $f \in (x)^k$ et $f \notin (x)^{k+1}$.

On peut donc écrire $f = \alpha_0 x_1^k + \alpha_2 x_1^{k-1} x_2 + \ldots + \alpha_r x_p^k$ avec $\alpha_i \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, l'un des α_i au moins n'appartenant pas à l'idéal (x), i.e. ne s'annulant pas identiquement sur W au voisinage de l'origine (cf. [2], p. 32).

En un point x de U_1 où l'un des α_i n'est pas nul, l'ordre de f est égal à k, ce qui implique que $k = q$ (puisque l'ordre de f est supposé constant sur U_1) et que l'ordre de f est égal à q pour $x \in U_1$.

c.q.f.d.

Remarque. – Si l'on écrit f comme une combinaison de monômes de degré en les x_i à coefficients dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$:

$$f = \alpha_0 x_1^q + \alpha_1 x_1^{q-1} x_2 + \cdots + \alpha_r x_p^q ,$$

on voit que $\hat{f}$ est un polynôme de degré $\leqslant q$ en $x_2', \ldots, x_p'$ à coefficients des fonctions différentiables par rapport à $(x_1', x_1' x_2', \ldots, x_1' x_p', z)$; nous noterons $\hat{T}f$ la série de Taylor de f pour

$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

qui est un polynôme en $x_2', \ldots, x_p'$ à coefficients des séries formelles en $(x_1', x_1' x_2', \ldots, x_1' x_p', z)$; $\hat{T}f$ s'identifie alors à la transformée stricte $\hat{T}f$ de la série de Taylor de f en 0, à cause du lemme 3.2.

Considérons maintenant la situation suivante : W est de codimension 2, d'équation $x = y = 0$. On peut alors considérer une fonction différentiable $f(x, y, z)$ nulle sur W comme une "famille de courbes planes" par rapport au paramètre $z = (z_1, \ldots, z_{n-2})$.

Rappelons qu'une courbe plane formelle est la donnée d'une série $\varphi \in \mathbf{R}[[X, Y]]$; plongeons $\mathbf{R}[[X, Y]]$ dans $\mathbf{C}[[X, Y]]$, et posons $\varphi = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$, les p_i étant irréductibles dans $\mathbf{C}[[X, Y]]$. Il est bien connu (cf. [7]) qu'après un nombre fini d'éclatements ponctuels, la transformée stricte de chaque p_i est une courbe formelle lisse (i.e. d'ordre 1) : on dit alors que l'on a résolu φ par une suite d'éclatements ponctuels, si l'on a résolu chaque p_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Si $M \in W$ a pour coordonnée z_0, notons $\overline{T}_M f(x, y)$ l'image de $T_M f(x, y, z)$ dans $\mathbf{R}[[x, y]]$ obtenue en faisant $z = z_0$.

Proposition 3.3. — *Supposons* $T_M f(x, y, z)$ *non nul pour* $M \in U_1' \subset W$. *Le nombre d'éclatements ponctuels nécessaires pour faire baisser la multiplicité de la courbe formelle supposée non lisse* $\overline{T}_M f(x, y)$ *est borné dans un ouvert non vide* $V \subset U_1'$.

Posons $\overline{T}_M f(x, y) = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$ dans $\mathbf{C}[[x, y]]$ (on a fixé les coordonnés z et plongé $\mathbf{R}[[x, y]]$ dans $\mathbf{C}[[x, y]]$), les p_i étant irréductibles. L'entier $n(M) = \sup(n_i)$ est constant dans un ouvert $V_1 \subset U'$ (2.9), et l'idéal $J_{n(M)}(\overline{T}_M f(x, y))$ est primaire pour l'idéal maximal de $\mathbf{C}[[x, y]]$ ($J_{n(M)}$ désigne l'idéal engendré par les dérivés partielles d'ordre $\leqslant n(M)$). Il résulte alors du théorème de semi-continuité ([6], p, 39) que la multiplicité de cet idéal est localement bornée en fonction de $M \in V_1$.

Il suffit alors de montrer :

Lemme 3.4. — *Soit* $\varphi \in \mathbf{C}[[x, y]]$ *tel que* $\varphi = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$, *les* p_i *étant irréductibles et non tous lisses. Posons* $n = \sup(n_i)$. *Alors le nombre d'éclatements nécessaires pour faire baisser la multiplicité de* φ *est inférieur à la multiplicité de l'idéal* $J_n(\varphi)$.

Supposons par exemple que $n = n_1$ et que p_1 ne soit pas lisse (si p_1 est lisse, la multiplicité baisse au bout de un éclatement). On a alors $J_n(\varphi) \subset J_1(p_1)$ ce qui entraîne que la multiplicité de $J_n(\varphi)$ est $\geqslant$ à celle de $J_1(P_1)$ qui est égale au "nombre μ de Milnor" de p_1. Mais si q désigne la multiplicité de p_1 et $\hat{p}_1$ sa transformée stricte, on a l'égalité :

$$\mu(p_1) = q(q-1) + \mu(\hat{p}_1)$$

(cf. [4], par exemple).

Il est alors clair que le nombre d'éclatements nécessaire pour résoudre p_1, ce qui en particulier fera baisser la multiplicité de φ, sera inférieur à $\mu(p_1)$.

c.q.f.d.

4. Un théorème de décomposition.

Soit f une fonction différentiable nulle en 0. Si f se décompose en un produit $f = f_1 f_2$, on a évidemment une décomposition $Tf = Tf_1 Tf_2$.

Réciproquement, si $Tf = g_1 g_2$, cette décomposition se remonte-t-elle en une décomposition de f ? C'est faux en général, comme le montre l'exemple suivant dans $\mathbf{R}^3$: $f = x_1 x_2 + e^{-1/x_3^2}$ est indécomposable, alors que $Tf = x_1 x_2$ est un produit.

Nous verrons cependant qu'une telle propriété est valable en dimension 2, si les séries g_1 et g_2 sont premières entre elles. Plus généralement, on a le théorème suivant, où $\mathcal{E}_{\mathrm{C}}(\mathbf{R}^n)$ désigne l'anneau des fonctions différentiables sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs complexes :

THEOREME 4.1. — *Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, une fonction telle que l'idéal (f) soit fermé* (resp. $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}(\mathbf{R}^n)$ *sans hypothèse sur l'idéal (f)), et soit* W *une sous-variété de codimension 2 de* $\mathbf{R}^n$ *telle que* $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}(f)$. *Il existe un ouvert dense* $\mathrm{U} \subset \mathrm{W}$ *tel que* $\forall\, x \in \mathrm{U}$ *on ait la propriété suivante : si la série de Taylor* $\mathrm{T}_x f$ *admet une décomposition* $\mathrm{T}_x f = g_1 g_2$ *où* g_1 *et* g_2 *sont deux séries formelles non nulles et sans facteur commun, il existe deux fonctions différentiables* $\widetilde{g}_1$ *et* $\widetilde{g}_2 \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ *(resp.* $\in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}(\mathbf{R}^n)$*) telles que :* $\mathrm{T}_x \widetilde{g}_1 = g_1$, $\mathrm{T}_x \widetilde{g}_2 = g_2$ et $f = \widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2$ *dans un voisinage de* x.

Démonstration. — Nous supposerons que W est définie par les équations $x = y = 0$, et nous noterons $z = (z_1, \ldots, z_{n-2})$ les coordonnées sur W.

La propriété à démontrer est de nature locale : il s'agit de trouver un ouvert non vide de W dans lequel le théorème est vrai. La démonstration s'inspire des méthodes de [8] : on cherche un ouvert non vide $\mathrm{U} \subset \mathrm{W}$ tel que pour $x \in \mathrm{U}$ on puisse résoudre simultanément toutes les fibres $\mathrm{T}_x f$ par un nombre fini d'éclatements ; si $x \in \mathrm{U}$ et si $\mathrm{T}_x f = g_1 g_2$, les transformées strictes de g_1 et g_2 ont alors des supports disjoints, et on peut appliquer le lemme de Hensel pour montrer que f se décompose ; L'hypothèse faite sur l'idéal (f) vient de ce que si $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, on exige que $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ soient aussi à coefficients réels.

Comme la démonstration est assez longue, nous allons en indiquer le plan : on commence par considérer le cas où $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{C}}(\mathbf{R}^n)$, et on prend un ouvert $U_1 \subset W$ dans lequel l'ordre de f est constant (cf. lemme 3.2.).

