ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MIKHAEL BALABANE

Puissances fractionnaires d'un opérateur générateur d'un semi-groupe distribution régulier

Annales de l'institut Fourier, tome 26, n° 1 (1976), p. 157-203

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_1_157_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 1 (1976), 157-203

PUISSANCES FRACTIONNAIRES D'UN OPÉRATEUR GÉNÉRATEUR D'UN SEMI-GROUPE DISTRIBUTION RÉGULIER

par **Mikhael BALABANE**

Introduction

Cet article vise à définir un calcul opérationnel sur la classe des opérateurs générateurs de Semi-Groupes Distribution Réguliers (SGDR), pour les fonctions $f(z) = -(-z)^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Ainsi, nous construisons, à partir d'un opérateur A de cette classe, un opérateur noté $-(-A)^\alpha$. Nous examinons les conditions à imposer à A pour que $-(-A)^\alpha$ engendre un SGDR, que nous notons alors U_α. Enfin, nous étudions la régularité de U_α. Ceci nous amène à expliciter une classe d'opérateurs, générateurs de SGDR : la classe (ϵ), sur laquelle le calcul opérationnel est interne, et vérifie les propriétés classiques du calcul des puissances fractionnaires. Enfin, nous étudions les propriétés d'approximation des opérateurs $-(-A)^\alpha$.

Pour ce faire, nous utilisons une technique inspirée de celle de Yosida [21], qui nous a parue d'un maniement plus aisé, dans le cadre des SGD, que celle de Balakrishnan [1] et Komatsu [14], [15]. (Cette dernière nécessite, en effet, une analyse directe des propriétés spectrales de $-(-A)^\alpha$).

Nous commençons par examiner le cas où A est un opérateur normal, générateur d'un SGDR sur un espace de Hilbert H, ce qui nous donne une idée des résultats "maximaux" auxquels nous pouvons nous attendre. Dans ce cas, nous utilisons une formule classique (Krein [13]) pour construire $-(-A)^\alpha$. Dans $(I-1)$, nous constatons que les opérateurs $-(-A)^\alpha$ vérifient les propriétés classiques des puissances fractionnaires. Dans $(I-2)$, nous établissons, par l'analyse spectrale de

$-(-A)^\alpha$, que cet opérateur est générateur d'un Semi-Groupe Holomorphe (SGH). Nous montrons que les opérateurs $-(-A)^\alpha$ approchent au mieux les opérateurs A et I (I – 3), et que les espaces $D(-(-A)^\alpha)$ interpolent les espaces D (A) et H.

Nous examinons ensuite le cas où A est un opérateur générateur d'un SGDR sur un espace de Banach X. Dans (II – 1), nous construisons, par une Intégrale de Dunford et grâce à la caractérisation de A donnée par Chazarain [5], un semi-groupe U_α qui, formellement, est le semi-groupe engendré par $-(-A)^\alpha$. Nous en étudions la régularité dans le cas général (II-2), et nous exposons les problèmes liés à la possibilité de définir $-(-A)^\alpha$ comme dérivée à l'origine de U_α, (II-3).

Puis nous utilisons la transformation de Mellin pour caractériser les opérateurs A pour lesquels U_α est un Semi-Groupe Fortement Continu (SGFC), et constatons que ce cadre coïncide avec celui que se sont fixés Balakrishan [1] et Komatsu [14], [15], (III, 1). De même, dans (III-2), nous donnons une caractérisation des opérateurs A pour lesquels U_α est un SGDR, fonction. Nous isolons ainsi une classe d'opérateurs, la classe (ϵ), stable par le calcul opérationnel. Nous explicitons les propriétés de régularité des opérateurs $-(-A)^\alpha$ et U_α correspondants. Enfin, dans (III-3), nous examinons le cas général, et caractérisons A pour que U_α soit un SGDR.

Remarque. – Nous supposerons toujours que la résolvante des opérateurs A considérés contient $\overline{R_+}$.

I. PUISSANCES FRACTIONNAIRES D'UN OPERATEUR NORMAL, GENERATEUR D'UN SGDR

1. Construction de $-(-A)^\alpha$.

Soit A un opérateur normal d'un espace de Hilbert H. Nous supposons que A engendre un SGDR : $\mathcal{G}$, et que $\overline{R_+} \subset \rho(A)$. En vue de construire les opérateurs $-(-A)^\alpha$, nous avons besoin des :

a) *Notations et définitions*

$\mathcal{D}(\mathbf{R})$ désignera l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}$ à support compact ; $\mathcal{D}_-$ l'espace des fonctions C^∞ à support limité à droite ; $\mathcal{D}_0$ le sous espace de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ des fonctions nulles sur $\mathbf{R}_-$. $\mathcal{D}'(\mathbf{R}\,;\mathrm{X})$ désignera l'espace des distributions sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans un espace de Banach X, et $\mathcal{D}'_+(\mathbf{R}\,;\mathrm{X})$ l'espace des distributions à support limité à gauche, à valeur dans X.

Pour une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, nous noterons $\hat{\phi}$ sa transformée de Laplace : $\hat{\phi}(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t}\ \phi(t)\,dt$.

A étant un opérateur d'un espace de Banach E, nous noterons D(A) son domaine, $\sigma(\mathrm{A})$ son spectre, et $\rho(\mathrm{A})$ son ensemble résolvant ($\rho(\mathrm{A}) = \mathbf{C} - \sigma(\mathrm{A})$). $\sigma(\mathrm{A})$ sera souvent une partie logarithmique du plan complexe ; une partie $\Sigma \subset \mathbf{C}$ étant dite logarithmique s'il existe deux constantes a et b telles que :

$$\lambda \in \Sigma \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda \leqslant \max(a, b \operatorname{Log}|\operatorname{Im}\lambda|)$$

De même, nous définissons une courbe logarithmique Γ par :

$$\lambda \in \Gamma \Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda = \max(a, b \operatorname{Log}|\operatorname{Im}\lambda|)$$

Enfin, nous appelons mesure spectrale hermitienne positive sur un espace de Hilbert H une mesure E sur $\mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, vérifiant les 3 propriétés suivantes :

i) $\forall \phi \in C_K(\mathbf{C}),\ \forall \psi \in C_K(\mathbf{C}),\ \int \phi(\lambda)\,\psi(\lambda)\,d\mathrm{E}(\lambda)$

$$= \Big(\int \phi(\lambda)\,d\mathrm{E}(\lambda)\Big) \circ \Big(\int \psi(\lambda)\,d\mathrm{E}(\lambda)\Big)$$

ii) $\forall \phi \in C_K(\mathbf{C}),\ \Big(\int \phi(\lambda)\,d\mathrm{E}(\lambda)\Big)^* = \int \bar{\phi}(\lambda)\,d\mathrm{E}(\lambda)$

iii) $\forall \phi \in C_K(\mathbf{C}),\ \phi \geqslant 0 \Rightarrow \int \phi(\lambda)\,d\mathrm{E}(\lambda) \geqslant 0$

Pour x et y éléments de H, nous noterons $\mathrm{E}_{x,y}$ la mesure sur $\mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall \phi \in C_K(\mathbf{C}),\ \int \phi(\lambda)\,d\mathrm{E}_{x,y}(\lambda) = \Big(\Big(\int \phi(\lambda)\,d\mathrm{E}(\lambda)\Big)x, y\Big)$$

où (,) désigne le produit scalaire dans H. Adoptant cette notation, nous définissons, pour toute fonction borélienne f sur **C**, l'opérateur normal non borné $E(f) = \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$ en posant :

i) $D(E(f)) = \{x \in H\ ;\ f \in L^2\ (\mathbf{C}\ ;\ E_{x,x})\}$

ii) $\forall x \in D(E(f)),\ \forall y \in D(E(f)),\ (E(f)x, y) = \int f(\lambda)\, dE_{x,y}(\lambda)$

Et nous avons alors : $\|E(f)\|_{\mathcal{L}(H)} = \underset{\lambda \in \operatorname{supp} E}{\sup . \operatorname{ess}} |f(\lambda)|$.

b) *Construction de* $-(-A)^\alpha$ *et premières propriétés*

A étant un opérateur normal sur un espace de Hilbert H, générateur d'un SGDR : $\mathcal{G}$, $(A = \overline{\mathcal{G}(-\delta')})$, il satisfait le :

Théorème I–1 (Chazarain [5], Foias [9]). – $\sigma(A)$ *est une partie logarithmique du plan complexe, et il existe une mesure spectrale hermitienne positive E, de support* $\sigma(A)$, *telle que :*

i) $A = \int \lambda\, dE(\lambda)$

ii) $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+),\ \mathcal{G}(\phi) = \int \hat{\phi}(\lambda)\, dE(\lambda)$

Il est alors naturel de définir, pour $0 < \alpha < 1$, les opérateurs $-(-A)^\alpha$ en posant :

Définition I–1. – $-(-A)^\alpha = \int -(-\lambda)^\alpha\, dE(\lambda)$

(où $Z^\alpha = |Z|^\alpha\, e^{i\alpha \operatorname{Arg} Z}$ pour $-\pi < \operatorname{Arg} Z \leqslant +\pi$)

Il découle alors, des propriétés des mesures spectrales hermitiennes positives (Schwartz [17]) la :

Proposition I–1. – *Pour* $0 < \alpha < 1$, $-(-A)^\alpha$ *est un opérateur fermé de domaine dense, normal.*

Nous allons démontrer, et ce sera l'objet de la suite de ce paragraphe, que les opérateurs ainsi définis vérifient les propriétés classiques des puissances fractionnaires. Dans la suite, nous écrivons A_α pour $-(-A)^\alpha$.

