

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILBERT HECTOR

Quelques exemples de feuilletages espèces rares

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 1 (1976), p. 239-264

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_1_239_0

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES EXEMPLES DE FEUILLETAGES ESPÈCES RARES

par Gilbert HECTOR

Un des plus anciens problèmes relatifs aux feuilletages de codimension un est sans doute celui de l'existence de feuilles exceptionnelles.

Il est, en effet, bien antérieur à l'introduction de la notion de variété feuilletée, puisqu'il a été posé en 1885 lorsque H. Poincaré conjecturait l'existence d'équations différentielles à coefficients analytiques sur le tore T^2 possédant un minimal exceptionnel [7].

On sait qu'il a fallu attendre le célèbre mémoire d'A. Denjoy en 1932 (cf. [1]), pour voir qu'en réalité il n'existait pas de minimal exceptionnel pour les équations différentielles sur T^2 , dès que la classe de différentiabilité était au moins égale à deux⁽¹⁾. De nombreux auteurs devaient essayer, par la suite, de généraliser aux feuilletages de codimension un le résultat de Denjoy, notamment C.L. Siegel, G. Reeb, A. Schwartz et surtout R. Sacksteder. Ce dernier a construit en 1964 un feuilletage de classe C^∞ de $V_2 \times S^1$ (où V_2 désigne la surface compacte de genre 2) possédant un minimal exceptionnel. A en juger d'après la longueur du laps de temps qu'il aura fallu aux mathématiciens pour exhiber ce premier exemple, il est permis de penser que les feuilles exceptionnelles doivent être rares. Encore faudrait-il savoir exactement en quel sens !

En 1970, H. Rosenberg et R. Roussarie remarquaient que "les feuilles exceptionnelles ne sont pas exceptionnelles" en ce sens que toute variété fermée orientable de dimension 3 possède un feuilletage de classe C^∞ ayant des feuilles exceptionnelles [10].

⁽¹⁾ Par contre, dans ce même mémoire, Denjoy construit un feuilletage de classe C^1 possédant un minimal exceptionnel.

Dans le même ordre d'idées, on construit au paragraphe (C) ci-dessous un feuilletage *analytique* de $V_2 \times \mathbb{S}^1$ possédant un minimal exceptionnel, ce qui confirme partiellement l'intuition originelle de Poincaré. Mais surtout, par le présent travail, on vise à constituer une sorte "d'herbier d'espèces rares" (cf. Introduction) qui sont, à une exception près, des feuilletages ayant un ensemble de feuilles exceptionnelles dont la réunion est dense (ou même égale à la variété totale). Ces exemples sont d'autant plus inattendus que les variétés ainsi feuilletées sont des plus simples : \mathbb{R}^3 et $V_2 \times \mathbb{S}^1$, que les feuilletages sont transverses aux verticales de \mathbb{R}^3 (resp. au facteur \mathbb{S}^1) et que la plupart d'entre eux sont de classe C^∞ .

Ainsi il existe des feuilletages chez qui les feuilles exceptionnelles sont loin d'être rares. Mais il semble raisonnable de penser que de tels feuilletages ne peuvent être eux que exceptionnels.

Cet article reprend et complète la première partie de ma thèse. J'en suis redevable à G. Reeb qui m'a initié, à C. Godbillon qui m'a encouragé, aux Universités de Strasbourg et de Nimègue qui m'ont hébergé et à tous ceux qui m'ont eu en amitié.

INTRODUCTION ET COMMENTAIRES

Suivant une habitude bien établie, on répartit les feuilles d'un feuilletage de codimension un⁽²⁾ [ainsi que les trajectoires d'un groupe d'homéomorphismes de \mathbb{R}] en trois *types* :

- i) feuilles *propres* i.e. ouvertes dans leur adhérence ;
- ii) feuilles (*localement*) *denses* ;
- iii) feuilles *exceptionnelles* i.e. ni propres, ni localement denses.

De plus, si le feuilletage est transverse à une fibration, une feuille est dite *uniforme* si elle coupe chaque fibre au plus en un point (une telle feuille est évidemment propre).

Appelons *espèce rare* un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M vérifiant l'une des deux conditions ci-dessous :

⁽²⁾ Tous les feuilletages dont il sera question dans la suite étant de codimension un, nous omettrons désormais cette précision.

a) toutes les feuilles de \mathcal{F} sont exceptionnelles ;

b) \mathcal{F} possède au moins deux types de feuilles et la réunion des feuilles de chaque type est partout dense dans M .

Notre but est alors, grosso modo, de voir lesquelles des cinq espèces rares sont réalisables comme feuilletages de \mathbf{R}^3 (resp. $V_2 \times \mathbb{S}^1$), transverses aux verticales (resp. au facteur \mathbb{S}^1) et cela avec le maximum de différentiabilité.

La liste des feuilletages que nous construirons à cet effet s'articule autour de la notion de *charpente* d'un feuilletage \mathcal{F} sur une variété M . On appelle ainsi tout sous-ensemble saturé C non vide de M , qui soit maigre (au sens de Baire) et tel que pour toute feuille F contenue dans C , on ait les propriétés suivantes :

i) l'adhérence \bar{F} de F dans M est contenue dans C ;

ii) il existe un ouvert saturé U tel que $\bar{F} \cap U$ soit minimale pour la restriction de \mathcal{F} à U .

Par exemple, un ensemble minimal différent de M est trivialement une charpente de \mathcal{F} .

Bien plus, à part le premier d'entre eux, tous nos exemples aussi bien dans \mathbf{R}^3 que dans $V_2 \times \mathbb{S}^1$ possèdent une charpente non triviale connexe. Cette charpente est partout dense pour les espèces rares (bien que d'après (i) une charpente ne puisse contenir de feuille localement dense) donc *maximale*. Enfin ces charpentes sont de trois sortes ou *styles* :

1 – *propre* i.e. réunion de feuilles propres ;

2 – *exceptionnelle* i.e. réunion de feuilles exceptionnelles ;

3 – *mixte* i.e. réunion de feuilles propres ou exceptionnelles, la réunion des feuilles de chaque type étant dense.

Ajoutons encore que, dans tous les cas, l'ensemble résiduel Ω complémentaire de C est réunion de feuilles d'un seul type. Par extension nous pourrions donc parler du type de Ω .

Nous pouvons maintenant dresser la liste des feuilletages de \mathbf{R}^3 que nous nous proposons de construire :

FEUILLETAGES DE \mathbf{R}^3

0 – Un feuilletage sans charpente.

Toutes ses feuilles sont partout denses.

1 – Trois feuilletages avec charpente de style propre.

Ils sont caractérisés par :

(1.a) C fermée et Ω de type propre ;

*Toutes les feuilles sont donc propres,
mais aucune n'est uniforme.*

(1.b) C dense et Ω de type dense ;

(1.c) C dense et Ω de type exceptionnel.

2 – Trois feuilletages avec charpente de style exceptionnel ;

(2.a) C fermée et Ω de type propre ;

(2.b) C dense et Ω de type dense ;

(2.c) C dense et Ω de type exceptionnel.

3 – Un feuilletage avec charpente maximale de style mixte et Ω de type dense.

*La réunion des feuilles de chaque type
est dense dans \mathbf{R}^3 .*

Ce tableau appelle quelques commentaires et remarques :

1 – Les deux résultats ci-dessous sont classiques :

a) Tout feuilletage de \mathbf{R}^2 est une fibration localement triviale. En particulier toutes ses feuilles sont propres [6].

b) Toutes les feuilles d'un feuilletage de \mathbf{R}^3 , analytique ou dépourvu d'holonomie et transverse aux verticales, sont uniformes [2].

En se basant sur eux, on se serait attendu à trouver moins de "complexité" dans les feuilletages de \mathbf{R}^3 .

2 – Le même tableau vaut pour $V_2 \times S^1$ à cette différence essentielle près que les espèces rares à charpente de style exceptionnel ou mixte ne pourront être obtenues qu'en classe C^0 .