On suppose ensuite que f est un polynôme distingué en y, dans un ouvert $U_2 \subset U_1$ et on raisonne par récurrence sur le nombre d'éclatements ponctuels nécessaire pour faire baisser la multiplicité des fibres $\overline{T}_M f(x, y) \in \mathbf{C}[[x, y]]$ (pour M dans un ouvert convenable).

a) On montre le théorème dans le cas où $\hat{f}(0, y, z)$ a deux racines distinctes pour $z \in U_2$ (si $M \in U_2$, on peut alors écrire $\overline{T}_M f(x, y) = g_1 g_2$, les supports de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$ étant disjoints après un éclatement) ;

b) On considère un ouvert $U_3 \subset U_2$ tel que le nombre de ces racines soit constant pour $z \in U_3$.

c) On peut alors supposer que $\hat{f}(0, y', z)$ n'a qu'une racine donnée par $y' = 0$ (pour $z \in U_4 \subset U_3$).

On montre alors que si $\hat{f}(x', y', z)$ se décompose en un produit (au voisinage de 0, 0, z), cette décomposition se descend en une décompositon de f.

d) Pour pouvoir raisonner par récurrence, on considère un ouvert $U_5 \subset U_4$ tel que pour $M \in U_5$ le nombre d'éclatements nécessaire pour faire baisser la multiplicité de la fibre $\overline{T}_M f(x, y)$ soit borné (3.3.).

e) Dans l'hypothèse où $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, et où l'idéal (f) est fermé, on montre que la décomposition peut être choisie à valeurs réelles en montrant que l'idéal $(\hat{f})$ est aussi fermé.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite :

Soit U_1 un ouvert dans lequel l'ordre de f est constant (cf. lemme 3.2). On peut supposer que pour $M \in U_1$, on a $T_M f \neq 0$.

Supposons que l'origine $0 \in U_1$; la forme initiale in Tf (ensemble des termes de plus bas degré de Tf) est alors un polynôme homogène de degré p en x et y (cf. 3.2) : quitte à faire un changement linéaire de variables, on peut donc supposer que f est régulière d'ordre p en y. On peut alors écrire, d'après le théorème de préparation différentiable : $f = Uf_1$, U étant inversible au voisinage de 0, et f_1 étant un polynôme distingué en y : il suffit alors de montrer le théorème dans un ouvert $U_2 \subset U_1$ dans lequel cette décomposition est valable et dans lequel U est inversible ; nous supposerons donc dans la suite que f est un polynôme distingué en y :

$$f = y^p + a_1(x, y) + \cdots y^{p-1} + a_p(x, z).$$

Remarquons que le fait $z \in U_1$ implique $a_i(x, z) \in (x)^i$ puisque $f \in (x, y)^p$ (3.2).

$\hat{f}(x', y', z)$ désignera comme au paragraphe précédent la transformée stricte de f par l'éclatement de W : $f(x', y', z) = x'^{-p} f(x', x' y', z)$.

a) Montrons d'abord une proposition valable sans hypothèse sur l'idéal (f) ; les notations sont les mêmes que dans ce qui précède :

PROPOSITION 4.2. – *Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ (resp. $f \in \mathcal{E}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R}^n)$). Supposons que $0 \in U_2$ (i.e. que l'ordre de f est constant au voisinage de 0) et que f est un polynôme distingué en y. Alors si $\mathrm{T}f = g_1 g_2$, les formes initiales $\mathrm{in}g_1$ et $\mathrm{in}g_2$ de $\mathrm{T}g_1$ et $\mathrm{T}g_2$ étant sans facteurs communs, il existe deux fonctions différentiables $\widetilde{g}_1$ et $\widetilde{g}_2$, qu'on peut supposer être des polynomes unitaires en y, telles que $\mathrm{T}\widetilde{g}_1 = g_1$, $\mathrm{T}g_2 = \widetilde{g}_2$ et $f = \widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2$ dans un voisinage U_2' de l'origine.*

Démonstration. – L'ordre de f étant constant dans U_2, in $\mathrm{T}f$ est un polynôme homogène en x et y et les facteurs de in $\mathrm{T}f$ correspondent biunivoquement aux facteurs du polynôme $f(0, y', 0)$. On a donc par hypothèse $\hat{f}(0, y', 0) = \hat{g}_1(0, y', 0)\ \hat{g}_2(0, y', 0)$, les polynômes $\hat{g}_1(0, y', 0)$ et $\hat{g}_2(0, y', 0)$ étant étrangers. Le problème est local : il suffit de montrer que le germe de f en 0 (que nous noterons encore f) se décompose.

Si $\mathcal{E}$ désigne l'anneau des germes à l'origine de fonctions différentielles sur $\mathbf{R}^{n-1}$ à valeurs réelles (resp. à valeurs complexes), on peut considérer $\hat{f}$ comme un élément de $\mathcal{E}[y']$; l'anneau $\mathcal{E}$ étant hensélien ([3], p. 79), la décomposition $\mathrm{T}\hat{f}(x', y', z) = \hat{g}_1(x', y', z)\ \hat{g}_2(x', y', z)$ (où $\widetilde{g}_1$ et $\widetilde{g}_2$ sont des polynômes unitaires en y' et étrangers puisque $\hat{g}_1(0, y', 0)$ et $\hat{g}_2(0, y', 0)$ le sont) se relève en une décomposition de $\hat{f}(x', y', z)$ dans $\mathcal{E}[y']$ en vertu du lemme suivant (cf. [3], p. 3) :

LEMME 4.3. – *Soit* $\mathcal{E}$ *un anneau local hensélien, et soit I un idéal de* $\mathcal{E}$. *Si P est un élément de* $\mathcal{E}[X]$, *notons* $\overline{P}$ *sa classe dans* $\mathcal{E}/I[X]$. *Alors si* P *est un polynôme unitaire de* $\mathcal{E}[X]$, *et si* $\overline{P} = \overline{Q}\,\overline{R}$ *dans* $\mathcal{E}/I[X]$, $\overline{Q}$ *et* $\overline{R}$ *étant unitaires et fortement étrangers* (i.e. : $(1) = (P) + (Q)$), *on peut écrire* : $P = QR$ *dans* $\mathcal{E}[X]$, Q *et* R *relevant* $\overline{Q}$ *et* $\overline{R}$.

On peut donc écrire :

$$\hat{f}(x', y', z) = \widetilde{\hat{g}}_1(x', y', z)\widetilde{\hat{g}}_2(x', y', z)$$

$\widetilde{\hat{g}}_1$ et $\widetilde{\hat{g}}_2$ étant des polynômes unitaires en y' de degrés k et $p-k$ respectivement.

On a donc :

$$x'^p \hat{f}(x', y', z) = x'^k \widetilde{\hat{g}}_1(x', y', z)\, x'^{p-k} \widetilde{\hat{g}}_2(x', y', z)$$

d'où la décomposition voulue :

$$f(x, y, z) = \widetilde{g}_1(x, y, z)\widetilde{g}_2(x, y, z)$$

avec $T\widetilde{g}_1 = g_1$ et $T\widetilde{g}_2 = g_2$. c.q.f.d.

b) Soit toujours $f = y^p + a_1(x, z)y^{p-1} + \ldots + a_p(x, z)$, l'ordre de f étant constant dans $U_2 \subset W$.

Le nombre de racines distinctes réelles ou complexes du polynôme $y'^p + \hat{a}_1(0, z)y'^{p-1} + \ldots + \hat{a}_p(0, z)$ est une fonction semi-continue inférieurement de z ; on peut donc supposer que ce nombre est constant dans un ouvert $U_3 \subset U_2$; prenons $0 \in U_3$.

La proposition 4.2 montre alors que l'on a une décomposition $\hat{f} = f_1 \ldots f_k$ dans $U_4 \subset U_3$, les f_i étant des polynômes en y tels que $\hat{f}_i(0, y', z)$ ait une seule racine.

