

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOËL BRIANÇON

JEAN-PAUL SPEDER

**Les conditions de Whitney impliquent  $\mu(*)$  constant**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 26, n° 2 (1976), p. 153-163

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1976\\_\\_26\\_2\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_153_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LES CONDITIONS DE WHITNEY IMPLIQUENT « $\mu^{(*)}$ CONSTANT »

par J. BRIANÇON et J.-P. SPEDER

La situation que nous étudions est la suivante :

$X$  est un représentant d'un germe d'hypersurface à l'origine de  $\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}^p$  ( $n > 0$ ,  $p > 0$ ), définie par l'équation

$$F(z, t) = 0 \quad (\text{où } z = (z_0, \dots, z_n))$$

et  $t = (t_1, \dots, t_p)$ ); nous supposons que  $X$  contient

$$Y = \{0\} \times \mathbf{C}^p$$

et que, si  $\rho$  désigne la rétraction canonique de  $X$  sur  $Y$ , l'idéal jacobien relatif (à la rétraction  $\rho$ )

$$J_\rho(F) = \left( \frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) \mathcal{O}_X$$

définit  $Y$ .

Dans ces conditions, pour  $y \in Y$  assez voisin de  $0$ , la fibre  $X_y$  de  $\rho$  au-dessus de  $y$  est alors un représentant d'un germe d'hypersurface à singularité isolée de  $\mathbf{C}^{n+1} \times \{y\}$ .

### 1. Conditions de Whitney et sections planes génériques.

Dans la situation précédente, lorsque  $p = 1$ , nous montrons :

**THÉORÈME 1.** — *Si le couple  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney au voisinage de  $0$ , il existe un ouvert dense  $\mathcal{V}^{(i)}$  ( $2 \leq i \leq n$ ) de la grassmannienne des  $i + 1$ -plans passant*

par  $Y$  tel que, pour tout  $H \in \mathcal{V}^{(0)}$  et dans un voisinage de  $0$  dépendant de  $H$ :

- $X \cap H$  est réduit.
- Le lieu singulier relatif de  $X \cap H$  est  $Y$ .
- $(X \cap H, Y)$  vérifie les conditions de Whitney.

Étant donné un disque d'épreuve

$$h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}, 0)$$

et  $\nu$  la valuation associée dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{n+2,0}$ , nous noterons :

$$\nu(z) = \inf_{0 \leq i \leq n} \nu(z_i), \quad \nu(J_\rho(F)) = \inf_{0 \leq i \leq n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)$$

LEMME 1. — Si  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney en  $0$ , pour tout disque d'épreuve  $h$  envoyant  $\mathbf{D} - \{0\}$  dans  $X - Y$ , on a :

$$\nu\left(t \frac{\partial F}{\partial t}\right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F))$$

Preuve du lemme 1. — Pour  $\tau \in \mathbf{D}$ , soit

$$h(\tau) = (z_0(\tau), \dots, z_n(\tau), t(\tau)).$$

Par hypothèse,  $F \circ h$  est identiquement nul, on a donc :

$$\begin{aligned} (*) \quad z'_0(\tau) \left(\frac{\partial F}{\partial z_0} \circ h\right)(\tau) + \dots + z'_n(\tau) \left(\frac{\partial F}{\partial z_n} \circ h\right)(\tau) \\ = -t'(\tau) \left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ h\right)(\tau) \end{aligned}$$

que l'on note  $P(\tau)$  ( $\tau \in \mathbf{D}$ ).

D'autre part, si  $Q = z_0 \frac{\partial F}{\partial z_0} + \dots + z_n \frac{\partial F}{\partial z_n}$ , les conditions de Whitney ([8] page 540) impliquent :

$$(**) \quad \nu(Q) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F))$$

De manière évidente, l'ordre de  $P(\tau)$  est au moins égal à  $\nu(z) + \nu(J_\rho(F)) - 1$ ; nous allons montrer que l'on a, en fait, une inégalité stricte.

En effet :

— si  $\alpha = \nu(z)$ , nous avons  $z_i(\tau) = a_i \tau^\alpha + \dots$  ( $0 \leq i \leq n$ ) où les  $a_i$  sont non tous nuls.