Par contre le feuilletage (2.a) sera dans ce cas un feuilletage analytique avec minimal exceptionnel.

3 – Dans les deux cas, les feuilletages annoncés sont construits à l'aide de groupes de difféomorphismes (ou homéomorphismes) de la fibre \mathbf{R} (resp. \mathbb{S}^1). Cette construction classique pour $V_2 \times \mathbb{S}^1$ (cf. [3]) se fera, dans le cas de \mathbf{R}^3 , à l'aide des *groupes de trombe* et *feuilletages en trombes* qui seront introduits au paragraphe A. L'exemple (0) sera une application immédiate de cette première construction.

4 – La composante littérale dans la numérotation des feuilletages renvoie à la *méthode de construction des groupes de trombe*. Les trois méthodes en question seront exposées à l'occasion de la construction des feuilletages de la famille (1) de \mathbf{R}^3 , au paragraphe (B.1).

5 – Les feuilletages (1.a) et (2.a) ne sont pas des espèces rares, mais constituent des relais très utiles dans la construction de celles-ci. Le feuilletage (2.a) de \mathbf{R}^3 peut d'ailleurs être remanié de telle sorte que la charpente devienne un minimal exceptionnel (nous le ferons au paragraphe C en ce qui concerne $V_2 \times \mathbb{S}^1$).

6 – Les divers groupes que nous aurons à considérer seront définis à l'aide d'un système de générateurs. Pour alléger le texte, la description et le graphe de tous ces générateurs seront renvoyés en appendice.

En guise de conclusion, notons que la notion de charpente, moyen commode de classification, pourrait aussi devenir moyen d'investigation. On peut en effet se poser les deux questions suivantes :

1) Un feuilletage \mathcal{F} de classe C^∞ d'une variété compacte M ayant un minimal différent de M possède-t-il une charpente connexe contenant ses minimaux ? En particulier, si \mathcal{F} est une espèce rare, possède-t-il une charpente dense ?

2) Existe-t-il des feuilletages de classe C^∞ (ou même C^2) sur une variété fermée ayant une charpente dense de style exceptionnel ou mixte ? En particulier, existe-t-il un feuilletage de classe C^∞ (ou C^2) d'une variété compacte dont toutes les feuilles soient exceptionnelles ?

En fait, nous espérons pouvoir répondre par l'affirmative à la première de ces questions et de plus, nous pensons pouvoir montrer que les charpentes denses sont essentiellement instables. En d'autres termes, nous voudrions proposer la conjecture suivante :

Conjecture : Soit M une variété fermée et soit $\text{Fol}(M)$ l'ensemble des feuilletages de classe C^∞ sur M muni de la topologie de la convergence C^∞ des champs de plans.

L'ensemble des espèces rares sur M i.e. feuilletages à charpente maximale dense est maigre dans $\text{Fol}(M)$.

C'est en ce sens seulement qu'il nous paraît raisonnable d'affirmer que "les feuilles exceptionnelles sont rares".

PLAN

A – TROMBES ET GROUPES DE TROMBE.

B – FEUILLETAGES DE \mathbf{R}^3 .

- 1) Feuilletages à charpente de style propre ;
- 2) Feuilletages à charpente de style exceptionnel ;
- 3) Feuilletages à charpente de style mixte.

C – FEUILLETAGES DE $V_2 \times S^1$.

APPENDICE : Planches de description (avec graphe) des générateurs des divers groupes de difféomorphismes utilisés.

BIBLIOGRAPHIE.

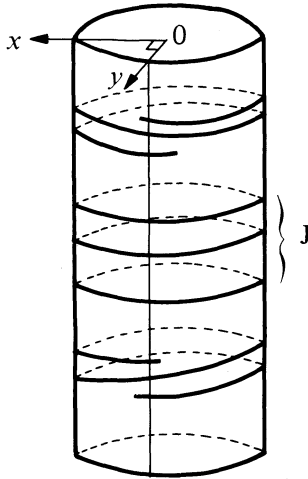
A – TROMBES ET GROUPES DE TROMBE

Tout d'abord, voyons comment on peut associer un feuilletage de classe C^∞ de \mathbf{R}^3 à certains groupes de difféomorphismes de $\mathbf{R}^{(3)}$.

1. Trombe associée à un difféomorphisme g de \mathbf{R} ayant un intervalle de points fixes.

A tout $g \in \text{Diff}(\mathbf{R})$, on sait associer un feuilletage différentiable f_g de $S^1 \times \mathbf{R}$, transverse aux verticales et admettant g comme "fonction de premier retour" (Poincaré map) sur chaque verticale.

 (3) Tous les difféomorphismes de \mathbf{R} utilisés dans la suite seront croissants et de classe C^∞ . Nous omettrons donc désormais de le préciser et nous noterons simplement $\text{Diff}(\mathbf{R})$ le groupe de ces difféomorphismes.



Bien plus, si on paramètre $S^1 \times \mathbf{R}$ par les coordonnées cylindres (θ, z) on peut supposer que, en dehors du quart de cylindre défini par $0 < \theta < \pi/2$, le feuilletage f_g est défini par l'équation $dz = 0$. On peut d'ailleurs supposer qu'il en est de même sur $S^1 \times J$ si la restriction de g à l'intervalle ouvert J est l'identité.

Soient alors D le disque unité ouvert de \mathbf{R}^2 et δ le complémentaire de J dans \mathbf{R} . On munit $(D - \{0\}) \times \mathbf{R}$ du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_g$ de codimension un, "produit" de f_g par l'intervalle $]0, 1[$. Si la restriction de g à J est l'identité, $\tilde{\mathcal{F}}_g$ se prolonge en un feuilletage \mathcal{F}_g de $\Pi = D \times \mathbf{R} - \{0\} \times \delta$.

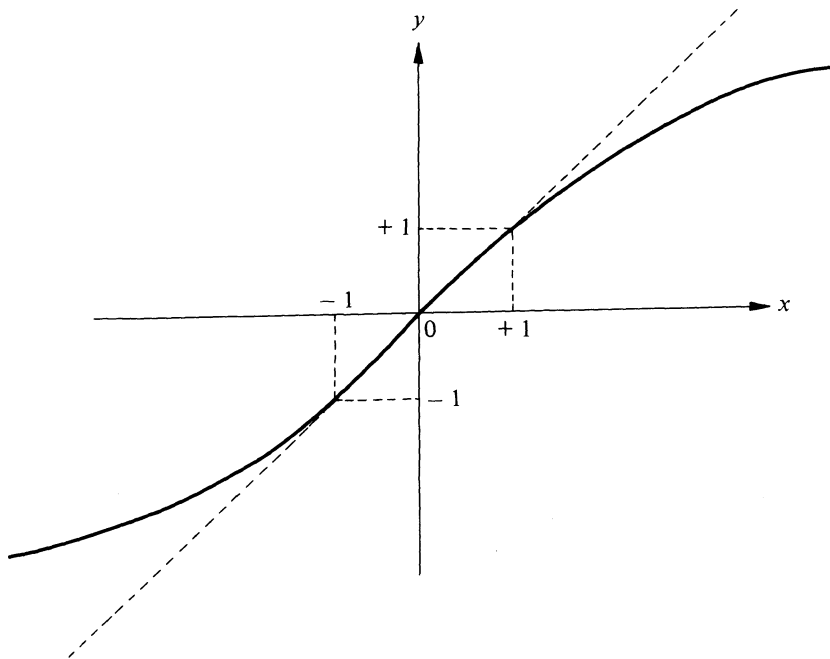
Enfin, pour terminer, si K est un intervalle fermé contenu dans J , il est facile de construire un difféomorphisme $\Phi : D \times \mathbf{R} \rightarrow \Pi$ tel que si $\Delta \subset D$ est la couronne d'équation $r > \frac{1}{2}$, on a :

- i) la restriction de Φ à $(\Delta \times \mathbf{R}) \cup (D \times K)$ est l'identité ;
- ii) le difféomorphisme Φ conserve globalement chaque verticale.