Il est alors clair que ces racines sont des fonctions différentiables de z. (Si par exemple $y'^p + \hat{a}_1(0, z)y'^{p-1} + \ldots + \hat{a}_p(0, z)$ a une seule racine $\alpha(z)$ dans U_4, on a $p\alpha(z) = \hat{a}_1(0, z)$ et donc $\alpha(z)$ est différentiable). Il suffit alors de monter le théorème 4.1. pour les f_i en vertu du lemme suivant:

LEMME 4.4. – *Soit* $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ *tel que* $f = f_1 f_2$. *Alors si* (f) *est fermé* (*resp. fermé et réel*). *il en est de même de* (f_1) *et* (f_2).

La démonstration est immédiate.

Signalons le résultat suivant, que nous nous n'utiliserons pas pour montrer le théorème 4.1 :

PROPOSITION 4.5. – *Avec les mêmes notations que plus haut, supposons que* $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, $z \in U_4$ *et que* (f) *soit fermé et réel.*

Alors toutes les racines du polynôme $\hat{f}(0, y', z)$ *sont réelles.*

Raisonnons par l'absurde. D'après le lemme 4.4 et la proposition 4.2, on peut supposer que $\hat{f}(0, y', z)$ a deux racines complexes conjuguées pour $z \in U_4$.

On peut alors écrire, d'après la proposition 4.2, $\hat{f}(x, y', z) = \hat{Q}\hat{Q}'$, $\hat{Q}$ et $\hat{Q}'$ étant des polynômes unitaires en y' et des fonctions différentiables à valeurs complexes correspondant aux deux racines de $\hat{f}(0, y', z)$.

Si $M = (0, 0, z_1) \in U_4$, on a $T_M \hat{f}(x, y', z) = T_M \hat{Q}\, T_M \hat{Q}'$, ce qui implique $T_M \hat{Q}' = \overline{T_M \hat{Q}}$ dans $\mathbf{C}[[x, y', z - z_1]]$ à cause de la factorialité de $\mathbf{C}[[x, y', z - z_1]]$: $T_M \hat{f}$ étant divisible par $T_M \hat{Q}$, il est aussi divisible par $\overline{T_M \hat{Q}}$ donc par $T_M \hat{Q}\, \overline{T_M \hat{Q}}$ puisque $T_M \hat{Q}$ et $\overline{T_M \hat{Q}}$ ne peuvent avoir de facteurs communs, leurs formes initiales étant étrangères.

Si le degré de f est $2p$, posons :

$$Q(x, y, z) = x^p \hat{Q}\left(x, \frac{y}{x}, z\right).$$

f ne s'annule pas en dehors de W au voisinage de l'origine car $\hat{f}$ ne s'annule pas pour x' et z voisins de zéro, et l'éclatement est un isomorphisme en dehors de W.

La fonction $Q\overline{Q}$ est donc telle que

$$T_M(Q\overline{Q}) = T_M(f) \quad \forall M \in V(f) \cap U_4 \ ;$$

il en résulte que $Q\overline{Q} = \lambda f$ avec λ inversible au voisinage de l'origine puisque (f) est fermé (1.6), ce qui est impossible puisque $Q\,\overline{Q}$ est une somme de deux carrés et que l'idéal (f) est réel.

c.q.f.d.

c) Il résulte de ce qui précède que l'on peut supposer que $\hat{f}(0, y', z)$ a une seule racine $\alpha(z)$ pour $z \in U_4$; on peut même supposer que cette racine est donnée par $y' = 0$, si l'on considère f et $(\hat{f})$ comme étant à valeurs complexes, car $\alpha(z)$ étant une fonction différentiable de z, on peut faire le changement de variables :

$$y_1 = y - x\alpha(z)$$
$$y_1' = y' - \alpha(z)$$

Supposons $0 \in U_4$; on a alors :

PROPOSITION 4.6. – *Les notations sont les mêmes que ci-dessus ; soit $f(x, y, z)$ une fonction différentiable à valeurs réelles ou complexes telle que $\hat{f}(0, y', z)$ ait une seule racine donnée par $y' = 0$ (pour $z \in U_4$) et que $Tf = g_1 g_2$, g_1 et g_2 étant des polynômes distingués en y ; si on a une décomposition $\hat{f} = \widetilde{\hat{g}}_1 \widetilde{\hat{g}}_2$, $\widetilde{\hat{g}}_1$ et $\widetilde{\hat{g}}_2$ étant deux fonctions différentiables vérifiant $T\widetilde{\hat{g}}_1 = \hat{g}_1$ et $T\widetilde{\hat{g}}_2 = \hat{g}_2$ (les séries de Taylor étant prises au point $x' = y' = z = 0$), il existe deux fonctions différentiables au voisinage de l'origine $\widetilde{g}_1$ et $\widetilde{g}_2$ telles que :*

$$T\widetilde{g}_1 = g_1 \quad , \quad T\widetilde{g}_2 = g_2 \quad \text{et} \quad f = \widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2$$

dans un voisinage U_4' de 0.

Démonstration. – $\hat{f}(x, y', z)$ étant un polynôme distingué en y' de degré p, $\widetilde{\hat{g}}_1$ et $\widetilde{\hat{g}}_2$ sont des fonctions régulières en y' ; il existe, d'après le théorème de préparation une fonction $U(x', y', z)$ différentiable et non nulle au voisinage de l'origine, et deux polynômes distingués en y' h_1 et h_2 de degrés k et $p - k$ respectivement tels que :

$$\hat{f}(x, y', z) = U h_1 h_2 .$$

avec $\widetilde{\hat{g}}_1 = U_1 h_1$, $\widetilde{\hat{g}}_2 = U_2 h_2$ et $U = U_1 U_2$.

Remarquons que $Th_1 = \hat{g}_1$ et $Th_2 = \hat{g}_2$ à cause de l'unicité de la division dans l'anneau $\mathbf{R}[[x, y', z]]$.

Soient V et V' deux voisinages de 0 dans **R** et V'' un voisinage de 0 dans W tels que

– U soit définie et non nulle dans $V \times V' \times V''$;

– $(x, z) \in V \times V''$ entraîne que les racines réelles du polynôme $\hat{f}(x, y', z)$ sont dans V'.

Le polynôme en $y' h_1 h_2$ ne s'annule donc pas dans $V \times (R - V') \times V''$, et l'égalité $\hat{f}(x, y', z) = U h_1 h_2$ définit U comme une fonction différentiable non nulle dans $V \times \mathbf{R} \times V''$.

Posons maintenant .

$$\begin{cases} \widetilde{g}_1 (x, y, z) = x^k h_1 \left(x, \frac{y}{x}, z\right) \\ \widetilde{g}_2 (x, y, z) = x^{p-k} h_2 \left(x, \frac{y}{x}, z\right) \\ U_1 (x, y, z) = U\left(x, \frac{y}{x}, z\right) \quad \text{si } x \neq 0 \\ U_1 (0, y, z) = 1 \end{cases}$$

en multipliant les deux membres de l'égalité $\hat{f} = U h_1 h_2$ par

$$x'^p = x'^k \times x'^{p-k},$$

on obtient l'égalité :

$$f(x, y, z) = U_1 (x, y, z) \widetilde{g}_1 (x, y, z) \widetilde{g}_2 (x, y, z)$$

(c'est évident si $x \neq 0$, et vrai si $x = 0$ car

$$f(0, y, z) = y^p, \ \widetilde{g}_1 (0, y, z) = y^k \ \text{ et } \ \widetilde{g}_2 (0, y, z) = y^{p-k}).$$

On aura donc montré la proposition si l'on prouve que la fonction $U_1 (x, y, z)$ est indéfiniment différentiable au voisinage de l'origine. L'égalité $U_1 (x, y, z) = U\left(x, \frac{y}{x}, z\right)$ montre que U_1 est différentiable en tout point pour lequel $x \neq 0$; la différentiabilité en un point pour lequel $x = 0$ va résulter du lemme suivant :

LEMME 4.7. – *Soit* $f = y^p + a_1 (x, z) y^{p-1} + \ldots + a_p (x, z)$ *où les* a_i *sont des fonctions différentiables de* $\begin{cases} x = (x_1, \ldots, x_r) \\ z = (z_1, \ldots, z_s) \end{cases}$.

Supposons que l'on ait $a_i (0, z) = 0$, *et une décomposition :*

$$f = U(x, y, z) (y^p + b_1 (x, z) y^{p-1} + \ldots + b_p (x, z))$$

dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^{r+s+1})$.