— si  $\beta = \nu(J_\rho(F))$ , nous avons

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \circ h\right)(\tau) = b_i \tau^\beta + \dots \quad (0 \leq i \leq n)$$

où les  $b_i$  sont non tous nuls.

Nous avons alors :

$$P(\tau) = \alpha \left(\sum_{i=0}^n a_i b_i\right) \tau^{\alpha+\beta-1} + \dots$$

et 
$$(Q \circ h)(\tau) = \left(\sum_{i=0}^n a_i b_i\right) \tau^{\alpha+\beta} + \dots$$

D'après (\*\*),  $\left(\sum_{i=0}^n a_i b_i\right)$  est nul et donc l'ordre de  $P(\tau)$  est strictement supérieur à  $\alpha + \beta - 1$ .

Finalement, grâce à (\*),  $\nu\left(t \frac{\partial F}{\partial t}\right) - 1$  égale l'ordre de  $P(\tau)$  et donc  $\nu\left(t \frac{\partial F}{\partial t}\right) > \alpha + \beta$ .

LEMME 2. — Si  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney en 0, il existe un ouvert dense  $\mathcal{V}^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de la grassmannienne des  $i + 1$ -plans de  $\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}$  contenant  $Y$  tel que, pour  $H \in \mathcal{V}^{(i)}$  et tout disque d'épreuve

$$h : (\mathbf{D}, 0) \rightarrow ((X \cap H)_{\text{red}}, 0)$$

on ait :

$$J_\rho(F) \circ h = J_\rho(F/H) \circ h$$

où  $(X \cap H)_{\text{red}}$  désigne l'espace analytique réduit sous-jacent à  $X \cap H$  et  $J_\rho(F/H)$  est la restriction à  $(X \cap H)_{\text{red}}$  de l'idéal jacobien relatif de  $F/H$ .

Preuve du Lemme 2. — Nous utilisons le théorème suivant de B. Teissier et J. P. Henry ([6]).

THÉORÈME. — Soit  $G(x_1, \dots, x_r; a_1, \dots, a_q)$  une fonction analytique complexe au voisinage de  $\{0\} \times \mathbf{C}^q \subset \mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^q$ . On suppose que  $G$  et son idéal jacobien relatif (à la rétraction canonique  $\mathbf{C}^r \times \mathbf{C}^q \rightarrow \{0\} \times \mathbf{C}^q$ )  $\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_r}\right) \mathcal{O}_{r+q}$  sont contenus dans l'idéal  $(x_1, \dots, x_r) \mathcal{O}_{r+q}$ .

Il existe un ouvert dense  $\mathcal{V}$  de  $\mathbf{C}^q$  tel que, pour tout  $a \in \mathcal{V}$  et  $j = 1, \dots, q$ , on ait :

$$\frac{\partial G}{\partial a_j} \in \overline{\left( x_1 \frac{\partial G}{\partial x_1}, \dots, x_r \frac{\partial G}{\partial x_r} \right)} \mathcal{O}_{r+q, (0, a)}$$

(clôture intégrale).

Pour  $a = (a_{l,j})$   $0 \leq l \leq n-i$ ,  $n-i+1 \leq j \leq n$  appartenant à  $\mathbf{C}^{(n-i+1) \times i}$ , notons  $H_a$  le  $i+1$ -plan d'équation

$$z_0 = \sum_j a_{0,j} z_j, \dots, z_{n-i} = \sum_j a_{n-i,j} z_j.$$

Définissons aussi  $\omega : \mathbf{C}^i \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{(n-i+1) \times i} \rightarrow \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}$  par

$$\omega(z_{n-i+1}, \dots, z_n, t; a) = \left( \sum_j a_{0,j} z_j, \dots, \sum_j a_{n-i,j} z_j, z_{n-i+1}, \dots, z_n, t \right).$$

Comme B. Teissier dans ([6]), appliquons le théorème précédent à  $G = F \circ \omega$  qui vérifie de manière évidente les hypothèses du théorème puisque l'on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial z_j} = \sum_{l=0}^{n-i} a_{l,j} \frac{\partial F}{\partial z_l} \circ \omega + \frac{\partial F}{\partial z_j} \circ \omega & n-i+1 \leq j \leq n \\ \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} \circ \omega \end{cases}$$