PROPOSITION I–2. – *Pour* $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$ $D(A_\alpha) \subset D(A_\beta)$.

Preuve. – Si $x \in D(A_\alpha)$, alors $-(-\lambda)^\alpha \in L^2(\mathbf{C}\ ;E_{x,x})$. Mais alors, pour $|\lambda| \geqslant 1$, $|-(-\lambda)^\alpha| \geqslant |-(-\lambda)^\beta|$, et, pour $|\lambda| < 1$, $|-(-\lambda)^\beta| \leqslant 1$. Comme $1 \in L^2(\mathbf{C}\ ;E_{x,x})$, nous avons $-(-\lambda)^\beta \in L^2(\mathbf{C}\ ;E_{x,x})$, donc $x \in D(A_\beta)$.

Nous en déduisons le :

THEOREME I–2. – *Pour* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha + \beta < 1$, *il est équivalent de dire :*

i) $x \in D(A_{\alpha+\beta})$

ii) $x \in D(A_\alpha)$ et $A_\alpha x \in D(A_\beta)$

et, dans l'un ou l'autre cas, nous avons :

$$A_\beta\ A_\alpha\ x = -\ A_{\alpha+\beta}\ x\ .$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du :

LEMME I–1. – $\forall x \in D(A)$, $E_{A_\alpha x,\, A_\alpha x} = |\lambda|^{2\alpha}\ E_{x,x}$.

Démonstration du lemme. – Pour toute fonction ϕ de $C_K(\mathbf{C})$, nous avons :

$$E_{A_\alpha x,\, A_\alpha x}\ (\phi) = \left(\int \phi(\lambda) dE(\lambda) \int -(-\lambda)^\alpha dE(\lambda)x, \int -(-\lambda)^\alpha dE(\lambda)x\right)$$

$$= \left(\int |\lambda|^{2\alpha}\ \phi(\lambda) dE(\lambda)x, x\right) = (|\lambda|^{2\alpha}\ E_{x,x})\ (\phi)$$

Démonstration du théorème. – L'équivalence de (i) et (ii) découle du lemme puisque :

$$[x \in D(A_\alpha) \text{ et } A_\alpha x \in D(A_\beta)] \Leftrightarrow [-(-\lambda)^\alpha \in L^2(\mathbf{C}\ ;E_{x,x})$$

et $\quad [-(-\lambda)^\beta \in L^2(\mathbf{C}, E_{A_\alpha x,\, A_\alpha x})] \Leftrightarrow [|\lambda|^\alpha \in L^2(\mathbf{C}\ ;E_{x,x})$

et $\quad [\,|\lambda|^\beta \in L^2(\mathbf{C}, |\lambda|^{2\alpha} . E_{x,x})] \Leftrightarrow [|\lambda|^{\alpha+\beta} \in L^2(E_{x,x})]$

$$\Leftrightarrow [x \in D(A_{\alpha+\beta})].$$

L'égalité découle de la nature spectrale de la mesure E.

De la proposition (I−2) découle la :

PROPOSITION I−3. — *En notant* $\mathcal{R}$ *le sous espace engendré par* $\bigcup_{\phi \in \mathcal{D}_0} \mathcal{G}(\phi)\mathrm{H}$, *nous avons :*

i) $\mathcal{R}$ *est dense dans* H

ii) $\forall \alpha,\ 0 < \alpha < 1,\quad \mathcal{R} \subset \mathrm{D}(\mathrm{A}_\alpha)$

Démonstration. — Le résultat (i) découle de la régularité de $\mathcal{G}$ (Lions [16]). Le résultat (ii) découle de (I−2) puisque $\mathcal{R} \subset \mathrm{D(A)}$ (Lions [16].

2. Propriétés spectrales de A_α $(0 < \alpha < 1)$ Semi-groupe engendré par A_α :

a) *Mesure spectrale attachée à* A_α. *Spectre de* A_α :

A_α étant un opérateur normal, densément défini et fermé, il existe une et une seule mesure spectrale E_α hermitienne positive qui vérifie :

$$\mathrm{A}_\alpha = \int \lambda \, d\mathrm{E}_\alpha(\lambda).$$

Or, la mesure spectrale image de E par l'application $\lambda \to -(-\lambda)^\alpha$ a cette propriété. D'où la :

PROPOSITION I−5. — $\sigma(\mathrm{A}_\alpha) \subset -(-\sigma(\mathrm{A}))^\alpha$.

Pour caractériser géométriquement ce spectre, nous avons besoin de la :

NOTATION. — *Nous noterons* S_η *le secteur ouvert du plan complexe :*

$$\mathrm{S}_\eta = \{\lambda \in \mathbf{C}\ ;\ |\mathrm{Arg}\ \lambda| < \eta\}$$

LEMME I−2. — Σ *étant une partie logarithmique du plan complexe, pour tout* α, $0 < \alpha < 1$, *et tout* $\epsilon > 0$, *il existe une constante* C_ϵ *telle que l'image de* Σ *par l'application* $\lambda \to -(-\lambda)^\alpha$ *soit contenue dans* $\mathrm{C}_\epsilon - \mathrm{S}_{\alpha\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)}$.

Démonstration. – Constatons d'abord que, du fait que Σ est logarithmique découle l'inégalité :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists B_\epsilon \ ; \left(|\lambda| > B_\epsilon \text{ et } \lambda \in \Sigma \Rightarrow |\operatorname{Arg}(-\lambda)| < \frac{\pi}{2} + \epsilon\right)$$

Donc, pour $\lambda \in \Sigma \ , \ (-\lambda)^\alpha \in \{\lambda \ ; |\lambda|^\alpha < B_\epsilon\} \cup S_{\alpha(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}$

Donc, pour $\lambda \in \Sigma \ , \ -(-\lambda)^\alpha \in C_\epsilon - S_{\alpha(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}$,

avec $$C_\epsilon = B_\epsilon / \sin \alpha\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right).$$

De ce lemme, du théorème (I–1) et de la proposition (I–5) découle alors le :

THEOREME I–3. – i) $\forall \epsilon > 0 \ , \exists C_\epsilon \ ; \sigma(A_\alpha) \subset C_\epsilon - S_{\alpha(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}$

ii) $\forall \eta > 0 \ , \exists M_\eta \ ; \ \forall \mu \in S_{\pi - \alpha(\frac{\pi}{2}+\epsilon) - \eta}$,

$$\mu \in \rho(A_\alpha - C_\epsilon I) \text{ et } \|(\mu + C_\epsilon I - A_\alpha)^{-1}\| \leqslant \frac{M_\eta}{|\mu|}$$

Démonstration. – Il reste à démontrer (ii). Pour cela, écrivons :

$$(\mu + C_\epsilon - A_\alpha)^{-1} = \int \frac{1}{\mu - \lambda + C_\epsilon} \, dE_\alpha(\lambda)$$

Donc :

$$\|(\mu + C_\epsilon - A_\alpha)^{-1}\| = \sup_{\lambda \in \operatorname{supp} E_\alpha} \left| \frac{1}{\mu - \lambda + C_\epsilon} \right|$$

$$\leqslant \sup_{\lambda \in C_\epsilon - S_{\alpha(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}} \left| \frac{1}{\mu - \lambda + C_\epsilon} \right| = \sup_{-\lambda \in S_{\alpha(\frac{\pi}{2}+\epsilon)}} \left| \frac{1}{\mu - \lambda} \right| \leqslant \frac{1}{|\mu| \sin \eta}$$

Remarque. – De même, nous pouvons démontrer que $\overline{\mathbf{R}_+} \subset \rho(A_\alpha)$.

b) *Semi-groupe engendré par* A_α

De cette proposition, et de la caractérisation d'un opérateur générateur de semi-groupe holomorphe (Kato [11], Butzer-Berens [4]) découle le :

LEMME I–3. – *Pour tout* $\epsilon > 0$, *l'opérateur* $(A_\alpha - C_\epsilon I)$ *engendre un semi-groupe holomorphe dans le secteur* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)-\alpha\epsilon}$, *fortement continu à l'origine.*

En multipliant ce semi-groupe par $e^{C_\epsilon t}$, nous avons :

LEMME I–4. – *Pour tout* $\epsilon > 0$, A_α *engendre un semi-groupe holomorphe dans* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)-\epsilon}$, *fortement continu à l'origine.*

D'où le :

THEOREME I–3. – A_α *est générateur d'un semi-groupe* U_α, *holomorphe dans* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, *et fortement continu à l'origine, qui s'écrit :*

$$U_\alpha(t) = e^{-t(-A)^\alpha} = \int e^{-t(-\lambda)^\alpha}\, dE(\lambda).$$

Démonstration. – Du lemme (I–4), nous déduisons l'existence du semi-groupe U_α dont le générateur est A_α. D'autre part, A_α étant un opérateur fermé, de domaine dense, normal, et son spectre étant une partie logarithmique du plan complexe, il engendre, d'après Foias [9], un SGDR : $\mathcal{G}_\alpha$ qui s'écrit :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(R_+)\,, \quad \mathcal{G}_\alpha(\phi) = \int \hat{\phi}(\lambda)\, dE_\alpha(\lambda).$$

Or, si nous considérons l'opérateur $\overline{\mathcal{G}_\alpha(\delta_t)}$, (Lions [16]), nous avons :

$$\overline{\mathcal{G}_\alpha(\delta_t)} = \int \hat{\delta}_t(\lambda)\, dE(\lambda) = \int e^{\lambda t}\, dE_\alpha(\lambda).$$

Pour tout $t \geqslant 0$, $\overline{\mathcal{G}_\alpha(\delta_t)}$ est un opérateur continu, et la famille $(\overline{\mathcal{G}_\alpha(\delta_t)})_{t\geqslant 0}$ forme un semi-groupe, fortement continu d'après le théorème de Lebesgue. D'où :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(R_+)\,, \quad \mathcal{G}_\alpha(\phi) = \int_0^\infty \phi(t)\, \overline{\mathcal{G}_\alpha(\delta_t)}\, dt.$$

Par unicité du SGFC engendré par un opérateur, nous avons : $\overline{\mathcal{G}_\alpha(\delta_t)} = U_\alpha(t) = e^{-t(-A)^\alpha}$

Donc $e^{-t(-A)^\alpha} = \int e^{\lambda t}\, dE_\alpha(\lambda) = \int e^{-t(-\lambda)^\alpha}\, dE(\lambda)$. C.Q.F.D.