Alors $\qquad \mathrm{U}(x, y, z) - 1 \in (x)^n \quad \forall n.$

Démonstration. – Remarquons d'abord que la condition $a_i(0, z) = 0$ implique l'égalité :

$y^p(1 - \mathrm{U}(0, y, z)) = \mathrm{U}(0, y, z)[b_1(0, z)y^{p-1} + \ldots + b_p(0, z)]$.

Comme $\mathrm{U}(0, 0, 0) = 1$ (puisque $\mathrm{TU} = 1$ car il y a unicité de la division dans $\mathbf{R}[[x, y, z]]$), on en déduit que $\mathrm{U}(0, 0, z)$ n'est pas nulle, d'où $b_i(0, z) = 0$ en faisant $y = 0$ dans l'égalité ci-dessus et donc $\mathrm{U}(0, y, z) = 1$.

Nous allons démontrer par récurrence sur n que

$$\frac{\partial^n \mathrm{U}}{\partial x^n}(0, y, z) = 0,$$

ce qui suffira pour démontrer le lemme 4.7.

Dérivons n fois par rapport à x et faisons $x = 0$; on obtient :

$$\frac{\partial^n a_1}{\partial x^n}(0, z)y^{p-1} + \ldots + \frac{\partial^n a_p}{\partial x^n}(0, z) = \frac{\partial^n b_1}{\partial x^n}(0, z)y^{p-1} + \ldots + \frac{\partial^n b_p}{\partial x^n}(0, z) + \frac{\partial^n \mathrm{U}}{\partial x^n}(0, y, z)\, y^p$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence, d'où immédiatement $\dfrac{\partial^n \mathrm{U}}{\partial x^n}(0, y, z) = 0.$

c.q.f.d.

Appliquons ce lemme à la fonction U de la proposition 4.6. : on a donc $\mathrm{U}(x, y, z) - 1 \in (x)^n \ \forall n$. Pour voir que

$$\mathrm{U}_1(x, y, z) = \mathrm{U}\left(x, \frac{y}{x}, z\right)$$

est indéfiniment différentiable, montrons d'abord que si $\varphi(x, y, z)$ est une dérivée partielle de la fonction $\mathrm{U}(x, y, z) - 1$ (dérivée partielle d'ordre quelconque), $\varphi(x, y, z) = x^k\, \psi(x, y, z)$ pour tout k entier $\geqslant 0$, $\psi(x, y, z)$ étant une fonction différentiable et *bornée* dans un ensemble de la forme $\mathrm{V} \times \mathbf{R} \times \mathrm{V}''$: cela résulte du lemme 4.7 et du fait que $\mathrm{U}(x, y, z) - 1$ est le quotient de deux polynômes en y de degrés P$-$1 et P, le dénominateur étant distingué ; $\varphi(x,y,z)$ est donc aussi le quotient de deux polynômes en y, le dénominateur étant distingué, ce qui montre l'assertion.

Il est maintenant aisé de voir que toutes les dérivées partielles de $U_1(x,y,z) = U\left(x, \frac{y}{x}, z\right)$ (qui existent si $x \neq 0$) tendent vers 0 si $x \to 0$, et que les dérivées partielles de U_1 existent et sont nulles en un point de la forme $(0, y, z)$.

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.6 ; remarquons que cette proposition est valable si l'on suppose f à valeurs complexes.

d) Achevons maintenant la démonstration du théorème 4.1. dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.

Soit $f \in \mathcal{E}_C(U)$ un polynôme distingué en y, U étant un ouvert de $\mathbf{R}^n$ tel que $U \cap W = U_4$ (avec les notations ci-dessus). D'après 3.3. le nombre r d'éclatements ponctuels nécessaires pour faire baisser la multiplicité de la courbe formelle $\overline{T}_M f(x,y)$ est borné pour $M \in U_5 \subset U_4$.

Raisonnons par récurrence sur $(p,r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (p étant l'ordre de $T_M f$ pour $M \in U_5$) :

– si $p = 1$, f est lisse, et il n'y a rien à démontrer.

– dans le cas général, on peut supposer grâce à 4.2 et 4.5 que le polynôme en y' $\hat{f}(0, y', z)$ a une seule racine donnée par $y' = 0$ (pour $z \in U_4$) : on sait en effet que l'on a une décomposition $f = f_1 \dots f_s$ dans $\mathcal{E}(U_4)$, chaque f_i étant un polynôme distingué en y tel que $\hat{f}_i(0, y', z)$ ait une seule racine pour $z \in U_4$ (4.2) : les racines de $\hat{f}(0, y', z)$ correspondent en effet biunivoquement aux facteurs irréductibles de in $T_M f$, car in $T_M f$ est un polynôme homogène de degré p en x et y.

Si $T_M f(x, y, z)$ est d'ordre p (pour $M \in U_5$) et si le nombre d'éclatements nécessaires pour faire baisser la multiplicité de $T_M f(x, y)$ est borné par r_0, pour $M \in U_5$, on suppose par hypothèse de récurrence que le théorème est vrai pour les fonctions d'ordre $< p$, et pour celles d'ordre p pour lesquelles le nombre d'éclatements nécessaires pour faire baisser la multiplicité des fibres est borné par $r_0 - 1$.

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction $\hat{f}(x, y', z)$ et à la variété w' définie par $\begin{cases} x' = y' = 0 \\ z \in U_5 \end{cases}$ ce qui démontre le théorème 4.1. pour f à valeurs complexes grâce à la proposition 4.6.

e) Supposons maintenant $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ et (f) fermé. Avec les notations ci-dessus, on peut supposer grâce au lemme 4.4. que $\hat{f}(0, y', z)$ a une seule racine réelle pour $z \in U_5$ ou qu'aucune des racines de $\hat{f}(0, y', z)$ n'est réelle (toujours pour $z \in U_5$).

Si $\hat{f}(0, y', z)$ a une seule racine réelle, on peut supposer comme ci-dessus qu'elle est donnée par $y' = 0$, et le théorème 4.1 sera montré dans ce cas si on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la variété w' définie par $\begin{cases} x' = y' = 0 \\ z \in U_5 \end{cases}$, ce qui va résulter du lemme suivant :

LEMME 4.8. — *Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ un polynôme distingué en y :*

$$f = y^p + a_1(x, z) y^{p-1} + \cdots + a_p(x, z),$$

d'ordre constant égal à p sur la variété W *définie par $x = y = 0$, $z \in$ U (*U *étant un ouvert de* $\mathbf{R}^{n-2}$).

Soit $\hat{f}(x', y', z')$ le transformé strict de f par l'éclatement de W *et supposons de plus que le polynôme en y' $\hat{f}(0, y', z)$ ait une seule racine réelle pour $z \in$ U ; alors si l'idéal (f) est fermé (resp. fermé et réel) il en est de même de l'idéal $\hat{f}\,\mathcal{E}(\mathrm{U}')$, où* U$'$ *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *tel que $(x', y', z) \in \mathrm{U}' \Rightarrow z \in \mathrm{U}$.*

Démonstration. — Comme dans ce qui précède, on peut supposer que le polynôme $\hat{f}(x', y', z)$ est distingué en y' de degré p : on peut en effet supposer que la seule racine de $\hat{f}(0, y', z)$ est donnée par $y' = 0$.

a) Montrons d'abord que $(\hat{f})$ est fermé. Le problème est local et l'égalité $x'^p \hat{f}(x', y', z) = f(x', x'y', z)$ montre qu'il suffit de se placer au voisinage d'un point pour lequel $x' = 0$ et que nous supposerons être l'origine ($x' = y' = z = 0$).

Soit $g(x', y', z)$ une fonction différentiable telle que $g \in \overline{(\hat{f})}$; il faut montrer que $g \in (\hat{f})$ au voisinage de 0.

Le théorème de préparation différentiable (cf. par exemple [6], p. 189) permet d'écrire :

$$g = \hat{f}\mathrm{Q} + \mathrm{R},$$

R étant un polynôme en y' de degré $k < p$.

On a aussi $R \in \overline{(\hat{f})}$, et la condition $R \in (\hat{f})$ est équivalente à $g \in (\hat{f})$.