Dans ces conditions, le feuilletage $\mathcal{C}_g = \Phi^*(\mathcal{F}_g)$ est appelé une *trombe associée à g* .

Toute trombe est triviale i.e. définie par l'équation $dz = 0$ dans l'ouvert $\dot{\Delta} \times \mathbf{R}$ défini par $r > \frac{1}{2}$ et $\theta \notin \left[0, +\frac{\pi}{2} \right]$.

Pour fixer les idées, décrivons rapidement le feuilletage \mathcal{F}_g lorsque le graphe de g a l'allure suivante :



Pour cela, soit $a \neq 0$, un point de D . Toute feuille de \mathcal{F}_g coupe la verticale R_a en a et si on note F_z la feuille passant par un point z de R_a , on a :

- i) F_z est un disque (donc un plan), pour $z \in]-1, +1[$;
- ii) F_z est un disque pointé (donc un cylindre) pour $z = \pm 1$;
- iii) F_z est un plan qui s'enroule sur F_{+1} (resp. F_{-1}) pour $z > +1$ (resp. $z < -1$) ;
- iv) pour tout z , la trace de F_z sur R_a est égale à la trajectoire de z par les itérés de g .

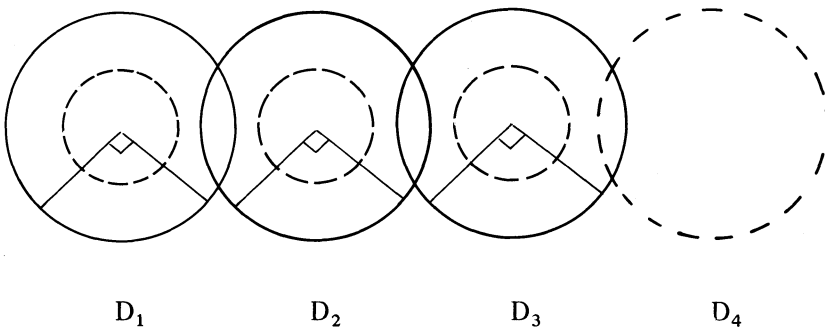
2. Recollement de trombes.

Les feuilletages annoncés seront obtenus en recollant deux ou plusieurs trombes. Nous nous contenterons de décrire le procédé de recollement dans le cas de deux trombes.

Soient $E_1 = D_1 \times \mathbf{R}$ et $E_2 = D_2 \times \mathbf{R}$ deux cylindres feuilletés par des trombes \mathcal{C}_{g_1} et \mathcal{C}_{g_2} . Si $D_1 \cap D_2 = \dot{A}_1 \cap \dot{A}_2$ et si cette intersection n'est pas vide, les feuilletages \mathcal{C}_{g_1} et \mathcal{C}_{g_2} coïncident sur $(\dot{A}_1 \cap \dot{A}_2) \times \mathbf{R}$ et définissent un feuilletage $\mathcal{C}_{(g_1, g_2)}$ sur $(D_1 \cup D_2) \times \mathbf{R}$, transverse aux verticales. C'est un *feuilletage en trombes* obtenu par *recollement* de \mathcal{C}_{g_1} et \mathcal{C}_{g_2} .

De plus si a est un point de $\dot{A} = \dot{A}_1 \cap \dot{A}_2$ toute feuille F de $\mathcal{C}_{(g_1, g_2)}$ coupe la verticale \mathbf{R}_a en un point z et la trace de F sur \mathbf{R}_a est égale à la trajectoire γ_z de z par l'action du groupe G engendré par g_1 et g_2 sur \mathbf{R}_a . Celle-ci sera donc propre, dense ou exceptionnelle suivant le type de F .

Le procédé de recollement s'étend naturellement à une infinité dénombrable de trombes, suivant le schéma ci-après :



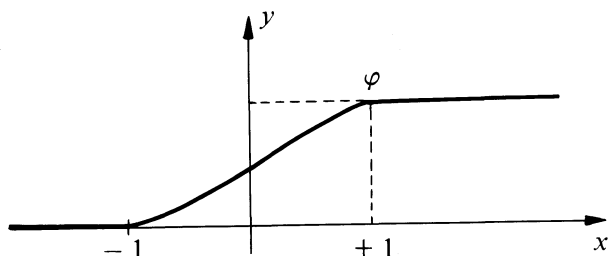
Par suite, pour construire un feuilletage en trombes de \mathbf{R}^3 , il suffit d'exhiber un groupe de difféomorphismes de \mathbf{R} admettant un système au plus dénombrable de générateurs à support différent de \mathbf{R} . Un tel groupe sera appelé *groupe de trombe*.

Bien plus, le type des feuilles du feuilletage sera déterminé par le type des trajectoires du groupe.

3. Première application : le feuilletage (0).

Soit φ une application différentiable telle que :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 && \text{pour } x \leq -1 ; \\ \varphi(x) &= 1 && \text{pour } x \geq +1 ; \\ 0 &\leq \varphi'(x) < 1 && \text{pour tout } x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$



Si α est un irrationnel fixé, compris entre 0 et 1 on définit quatre difféomorphismes de \mathbf{R} par :

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \varphi(x) ; \\ g(x) &= x - \alpha\varphi(x) ; \\ T_u(x) &= x + u \quad \text{pour } u \in \{1, \alpha\}. \end{aligned}$$

Et le groupe G engendré par l'ensemble $\{f, g, T_1 \circ f, T_\alpha \circ g\}$ est un groupe de trombe qui contient les translations T_1 et T_α . Par suite toutes ses trajectoires sont denses et toutes les feuilles du feuilletage en trombe associé sont denses dans \mathbf{R}^3 .

B – FEUILLETAGES DE \mathbf{R}^3

Toutes les définitions que nous avons données dans l'Introduction à propos des feuilletages se transposent de façon évidente aux relations d'équivalence ouvertes⁽⁴⁾. Et si G est un groupe de trombe, le feuilletage en trombes associé (cf. A) possède des propriétés analogues à celles de la relation d'équivalence associée à l'action de G sur \mathbf{R} . Nous n'aurons donc plus dans la suite qu'à fabriquer des groupes ayant les propriétés voulues.

⁽⁴⁾ A noter cependant que la connexité de la charpente d'une relation d'équivalence doit être entendue au sens de la topologie des ouverts saturés.

Dans la suite, on désignera par $[A_0, A_1, \dots, A_n]$ ou $[\cup A_n]$ le groupe engendré par la réunion de toute suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties (ou d'éléments) de $\text{Diff}(\mathbf{R})$.

1. Feuilletages avec charpente de style propre.

On pose $e = 10^3$.

Feuilletage (1.a). – Le feuilletage ou groupe (1.a) sera obtenu comme limite d'une suite $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbf{R})$, définis par :

$$G_0 = [\varphi_0] = [\varphi] ;$$

$$G_n = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n] = [G_{n-1}, \varphi_n] \quad \text{pour } n > 0 ;$$

où $\varphi_0 = \varphi$ est le difféomorphisme décrit en Appendice, Pl. 1 et φ_n , pour $n > 0$, est le conjugué de φ_{n-1} par l'homothétie \mathcal{H} de pôle 0 et rapport e .

Pour tout n , la réunion des trajectoires non triviales de la relation r_n associée à l'action de G_n sur \mathbf{R} est l'intervalle $I_{n+1} =]-e^{n+1}, +e^{n+1}[$. Et de plus, on remarque que :

$(\bar{\alpha}^n)$: la trajectoire de e^n pour r_n est propre et minimale dans I_{n+1} ;

$(\bar{\beta}^n)$: la restriction de r_n à I_n est égale à r_{n-1} ;

D'où par récurrence sur n , on en déduit quasi immédiatement les propriétés suivantes :

(α^n) : l'adhérence C_n de la trajectoire de $(+1)$ pour r_n est une charpente de style propre de r_n dans I_{n+1} ;

(β^n) : la restriction de r_n à $I = I_0$ est triviale et le saturé de I pour r_n est égal à $I_{n+1} - C_n$.