Ainsi, nous avons construit un calcul opérationnel pour les opérateurs normaux, générateurs de SGDR, à résolvante contenant $\overline{R_+}$; De plus, remarquons que l'opération : "prendre la puissance fractionnaire" est régularisante : elle transforme le générateur d'un SGDR en un générateur de semi-groupe fonction, fortement continu, holomorphe dans un secteur.

3. Propriétés d'approximation ; les espaces $D(A_\alpha)$.

a) *Propriétés d'approximation*

Par simple application du théorème de Lebesgue, nous établissons le :

THEOREME I–4. – i) *Pour tout* $x \in D(A)$, $\lim\limits_{\alpha \to 1} A_\alpha x = Ax$

ii) *Pour tout* $\epsilon > 0$, *et pour* $x \in D(A_\epsilon)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} A_\alpha x = -x$

iii) *Pour* $0 < \alpha < 1$, *s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que* $x \in D(A_{\alpha+\epsilon})$, *alors* $A_\beta x$ *est continu en* β *au point* α.

Remarque.– Un énoncé plus précis de ce théorème a été donné dans Balabane [2].

b) *Les espaces* $D(A_\alpha)$; $(0 < \alpha < 1)$

A_α étant un opérateur normal et fermé, l'espace $D(A_\alpha)$ muni du produit scalaire $(x, y)_\alpha = (x, y) + (A_\alpha x, A_\alpha y)$ est un espace de Hilbert. Nous avons évidemment le :

THEOREME I–5. – *Pour* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 1$, *l'injection de* $D(A_\alpha)$ dans $D(A_\beta)$ *est continue.*

De plus, nous avons le :

THEOREME I–6. – *Pour* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 1$, $D(A_\alpha)$ *est dense dans* $D(A_\beta)$

qui découle de la proposition (I–2) et de la :

PROPOSITION I–6. – $D(A)$ *est dense dans* $D(A_\alpha)$.

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du :

LEMME. – *Pour* $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, *si* $D(A)$ *est dense dans* $D(A_{2\alpha})$ *alors* $D(A)$ est dense dans $D(A_\alpha)$.

Démonstration du lemme. – Soit l une forme linéaire continue sur $D(A_\alpha)$, nulle sur $D(A)$. Il existe alors $y \in D(A_\alpha)$ tel que :

$$\forall x \in D(A_\alpha) \quad , \quad l(x) = (x\,,y) + (A_\alpha x \ , \ A_\alpha y)$$

et

$$\forall x \in D(A) \quad , \quad (x\,,y) + (A_\alpha x \ , \ A_\alpha y) = 0$$

Or, $\quad x \in D(A) \Rightarrow x \in D(A_{2\alpha}) \Rightarrow x \in D(A_\alpha A_\alpha^*)$; d'où

$$\forall x \in D(A) \ , \ ((I + A_\alpha \ A_\alpha^*)\,x\,,y) = 0$$

Or, si $D(A)$ est dense dans $D(A_{2\alpha})$, $(I + A_\alpha \ A_\alpha^*)$ étant une bijection continue de $D(A_{2\alpha})$ dans H, $(I + A_\alpha \ A_\alpha^*)\ D(A)$ est dense dans H, donc $y = 0$.

Remarque. – Ce raisonnement montre aussi que $D(A_{2\alpha})$ est dense dans $D(A_\alpha)$, (même pour $2\alpha \geqslant 1$).

Démonstration de la proposition. – Soit $n \in \mathbf{N}$, tel que :

$$2^{n+1}\ \alpha \geqslant 1 \geqslant 2^n \alpha.$$

D'après la remarque du lemme, $D(A_{2^{n+1}\alpha})$ est dense dans $D(A_{2^n\alpha})$. Or, $D(A_{2^{n+1}\alpha}) \subset D(A)$. Donc $D(A)$ est dense dans $D(A_{2^n\alpha})$. En itérant l'application du lemme, ceci montre que $D(A)$ est dense dans $D(A_\alpha)$.

Enfin, il est facile de prouver le :

THEOREME I–7. – *Soit* $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$. *Soit* $x \in D(A_\gamma)$. *Alors* :

$$\|A_\beta\ x\| \leqslant C\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\|\ A_\alpha\ x\|^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)}\|A_\gamma\ x\|^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}$$

II. CAS OU A ENGENDRE UN SGDR SUR UN ESPACE DE BANACH

Soit A un opérateur générateur d'un SGDR $\mathcal{G}$ sur un espace de Banach X. En vue de définir $-(-A)^\alpha$, construisons le semi-groupe U_α que, formellement, il engendre. Pour cela nous utilisons la caractérisation de A donnée par Chazarain [5] :

THEOREME II–1. – A *est un opérateur fermé de domaine dense, dont le spectre est contenu dans une partie logarithmique du plan complexe,* Σ, *et dont la résolvante satisfait à la majoration :*

$$\forall \lambda \in \Sigma \quad ; \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \mathrm{Pol}\,(|\lambda|),$$

où Pol désigne un polynôme à coefficients positifs, indépendant de λ.

Remarque. – Nous supposerons, dans toute la suite, que

$$\overline{\mathbf{R}}_+ \cap \Sigma = \phi\ ,$$

et nous désignerons par N le degré du polynôme. Nous écrirons souvent $\mathrm{Pol}(|\lambda|)$ sous la forme $M(1 + |\lambda|)^N$ où M est une constante.

1. Construction de U_α ; $(0 < \alpha < 1)$.

DEFINITION II–1. – *Soit* Γ *une courbe logarithmique qui entoure* Σ, *et qui ne coupe pas* $\overline{\mathbf{R}}_+$, *orientée dans le sens des Im* λ *croissants. Posons, pour* $t > 0$:

$$U_\alpha(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{-t(-\lambda)^\alpha}\,(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda.$$

L'application $f(z) = z^\alpha$ *étant définie comme en I–1.*

Remarque. – Cette définition de U_α coïncide avec celle donnée en I quand A est un opérateur normal et X un espace de Hilbert. En effet, choisissons Γ telle que, pour $\mu \in \Gamma$, $|\mu| \to \infty$, on ait :

$$\frac{|e^{-t(-\mu)^\alpha}|}{\mathrm{dist}(\mu, \Sigma)} = O\Big(\frac{1}{|\mu|^2}\Big)$$

nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{-t(-\lambda)^\alpha}(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{-t(-\lambda)^\alpha}\Big(\int_\Sigma \frac{1}{\lambda-\mu}\,dE(\mu)\Big)d\lambda$$

$$= \int_\Gamma \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_\Gamma \frac{e^{-t(-\lambda)^\alpha}}{\lambda-\mu}\,d\lambda\Big)\,dE(\mu) = \int_\Gamma e^{-t(-\mu)^\alpha}\,dE(\mu).$$

L'intervertion des intégrations étant permise, d'après le théorème de Fubini, puisque, si nous notons $\|E\|$ la mesure sur C à valeur dans R_+ définie par $\|E\|(\phi) = \|E(\phi)\|$, nous avons :

$$\int_\Gamma\int_\Sigma \left|\frac{e^{-t(-\lambda)^\alpha}}{\lambda-\mu}\right| d|\lambda|\,d\|E\|(\mu) = \int_\Gamma\Big(\int_\Sigma \left|\frac{e^{-t(-\lambda)^\alpha}}{\lambda-\mu}\right| d\|E\|(\mu)\Big)d|\lambda|$$

$$\leqslant \int_\Gamma \sup_{\mu\in\Sigma}\left|\frac{e^{-t(-\lambda)^\alpha}}{\lambda-\mu}\right| d|\lambda| < +\infty. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Etablissons maintenant que U_α est un semi-groupe, et étudions ses principales propriétés.

PROPOSITION II–1. – *Pour* $0 < \alpha < 1$, *et pour tout* $t > 0$, $U_\alpha(t)$ *est un opérateur linéaire continu sur* X.