R étant un polynôme de degré k en y', $x'^k R$ est une fonction différentiable de $x', x'y'$ et z :

$$x'^k R(x', y', z) = R_1(x', x'y', z) = R_1(x, y, z) ;$$

comme $R \in \overline{(\hat{f})}$, $T_M R \in (T_M \hat{f})$ pour tout point M. Montrons que cela implique que $T_M R_1 \in (T_M f)$ pour tout point M voisin de 0 : c'est évident si $x \neq 0$. Il suffit donc de se placer en un point pour lequel $x = y = 0$, l'origine par exemple. Mais on a $T_0 R = 0$ puisque $T_0 R \in (T_M \hat{f})$, que $T_0 R$ est un polynôme de degré $< p$ en y' et que $\hat{f}$ est un polynôme distingué en y' de degré p, à cause de l'unicité de la division par un polynôme distingué dans $\mathbf{R}[[x', y', z]]$. On a donc aussi $T_0 R_1 = 0 \in (T_0 f)$.

Comme (f) est supposé fermé, on en déduit $R_1 \in (f)$ (1.6), d'où $R \in (\hat{f})$.

b) Pour démontrer que $(\hat{f})$ est réel, la démonstration est analogue. Soient $h_i(x', y', z)$ des fonctions différentiables telles que $\sum_{i=1}^{s} h_i^2 \in (\hat{f})$. Comme $(\hat{f})$ est fermé, pour montrer que $h_i \in (\hat{f})$, il suffit de montrer que $T_M h_i \in T_M (\hat{f})$ en un point pour lequel $x' = 0$, l'origine par exemple (en un point où $x' \neq 0$, cela résultera de ce que (f) est supposé réel).

Le théorème de préparation différentiable permet d'écrire :

$$h_i = Q_i \hat{f} + R_i$$

R_i étant un polynôme en y' de degré $< p$. La condition $\sum_{i=1}^{s} h_i^2 \in (\hat{f})$ implique $\sum_{i=1}^{s} R_i^2 \in (\hat{f})$ soit $\sum_{i=1}^{s} R_i^2 = \lambda \hat{f}$. Si M est un point de coordonnées $(0, 0, z)$, on a donc $T_M (\Sigma R_i^2) = T_M \lambda \, T_M \hat{f}$, où $T_M \lambda$ est un polynôme en y' par unicité de la division dans un anneau de séries formelles ([6], p. 28).

La fonction R_i étant un polynôme en y' peut être considérée comme la transformée stricte d'une fonction R_i' de x, y, z :

$$x^{n_i} R_i(x, y', z) = R_i'(x, y, z)$$

avec $n_i < p$. En multipliant l'égalité précédente par une puissance convenable de x', on obtient donc :

$$T_M\,(\Sigma\, R_i''^2) \in (T_M f) \quad \forall\ M \text{ voisin de } 0.$$

avec $$R_i'' = x^{p-n_i}\, R_i'.$$

Comme (f) est fermé, cela implique :

$$\Sigma\, R_i''^2 \in (f).$$

d'où

$$R_i' \in (f) \quad (1 \leqslant i \leqslant s)$$

puisque (f) est réel, et donc $R_i \in (\hat{f})$ en prenant les transformées strictes.

Cela achève la démonstration du lemme 4.8.

Si maintenant $\hat{f}(0, y', z)$ n'a que des racines non réelles, celles-ci sont deux à deux imaginaires conjugées puisque f est supposée à coefficients réels.

Supposons alors que $0 \in U_5$ et que $Tf = g_1\, g_2$; il résulte de la proposition 4.2 que dans $\mathbf{C}[[x, y, z]]$ on a une décomposition

$$g_1 = g_1'\, \overline{g}_1', \quad g_2 = g_2'\, \overline{g}_2'$$

les séries g_1', $\overline{g}_1'$, g_2', $\overline{g}_2'$ étant sans facteurs communs.

En utilisant le théorème 4.1 (déjà démontré pour f à valeurs complexes), on voit que f s'écrit $f = \varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_4$ au voisinage de l'origine avec :

$$T\varphi_1 = g_1'$$
$$T\varphi_2 = \overline{g}_1'$$
$$T\varphi_3 = g_2'$$
$$T\varphi_4 = \overline{g}_2'$$

En raisonnant comme dans le lemme 4.5 (et en utilisant le fait que (f) est fermé), on voit que f s'écrit $f = \mathrm{U}\, \varphi_1\, \overline{\varphi}_1\, \varphi_3\, \overline{\varphi}_3$, U étant à valeurs réelles et non nulle à l'origine, ce qui achève de montrer le théorème 4.1. $\varphi_1\, \overline{\varphi}_1$ et $\varphi_3\, \overline{\varphi}_3$ étant des fonctions différentiables à valeurs réelles et vérifiant

$$T\varphi_1 \overline{\varphi}_2 = g_1$$

$$T\varphi_3 \overline{\varphi}_3 = g_2$$

c q.f.d.

5. Applications.

PROPOSITION 5.1. – *Soit $f(x, y)$ un germe de fonction différentiable à l'origine de* $\mathbf{R}^2$. *Supposons que la série de Taylor de f à l'origine puisse s'écrire $Tf = g_1 g_2$, g_1 et g_2 étant deux séries formelles sans facteur commun dans* $\mathbf{R}[[X, Y]]$.

Il existe alors deux germes $\widetilde{g}_1$ et $\widetilde{g}_2$ de fonctions différentiables tels que $T\widetilde{g}_1 = g_1$, $T\widetilde{g}_2 = g_2$ *et* $f = \widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2$.

Remarquons qu'il n'y a dans ce cas aucune hypothèse sur l'idéal (f).

Démonstration. – On peut évidemment supposer que $g_1 = P^n$, P étant un élément irréductible $\mathbf{R}[[X, Y]]$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 5.2. – *Soit $p \in \mathbf{R}[[X, Y]]$ un élément irréductible ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) l'idéal (p) *n'est pas réel*

b) $V_f(p) = \{0\}$.

La démonstration s'appuie sur le théorème des zéros formels (1.4) :

a) ⇒ b) : si (p) n'est pas réel, l'idéal des séries nulles sur $V_f(p)$ contient strictement (p) et est intersection d'idéaux premiers : c'est donc l'idéal maximal de $\mathbf{R}[[X, Y]]$, dont la variété formelle est évidemment réduite à l'origine.

b) ⇒ a) : si $V_f(p) = \{0\}$, l'idéal des séries nulles sur $V_f(p)$ est l'idéal maximal, et il est égal à $\sqrt[R]{(p)}$ (1.5) ; (p) ne peut donc être réel.

Remarque. – On peut montrer ([10]) que les conditions a) et b) sont équivalentes à dire que p est réductible dans $\mathbf{C}[[X, Y]]$.

Deux cas sont alors possibles :

a) $V_f(P) = \{0\}$ (ce qui est équivalent au fait que (P) ne soit pas réel : cf. 5.2).

Soit $\widetilde{P}$ une fonction différentiable définie sur un voisinage U de 0 telle que :

1) $T\widetilde{P} = P$

2) L'idéal $\widetilde{P}\,\mathcal{E}(U)$ soit fermé

3) $\widetilde{P}(x) \neq 0$ si $x \in U - \{0\}$.

La condition 2) est possible car $\widetilde{P}$ est localement équivalente en 0 à une fonction analytique (cf. [6], p. 173). La condition 3) résulte alors de 2.6.

Désignons par $\widetilde{f}$ un représentant du germe f défini sur l'ouvert U : on a évidemment $T_x\widetilde{f} \in (T_x\widetilde{P}^n)$ $\forall x \in U$ puisque $(T_x\widetilde{P}^n) = (1)$ pour $x \neq 0$.

L'idéal $\widetilde{P}^n\ \mathcal{E}(U)$ étant fermé, $\widetilde{f}$ est divisible par $\widetilde{P}^n$ dans U, et on a bien une décomposition du type voulu.

b) L'idéal (P) est réel, i.e. est l'idéal de toutes les séries nulles sur $V_f(P)$. (P) C [[X , Y]] est alors encore un idéal premier ([10]), ce qui implique que la forme initiale de P est égale à une puissance d'une forme linéaire réelle (cf. [7], p. 508).

Si l'on suppose que f est un polynôme distingué en y, cela implique que le polynôme $\hat{P}(0\ ,y')$ a une seule racine et que celle-ci est réelle puisque les racines de $\hat{P}(0\ ,y')$ correspondent aux tangentes à la courbe P = 0.