Il existe par conséquent un ouvert dense  $\mathcal{V}$  de  $\mathbf{C}^{(n-i+1) \times i}$  tel que pour  $\underline{a} \in \mathcal{V}$  et tout  $(l, j)$ , on ait :

$$\frac{\partial G}{\partial a_{l,j}} \in \overline{\left( z_{n-i+1} \frac{\partial G}{\partial z_{n-i+1}}, \dots, z_n \frac{\partial G}{\partial z_n}, t \frac{\partial G}{\partial t} \right)}_{(0, \underline{a})}$$

Fixons  $a \in \mathcal{V}$  et, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées en  $(z_0, \dots, z_n)$ , supposons que  $\underline{a} = 0$ .

Nous avons alors :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial z_j} \right) / H_0 = \frac{\partial F / H_0}{\partial z_j} \quad n-i+1 \leq j \leq n.$$

Prenons maintenant un disque d'épreuve

$$h : (\mathbf{D}, 0) \rightarrow ((X \cap H_0)_{\text{red}}, 0);$$

il nous reste à montrer que

$$\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_l}\right) \geq \inf_{n-i+1 \leq j \leq n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right) \quad 0 \leq l \leq n-i.$$

Quitte à permuter les coordonnées  $z_0, \dots, z_{n-i}$ , nous pouvons supposer que  $\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) = \inf_{0 \leq l \leq n-i} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_l}\right)$  et donc aussi que  $\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) = \nu(J_\rho(F))$ .

Nous pouvons enfin nous limiter au cas où

$$h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset (X \cap H_0)_{\text{red}} - Y$$

(car sinon  $\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) = +\infty$ ).

Le disque d'épreuve  $h$  se relève en  $\tilde{h}: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (G^{-1}(0), (0, 0))$  tel que  $h = \omega \circ \tilde{h}$  et  $a \circ \tilde{h} = 0$ ; nous noterons  $\omega$  la valuation associée à  $\tilde{h}$ .

D'après le théorème précédent, nous avons :

$$(*) \quad \omega\left(\frac{\partial G}{\partial a_{0,j}}\right) \geq \inf \left[ \omega(z) + \inf_{n-i+1 \leq j \leq n} \omega\left(\frac{\partial G}{\partial z_j}\right), \omega\left(t \frac{\partial G}{\partial t}\right) \right]$$

pour  $n-i+1 \leq j \leq n$ .

Or, nous avons :

$$\frac{\partial G}{\partial a_{0,j}} = z_j \frac{\partial F}{\partial z_0} \circ \omega \quad n-i+1 \leq j \leq n$$

et d'autre part, d'après le lemme 1 :

$$\omega\left(t \frac{\partial G}{\partial t}\right) = \nu\left(t \frac{\partial F}{\partial t}\right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F)) = \nu(z) + \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right).$$

Finalement, puisque  $H_0 = \{z_0 = \dots = z_{n-i} = 0\}$  l'inégalité

$$(*) \quad \nu(z) + \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) \geq \inf \left[ \nu(z) + \inf_{n-i+1 \leq j \leq n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right), \omega\left(t \frac{\partial G}{\partial t}\right) \right]$$

implique :

$$\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_0}\right) \geq \inf_{n-i+1 \leq j \leq n} \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right).$$

*Remarque.* — Sous les conditions du lemme 2, il résulte de ([4] 0 proposition 0.4) que :

$$\overline{J_\rho(F)\mathcal{O}_{(X \cap H)_{\text{red}, 0}}} = \overline{J_\rho(F/H)_0}.$$

Dans un voisinage de 0 dépendant de H, le support du lieu singulier relatif de  $X \cap H$  est donc identique à Y.

*Preuve du Théorème 1.* — Comme  $i \geq 2$ , la remarque précédente indique que, dans un voisinage de 0 dépendant de H,  $X \cap H$  est réduit.