En effet, l'intégrale est convergente au sens de la norme de $\mathcal{L}(X)$, puisque, d'après le lemme (I–2), pour $\lambda \in \Gamma$ et $|\lambda| \to \infty$,

$$|e^{-t(-\lambda)^\alpha}| = 0\left(e^{-t|\lambda|^\alpha\cos(\alpha\frac{\pi}{2}+\epsilon)}\right)$$

La majoration polynômiale de $\|(\lambda - A)^{-1}\|$ donnée par le théorème (II–1) permet alors de conclure.

THEOREME II–2. – $\forall s > 0$, $\forall t > 0$, $U_\alpha(t+s) = U_\alpha(t)\;U_\alpha(s)$

Démonstration. – Remarquons d'abord que la fonction

$$e^{-t(-\lambda)^\alpha}\,(\lambda - A)^{-1}$$

étant holomorphe sur le complémentaire de $\Sigma \cup \overline{R_+}$, la définition de U_α ne dépend pas de la courbe logarithmique choisie. Soit donc Γ et Γ' deux telles courbes ; nous avons, d'après l'identité résolvante :

$$\mathrm{U}_\alpha(t)\ \mathrm{U}_\alpha(s) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma'} e^{-t(-\lambda)^\alpha}\, e^{-s(-\mu)^\alpha}\, (\lambda - \mathrm{A})^{-1}\ (\mu - \mathrm{A})^{-1}\ d\lambda\, d\mu$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \frac{e^{-t(-\lambda)^\alpha}\ e^{-s(-\mu)^\alpha}}{\mu-\lambda}\ [(\lambda - \mathrm{A})^{-1} - (\mu - \mathrm{A})^{-1}]\, d\lambda\ d\mu$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{-t(-\lambda)^\alpha}\, (\lambda - \mathrm{A})^{-1} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} \frac{e^{-s(-\mu)^\alpha}}{\mu - \lambda}\, d\mu\right) d\lambda$$

$$- \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} e^{-s(-\mu)^\alpha}\, (\mu - \mathrm{A})^{-1} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{e^{-t(-\lambda)^\alpha}}{\mu - \lambda}\, d\lambda\right) d\mu$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{-t(-\lambda)^\alpha}\ e^{-s(-\lambda)^\alpha}\ (\lambda - \mathrm{A})^{-1}\ d\lambda = \mathrm{U}_\alpha(t + s)$$

2. Propriétés de U_α .

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la régularité de U_α. Commençons par le :

THEOREME II–3. – *Pour* $0 < \alpha < 1$, U_α *est un semi-groupe holomorphe dans le secteur* $\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$.

Démonstration. – Il suffit, d'après Hille-Phillips [10], de montrer qu'il existe une application holomorphe sur $\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$ prolongeant U_α. Or la formulation :

$$\mathrm{U}_\alpha = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{-t(-\lambda)^\alpha}\ (\lambda - \mathrm{A})^{-1}\ d\lambda$$

fournit un prolongement de U_α sur l'ensemble des points $t \in \mathrm{C}$ où cette intégrale est convergente : l'ensemble des $t \in \mathrm{C}$ tels que $\operatorname{Re} t(-\lambda)^\alpha < 0$ pour tout $\lambda \in \Gamma$, $|\lambda|$ assez grand. D'après le lemme (I–2), cet ensemble contient $\mathrm{S}_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$.

Montrons maintenant que, pour $t > 0$, $\mathrm{U}_\alpha(t)$ "régularise" les éléments de X :

PROPOSITION II-2. — $\forall x \in \mathrm{X}$, $\forall t > 0, \forall \alpha$, $0 < \alpha < 1$,

$$\mathrm{U}_\alpha(t)\,x \in \mathrm{D}(\mathrm{A}^\infty).$$

De plus, si $x \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$, $\mathrm{U}_\alpha(t)\mathrm{A}x = \mathrm{A}\mathrm{U}_\alpha(t)x$.

Démonstration. — La première partie de la proposition sera démontrée, dès que nous aurons prouvé que $\mathrm{U}_\alpha(t)\,x \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$. Pour ce faire, soit $(\rho_n)_{n\in\mathrm{N}}$ une suite régularisante de $\mathcal{D}_0$, nous avons (Chazarain [5]) :

$$\mathcal{G}(\rho_n)\ \mathrm{U}_\alpha(t)x = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \hat{\rho}_n(\lambda)\ (\lambda - \mathrm{A})^{-1}$$

$$\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} e^{-t(-\mu)^\alpha}\ (\mu - \mathrm{A})^{-1}\,x\,d\mu\right]\ d\lambda$$

Et en appliquant l'identité résolvante, après avoir constaté que $\hat{\rho}_n$ était une fonction entière, décroissant à l'infini, sur Σ, plus vite que toute puissance de $1/|\lambda|$:

$$\mathcal{G}(\rho_n)\ \mathrm{U}_\alpha(t)x = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{-t(-\lambda)^\alpha}\ \hat{\rho}_n(\lambda)\ (\lambda - \mathrm{A})^{-1}\,x\,d\lambda.$$

Or, ρ_n tendant vers δ dans $\mathcal{D}'$, $\hat{\rho}_n$ tend vers 1, en restant dominé par une constante. Nous pouvons appliquer le théorème de Lebesgue qui donne :

$$\mathcal{G}(\rho_n)\ \mathrm{U}_\alpha(t)x \to \mathrm{U}_\alpha(t)x$$

De même nous pouvons démontrer que :

$$\mathcal{G}(-\rho_n')\ \mathrm{U}_\alpha(t)x \to \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \lambda e^{-t(-\lambda)^\alpha}\ (\lambda - \mathrm{A})^{-1}\,x\,d\lambda.$$

Comme A est fermé, ceci prouve que $\mathrm{U}_\alpha(t)x \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$ et que :

$$\mathrm{A}\ \mathrm{U}_\alpha(t)x = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \lambda e^{-t(-\lambda)^\alpha}\ (\lambda - \mathrm{A})^{-1}\,x\,d\lambda.$$

De plus, la deuxième partie de la proposition se démontre en remarquant que dans cette écriture, si $x \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$, nous pouvons remplacer $\lambda(\lambda - \mathrm{A})^{-1}x$ par $\mathrm{I} + (\lambda - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{A}x$.

Etudions maintenant le comportement asymptotique de U_α. Du théorème de Lebesgue découle le :

TEOREME II–4. – $\forall\, n \in \mathrm{N}$, $\forall \alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{t \to \infty} t^n \, \|U_\alpha(t)\| = 0$.

Quant au comportement au voisinage de 0 de U_α, il est donné par le :

THEOREME II–5. – *Pour tout* α, $0 < \alpha < 1$, *il existe une constante* $K(\alpha)$ *indépendante de t telle que :*

$$\|U_\alpha(t)\| \leqslant \frac{K(\alpha)}{t^{\frac{N+1}{\alpha}}}$$

Démonstration. – Ce théorème découle des inégalités du lemme (I-2) et du théorème (II-1), par un calcul classique (Widder [20]).

Remarque. – Nous avons construit le semi-groupe U_α que $-(-A)^\alpha$, formellement, engendre. C'est un semi-groupe holomorphe dans $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, comme le chapitre I le laissait prévoir. Mais contrairement au cas I, il n'est pas fortement continu : généralement, la majoration du théorème II-5 ne peut être améliorée (c.f. III). U_α étant à croissance polynômiale au voisinage de l'origine, il existe une distribution qui la régularise (Gelfand-Shilov : generalized functions. T1) ; mais U_α n'étant pas localement intégrable sur $\overline{\mathrm{R}_+}$; la distribution qui le régularise aura généralement l'origine pour support singulier : ce ne sera donc pas un SGD régulier.

Néanmoins U_α satisfait deux propriétés qui, dans le cas des semi-groupes fortement continus, découlent de la continuité à l'origine. Ces deux propriétés établissent en partie, dans le cas des SGDR, la régularité à l'origine. Avant de les énoncer (théorème II-6), établissons le :

LEMME II-1. – $\forall \alpha$, $(0 < \alpha < 1)$, $\forall x \in D(A^{n+2})$, $\lim\limits_{t \to 0} U_\alpha(t)x = x$.

Démonstration. – L'identité résolvante permet d'écrire :

$$(\lambda - A)^{-1} x = \frac{x}{\lambda} + \frac{Ax}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A^{N+1} x}{\lambda^{N+2}} + \frac{(\lambda - A)^{-1} A^{N+2} x}{\lambda^{N+2}}$$

D'où :

$$U_\alpha(t)x = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\exp[-t(-\lambda)^\alpha]}{\lambda^{N+2}} (\lambda - A)^{-1} A^{N+2} x\, d\lambda$$

Le théorème de Lebesgue montre alors que, quand $t \to 0$,

$$U_\alpha(t)x \to \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda^{N+2}} (\lambda - A)^{-1} A^{N+2} x\, d\lambda$$

et le calcul des résidus permet d'affirmer que ceci est x.