Il en sera de même alors pour les transformées strictes successives de P ; le raisonnement du théorème 4.1. par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaire pour résoudre la courbe (Tf) s'applique alors sans changement.

c.q.f.d.

Remarque. – J.C. Tougeron m'a signalé que l'on pouvait démontrer la proposition 5.1. d'une manière différente à l'aide du théorème 3.2., p. 57 de [6] (ou plutôt de son analogue pour les fonctions différentiables).

On utilise le lemme suivant :

LEMME 5.3. – *Soient f, f_1, f_2 des éléments de $\mathcal{E}_n$ (anneau des germes de fonctions différentiables à l'origine de* R^n) *et soit* I *un idéal propre de $\mathcal{E}_n$. Supposons que $f = f_1 . f_2$* mod. $\mathrm{I}(f_1, f_2)^2$. *On a alors $f = g_1 g_2$, g_1 et g_2 étant des éléments de $\mathcal{E}_n$ vérifiant*

$$g_1 = f_1 \text{ mod. } \mathrm{I}(f_1, f_2)$$

$$g_2 = f_2 \text{ mod. } \mathrm{I}(f_1, f_2).$$

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'appliquer le théorème 3.2. p. 57 de [6] à la fonction $\varphi = f - (f_1 + y_1)(f_2 + y_2)$. On déduit de là que si dans $\mathcal{E}_2$, on a l'inclusion $m^s \subset (f_1, f_2)$ et que $f = f_1 f_2$ mod. $m^{2s+\nu}$ $(\nu \geqslant 1)$ alors il existe deux éléments g_1 et g_2 de $\mathcal{E}_2$ tels que :

$$f = g_1 g_2$$

$$g_1 = f_1 \text{ mod. } m^{s+\nu}$$

$$g_2 = f_2 \text{ mod. } m^{s+\nu}$$

Il suffit alors d'appliquer ceci pour $\nu = +\infty$ pour retrouver la proposition 5.1.

Voici une application de ce qui précède à l'étude des zéros des idéaux de type fini de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$; nous dirons que T I est irréductible si l'anneau $\mathcal{F}_2/\mathrm{TI}$ possède un seul idéal premier minimal : T I est alors soit primaire pour l'idéal maximal de $\mathcal{F}_2$, soit de la forme gQ où Q est soit l'idéal (1), soit un idéal primaire pour l'idéal maximal, et où g est une puissance d'un élément premier non inversible de $\mathcal{F}_2$.

On a alors :

PROPOSITION 5.4. – *Soit* I *un idéal de type fini de* $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$. *Tout sous-ensemble* E *de l'ensemble des points x ou* $\mathrm{T}_x\mathrm{I}$ *est réductible possède un point isolé dans* E.

Démonstration. – Soit E un sous-ensemble de l'ensemble des points x où $\mathrm{T}_x\mathrm{I}$ est réductible (et donc non nul), et supposons $0 \in \mathrm{E}$. Nous allons montrer par récurrence sur l'ordre n de l'idéal I qu'il y a un point isolé de E dans tout voisinage de 0.

a) *si* $n = 2$.

TI étant réductible en 0 par hypothèse, on peut écrire $\mathrm{T\,I} = \mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2$ P_1 et P_2 étant deux éléments d'ordre 1 de $\mathcal{F}_2$.

Soit $f \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{T}f = \mathrm{P}_1 \mathrm{P}_2$: la proposition 5.1. montre que $f = f_1 f_2$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$, avec $\mathrm{T}f_1 = \mathrm{P}_1$ et $\mathrm{T}f_2 = \mathrm{P}_2$; V (I) se décompose donc en deux branches lisses au voisinage de 0, et 0 est nécessairement isolé parmi les points où $\mathrm{T}_x \mathrm{I}$ est réductible.

b) *cas général.*

On peut écrire par hypothèse :

$$\mathrm{T\,I} = \varphi\,\varphi'\,\mathrm{Q}$$

φ et φ' étant deux éléments de $\mathcal{F}_2$ sans facteurs communs, et Q étant primaire pour l'idéal maximal ou égal à (1).

LEMME 5.5 – *Soient φ et φ' deux éléments de* $\mathbf{R}[[x, y]] = \mathcal{F}_2$ *premiers entre eux. Alors :*

$$\mathrm{V}_f(\varphi) \cap \mathrm{V}_f(\varphi') = \{0\}.$$

En effet, l'idéal des éléments de $\mathcal{F}_2$ nuls sur $\mathrm{V}_f(\varphi) \cap \mathrm{V}_f(\varphi')$ contient φ et φ' et est intersection d'idéaux premiers : c'est donc l'idéal maximal de $\mathcal{F}_2$.

Nous pouvons supposer que 0 n'est pas isolé dans E (sinon il n'y a rien à démontrer), et donc qu'il existe une suite $(a_i)_{i\in \mathrm{N}}$ de points de $\mathbf{R}^2$ telle que :

a) $a_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathrm{N}$

b) la suite (a_i) converge vers 0

c) $a_i \in \mathrm{V}(\mathrm{I})$ et $a_i \in \mathrm{E} \quad \forall i \in \mathrm{N}$.

Comme $\mathrm{V}_f(\mathrm{T\,I}) = \mathrm{V}_f(\varphi\,\varphi')$, la condition c) implique que le germe de fermés défini par la suite (a_i) en 0 appartient à $\mathrm{V}_f(\varphi\,\varphi')$; quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que le germe de (a_i) en 0 appartient à $\mathrm{V}_f(\varphi)$ par exemple.

Si q est l'ordre de la série φ', nous allons montrer que l'ordre de I au point a_i est inférieur ou égal à $n - q$ pour i assez grand (rappelons que I est supposé être d'ordre n à l'origine).

Posons en effet $I = (f_1, \ldots, f_p)$; on a par hypothèse

$$T f_i = \varphi \varphi' g_i ,$$

l'idéal $(g_1, \ldots, g_p)$ étant primaire pour l'idéal maximal ou égal à (1).

Comme φ et φ' n'ont pas de diviseur commun, on peut écrire $g_i = h_i h'_i h''_i$, les diviseurs premiers de h_i divisant φ, ceux de h'_i divisant φ' et h''_i étant premier avec φ et φ'.

On a donc $\varphi \varphi' g_i = \varphi_i \varphi'_i h''_i$ en posant $\varphi_i = \varphi h_i$ et $\varphi'_i = \varphi' h'_i$, φ_i, φ'_i et h''_i étant premiers deux à deux.

La proposition 5.1. permet alors d'écrire :

$$I = (\widetilde{\varphi}_1 \widetilde{\varphi}'_1 \widetilde{h}''_1 , \ldots , \widetilde{\varphi}_p \widetilde{\varphi}'_p \widetilde{h}''_p) ,$$

$\widetilde{\varphi}_i$, $\widetilde{\varphi}'_i$ et $\widetilde{h}''_i$ étant des fonctions différentiables vérifiant :

$$\begin{aligned} f_i &= \widetilde{\varphi}_i \widetilde{\varphi}'_i \widetilde{h}''_i \\ T(\widetilde{\varphi}_i) &= \varphi_i \\ T(\widetilde{\varphi}'_i) &= \varphi'_i \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{i}\ T(\widetilde{h}''_i) = h''_i \quad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

Le lemme 5.5. implique alors que $\widetilde{\varphi}'_i(a_j) \neq 0$ pour j assez grand, et donc que l'ordre de I en a_j est inférieur ou égal à $n - q$.

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au point a_j. ce qui achève la démonstration de la proposition 5.4.

PROPOSITION 5.6. – *Soient* U_1 *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *et* f *un élément de* $\mathcal{E}(U_1)$ *tel que l'idéal* (f) *soit fermé et que* $V(f)$ *soit une sous-variété de codimension* 2 W *de* $\mathbf{R}^n$. *Il existe alors un ouvert* $U \subset U_1$ *tel que* $U \cap W \neq 0$ *et tel que* $f \mid U$ *ou* $-f \mid U$ *soit une somme de deux carrés dans* $\mathcal{E}(U)$.

Démonstration. – Le problème est local ; reprenons les notations du théorème 4.1. ; nous allons raisonner par récurrence sur le nombre minimum r d'éclatements nécessaires pour faire baisser la multiplicité de la courbe $\overline{T_M} f(x, y)$ (pour $M \in W$) et sur l'ordre p de $T_M f$.