Or la suite $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant croissante, l'ensemble $G_\omega = \cup_{n \in \mathbf{N}} G_n$ est un sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbf{R})$ et pour tout n , la restriction à I_{n+1} de la relation associée r_ω est égale à r_n . Il s'ensuit que :

(α) : l'adhérence C_ω de la trajectoire de $+1$ est une charpente fermée de style propre de r_ω ;

(β) : la restriction de r_ω à I est triviale et le saturé de I pour r_ω est égal au complémentaire de C_ω .

Autrement dit le groupe G_ω est le groupe (1.a) cherché. Nous désignerons désormais le couple (G_ω, r_ω) par (Γ_1, ρ_1) .

Au paragraphe (1.b) nous aurons besoin d'une propriété supplémentaire de (Γ_1, ρ_1) :

(γ) : pour tout intervalle $V \subset I$ et pour tout $g \in \Gamma_1$ on a $\mu(g(V)) \leq \mu(V)$ où μ désigne la mesure usuelle sur \mathbf{R} .

Cette dernière propriété découle de ce que, pour tout n et pour tout $g \in G_n$, si $x \in I_n$ et si $g(x) \notin I_n$, il existe $h \in G_{n-1}$ et $p \in \mathbf{Z}$ tels que $g(x) = \varphi_n^p(h(x))$.

Feuilletage (1.b). — Pour construire notre deuxième exemple, nous allons "contracter" progressivement le groupe Γ_1 défini en (1.a).

De façon précise, on se donne une suite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbf{R})$ par :

$$H_0 = \Gamma_1$$

$$H_n = [H_{n-1}, \varphi_{-n}] \quad \text{pour } n > 0,$$

où φ_{-n} est le conjugué de φ_{-n+1} par \mathcal{H}^{-1} .

Le groupe H_n est encore conjugué de Γ_1 par \mathcal{H}^{-n} et comme tel, d'après les propriétés (α) et (β) de Γ_1 on a :

(ϵ^n) : la relation s_n associée à H_n possède une charpente de style propre D_n , adhérence de la trajectoire de e^{-n} ;

(η^n) : le complémentaire Ω_n de D_n est égal au saturé de $I_{-n} =]-e^{-n}, +e^{-n}[$ pour s_n .

En outre, par définition des H_n on a :

(θ^n) : pour toute composante connexe V de Ω_n , on a $\mu(V) \leq 2 \cdot e^{-n}$ d'après (γ) ;

(λ^n) : pour $p > n$, les restrictions de s_n et s_p à D_n coïncident.

Comme précédemment $H_\omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n$ est un sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbf{R})$ de relation associée s_ω telle que :

(ϵ) : l'ensemble D_n est une charpente fermée de style propre de s_ω d'après (λ^n) et $D_\omega = \bigcup D_n$, réunion d'une suite croissante de charpentes de s_ω est une charpente de style propre de s_ω .

Cette charpente est dense d'après (η^n) et (θ^n) , donc maximale unique.

(η) : le complémentaire Ω_ω de D_ω est égal à $\bigcap_n \Omega_n$ et donc Ω_ω est réunion de trajectoires denses d'après (η^n) et (θ^n) .

Le groupe $\Gamma_2 = H_\omega$ est donc bien l'espèce rare (1.b) annoncée.

Feuilletage (1.c). – Le groupe Γ_3 , dernier élément de la première famille, s'obtient également comme limite d'une suite croissante $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbb{R})$. Mais comme une description formelle des groupes K_n serait très lourde et probablement inutile, nous nous contenterons, pour donner une idée de la méthode de construction (c), de décrire les trois premiers termes de cette suite.

A) On pose $K_0 = \Gamma_1$ et $K_1 = [K_0, \psi_{-1}]$ où ψ_{-1} est le conjugué par \mathcal{H}^{-1} du difféomorphisme ψ défini en Appendice, Pl. 2.

Toutes les trajectoires de la relation t_1 associée à K_1 sont évidemment propres. De plus t_1 possède des propriétés tout à fait analogues à celles de s_1 en (1.b), aux deux restrictions suivantes près :

i) la charpente E_1 de t_1 qui joue le rôle de D_1 est l'adhérence de la réunion de quatre trajectoires (et non plus d'une seule) : E_1 est le saturé de $\{\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{C}^j(+1))\}$ où \mathcal{C} désigne la translation de module $e/4$ et $j \in \{-3, -1, +1, +3\}$;

ii) le complémentaire Ω_1 de E_1 est la réunion de quatre ouverts disjoints Ω_1^j saturés respectivement de $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{C}^j(1))$ (⁵).

B) De même, pour définir K_2 , on a besoin de quatre générateurs supplémentaires : les difféomorphismes $\psi_{(-2,j)}$ conjugués de ψ_{-1} par $\mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{C}^j$ respectivement. [Le support de $\psi_{(-2,j)}$ est l'intervalle $(\mathcal{H}^{-1} \circ \mathcal{C}^j)([-1, +1])$].

Le groupe K_2 est alors engendré par K_1 et les quatre $\psi_{(-2,j)}$. La relation associée t_2 possède une charpente fermée de style propre E_2 dont le complémentaire Ω_2 est réunion de $16 = 4^2$ ouverts saturés disjoints, chacun des ouverts $\Omega_1^j - E_2$ étant coupé en quatre parties saturées disjointes.

(⁵) Le chiffre 4 s'impose pour des raisons de symétrie avec (2.c). Pour ce qui est de (1.c), on aurait pu se contenter, par une définition appropriée de ψ , de découper Ω_1 en deux composantes saturées seulement.

C) Le processus ainsi amorcé est alors poursuivi pour tout $n \in \mathbf{N}$, de telle sorte que l'on ait :

(ϵ^n) : la relation t_n associée à K_n possède une charpente de style propre E_n ;

(η^n) : le complémentaire Ω_n de E_n est la réunion de 4^n ouverts saturés disjoints et pour toute composante saturée W de Ω_{n-1} , la différence $W - E_n$ a quatre composantes saturées.

(θ^n) : pour toute composante connexe V de Ω_n , on a $\mu(V) \leq 2 \cdot e^{-n}$.

Enfin Γ_3 est égal à $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$. Comme tel il possède une charpente de style propre $E = \bigcup E_n$. Cette charpente est dense d'après les (θ^n) donc maximale. Enfin l'ensemble résiduel $\mathbf{R} - E_\omega$ est réunion de trajectoires exceptionnelles d'après (η^n).

2. Feuilletages avec charpente de style exceptionnel.

Ainsi qu'il a été dit dans l'introduction, notre deuxième famille de feuilletages peut être mise exactement en parallèle avec la première. La différence essentielle entre les deux réside dans le fait que le groupe $[\varphi]$ est remplacé par un groupe Φ possédant des trajectoires exceptionnelles. C'est ce groupe qu'il nous faut décrire tout d'abord.

Le groupe Φ .

Le groupe Φ est engendré par les deux difféomorphismes $f = \varphi^4$ et χ (voir Pl. 2), qui vérifient les deux relations (partielles) :

$$(P_1) : (\chi^{-1} \circ f)(x) = (f^2 \circ \chi)(x) \quad \text{pour } x \in [1,7] \quad \text{et}$$

$$(\chi \circ f^{-1})(x) = (f^{-2} \circ \chi^{-1})(x) \quad \text{pour } x \in [5,11] ;$$

$$(P_2) : (\chi \circ f^2)(x) = (f \circ \chi^{-1})(x) \quad \text{pour } x \in [1,3] \quad \text{et}$$

$$(\chi^{-1} \circ f^{-2})(x) = (f^{-1} \circ \chi)(x) \quad \text{pour } x \in [9,11].$$

Comme dans le cas de $[\varphi]$, la réunion des trajectoires non triviales de la relation associée, que nous noterons \mathbf{R} , est l'intervalle $I_1 =]-e, +e[$.