Adoptons la :

NOTATION II–1. – $\mathcal{G}_\alpha$ *désignera la distribution appartenant à* $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+ ; \mathcal{L}(X))$ *associée à* U_α :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}_+) \quad , \quad \mathcal{G}_\alpha(\phi) = \int_0^\infty \phi(t) \quad U_\alpha(t)\, dt.$$

Nous avons le :

THEOREME II-6. – i) R_α, le sous espace *engendré par* $\bigcup_{\phi \in \mathcal{D}_0} [\mathcal{G}_\alpha(\phi) X]$ est dense dans X,

ii) $N_\alpha = \bigcap_{\phi \in \mathcal{D}_0} [\operatorname{Ker} \mathcal{G}_\alpha] = \{0\}$

Démonstration. – i) découle du lemme II-1 et du fait que $D(A^{N+2})$ est dense dans X (Lions [16]).

ii) soit $x \in N_\alpha$, et soit (ρ_n) une suite régularisante de $\mathcal{D}(\mathbf{R}_+)$. Nous avons :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \hat{\rho}_n \; (-(-\lambda)^\alpha) \; (\lambda - A)^{-1} \; x\, d\lambda = 0$$

A^{-1} étant un opérateur continu sur X, ceci s'écrit :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad , \quad \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \hat{\rho}_n \; (-(-\lambda)^\alpha) A^{-1} \; (\lambda - A)^{-1} \; x\, d\lambda = 0.$$

Utilisons l'identité résolvante, et l'analycité de la fonction à intégrer sur $\complement(\Sigma \cup \mathbf{R}_+)$:

$$\forall\, n \in \mathrm{N} \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{\hat{\rho}_n(-(-\lambda)^{\alpha})}{\lambda}\,(\lambda - \mathrm{A})^{-1}\, x\, d\lambda = 0$$

Itérons ce calcul jusqu'à l'ordre N + 2, puis appliquons le théorème de Lebesgue en faisant tendre n vers l'infini. Il vient :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda^{\mathrm{N}+2}}\,(\lambda-\mathrm{A})^{-1}\, x\, d\lambda = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\lambda^{\mathrm{N}+2}}(\lambda - \mathrm{A})^{-1}\, x\,,\, 0\right)$$

$$= \mathrm{A}^{-\mathrm{N}-2}x = 0$$

D'où la conclusion : $x = 0$.

3. Construction de A_α.

L'aboutissement logique de cette étude serait de définir $-(-\mathrm{A})^{\alpha}$ comme la dérivée à l'origine du semi-groupe U_α. Malheureusement, U_α n'étant pas un SGD régulier, ni à fortiori un SG fortement continu, les opérateurs ainsi définis ne seraient pas fermés. Mais, en adoptant la :

NOTATION. — *Nous noterons* A_α *la dérivée à l'origine de* U_α :

$$\mathrm{D}(\mathrm{A}_\alpha) = \left\{ x \in \mathrm{X}\ ;\ \frac{\mathrm{U}_\alpha(t)x - x}{t}\ \textit{a une limite pour } t \to 0 \right\}$$

$$\mathrm{A}_\alpha x = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{U}_\alpha(t)x - x}{t}$$

Nous pouvons affirmer :

PROPOSITION II–3. — A_α *est densément défini, fermable.*

En effet, d'après le théorème (II–5), U_α est un SG à croissance $\left[\frac{\mathrm{N}+1}{\alpha}\right] + 1$, et un théorème de Da Prato-Mosco [7] permet de conclure.

De cette proposition découle la possibilité de définir $-(-\mathrm{A})^{\alpha}$ comme étant la fermeture de A_α ; mais, généralement, nous n'avons pas $\rho(\overline{\mathrm{A}_\alpha}) \neq \phi$. Dans le chapitre suivant, nous résolvons ces problèmes et caractérisons A pour que ces difficultés soient levées.

Notons d'abord la :

PROPOSITION II–4. – $\forall x\, D(A^\infty)$, $A_\alpha\, A_\beta\, x = - A_{\alpha+\beta}\, x$.

qui découle de l'application itérée de l'identité résolvante et du calcul holomorphe.

Adoptons enfin une notation qui nous sera utile par la suite :

NOTATION. – *Nous noterons $\mathcal{G}_\alpha$ le* SGD *(non nécessairement régulier) défini par :*

$$\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{D}'(R_+ \; ; \mathcal{L}(X)), \quad \mathcal{G}_\alpha(\phi) = \int_0^\infty \phi(t)\; U_\alpha(t)\, dt \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(R_+).$$

III. ETUDE DE $\overline{A_\alpha}$. DEFINITION DE $-(-A)^\alpha$

0. Nouvelle formulation de U_α.

Dans ce chapitre, nous nous restreindrons à étudier le cas $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Cette restriction ne limite pas la portée des résultats, car, grâce à l'holomorphie de U_α sur $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, le théorème suivant nous permettra de conclure pour $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$, dès que nous le pourrons pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$:

THEOREME III–1. – *Soit* B *un opérateur fermé, de domaine dense, sur un espace de Banach* X. *Si* B *est générateur d'un* SGDR $\mathcal{G}$*(respectivement SGFC), analytique dans* S_θ *avec* $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$, *alors* $-B^2$ *est générateur d'un SGDR (respectivement SGFC), analytique dans* $S_{2(\theta-\frac{\pi}{4})}$.

Démonstration. – Dans le cas où $\mathcal{G}$ est un SGDR, $\mathcal{G}$ étant analytique, il est à croissance exponentielle (Chazarain [5]). Quitte à multiplier $\mathcal{G}$ par e^{-Nt}, nous pouvons supposer que $\mathcal{G}$ est borné. Et nous avons (Da Prato-Mosco [6]) :

$$\begin{cases} \rho(B) \supset S_{\frac{\pi}{2}+\theta} \\ \forall \eta > 0,\ \exists M_\eta > 0,\ \exists N_\eta \in \mathbb{N}\ ;\ \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\theta-\eta} \Rightarrow \|(\lambda - B)^{-1}\| \\ \qquad\qquad \leqslant M_\eta\,(1 + |\lambda|)^{N_\eta} \end{cases}$$

Mais alors, pour tout $\eta > 0$, et tout complexe $\mu \in S_{2\theta - 2\eta}$, nous pouvons écrire :

$$(\mu + B^2) = (i\,|\mu|^{\frac{1}{2}}\; e^{i(\operatorname{Arg}\mu)/2} + B)\,(-\,i\,|\,\mu\,|^{\frac{1}{2}}\; e^{i(\operatorname{Arg}\mu)/2} + B)$$

Or, pour $\mu \in S_{2\theta-2\eta}$,

$$i\,|\mu|^{1/2}\; e^{i(\operatorname{Arg}\mu)/2} \in S_{\frac{\pi}{2}+\theta-\eta}\,,$$

et

$$-\,i\,|\mu|^{1/2}\; e^{i(\operatorname{Arg}\mu)/2} \in S_{\frac{\pi}{2}+\theta-\eta}\,.$$

Donc les opérateurs $(i|\mu|^{1/2}\; e^{i(\operatorname{Arg}\mu)/2} + B)$ et $(-i|\mu|^{1/2}\; e^{i(\operatorname{Arg}\mu)/2} + B)$ sont inversibles, et ceci entraîne que $(\mu + B^2)$ est inversible. Et nous avons la majoration :

$$\|(\mu + B^2)^{-1}\| < \|(i\,|\mu|^{1/2}\; e^{i(\operatorname{Arg}\mu)/2} + B)^{-1}\|$$

$$\|(-\,i\,|\mu|^{\frac{1}{2}}\; e^{-(\operatorname{Arg}\mu)/2} + B)^{-1}\|$$

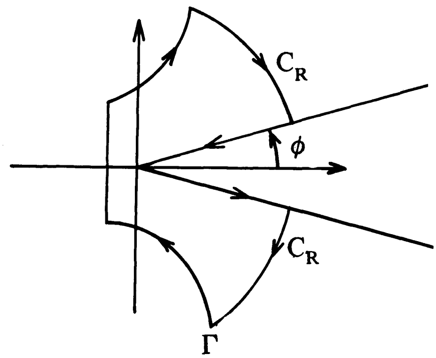
$< M_\eta^2\,(1 + |\mu|^{1/2})^{2N_\eta}$ et $-\,B^2$ engendre donc un SGDRA dans $S_{2(\theta - \frac{\pi}{4})}$.

Remarque. – Dans le cas où B engendre un SGFCA, ce théorème est dû à Goldstein [23].

Nous restreignant donc à $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, nous allons donner une nouvelle expression de U_α plus utilisable. Nous partons de la constatation suivante : pour

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}\ ,\ \text{et}\ \ \phi \geqslant 0\ ,\ \lim_{R\to\infty} \left\| \int_{C_R} e^{-t(-\lambda)^\alpha}\,(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda \right\| = 0$$

où C_R est la partie du cercle de centre 0 de rayon R représentée ci-dessous :



Nous avons donc : pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $t > 0$:

$$U_\alpha(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\infty^0 e^{-t(-\lambda)^\alpha}\,(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda + \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty e^{-t(-\lambda)^\alpha}\,(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda$$

avec, dans la première intégrale $\operatorname{Arg}(-\lambda) = \pi$, et dans la seconde $\operatorname{Arg}(-\lambda) = -\pi$. Donc,

$$\begin{aligned} U_\alpha(t) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty (\exp(-t\,\rho^\alpha\,e^{-i\alpha\pi}) - \exp(-t\,\rho^\alpha\,e^{i\alpha\pi}))\,(\rho - A)^{-1}\,d\rho \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-t\,\rho^\alpha\cos(\alpha\pi))\sin(t\,\rho^\alpha\sin(\alpha\pi))\quad(\rho - A)^{-1}\,d\rho \\ &= \frac{1}{\alpha\pi}\int_0^\infty e^{-tu}\,\sin(tu\,tg\,(\alpha\pi))\left(I - \frac{(\cos\alpha\pi)^{1/\alpha}}{u^{1/\alpha}}\,A\right)^{-1}\frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{\alpha\pi}\int_0^\infty e^{-z}\,\sin\beta z\left(I - \frac{t^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha}}\,B\right)^{-1}\frac{dz}{z} \end{aligned}$$

où nous avons posé $\beta = tg\,\alpha\pi$ et $B = (\cos\alpha\pi)^{1/\alpha}\,A$.