Le nombre p est localement borné, ainsi que r à cause de la proposition 3.3.

Nous supposons comme toujours que f est un polynôme distingué en y et que l'ordre p de f est constant sur $U_1 \cap W$.

a) $r = 1$ et $p = 2$.

Pour chaque $M \in W$, la courbe plane formelle $T_M\, f(x, y)$ vérifie $V_f\,(T_M\, f(x, y) = \{0\}$ (cf. 2.6.) ; comme elle est résolue par un seul éclatement, elle a nécessairement deux tangentes distinctes imaginaires conjuguées, et le raisonnement du lemme 4.5. montre que f est une somme de deux carrés dans un ouvert convenable.

b) *Cas général.*

Plaçons-nous sur un ouvert U' tel que l'ordre de $T_M f$ soit constant pour $M \in U' \cap W$, et tel que le nombre de racines de $\hat{f}(0, y', z)$ soit constant : $f(x, y, z)$ est alors un produit de facteurs qui correspondent chacun à une racine réelle ou à deux racines complexes conjuguées de $f(0, y', z)$ (4.2.).

Si un facteur correspond à deux racines complexes conjuguées, c'est une somme de deux carrés par le raisonnement du lemme 4.5. ; s'il correspond à une racine réelle, sa transformée stricte est une somme de deux carrés par hypothèse de récurrence. Un produit de sommes de deux carrés étant une somme de deux carrés, on peut supposer que $\hat{f}(\hat{0}, y', z)$ a une seule racine rélle pour $z \in U' \cap W$ et que $\hat{f}(x, y', z)$ est une somme de deux carrés.

On peut alors appliquer la proposition 4.6. (valable si g_1 et g_2 sont à coefficients complexes) et raisonner comme dans 4.5. pour montrer que $f(x, y, z)$ est aussi une somme de deux carrés dans un ouvert convenable.

COROLLAIRE 5.7. – *Soit* $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ *tel que l'idéal* (f) *soit fermé et réel. Alors* $V(f)$ *ne possède pas de point lisse de dimension* $n - 2$.

Remarque. – Un pas essentiel dans la démonstration du théorème des zéros pour les fonctions différentiables serait de démontrer que sous les hypothèses précédentes tous les points lisses de $V(f)$ sont de dimension $n - 1$. (cf. 2.7. à ce sujet).

6. Le théorème des zéros en dimensions 2 et 3.

THEOREME 6.1. – *Soit* I *un idéal de type fini de* $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) I *est fermé et réel,*

b) *toute fonction nulle sur* V (I) *appartient à* I (*i.e.* I *satisfait à la condition des zéros).*

Démonstration. – Il suffit de montrer que a) ⇒ b) ; soit I un idéal de type fini de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ fermé et réel et soit g un élément de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ nul sur V(I) : il faut montrer que $g \in$ I. Comme I est fermé, il suffit pour cela de voir que $T_x g \in T_x I$ pour tout $x \in \mathbf{R}^2$.

Nous supposerons que $0 \in V(I)$ et noterons T I l'idéal de $\mathcal{F}_2 = \mathbf{R}[[X, Y]]$ engendré par les séries de Taylor des éléments de I ; rappelons que TI n'est pas nul (1.6).

LEMME 6.2. – *Tous les idéaux premiers de* $\mathcal{F}_2$ *qui contiennent* T I *sont réels.*

Le lemme est évident si T I est primaire pour l'idéal maximal de $\mathcal{F}_2$.

Dans le cas contraire, supposons par l'absurde que l'idéal premier principal (P) contienne T I et ne soit pas réel, i.e. qu'il existe des éléments $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $\mathcal{F}_2$ tels que $\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_k^2 \in (P)$ et $\varphi_i \notin (P)$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Soient $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_p$, $\widetilde{P}$ des éléments de $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ tels que $T\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$, $T\widetilde{P} = P$, et tels que $\widetilde{P}$ engendre dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ un idéal fermé (ce qui est possible puisque $\widetilde{P}$ est localement en 0 équivalente à une fonction analytique).

Comme (P) n'est pas réel, l'idéal des séries formelles nulles sur $V_f(P)$ est l'idéal maximal de $\mathcal{F}_2$, ce qui implique que $V_f(P) = \{0\}$ et donc qu'il existe un voisinage U de l'origine tel que $\widetilde{P}(x) \neq 0$ pour $x \in U - \{0\}$ (2.6.).

Soit f un élément de I tel que $Tf \neq 0$; il existe un entier r tel que Tf soit divisible par P^r mais pas par P^{r+1}. L'idéal $(\widetilde{P}^r)$ étant fermé, f est divisible par $\widetilde{P}^r$ dans $\mathcal{E}$ (U).

La fonction $g = (\Sigma \widetilde{\varphi}_i^2)^r \ (f/\widetilde{\mathrm{P}}^r)$ est telle que $\mathrm{T}_x g \in (\mathrm{T}_x f) \subset \mathrm{T}_x \mathrm{I}$ $\forall \ x \in \mathrm{U}$; elle appartient donc à l'idéal $\mathrm{I}\,\mathcal{E}\,(\mathrm{U})$ puisque cet idéal est fermé.

On en déduit que $\widetilde{\varphi}_i f/\widetilde{\mathrm{P}}^r \in \mathrm{I}\,\mathcal{E}\,(\mathrm{U})$ puisque $\mathrm{I}\,\mathcal{E}\,(\mathrm{U})$ est réel, et donc $\varphi_i \ \mathrm{T}f/\mathrm{P}^r \in \mathrm{T}\,\mathrm{I} \subset (\mathrm{P})$, ce qui est absurde puisque par hypothèse ni φ_i, ni $\mathrm{T}f/\mathrm{P}^r$ ne sont divisibles par P.

c.q.f.d.

COROLLAIRE 6.3. – Tg *appartient à tous les idéaux premiers de* $\mathcal{F}_2$ *qui contiennent* T I.

Cela résulte du lemme 6.2. et du corollaire 2.3.

Pour chaque $x \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{T}_x g$ appartient ainsi à la racine de $\mathrm{T}_x \mathrm{I}$: il existe donc un entier n_x tel que $(\mathrm{T}_x g)^{n_x} \in \mathrm{T}_x \mathrm{I}$. Le problème est maintenant de montrer que cet entier est localement borné en fonction de x.

Nous poserons $\mathrm{I} = (f_1, \ldots, f_n)$, et si $x \in \mathrm{V(I)}$, $\mathrm{T}_x \mathrm{I} = \varphi_x \mathrm{Q}_x$, l'idéal Q_x étant primaire pour l'idéal maximal ou égal à (1), et φ_x étant un élément non nul de $\mathcal{F}_2(x)$ (φ_x est un p.g.c.d. des éléments $\mathrm{T}_x f_1, \ldots, \mathrm{T}_x f_n$). Nous supposerons qu'aucun des $\mathrm{T}_x f_i$ n'est nul (cf. 1.6).

LEMME 6.4. – *Il existe un voisinage* U *de* 0 *et un entier* α *tels que* $\varphi_x^\alpha \in \mathrm{T}_x \mathrm{I}$ *pour tout point* x *de* U *tel que* φ_x *ne soit pas inversible.*

Démonstration. – Si T I est primaire pour l'idéal maximal, 0 est isolé dans V(I) (2.6) et T I est égal à l'idéal maximal de $\mathcal{F}_2$ (2.5.) : le lemme est évident dans ce cas.

On peut donc supposer que $\mathrm{T}\,\mathrm{I} = \varphi(g_1, \ldots, g_n)$, avec $\mathrm{T}f_i = \varphi g_i$, l'idéal $(g_1, \ldots, g_n)$ étant primaire pour l'idéal maximal ou égal à (1) et φ étant non inversible.

Posons $g_i = g_i' g_i''$ les facteurs premiers de g_i' divisant φ et g_i'' étant premier avec φ. On a donc $\mathrm{T}\,\mathrm{I} = (\varphi_1 \, g_i'', \ldots, \varphi_n \, g_n'')$ en posant $\varphi_i = \varphi g_i'$, φ_i et g_i'' étant sans facteur commun.