De plus, pour tout  $H \in \mathcal{V}^{(i)}$  et tout disque d'épreuve  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (X \cap H, y)$  (où  $y$  appartient à un voisinage de 0 dépendant de H), nous avons aussi :

$$J_\rho(F) \circ h = J_\rho(F/H) \circ h.$$

Supposons encore que le  $i + 1$ -plan H ait pour équations  $z_0 = \dots = z_{n-i} = 0$ . Pour assurer les conditions de Whitney de  $(X \cap H, Y)$  au voisinage de 0, il suffit donc de montrer que, pour tout disque d'épreuve  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (X \cap H, y)$  tel que  $y$  est suffisamment voisin de 0 dans Y et

$$h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset (X \cap H) - Y,$$

on a :

$$a_H) \quad \nu \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) > \nu(J_\rho(F/H))$$

$$b_H) \quad \nu \left( \sum_{j=n-i+1}^n z_j \frac{\partial F}{\partial z_j} \right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F/H))$$

Or, comme le couple  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney en  $y$ , on a :

$$a) \quad \nu \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) > \nu(J_\rho(F))$$

$$b) \quad \nu \left( \sum_{i=0}^n z_i \frac{\partial F}{\partial z_i} \right) > \nu(z) + \nu(J_\rho(F))$$

D'où le résultat puisque, d'après le lemme 2,

$$\nu(J_\rho(F)) = \nu(J_\rho(F/H)).$$

*Remarque.* — Dans le cas où  $i = 1$ , le lemme 2 et sa remarque permettent d'obtenir le résultat analogue suivant :

Pour tout plan  $H \in \mathcal{V}^{(1)}$ , il existe un voisinage ouvert

$W_H$  de 0 tel que, pour tout  $y \in Y \cap W_H$ ,  $X_y \cap H$  et  $X_0 \cap H$  ont même multiplicité en  $y$  et 0 respectivement.

Pour ceci, il suffit de montrer qu'au voisinage de 0 on a  $(X \cap H)_{\text{red}} = Y$ . Supposons le contraire : il existe un disque d'épreuve  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow ((X \cap H)_{\text{red}}, 0)$  tel que

$$h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset (X \cap H)_{\text{red}} - Y.$$

Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées en  $z_0, \dots, z_n$ , nous pouvons supposer que  $H$  est défini par les équations  $z_0 = \dots = z_{n-1} = 0$ ;  $\nu(z_n)$  et  $\nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_n}\right)$  (remarque du lemme 2) sont alors finis, ce qui est en contradiction avec la condition *b*) de Whitney pour le couple  $(X, Y)$  en 0 qui implique :

$$\nu\left(z_n \frac{\partial F}{\partial z_n}\right) > \nu(z_n) + \nu\left(\frac{\partial F}{\partial z_n}\right)$$

## 2. Les conditions de Whitney impliquent « $\mu^{(*)}$ constant ».

Rappelons que B. Teissier ([4]) attache à un germe

$$(X_0, 0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$$

d'hypersurface à singularité isolée, une suite décroissante d'entiers :

$$\mu^{(*)}(X_0) = (\mu^{(n+1)}(X_0), \dots, \mu^{(i)}(X_0), \dots, \mu^{(0)}(X_0))$$

où  $\mu^{(i)}(X_0)$  est le nombre de cycles évanescents (ou nombre de Milnor) de l'intersection de  $(X_0, 0)$  avec un  $i$ -plan général de  $\mathbf{C}^{n+1}$ .

En particulier  $\mu^{(0)}(X_0) = 1$  et  $\mu^{(1)}(X_0)$  est égal à la multiplicité de  $X_0$  moins 1.

*Théorème 2.* — Si le couple  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney au voisinage de 0 dans  $Y$ , la suite  $\mu^{(*)}(X_y, y)$  est constante au voisinage de 0 dans  $Y$ .

*Preuve dans le cas  $p = 1$ .* — Soient  $i$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ , et  $(y_r)$  une suite de points de  $Y$  tendant vers 0.



Il existe un ouvert dense  $\mathcal{V}_0$  de  $i + 1$ -plans passant par  $Y$  tel que  $\mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(i)}(X_0, 0)$  pour  $H \in \mathcal{V}_0$ .