D'où le :

THEOREME III–2. – *Pour* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, *en posant* $\beta = tg\, \alpha\pi$ *et* $B = (\cos \alpha\pi)^{1/\alpha} A$, *nous avons :*

$$\forall t > 0, \quad U_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha\pi} \int_0^\infty e^{-z} \sin \beta z \left(I - \frac{t^{1/\alpha}}{z^{1/\alpha}} B\right)^{-1} \frac{dz}{z}.$$

Remarque. – Cette expression de U_α permet de définir ce SG pour une classe d'opérateur A plus large que celle des générateurs de SGDR. Il suffit que A soit un opérateur fermé, de domaine dense, tel que :

$$\overline{\mathbf{R}_+} \subset \rho(A) \quad \text{et} \quad \forall \lambda > 0 \quad , \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \mathrm{Pol}(\lambda).$$

Comme U_α se présente sous la forme d'une convolution sur $\mathbf{R}^+$ muni de sa mesure invariante dt/t ; L'outil adapté à son étude est évidemment la transformation de Mellin (Titchmarsh [18]) dont nous rappelons les principales propriétés :

DEFINITION III–1. – *Nous appelons transformée de Mellin d'une fonction f définie sur* $\mathbf{R}_+$, *et nous noterons* $\mu(f)$, *la fonction définie sur :*

$$\left\{\lambda \in \mathbf{C} \; ; \; t^\lambda f(t) \in L^1\left(\mathbf{R}_+ \; ; \frac{dt}{t}\right)\right\}$$

par la formule

$$\mu(f)(\lambda) = \int_0^\infty t^\lambda f(t) \frac{dt}{t}.$$

PROPOSITION III–1. – Si $t^\lambda f(t) \in L^1\left(\mathbf{R}_+ \; ; \frac{dt}{t}\right)$

et si
$$t^\lambda g(t) \in L^1\left(\mathbf{R}_+ \; ; \frac{dt}{t}\right)$$

alors
$$t^\lambda (f * g)(t) \in L^1\left(\mathbf{R}_+ \; ; \frac{dt}{t}\right)$$

et nous avons :

$$\mu(f * g)(\lambda) = \mu(f)(\lambda) \, . \, \mu(g)(\lambda)$$

où le signe $*$ *désigne la convolution sur* $\mathbf{R}_+$ *pour la mesure* $\frac{dt}{t}$:

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(z) g\left(\frac{t}{z}\right) \frac{dz}{z}.$$

Notons enfin la formule d'inversion :

PROPOSITION III–2. – *Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$, à variation bornée au voisinage de $t \in \mathbf{R}_+$, et si $\mu(f)(\lambda)$ existe pour* $\operatorname{Re} \lambda = \sigma$, *alors :*

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} t^{-\lambda} \, \mu(f)(\lambda) \, d\lambda$$

1. Caractérisation de A pour que U_α soit fortement continu. La classe (0).

Le théorème (II-5) fournit une condition suffisante pour que U_α soit borné au voisinage de l'origine (donc fortement continu, d'après le théorème d'Ascoli, puisqu'il converge fortement vers l'identité sur le sous espace $D(A^\infty)$ dense dans X : Lions [16]) : Il suffit que $N = -1$, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive M telle que : $\forall \lambda \in \Sigma$, $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/|\lambda|$. D'ailleurs, en utilisant la nouvelle formulation de U_α et par la même démonstration que pour le théorème (II-5), il apparaît qu'une condition moins restrictive suffit.

PROPOSITION III–3. – *Pour que* U_α *soit Fortement Continu, il suffit que* $\overline{\mathbf{R}_+} \subset \rho(A)$ *et qu'il existe* $M > 0$ *telle que :*

$$\forall \lambda > 0, \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/\lambda$$

L'objet de ce paragrpahe est de montrer que cette condition est nécessaire. Pour celà, supposons que U_α est fortement continu et étudions:

a) *La transformée de Mellin de* U_α

Pour $u > 0$, posons $\Phi(u) = (I - u^{1/\alpha} B)^{-1}$ et démontrons d'abord la :

PROPOSITION III–4. – $\forall \lambda$, $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1/\alpha$, $\forall x \in D(B^\infty) = D(A^\infty)$

$$\int_0^\infty t^\lambda U_\alpha(t) x \frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi\alpha} \left(\int_0^\infty t^\lambda e^{-t} \sin \beta t \frac{dt}{t} \right) \left(\int_0^\infty t^\lambda \Phi(t) x \frac{dt}{t} \right)$$

Démonstration. - Cette proposition découlera de la proposition (III–1) dès que nous aurons montré que pour $x \in D(B^\infty)$, et pour $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1/\alpha$, $t^\lambda\, \Phi(t)\, x \in L^1\left(\mathbf{R}\,; \frac{dt}{t}\right)$. Or cette fonction est continue sur $\mathbf{R}_+$; pour $t \to \infty$, nous pouvons écrire :

$$t^{\mathrm{Re}\,\lambda}\, \|\Phi(t)x\| = t^{\mathrm{Re}\,\lambda - 1/\alpha} \left\|\left(\frac{I}{t^{1/\alpha}} - B\right)^{-1} x\right\| \sim t^{\mathrm{Re}\,\lambda - 1/\alpha} \|B^{-1} x\|.$$

Et pour $t \to 0$, nous pouvons écrire :

$$t^{\mathrm{Re}\,\lambda}\, \|(I - t^{1/\alpha} B)^{-1} x\| = t^{\mathrm{Re}\,\lambda}\, \|x + t^{1/\alpha} Bx + \ldots$$
$$+ t^{N/\alpha} B^N x + t^{(N+1)/\alpha} (I - t^{1/\alpha} B)^{-1} B^{N+1} x\|$$

$$\leqslant t^{\mathrm{Re}\,\lambda} (\|x\| + t^{1/\alpha} \|Bx\| + \ldots + t^{N/\alpha} \|B^N x\|)$$
$$+ M t^{\mathrm{Re}\,\lambda + N/\alpha} (1 + t^{-N+\alpha}) \|B^{N+1} x\|, \text{ où}$$

M et N sont les constantes introduites par la remarque du théorème (II–1).

Nous allons maintenant démontrer que, lorsque U_α est fortement continu, cette déconvolution est possible pour tout $x \in X$. Pour celà montrons la :

PROPOSITION III–5. – *Si* U_α *est un SGFC, alors, pour*

$$0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1/\alpha,$$

l'application :

$$D(B^\infty) \to X$$
$$x \to \int_0^\infty t^\lambda\, \Phi(t)\, x \frac{dt}{t}$$

est linéaire continue pour la topologie induite sur $D(B^\infty)$ *par la norme de* X. *Elle se prolonge donc en un opérateur continu sur* X *que nous noterons* $\mu(\Phi)(\lambda)$. *Et nous avons :*

$$\mu(\Phi)(\lambda) = \frac{\pi\alpha}{\Psi(\lambda, \alpha)}\, \mu(U_\alpha)(\lambda)$$

où $\Psi(\lambda, \alpha) = \Gamma(\lambda)\, \sin(\lambda\alpha\pi)\, (\cos\alpha\pi)^\lambda$.

Démonstration. – Constatons d'abord que pour $0 < Re\,\lambda < 1/\alpha$,

$$\int_0^\infty z^\lambda\, e^{-z} \sin \beta\, z \frac{dz}{z} = \Gamma(\lambda) \sin(\lambda\, \alpha\, \pi)\, (\cos \alpha\, \pi)^\lambda .$$

Nous avons alors, d'après la proposition (III–4), pour

$$0 < Re\,\lambda < 1/\alpha ,$$

$$\forall x \in D(B^\infty) \quad , \quad \mu\,(U_\alpha(t)\,x)\,(\lambda) = \frac{1}{\pi\,\alpha} \Psi\,(\lambda\,,\alpha) \quad \mu(\Phi(t)x)\,(\lambda)$$

or, pour $0 < Re\,\lambda < 1/\alpha$, $\Psi(\lambda\,,\alpha) \neq 0$, d'où la majoration :

$$\forall x \in D(B^\infty),\ \|\mu(\Phi(t)x)\,(\lambda)\| = \frac{\pi\,\alpha}{|\Psi(\lambda\,,\alpha)|} \left\| \int_0^\infty t^\lambda\, U_\alpha(t) x \frac{dt}{t} \right\|$$

$$\leqslant \frac{\pi\alpha\,\|x\|}{|\Psi(\lambda,\alpha)|} \int_0^\infty t^{Re\,\lambda}\, \|U_\alpha(t)\| \frac{dt}{t} .$$

Et le théorème (II–5) et l'hypothèse de forte continuité de U_α assurent la convergence de cette intégrale.

L'application considérée est donc continue sur $D(B^\infty)$, et se prolonge continuement à X. L'égalité découle du fait que $D(B^\infty)$ est dense dans X.