DEFINITION 1. — Soit $p \in \mathbf{N}$. Un élément g de Φ est dit p -modulé (ou plus simplement modulé), s'il existe $\alpha_i, \epsilon_i \in \mathbf{Z}$ pour $i = 0, 1, \dots, p$ avec $|\epsilon_i| < 3$ tels que :

- i) $\epsilon_0 = 0$; $\epsilon_1 > 0$ et $(-1)^{\epsilon_i-1} \cdot \epsilon_{i-1} \cdot \epsilon_i < 0$ pour $1 < i \leq p$;
- ii) $(-1)^{\epsilon_i} \cdot \epsilon_i \cdot \alpha_i < 0$ pour $0 < i \leq p$;
- iii) $g = \chi^{\alpha_p} \circ f^{\epsilon_p} \circ \dots \circ \chi^{\alpha_0} \circ f^{\epsilon_0}$.

On vérifie à l'aide des graphes de f et χ que si g est un élément p -modulé avec $p > 0$, on a la propriété :

$$(P_3) : g(I) \subset]1,3[\quad \text{si } \alpha_p > 0 ;$$

$$g(I) \subset]9,11[\quad \text{si } \alpha_p < 0.$$

Soit $\Phi(I)$ le sous-groupe des éléments de Φ qui conservent I point par point.

LEMME 1. — Pour tout élément g de Φ , il existe $r \in \mathbf{Z}$ et un élément modulé \dot{g} tel que g est équivalent modulo $\Phi(I)$ à $f^r \circ \dot{g}$.

Démonstration. — Soit $g = h_n \circ h_{n-1} \circ \dots \circ h_1$ avec

$$h_i \in \{f, f^{-1}, \chi, \chi^{-1}\}$$

un élément de Φ , différent de l'identité et soit $g_m = h_m \circ h_{m-1} \circ \dots \circ h_1$ pour $m \leq n$. Nous allons démontrer le lemme par récurrence sur m .

a) Pour $m = 1$, on peut poser $\dot{g}_1 = Id$; on a alors $r = \epsilon$ si $g_1 = f^\epsilon$ et $r = 0$ si $g_1 = \chi^\alpha$ avec $\epsilon, \alpha \in \{-1, +1\}$.

b) Supposons le lemme vérifié pour m i.e. supposons g_m équivalent à $\tilde{g}_m = f^s \circ \dot{g}_m$ avec \dot{g}_m modulé.

Le composé $\hat{g}_{m+1} = h_{m+1} \circ \tilde{g}_m$ est équivalent à g_{m+1} et on établit la propriété voulue en passant en revue les divers cas possibles suivant les valeurs respectives de α_q, s et h_{m+1} . En fait, deux seulement posent problème :

- i) $|s| = 1$; $s \cdot \alpha_q > 0$ et $h_{m+1} = \chi^s$;
- ii) $|s| = 2$; $s \cdot \alpha_q > 0$ et $h_{m+1} = \chi^\sigma$ avec $\sigma = \frac{s}{|s|}$;

Dans le cas (i), si α_q est positif, on a $\dot{g}_m(I) \subset]1, 3[$ d'après (P_3) et $\hat{g}_{m+1} = \chi^{-1} \circ f \circ \dot{g}_m$ est équivalent à $f^2 \circ \chi \circ \dot{g}_m$ d'après (P_1) . De même, si α_q est négatif, \hat{g}_{m+1} est équivalent à $f^{-2} \circ \chi^{-1} \circ \dot{g}_m$. Dans le cas (ii), on transforme \hat{g}_{m+1} comme en (i) mais à l'aide de (P_2) .

LEMME 2. — *La restriction de R à I est triviale.*

Démonstration. — En effet, soient x et y deux points de I et soit $g \in \Phi$ tels que $y = g(x)$.

Si g est équivalent à $f^r \circ \dot{g}$ (cf. lemme 1), on a $y = (f^r \circ \dot{g})(x)$. Ceci implique, d'après (P_3) que $r = 0$ et que \dot{g} est 0-modulé. Par définition de χ , on a donc $y = x$ et la restriction de R à I est triviale.

LEMME 3. — *La relation R possède un minimal exceptionnel (unique) C dans $I_1 =]-e, +e[$.*

Démonstration. — La restriction de R à $[1,5]$ possède un minimal \hat{C} . Mais par définition de f , toute trajectoire γ de R dans I_1 rencontre $[1,5]$ et par suite il est immédiat que le saturé C de \hat{C} pour R est minimal pour R dans I_1 .

Comme la restriction de R à I est triviale, C est différent de I_1 . En outre, le point $(+1)$ est adhérent à toute trajectoire de R d'après (χ_1) et (χ_2) donc $(+1) \in C$ et celui-ci est l'unique minimal de R dans I_1 . Enfin la trajectoire de $(+1)$ n'est pas propre, donc C est exceptionnel.

Remarque 4. — L'ensemble C minimal dans I_1 est évidemment fermé dans I_1 . Par contre, l'adhérence \bar{C} de C dans R est égale à $C \cup \{-e, +e\}$.

LEMME 5. — *Le complémentaire de C dans I_1 est égal au saturé de I par R.*

Démonstration. — Comme $(+1)$, le point (-1) appartient à C et donc, puisque les trajectoires de tous les points de I sont propres, I est une composante connexe de $I_1 - C$. Il en est de même de $]3,5[= f(I)$ et pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier que pour toute composante connexe U_0 de $I_1 - C$ il existe $g \in \Phi$ tel que $g(U_0) =]3,5[$. (Il suffit d'ailleurs de le faire pour U_0 contenue dans $[1,3]$).

En effet, dans le cas contraire, il existerait $l \in \mathbf{N}^*$ tel que $\chi^{-l}(U_0) \subset]5,7[$ et on aurait $U_1 = (f^{-1} \circ \chi^{-l})(U_0) \subset]1,3[$ avec $\mu(U_1) > \mu(U_0)$. En réitérant cette opération, on définirait alors une suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de composantes connexes distinctes de $I_1 - C$ de longueur bornée inférieurement. Mais ceci est évidemment impossible.

Ceci achève la description des trajectoires de R . En résumé, nous pouvons dire que les trajectoires de R sont triviales en dehors de I_1 et que de plus :

($\underline{\alpha}$) : R possède un minimal exceptionnel C dans I_1 ;

($\underline{\beta}$) : la restriction de R à I est triviale et le saturé de I par R est égal à $I_1 - C$;

($\underline{\gamma}$) : pour tout intervalle $V \subset I$ et pour tout $g \in \Phi$ on a $\mu(g(V)) \leq \mu(I)$.

La dernière propriété ($\underline{\gamma}$) est facile à vérifier pour g modulé. Elle est donc valable pour tout g d'après le lemme 1.

Pour terminer ce paragraphe, il ne nous reste plus qu'à esquisser très rapidement la construction des feuilletages de la deuxième famille.

Feuilletage (2.a). — On procède comme pour (1.a), la suite $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ étant définie par :

$$G_0 = \Phi_0 ;$$

$$G_n = [\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n] = [G_{n-1}, \Phi_n] \quad \text{pour } n > 0 ,$$

où Φ_n est le conjugué du groupe Φ_{n-1} par \mathcal{H} .

Le groupe cherché est le groupe $\Delta_1 = G_\omega$. La relation associée τ_1 possède une charpente fermée (mais non minimale) C_ω de style exceptionnel qui est égale à l'adhérence de la trajectoire de $(+1)$. De plus la restriction de τ_1 à I est triviale et le saturé de I pour τ_1 est égal à $\mathbf{R} - C_\omega$.