Pour  $r \in \mathbf{N}$ , il existe un ouvert dense  $\mathcal{V}_r$  de  $i + 1$ -plans passant par  $Y$  tel que  $\mu^{(i)}(X_{y_r} \cap H, y_r) = \mu^{(i)}(X_{y_r}, y_r)$  pour  $H \in \mathcal{V}_r$ .

Dans le cas où  $2 \leq i \leq n + 1$ , le théorème 1 assure l'existence d'un ouvert dense  $\mathcal{V}^{(i)}$  de  $i + 1$ -plans passant par  $Y$  tel que, pour tout  $H \in \mathcal{V}^{(i)}$ , il existe un voisinage ouvert  $W_H$  de  $0$  dans lequel  $X \cap H$  est réduit, son lieu singulier relatif est  $Y$  et  $(X \cap H, Y)$  vérifie les conditions de Whitney.

Pour  $H \in \mathcal{V}^{(i)}$  et  $y \in Y \cap W_H$ , on déduit du théorème de Thom-Mather ([7]) que  $(X_y \cap H, y)$  et  $(X_0 \cap H, 0)$  ont même type topologique et donc, d'après ([4] 0 Théorème 1.4) que :

$$\mu^{(i)}(X_y \cap H, y) = \mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0).$$

Prenons alors, pour  $1 \leq i \leq n$ , un  $i + 1$ -plan

$$H \in \mathcal{V}^{(i)} \cap \mathcal{V}_0 \cap (\cap_r \mathcal{V}_r)$$

(dense) et un point  $y_r \in W_H$  (pour  $i = 1$ , référons-nous à la remarque suivant la démonstration du théorème 1).

Nous savons :

$$\mu^{(i)}(X_{y_r}, y_r) = \mu^{(i)}(X_{y_r} \cap H, y_r) = \mu^{(i)}(X_0 \cap H, 0) = \mu^{(i)}(X_0, 0).$$

Ainsi, pour toute suite  $(y_r)$  de points de  $Y$  tendant vers  $0$ ,  $\mu^{(i)}(X_{y_r}, y_r)$  ( $1 \leq i \leq n + 1$ ) est constant et égal à  $\mu^{(i)}(X_0, 0)$  dès que  $r$  est suffisamment grand; ceci implique que l'application  $y \mapsto \mu^{(i)}(X_y, y)$  est constante au voisinage de  $0$  et, par conséquent, localement constante sur tout voisinage ouvert de  $0$  dans  $Y$  le long duquel  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney.

*Preuve du Théorème 2 pour un nombre quelconque de paramètres.* — Dans la situation décrite au début, si  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney le long d'un polydisque ouvert  $\Omega$  de centre  $0$  dans  $Y$ , pour tout changement de base  $t = \gamma(\tau)$ ,  $\gamma : (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (\Omega, 0)$  le couple  $(X', \mathbf{D})$  obtenu a pour lieu singulier relatif (à la rétraction canonique  $\rho' : X' \rightarrow \mathbf{D}$ )  $\mathbf{D}$  et vérifie les conditions de Whitney le long de  $\mathbf{D}$ .

En effet, notons :

$$\begin{aligned} \Gamma &= Id \times \gamma : \mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}^{n+1} \times \Omega \\ x_i &= z_i \circ \Gamma \quad i = 0, \dots, n \\ G &= F \circ \Gamma. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} J_{\rho'}(G) &= J_{\rho}(F)\theta_X \\ \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} &= \left( \sum_{i=0}^n z_i \frac{\partial F}{\partial z_i} \right) \circ \Gamma \\ \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial F}{\partial t_k} \circ \Gamma \right) \frac{\partial t_k}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout disque d'épreuve  $h : (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (X', y')$  tel que  $y' \in \mathbf{D}$  et  $h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset X' - \mathbf{D}$ , si l'on note  $\nu$  la valuation de  $\theta_{X', y'}$  associée à  $h$  et  $\omega$  celle de  $\theta_{X, \gamma(\tau)}$  associée à  $\Gamma \circ h$ , on a :

$$\begin{aligned} a) \quad \nu \left( \frac{\partial G}{\partial \tau} \right) &\geq \inf_{1 \leq k \leq p} \omega \left( \frac{\partial F}{\partial t_k} \right) > \omega(J_{\rho}(F)) = \nu(J_{\rho'}(G)) \\ b) \quad \nu \left( \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) &= \omega \left( \sum_{i=0}^n z_i \frac{\partial F}{\partial z_i} \right) > \omega(z) + \omega(J_{\rho}(F)) \\ &= \nu(x) + \nu(J_{\rho'}(G)) \end{aligned}$$

d'où les conditions de Whitney pour le couple  $(X', \mathbf{D})$ .