Remarque. – L'hypothèse "U_α fortement continu" peut être affaiblie. Cette démonstration reste valable si nous supposons uniquement que U_α est intégrable au voisinage de l'origine.

Montrons enfin que la formule d'inversion de Mellin est valable quand U_α est fortement continu. Pour ce faire, n'ayant pas d'information sur la régularité de $\mu((I - t^{1/\alpha}\, B)^{-1})$, il nous faut étudier le comportement, pour $|\tau| \to \infty$; de $\dfrac{\pi\,\alpha}{\Psi(\sigma + i\,\tau,\alpha)}\, \mu\,(U_\alpha)\,(\sigma + i\tau)$. Donc étudier $\mu(U_\alpha)\,(\sigma + i\tau)$, en exploitant l'analycité de U_α dans $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$. Ce qui fait l'objet des lemmes suivants.

LEMME III–1. – *Si Γ est une courbe logarithmique entourant $Sp(A)$ et ne coupant pas $\overline{R_+}$, et si $\theta = \inf\limits_{\lambda \in \Gamma} |\mathrm{Arg}\,\lambda|$, alors $0 < \theta < \pi/2$ et,* *pour tout* ϕ, $0 < |\phi| < \frac{\pi}{2}(1-\alpha) + \alpha\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ *et pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *nous avons :*

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^n \, \|\mathrm{U}_\alpha(\rho\, e^{i\phi})\| = 0.$$

Démonstration. – La première assertion découle du fait que si $\lambda \in \Gamma$ et $|\lambda| \to \infty$, alors $|\mathrm{Im}\ \lambda| \to \infty$; la seconde découle du théorème de Lebesgue en écrivant que :

$$\mathrm{U}_\alpha(\rho\, e^{i\phi}) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \exp\left(-(-\lambda)^\alpha \rho\, e^{i\phi}\right)(\lambda - \mathrm{A})^{-1}\, d\lambda$$

et en remarquant que pour $\lambda \in \Gamma$, $\mathrm{Im}\ \lambda \geqslant 0$,

$$\mathrm{Re}\,((-\lambda)^\alpha \rho\, e^{i\phi}) = \rho\,|\lambda|^\alpha \cos(\phi + \alpha(\mathrm{Arg}\ \lambda - \pi))$$
$$\geqslant \rho\,|\lambda|^\alpha \cos(|\phi| + \alpha(\pi - \theta))$$

De même pour $\lambda \in \Gamma$, $\mathrm{Im}\ \lambda \leqslant 0$.

LEMME III–2. – *Si* U_α *est fortement continu, alors, pour tout* ϕ, $0 \leqslant \phi < \frac{\pi}{2}(1-\alpha) + \alpha\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, *et pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe une une constante* $\mathrm{M}(\epsilon, \phi, \alpha)$ *telle que :*

$$\forall \sigma \in \left[\epsilon, \frac{1}{\alpha}\right], \quad \forall \tau \in \mathbf{R}, \quad \|\mu(\mathrm{U}_\alpha)(\sigma + i\tau)\| \leqslant \mathrm{M}\, e^{-\phi|\tau|}$$

Démonstration. – Supposons d'abord $\tau > 0$. L'analycité de U_α dans $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$ et le comportement à l'infini de U_α donné par le lemme (III–1) permettent d'écrire :

$$\mu(\mathrm{U}_\alpha)(\sigma + i\tau) = \int_0^\infty t^{\sigma+i\tau}\, \mathrm{U}_\alpha(t)\,\frac{dt}{t} = \int_0^\infty (\rho\, e^{i\phi})^{\sigma+i\tau}\, \mathrm{U}_\alpha(\rho\, e^{i\phi})\frac{d\rho}{\rho}$$
$$= e^{-\tau\phi}\, e^{i\sigma\phi}\int_0^\infty \rho^{\sigma+i\tau}\, \mathrm{U}_\alpha(\rho\, e^{i\phi})\,\frac{d\rho}{\rho}$$

D'où

$$\|\mu(\mathrm{U}_\alpha)(\sigma + i\tau)\| \leqslant e^{-\tau\phi}\int_0^\infty \rho^{\sigma-1}\, \|\mathrm{U}_\alpha(\rho\, e^{i\phi})\|\, d\rho$$

et la majoration découle alors de la forte continuité de U_α. Le cas $\tau < 0$ se démontre de la même manière, ϕ étant changé en $-\phi$.

LEMME III–3. – *Si* U_α *est fortement continu, alors :*

i) $\forall \sigma \in]0, 1/\alpha[, \ \mu(\Phi)\,(\sigma + i\tau) \in L^1(\mathbf{R}\,;d\tau)$

ii) $\forall \epsilon > 0, \ \exists\, C(\epsilon,\alpha)\ ;\ \forall \sigma \in \left[\epsilon, \frac{1}{\alpha} - \epsilon\right]$,

$$\|\mu(\Phi)\,(\sigma + i\tau)\|_{L^1(\mathbf{R}\,;d\tau)} \leqslant C$$

Démonstration. – Soit ϕ tel que $\frac{\pi}{2}(1-2\alpha) < \phi < \frac{\pi}{2}(1-\alpha) + \alpha\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

Nous avons d'après le lemme (III–2) :

$$\|\mu(U_\alpha)\ (\sigma + i\tau)\| \leqslant M\, e^{-\phi|\tau|}$$

D'autre part, puisque $\sigma \in \left[\epsilon, \frac{1}{\alpha} - \epsilon\right]$, nous avons :

$$|\sin(\sigma + i\tau)\alpha\,\pi| \geqslant \frac{\sin(\epsilon\alpha\pi)}{2}\, e^{\alpha\pi|\tau|}, \text{ et, } |(\cos\alpha\,\pi)^{\sigma+i\tau}| \geqslant (\cos\alpha\,\pi)^{1/\alpha}.$$

Enfin, d'après la formule de Stirling (Titchmarsh [19]) quand $|\tau| \to \infty$, $|\Gamma(\sigma + i\tau)| \sim e^{-\pi/2|\tau|}\ |\tau|^{\sigma - 1/2}\sqrt{2\pi}$ uniformément en $\sigma \in \left[\alpha, \frac{1}{\alpha} - \epsilon\right]$.

Donc il existe une constante $T(\epsilon,\alpha)$ telle que pour $\sigma \in \left[\epsilon, \frac{1}{\alpha} - \epsilon\right]$ et pour $|\tau| > T$,

$$e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|}\ |\tau|^{\sigma - \frac{1}{2}}\sqrt{2\pi} \leqslant 2\,|\Gamma(\sigma + i\tau)|$$

Enfin, pour $(\sigma,\tau) \in \left[\epsilon, \frac{1}{\alpha} - \epsilon\right] \times [-T, +T]$, $\Gamma(\sigma + i\tau)$ est une fonction continue ne s'annulant pas. Il existe donc une constante $T'(\epsilon,\alpha)$ telle que :

$$(\sigma,\tau) \in \left[\epsilon, \frac{1}{\alpha} - \epsilon\right] \times [-T, +T] \Rightarrow |\Gamma(\sigma + i\tau)| \geqslant T'.$$

D'où, pour $\sigma \in \left[\epsilon, \frac{1}{\alpha} - \epsilon\right]$,

$$\|\mu(\Phi)\ (\sigma + i\tau)\| = \frac{\pi\alpha}{|\Psi(\sigma + i\tau, \alpha)|}\ \|\mu(U_\alpha)(\sigma + i\tau)\|$$

$$\leqslant \frac{2\pi\,\alpha\,M\,e^{-(\phi+\alpha\pi)|\tau|}}{\sin(\epsilon\alpha\pi)\ (\cos\alpha\pi)^{1/\alpha}}\left(T'\ \chi_{\tau\in[-T,+T]} + \frac{2e^{\frac{\pi}{2}|\tau|}}{\sqrt{2\pi}|\tau|^{\sigma-1/2}}\ \chi_{|\tau|>T}\right)$$

et cette fonction est indépendante de σ, et intégrable sur **R** pour la mesure $d\tau$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la formule d'inversion :

Proposition III–6. – *Pour* $\sigma \in]0, 1/\alpha[$, *et* $t > 0$, *nous avons :*

$$(I - t^{1/\alpha}\ B)^{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\lambda}\ \frac{\pi\alpha}{\Psi(\lambda,\alpha)}\ \mu(U_\alpha)(\lambda)\,d\lambda.$$

Démonstration. – Notons d'abord que pour $x \in D(B^\infty)$ et $\sigma \in]o, 1/\alpha[$, $t^\sigma(I - t^{1/\alpha}\ B)^{-1}\ x$ est une fonction de t continue sur $\mathbf{R}_+$, intégrable sur $\mathbf{R}_+$ pour la mesure dt/t. Donc, d'après la proposition (III–2) :

$\forall x \in D(B^\infty), \forall t > 0,$

$$(I - t^{1/\alpha}\ B)^{-1} x = \frac{1}{2i\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} t^{-\lambda}\ \mu((I - t^{1/\alpha}B)^{-1}x)(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\lambda}\ \frac{\pi\alpha}{\Psi(\lambda,\alpha)}\ \mu(U_\alpha(t)x)\ (\lambda)\ d\lambda$$

cette dernière intégrale étant convergente (Lemme III–3).