Feuilletage (2.b). — Là encore, la construction est une simple transposition de la méthode utilisée en (1.b) quand on pose :

$$H_0 = \Delta_1 \quad \text{et} \quad H_n = [H_{n-1}, \Phi_{-n}] \quad \text{pour } n > 0$$

La relation τ_2 associée à $\Delta_2 = H_\omega$ possède une charpente D_ω de style exceptionnel qui est dense donc maximale unique. De plus toutes les trajectoires contenues dans $\Omega_\omega = \mathbf{R} - D_\omega$ sont partout denses.

Feuilletage (2.c). – Pour (2.c), on se heurte aux mêmes difficultés de formalisation qu'en (1.c), compliquées encore du fait que le groupe Ψ qui remplace $[\Psi]$ procède à la fois de $[\Psi]$ et Φ .

A) Le groupe Ψ est engendré par $\tilde{f} = f^4 = \varphi^{16}$ et $\tilde{\chi}$ (voir planche 4). Désignons par $\Psi(I)$ le sous-groupe des éléments de Ψ qui conservent I point par point. Si $g \in \Psi$ n'est pas équivalent à Id modulo $\Psi(I)$, on a la propriété :

$$(\tilde{P}) : g(I) \cap I = \emptyset .$$

On en déduit que la restriction à I de la relation T associée à Ψ est triviale.

Comme R , la relation T possède un minimal exceptionnel unique E dans $I_1 =]-e, +e[$. Les intervalles I et $f^j(I)$ pour $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ sont des composantes connexes de $\Omega = I_1 - E$, l'ensemble Ω étant à la réunion des ensembles Ω^j saturés de $f^j(I)$ respectivement qui sont disjoints.

B) On pose $K_0 = \Delta_1$ et $K_1 = [K_0, \Psi_{-1}]$. De même, K_2 est défini par :

$$K_2 = \left[K_1, \bigcup_{j=0}^3 \Psi_{(-2, j)} \right]$$

où $\Psi_{(-2, j)}$ est conjugué de Ψ_{-1} par $\mathcal{H}^{-1} \circ f^j$ (de manière à avoir $(\mathcal{H}^{-1} \circ f^j)(I)$ pour support). Autrement dit la construction de la suite K_n se poursuit de manière analogue à (1.c).

C) Finalement le groupe $\Delta_3 = K_\omega$ possède une charpente E_ω de style exceptionnel qui est dense (donc maximale unique) et toute trajectoire de $R - E_\omega$ est exceptionnelle ; toutes les trajectoires de Δ_3 sont donc exceptionnelles.

3. Feuilletage avec charpente de style mixte.

Pour avoir le feuilletage (3.b), il nous suffira de définir la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondante :

$$H_0 = \Gamma_1 \quad \text{et} \quad H_1 = [H_0, \Phi_{-1}] ;$$

$$H_{2p} = [H_{2p-1}, \varphi_{-2p}] \quad \text{et} \quad H_{2p+1} = [H_{2p}, \Phi_{-(2p+1)}]$$

pour $p > 0$.

Le groupe $\Theta = H_\omega$ possède une charpente D de style mixte qui est dense et $\Omega = \mathbf{R} - D$ est réunion de trajectoires denses. Autrement dit, la réunion des trajectoires de chaque type est dense dans \mathbf{R} .

C – FEUILLETAGES DE $V_2 \times S^1$

Soit a un point de V_2 , surface compacte de genre 2. Il existe un homomorphisme de $\pi_1(V_2, a)$ sur le groupe libre à deux générateurs L . Donc si G est un sous-groupe à deux générateurs de $\text{Top}(J)$ (resp. $\text{Diff}(J)$)⁽⁶⁾, il existe une représentation de $\pi_1(V_2, a)$ dans $\text{Top}(J)$ (resp. $\text{Diff}(J)$) dont l'image est G .

Par la méthode décrite au paragraphe 1.8 de [3], on obtient alors une variété M^3 de dimension 3 munie d'une fibration η de fibre J et base V_2 , et d'un feuilletage \mathcal{F} transverse à η tels que la relation d'équivalence induite par \mathcal{F} sur la fibre N_a de η en a correspond à la relation associée à l'action du groupe G sur J . De plus, comme la représentation de $\pi_1(V_2, a)$ se factorise par le groupe libre L , la fibration η est triviale et $M^3 = V_2 \times J$ [15].

L'utilisation de ces résultats va nous permettre de construire un feuilletage analytique ayant un minimal exceptionnel⁽⁷⁾ et dans un deuxième temps les "espèces rares" sur $V_2 \times S^1$.

1. Feuilletage analytique avec minimal exceptionnel.

Soit $\hat{\chi}$ le difféomorphisme analytique croissant de \mathbf{R} dont le graphe est déduit, par la rotation de centre 0 et angle $\pi/4$ du graphe de la sinusoïde $y = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x - \frac{\pi}{6}$. Il induit un difféomorphisme analytique χ_* de $S^1 = \mathbf{R}/\pi\sqrt{2}\mathbf{Z}$ tel que si f_* désigne la rotation d'angle $2\pi/3$, on a la relation :

$$(P_1^*) \quad \chi_*^{-1} \circ f_* = f_*^{-1} \circ \chi_*$$

 (6) Par J on désigne S^1 ou $[-e, +e]$ et par $\text{Top}(J)$ (resp. $\text{Diff}(J)$) le groupe des homéomorphismes (resp. difféomorphismes) de J , conservant l'orientation.

(7) Notons que l'exemple de Sacksteder est de classe C^∞ mais non analytique.

Par analogie avec ce qui a été fait pour le groupe Φ [cf. (B.2)] on définit les éléments *modulés* du groupe Φ_* engendré par f_* et χ_* de la manière suivante ; pour $p \in \mathbb{N}$, un élément g de Φ_* est dit p -modulé s'il existe $\alpha_i, \epsilon_i \in \mathbb{Z}$ pour $i = 0, 1, \dots, p$ tels que :

- i) $\epsilon_0 = 0$ et $|\epsilon_i| = 1$ pour $0 < i \leq p$;
- ii) $\alpha_p \epsilon_p \geq 0$ et $\alpha_i \epsilon_i > 0$ pour $0 < i < p$;
- iii) $g = \chi_*^{\alpha_p} \circ f_*^{\epsilon_p} \circ \dots \circ \chi_*^{\alpha_0} \circ f_*^{\epsilon_0}$.

Alors si I_* est l'image sur \mathbb{S}^1 de l'intervalle $\left] -\frac{\pi\sqrt{2}}{6}, +\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \right[$ et si g est p -modulé avec $p \neq 0$, on a :

$$(P_2^*) \quad g(I_*) \subset I_* \cup f_*(I_*) \cup f_*^{-1}(I_*)$$

En procédant exactement comme pour Φ , on montre que la relation R_* associée à Φ_* possède un minimal exceptionnel unique, la restriction de R_* à I_* étant définie par l'action du sous-groupe $[\chi_*]$ qui conserve globalement I_* .

2. Espèces rares avec charpente de style propre ou mixte.

a) Le feuilletage (1.b) de \mathbb{R}^3 est défini à l'aide du groupe Γ_2 (cf. B1).

Soit Γ'_2 , le sous-groupe des éléments de Γ_2 conservant globalement $[-e, +e]$. Avec les notations du paragraphe B, le groupe Γ'_2 est engendré par la suite $(\varphi_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ où φ_{-n} est le conjugué de φ de support $[-e, +e]$ (voir Planche 1) par l'homothétie \mathcal{H}^{-n} (de rapport e^{-n}).

Par suite le support de φ_n pour $n > 1$ est contenu dans $[-1, +1]$ et si λ_n est le conjugué de φ_{-n} par φ^n les supports des λ_n sont deux à deux disjoints car $\varphi(-1) = +1$. Finalement, la suite $\{\lambda_p \circ \dots \circ \lambda_2 \circ \lambda_1\}_{p \in \mathbb{N}}$ converge, quand p tend vers l'infini, vers un homéomorphisme λ dont le support est lui aussi contenu dans $[-e, +e]$.