Terminons maintenant la démonstration :

D'après la première partie ( $p = 1$ ), pour tout changement de base  $\gamma$  et tout  $\tau \in \mathbf{D}$ ,  $\mu^{(*)}(X_{\gamma(\tau)}, \gamma(\tau))$  est égal à

$$\mu^{(*)}(X_0, 0)$$

(car  $\mathbf{D}$  est connexe); par conséquent

$$\mu^{(*)}(X_y, y) = \mu^{(*)}(X_0, 0).$$

pour tout  $y \in \Omega$  (on peut « joindre » tout point de  $\Omega$  à 0 par un tel chemin  $\gamma$ ).

Notons enfin que, dans ([2] corollary 6.2), H. Hironaka avait déjà montré que  $\mu^{(1)}(X_y, y)$  est constant au voisinage de 0 dans  $Y$ .

### 3. Corollaire.

Toujours dans la situation décrite au début, il y a équivalence entre les conditions suivantes :

1) Le couple  $(X, Y)$  vérifie les conditions de Whitney au voisinage de  $0$ .

2) La suite  $\mu^{(*)}(X_y, y)$  est constante pour  $y$  voisin de  $0$  dans  $Y$ .

3) « Conditions (C) de B. Teissier » :

Pour  $1 \leq k \leq p$

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} \in \overline{(z_0, \dots, z_n) \left( \frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right)} \mathcal{O}_{n+1+p}$$

4) « Condition d'H. Hironaka » :

L'éclatement de  $X$  le long de  $(z_0, \dots, z_n)J_\rho(F)$  est équidimensionnel au-dessus de  $Y$  au voisinage de  $0$ .

1)  $\implies$  2) c'est notre théorème 2.

2)  $\iff$  3) est montré par B. Teissier ([5] Theorem 3).

2)  $\implies$  4) il suffit de montrer 4) pour tout changement de base ([3] théorème 2); il suffit donc de montrer 4) dans le cas où  $p = 1$ , or 2) implique l'équimultiplicité de l'idéal

$$(z_0, \dots, z_n) \left( \frac{\partial F}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n} \right) \mathcal{O}_X$$

([4] II. Corollaire 1.8) et on conclut avec la proposition 3.1 de ([4] II).

4)  $\implies$  1) est montré par J. P. Spéder dans ([3]).

*Remarque.* — Les conditions équivalentes d'équisingularité ainsi obtenues sont strictement plus fortes que la trivialité topologique (voir [1]).

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BRIANÇON, J. P. SPÉDER, La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney, Note au C.R.A.S., Paris, 280 (1975), 365-367.  
 [2] H. HIRONAKA, Normal cones in analytic Whitney stratifications, *Publications Mathématiques* n° 31, IHES (1970).

- [3] J. P. SPEDER, Éclatements jacobiens et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse, *Astérisque*, 7 et 8 (1973).
- [4] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, Singularités à Cargèse, *Astérisque*, 7 et 8 (1973).
- [5] B. TEISSIER, Introduction to equisingularity problems, *Sympos. algebraic geometry*, Arcata (1974).
- [6] B. TEISSIER, Note technique, supplément à « Introduction to equisingularity problems », Preprint, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique de Paris (1974).
- [7] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bulletin A.M.S.*, 75, 2 (1969).
- [8] H. WHITNEY, Tangents to an analytic variety, *Annals of Mathematics*, 81 (1965).

Manuscrit reçu le 14 mars 1975  
 Proposé par B. Malgrange.

J. BRIANÇON et J. P. SPEDER,  
 Université de Nice  
 Département de Mathématiques  
 Parc Valrose  
 06000 Nice.

---