D'après la proposition 5.1., il existe un voisinage U de 0 tel que :

$$\mathrm{I}\,\mathcal{E}(\mathrm{U}) = (\widetilde{\varphi}_1 \widetilde{g}_1'', \ldots, \widetilde{\varphi}_n \widetilde{g}_n''),$$

$\widetilde{\varphi}_i$ et $\widetilde{g}_i''$ étant des fonctions différentiables sur U vérifiant $T\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i$ et $T\widetilde{g}_i'' = g_i''$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Comme $(g_i, \ldots, g_n) \subset (g_1'', \ldots, g_n'')$, l'idéal $(g_1'', \ldots, g_n'')$ est primaire ou égal à (1) ; il existe donc pour tout x assez voisin de 0 un i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tel que $\widetilde{g}_i''(x) \neq 0$ (car 0 est isolé dans $V(\widetilde{g}_i'', \ldots, \widetilde{g}_n'')$: cf. 2.6.).

L'élément $h = \widetilde{\varphi}_1 \ldots \widetilde{\varphi}_n$ est donc tel que $T_x h \in T_x I$ pour x assez voisin de 0 et différent de 0 ; il existe d'autre part un entier β tel que $(Th)^\beta \subset TI$ puisque l'idéal $(g_1, \ldots, g_n)$ est primaire pour l'idéal maximal. On a donc $h^\beta \in I\ \mathscr{E}(U)$ (pour U assez petit) puisque $I\ \mathscr{E}(U)$ est fermé, d'où $h \in I\ \mathscr{E}(U)$ puisque $I\ \mathscr{E}(U)$ est réel (cf. 2.1.).

Mais il existe un entier β_0, borné par le sup. des ordres des f_i en 0, tel que $\varphi^{\beta_0} \in (\varphi_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ car φ et φ_i ont les mêmes facteurs premiers. On a donc :

$$\varphi^{n\beta_0} \in (\varphi_1 \ldots \varphi_n) = (Th) \subset TI.$$

Ceci démontre le lemme 6.4. car le sup. des ordres en x des f_i est borné pour x assez voisin de 0.

Achevons maintenant la démonstration du théorème 6.1. : soient U un ouvert contenant 0 et α un entier vérifiant le lemme 6.4. Supposons, de plus, que l'inf. des ordres des générateurs de $T_x I$ soit borné par un entier k pour $x \in U$.

Le corollaire 6.3. implique que $T_x g$ est divisible par tous les facteurs premiers de φ_x ; on a donc :

$$(T_x g)^k \in (\varphi_x) \quad \forall\ x \in U,$$

d'où
$$(T_x g)^{k\alpha} \in T_x I \quad \forall\ x \in U$$

d'après le lemme 6.4., ce qui implique $g^{k\alpha} \in I\ \mathscr{E}(U)$ puisque cet idéal est fermé, et $g \in I\ \mathscr{E}(U)$ puisque il est réel.

Considérons maintenant le cas d'un idéal principal dans $\mathscr{E}(\mathbf{R}^3)$. Si $f \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^3)$, nous dirons que $V(f)$ est stratifiable si $V(f)$ est réunion disjointe de sous-variétés : $V(f) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$, V_i étant de dimension i ($i = 0$, 1 ou 2) et V_2 étant l'ensemble des points lisses de dimension 2 de $V(f)$.

V_1 étant de dimension 1 et contenu dans $V(f)$, on peut appliquer le théorème 4.1. si l'on suppose l'idéal (f) fermé.

Considérons la condition suivante :

(C) le complémentaire (dans V_1) de l'ouvert dense $U \subset V_1$ dans lequel le théorème 4.1. est applicable est formé de points isolés.

On a alors :

THEOREME 6.5. – *Soit $f \in \mathcal{E}(\mathrm{R}^3)$ telle que l'idéal (f) soit fermé et réel. Supposons* $V(f)$ *stratifiable et la condition* (C) *satisfaite.*

Alors toute fonction différentiable nulle sur $V(f)$ *appartient à (f).*

Démonstration. – Remarquons d'abord que $V(f)$ n'a pas de point lisse de dimension 0 (2.7.) ni de dimension 1 (5.7.) ; autrement dit, V_2 est dense dans $V(f)$.

Soit $g \in \mathcal{E}(\mathrm{R}^3)$ nulle sur $V(f)$; pour montrer que $g \in (f)$, il suffit de voir que $T_M g \in (T_M f) \forall\ M \in V(f)$.

a) Considérons d'abord le cas où $M \in V_2$; supposons qu'une équation de V_2 soit $x = 0$ au voisinage de M ; f étant nulle sur V_2 est divisible par x : $f = xf_1$, (f_1) étant encore fermé et réel (4.4.). D'après ce qui précède, si f_1 n'est pas inversible, $V(f_1)$ possède aussi un ensemble dense de points lisses de dimension 2.

Comme $V(f_1) \subset V(f)$, ces points lisses sont donnés par $(x = 0)$ au voisinage de M, et f_1 est aussi divisible par x au voisinage d'un tel point, ce qui est en contradiction avec le fait que (f) est réel.

On a donc $(f) = (x)$ au voisinage de M, et évidemment $g \in (f)$ au voisinage de M si g est nul sur $V(f)$.

b) Prenons $M \in V_1$ tel qu'au voisinage de M le théorème 4.1. soit applicable ; si $T_M f = P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r}$; les P_i étant des éléments irréductibles de $\mathcal{F}_3(M)$, on a par 4.1. une décomposition $f = f_1 \dots f_r$ au voisinage de M, avec $T_M f_i = P_i^{n_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$; (f_1) étant encore fermé et réel (cf. lemme 4.4.), l'ensemble des points lisses de dimension 2 de $V(f_1)$ est dense dans $V(f_1)$. On a donc $T_M g \in (T_M f_1)$ sur un ensemble dense de $V(f_1)$ par le raisonnement de a) ; le théorème de semi-continuité ([6], p. 39) montre alors que la dimension de Krull de $\dfrac{\mathcal{F}_3(M)}{(P_1^{n_1}, T_M g)}$ est supérieure ou égale à 2 : on a donc $T_M g \in (P_1)$.

Le même raisonnement montre que $T_M g \in P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et donc $T_M g \in P_1 \dots P_r$. Comme le nombre $\sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (n_i)$ est borné au voisinage de M, il existe α tel que $T_N g^\alpha \in T_N(f)$ pour N dans un voisinage convenable de M ; on a ainsi $g^\alpha \in (f)$ dans ce voisinage, d'où $g \in (f)$ puisque (f) est réel et donc $T_M g \in (T_M f)$.

c) On a $T_M g \in (T_M f)$ pour tout point de V_2 (cf. (a)) et sur un sous-ensemble de V_1 (cf. (b)) dont le complémentaire est discret à cause de la condition (C).

Comme V_0 est discret puisque c'est une variété de dimension 0, la proposition 2.8. montre que $T_M g \in (T_M f)$ $\forall M \in V(f)$, et donc que $g \in (f)$ puisque (f) est fermé.

c.q.f.d.

Problèmes.

1) trouver une condition simple liée à f qui implique (C).

2) 6.5. est-il vrai sans la condition (C) ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BOCHNAK, Sur le théorème des zéros de Hilbert différentiable, *Topology*, (1973).

[2] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, Bombay (1966).

[3] M. RAYNAUD, Anneaux locaux henséliens, *Lectures Notes in Math.*, 169.

[4] J.J. RISLER, Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane, *Bulletin de la S.M.F.*, 99 (1971).

[5] R. THOM, On some ideal of differentiable functions, *J. Math. Soc. Japan*, 19 (1964).

[6] J.C. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, Springer Verlag (1972).

[7] O. ZARISKI, Studies in equisingularity I, *Amer. J. of Math.*, 87 (1965).

[8] O. ZARISKI, Studies in equisingularity II, *Amer. J. of Math.*, 87 (1965).

[9] G. GLAESER , Proceedings Liverpool singularities, vol. II, *Lectures Notes* n° 209, (Springer).

[10] J.J. RISLER , Le théorème des zéros en géométries algébrique et analytique réelles, *Bull. Soc. Math. France,* 104 (1976).

[11] J. MERRIEN, Un théorème des zéros. . . *C.R.A.S.,* Paris 276.

[12] J. MERRIEN, Idéaux de l'anneau des séries formelles, *Journal Math. Pures et Appl.,* 50 (1971).

Manuscrit reçu le 20 avril 1975
Proposé par B. Malgrange.

Jean-Jacques RISLER,
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
91 120 Palaiseau.