Les restrictions de φ et λ à $[-e, +e]$ engendrent un groupe Γ_2^* d'homéomorphismes de $[-e, +e]$ dont les trajectoires sont les res-

trictions à $I_1 =]-e, +e[$ des trajectoires correspondantes de Γ_2 , les points $(-e)$ et $(+e)$ étant fixes.

Autrement dit, Γ_2^* définit un feuilletage (1.b) de classe C^0 sur $V_2 \times]-e, +e[$ dont il suffit de recoller les deux bords pour obtenir un feuilletage (1.b) de $V_2 \times \mathbb{S}^1$ (en classe C^0).

b) On procède de même pour les feuilletages (1.c) et (3.b) à partir de Γ_3 et Θ respectivement (cf. B1 et B3).

Remarquons que quoique le générateur λ de Γ_2^* (resp. Γ_3^*) ne soit pas même de classe C^1 , il serait possible de modifier les générateurs de Γ'_2 (resp. Γ'_3) de telle sorte que λ soit de classe C^∞ .

Par contre, il semble bien que l'on ne puisse pas améliorer la classe de différentiabilité de Θ_* .

3. Espèces rares avec charpente de style exceptionnel.

Pour terminer, il nous reste à construire les feuilletages de la deuxième famille sur $V_2 \times \mathbb{S}^1$.

A cet effet, nous conviendrons de désigner par la même lettre tout difféomorphisme de \mathbf{R} dont le support est contenu dans $]-4, +12[$ et le difféomorphisme de $\mathbb{S}^1 = \mathbf{R}/16\mathbf{Z}$ que l'on obtient en identifiant les points (-4) et $(+12)$. De même on désignera par la même écriture un intervalle de \mathbf{R} et son image sur \mathbb{S}^1 .

Comme dans \mathbf{R}^3 , nous aurons besoin d'un relais pour parvenir aux espèces rares :

Feuilletage (2.a). — Soit Φ_\square le sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ engendré par χ (voir Pl. 3) et la rotation f_\square d'angle $\pi/2$.

Comme pour le groupe Φ , on montre que la relation associée R_\square possède un minimal exceptionnel C_\square , que la restriction de R_\square à I est triviale et que le saturé de I est égal à $\mathbb{S}^1 - C_\square$. Il définit donc un feuilletage (2.a) de $V_2 \times \mathbb{S}^1$ avec minimal exceptionnel⁽⁸⁾.

Feuilletages (2.b) et (2.c). — Soit Δ'_2 (resp. Δ'_3) le sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbb{S}^1)$ correspondant au groupe Δ_2 (resp. Δ_3) du paragraphe (B.2)

⁽⁸⁾ L'image réciproque de ce feuilletage dans le revêtement \mathbf{R}^3 de $V_2 \times \mathbb{S}^1$ possède également un minimal exceptionnel.

quand on remplace Φ_0 par Φ_\square dans la définition des suites $\{H_n\}$ (resp. $\{K_n\}$). Il est du type (2.b) [resp. (2.c)], mais possède une infinité de générateurs $(f_\square, \chi, l_3, \dots, l_n, \dots)$, le support de l_n étant contenu dans I pour $n \geq 3$.

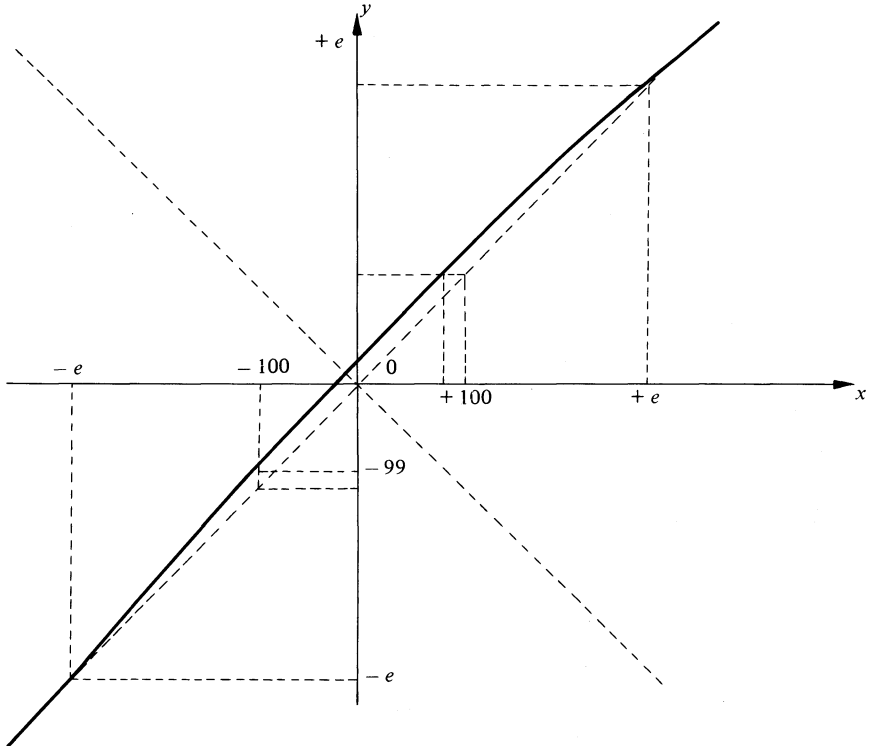
Pour ramener à deux le nombre de ces générateurs, on appelle λ_n le conjugué de l_n par $f_\square^{-1} \circ \chi^n \circ f_\square$ et on pose $\lambda = \lim(\lambda_p \circ \dots \circ \lambda_3 \circ \chi)$. Le groupe Δ_2^* (resp. Δ_3^*) égal à $[f_\square, \lambda]$ définit un feuilletage (2.b) [resp. (2.c)] sur $V_2 \times \mathbb{S}^1$, lui aussi de classe C^0 seulement.

APPENDICE

Pour simplifier l'écriture, on pose $e = 10^3$.

Planche 1 : le difféomorphisme φ .

Le support de φ est égal à $[-e, +e]$ et son graphe est symétrique par rapport à la seconde bissectrice :



Ses propriétés essentielles sont les suivantes :

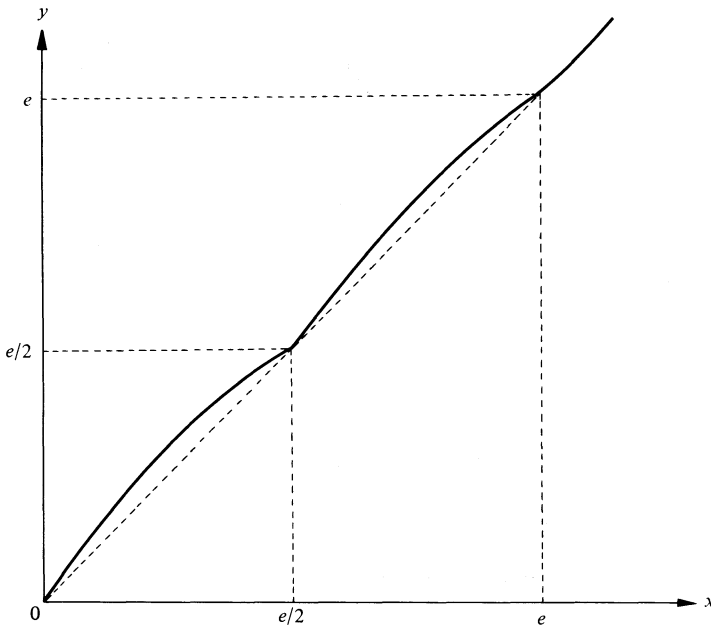
$$(\varphi_1) : \varphi(x) > x \quad \text{pour } x \in]-e, +e[;$$

$$(\varphi_2) : \varphi(x) = x + 1 \quad \text{pour } x \in [-100, +99] ;$$

$$(\varphi_3) : \varphi'(x) < 1 \quad \text{pour } x \in [+99, +e] .$$

Planche 2 : le difféomorphisme ψ .

Le support de ψ est égal à $[-e, +e]$ et son graphe est symétrique par rapport à la seconde bissectrice :

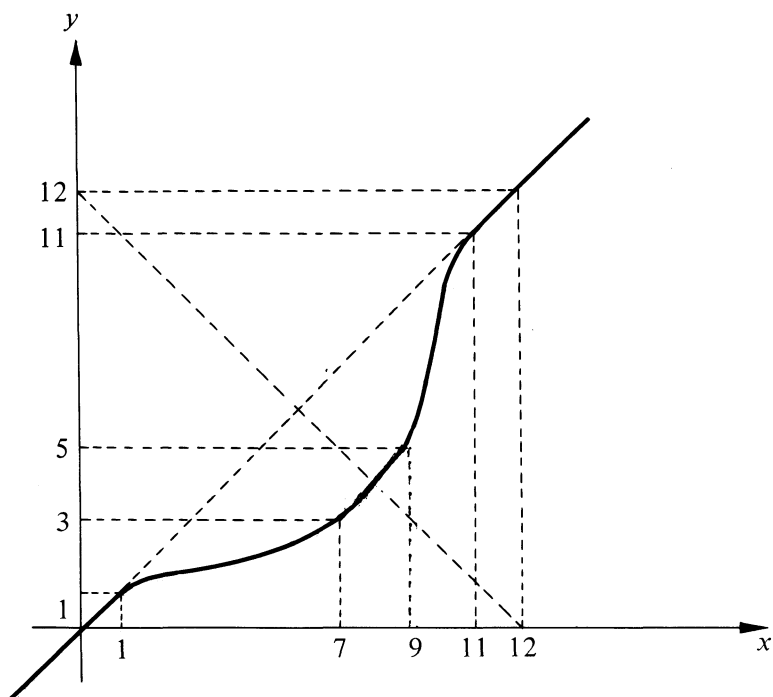


De plus, la restriction de ψ à chacun des intervalles $[0, e/2]$ et $[e/2, e]$ est le conjugué par une application affine convenable de la restriction à $[-e, +e]$ de $f = \varphi^4$, de manière à avoir :

$$(\psi_1) : \psi(x) > x \quad \text{pour } x \in]0, e[\quad \text{et } x \neq e/2.$$

Planche 3 : le difféomorphisme χ .

Le support de χ est égal à $[+1, +11]$ et son graphe est symétrique par rapport à la droite $y = -x + 12$.



En outre, on a :

$$(\chi_1) : \chi(x) < x \quad \text{pour } x \in]1, 11[;$$

$$(\chi_2) : \chi(x) = x - 4 \quad \text{pour } x \in [7, 9] ;$$

$$(\chi_3) : \chi'(x) < 1 \quad \text{pour } x \in]1, 7[.$$

Planche 4 : le difféomorphisme $\tilde{\chi}$.

Le support de $\tilde{\chi}$ est égal à $[-23, -1] \cup [+1, +23]$, et son graphe est symétrique par rapport à la seconde bissectrice.

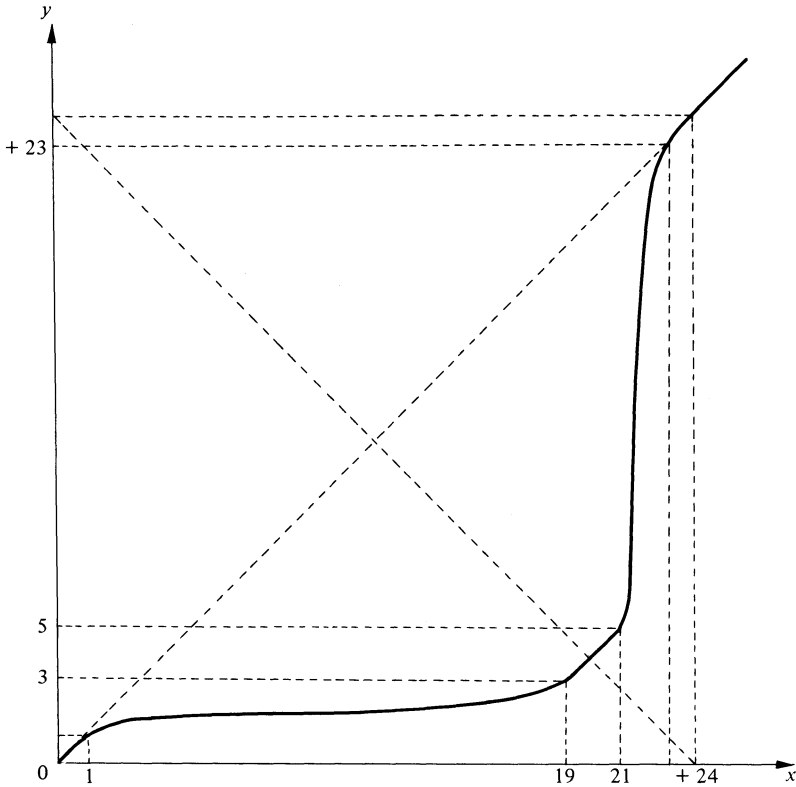
En restriction à $[1, 23]$, le graphe de $\tilde{\chi}$ est symétrique par rapport à la droite $y = -x + 24$:

Il vérifie en outre les relations :

$$(\tilde{\chi}_1) : \tilde{\chi}(x) < x \quad \text{pour } x \in]1, 23[;$$

$$(\tilde{\chi}_2) : \tilde{\chi}(x) = x - 16 \quad \text{pour } x \in [19, 21] ;$$

$$(\tilde{\chi}_3) : \tilde{\chi}'(x) < 1 \quad \text{pour } x \in]1, 19[.$$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. de Math.*, 9 (11) (1932), 333-375.
- [2] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, *Comm. Math. Helv.*, 32 (1958), 249-329.
- [3] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa*, 16 (1964), 367-397.
- [4] G. HECTOR, Sur le type des feuilletages transverses de \mathbb{R}^3 , *C.R. Acad. Sc., Paris*, 273 (1971), 810-813.

- [5] G. HECTOR, Sur un théorème de structure des feuilletages de codimension un. Thèse, Strasbourg, (1972).
- [6] W. KAPLAN, Regular curve-families filling the plane Part. I : *Duke Math. J.*, 7 (1940), 154-185. Part. II : *Duke Math. J.*, 8 (1941), 11-46.
- [7] H. POINCARÉ, Sur les courbes définies par les équations différentielles, *J. Math. Pures et Appl.*, I (1885), 167-244 et Oeuvres complètes T.I., 137-158.
- [8] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Act. Sc. et Ind.*, Hermann, Paris, 1952.
- [9] G. REEB, Sur les structures feuilletées de codimension 1 et sur un théorème de M.A. Denjoy, *Ann. Inst. Fourier*, 11 (1961), 185-200.
- [10] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, Les feuilles exceptionnelles ne sont pas exceptionnelles, *Comm. Math. Helv.*, 45 (1970), 517-523.
- [11] R. SACKSTEDER, On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension one, *Ann. Inst. Fourier*, 14 (2), (1964), 221-226.
- [12] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudo-groups, *Amer. J. of Math.*, 87 (1965), 79-102.
- [13] A. SCHWARTZ, A generalization of the Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds. *Amer. J. of Math.*, 85 (1963), 453-458.
- [14] C.L. SIEGEL, Notes on differential equations on the torus, *Ann. of Math.*, 46 (1945), 423-428.
- [15] J. WOOD, Bundles with totally disconnected structure group, *Comm. Math. Helv.*, 46 (1971), 257-273.

Manuscrit reçu le 2 octobre 1974

Accepté par G. Reeb.

Gilbert HECTOR,

U.E.R. de mathématiques

Université de Lille I

B.P. 36

59650 – Villeneuve d'Ascq.