D'autre part, d'après ce lemme, l'application :

$$D(B^\infty) \to X$$

$$x \to \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-\lambda}\ \frac{\pi\alpha}{\Psi(\lambda,\alpha)}\ \mu(U_\alpha(t)x)(\lambda)\,d\lambda$$

est continue. Comme $D(B^{\infty})$ est dense dans X, et que, sur $D(B^{\infty})$ cette application coïncide avec $(I - t^{1/\alpha} B)^{-1}$, nous avons :

$$(I - t^{1/\alpha} B)^{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} t^{-\lambda} \frac{\mu\alpha}{\Psi(\lambda, \alpha)} \mu(U_\alpha)(\lambda)\, d\lambda.$$

b) *Caractérisation de A pour que* U_α *soit un Semi-Groupe Fortement Continu Analytique : la classe* (0).

THEOREME III–3. – U_α *est un Semi-groupe Fortement Continu, Analytique dans* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, *si et seulement si :*

$$\exists M > 0 \ , \ \forall \lambda \in \mathbf{R}_+ \ , \ \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/\lambda.$$

Démonstration. – L'analycité de U_α découle de l'étude faite au Chapitre II. La condition suffisante découle de la proposition (III–3). Il suffit donc de montrer la condition nécessaire. Pour cela, soit γ_+ et γ_- deux fonctions C^{∞}, avec supp $\gamma_+ \subset]-1, \infty[$, supp $\gamma_- \subset]-\infty, 1[$, et $\gamma_+(\tau) + \gamma_-(\tau) \equiv 1$.

Nous avons, d'après la proposition (III–6) :

$\forall t > 0 \ , \forall \sigma, \ 0 < \sigma < 1/\alpha,$

$$(I - t^{1/\alpha} B)^{-1} = \frac{\alpha}{2i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{t^{-\lambda}}{\Psi(\lambda, \alpha)} \left(\int_0^{\infty} s^{\lambda} U_\alpha(s) \frac{ds}{s} \right) d\lambda$$

$$= \frac{\alpha}{2t^{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma_+(\tau) + \gamma_-(\tau)) \frac{t^{-i\tau}}{\Psi(\sigma + i\tau)} \left(\int_0^{\infty} s^{\sigma + i\tau} U_\alpha(s) \frac{ds}{s} \right) d\tau$$

$$= I_+(t) + I_-(t).$$

Etudions d'abord $I_+(t)$. Soit ϕ tel que

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}(1 - \alpha) + \alpha\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot$$

D'après le lemme (III-2) nous avons pour tout σ, $0 < \sigma < 1/\alpha$,

$$I_+(t) = \frac{\alpha e^{i\sigma\phi}}{2t^{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_+(\tau)\, t^{-i\tau}\, e^{-\tau\phi}}{\Psi(\sigma + i\tau)} \left(\int_0^{\infty} s^{\sigma + i\tau} U_\alpha(s\, e^{i\phi}) \frac{ds}{s} \right) d\tau$$

d'après le lemme (III–1). Vu les majorations faites dans le lemme (III–3), nous pouvons appliquer le théorème de Fubini, ce qui donne :

$$\mathrm{I}_+(t) = \frac{\alpha\, e^{i\sigma\phi}}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^{\sigma} \mathrm{U}_\alpha(s\, e^{i\phi}) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_+(\tau) \left(\frac{s}{t}\right)^{i\tau} \frac{e^{-\tau\phi}}{\Psi(\sigma + i\tau)}\, d\tau\right) \frac{ds}{s}$$

$$= \frac{\alpha\, e^{i\sigma\phi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma\rho}\ \mathrm{U}_\alpha(t\, e^{\rho + i\phi}) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_+(\tau)\, e^{i\tau\rho}\ e^{-\tau\phi}}{\Psi(\sigma + i\tau)}\, d\tau\right) d\rho$$

– Et, si nous notons par S_τ l'espace de Schwartz pour la variable τ, par $\overline{\mathcal{F}}_\tau$ la transformation de Fourier inverse pour la variable τ, et par $<,>_\rho$ la dualité $(\mathrm{S}', \mathrm{S})$ pour la variable ρ, nous pouvons écrire, en remarquant que

$\dfrac{\gamma_+(\tau)\, e^{-\tau\phi}}{\Psi(\sigma + i\tau)} \in \mathrm{S}_\tau$ et que $e^{\sigma\rho}\ \mathrm{U}_\alpha(t\, e^{\rho + i\phi}) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}, d\rho) \subset \mathrm{S}'_\rho$:

$$\mathrm{I}_+(t) = \frac{\alpha\, e^{i\sigma\phi}}{2} < e^{\sigma\rho}\ \mathrm{U}_\alpha(t\, e^{\rho + i\phi})\ ,\ \overline{\mathcal{F}}_\tau\left(\frac{\gamma_+(\tau)\, e^{-\tau\phi}}{\Psi(\sigma + i\tau)}\right) >_\rho$$

Or, quand $\sigma \to 0$,

$$\frac{\gamma_+(\tau)\ e^{-\tau\phi}}{\Psi(\sigma + i\tau)} \overset{\mathrm{S}_\tau}{\to} \frac{\gamma_+(\tau)\, e^{-\tau\phi}}{\Psi(i\tau)}$$

Donc, par continuité de la transformation de Fourier inverse,

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau\left(\frac{\gamma_+(\tau)\ e^{-\tau\phi}}{\Psi(\sigma + i\tau)}\right) \overset{\mathrm{S}_\rho}{\to} \overline{\mathcal{F}}_\tau\left(\frac{\gamma_+(\tau)\ e^{-\tau\phi}}{\Psi(i\tau)}\right)$$

D'autre part,

$$e^{\sigma\rho}\ \mathrm{U}_\alpha(t\, e^{\rho + i\phi}) \overset{\mathrm{S}'_\rho}{\to} \mathrm{U}_\alpha(t\, e^{\rho + i\phi})$$

D'où :

$$\mathrm{I}_+(t) = \frac{\alpha}{2} < \mathrm{U}_\alpha(t\, e^{\rho + i\phi})\ ,\ \overline{\mathcal{F}}_\tau\left(\frac{\gamma_+(\tau)\ e^{-\tau\phi}}{\Psi(i\tau)}\right) >_\rho$$

Donc,

$$\forall t > 0,\ ||\mathrm{I}_+(t)|| \leqslant \frac{\alpha}{2}\ ||\mathrm{U}_\alpha(te^{\rho + i\phi})||_{\mathrm{L}^\infty(d\rho)}||\ \overline{\mathcal{F}}_\tau\left(\frac{\gamma_+(\tau)\ e^{-i\phi}}{\Psi(i\tau)}\right)||_{\mathrm{L}^1(d\rho)}.$$

Et, U_α étant borné (lemme III-2), ceci entraîne qu'il existe une constante M_+ indépendante de t avec $\|I_+(t)\| \leqslant M_+$. De même, nous pouvons montrer l'existence de M_- telle que $\|I_-(t)\| \leqslant M_-$. Et, en posant $M = M_+ + M_-$, M est une constante indépendante de t telle que :

$$\forall\ t > 0, \quad \|(I - t^{1/\alpha} B)^{-1}\| \leqslant M.$$

Ce qui équivaut à l'existence d'une autre constante M telle que :

$$\forall\ \lambda > 0, \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/\lambda.$$

Remarque. – Ce résultat est en accord avec les résultats obtenus dans le Chapitre I, puisque, si A engendre un SGDR Normal, et si $\rho(A) \supset \overline{\mathbf{R}}_+$, A étant normal nous avons :

$$\exists\, M\ ;\ \forall \lambda > 0, \ \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/\lambda.$$

DEFINITION III–2. *Nous appelerons Classe (o) l'ensemble des opérateurs A générateurs de Semi-Groupes distribution réguliers et vérifiant* $\rho(A) \supset \overline{\mathbf{R}}_+$ *et*

$$\forall \lambda > 0, \ \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/\lambda.$$

c) *Définition de* $-(-A)^\alpha$ *quand A appartient à la classe (o)*

Remarque 1. – Si A est un opérateur générateur de SGDR, et si U_α est le Semi-Groupe que $-(-A)^\alpha$ formellement engendre, nous venons de démontrer l'équivalence des assertions :

i) A appartient à la classe (o)

ii) U_α est un semi-Groupe Fortement Continu Analytique dans $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$.

Remarque 2. – De l'extension du calcul de U_α donnée par la remarque du théorème III–2, nous pouvons affirmer que la classe (o) est la classe des opérateurs traités par Balakrishnan [1] et Komatsu [14] [15]. De plus, nous donnerons de $-(-A)^\alpha$ une définition qui coïncidera avec la leur pour A appartenant à la classe (o).

DEFINITION III–3. – *Pour A appartenant à la classe (o), nous posons, pour* $0 < \alpha < 1/2$:

$$-(-A)^{\alpha} = A_{\alpha} = \frac{d}{dt}\,[U_{\alpha}(t)]_{t=0}$$

Des résultats du (§1, b), nous déduisons le :

THEOREME III–4. – *Pour A appartenant à la classe (o) et pour* $0 < \alpha < 1/2$, $-(-A)^{\alpha}$ *est un opérateur fermé, de domaine dense, générateur d'un semi-Groupe Fortement Continu Analytique dans le secteur* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, *et borné.*

LEMME III–4. – *Si A appartient à la classe (o), alors* $-(-A)^{\alpha}$ *est inversible pour* $0 < \alpha < 1/2$, *d'inverse continu.*

Démonstration. – Il suffit de remarquer que l'opérateur continu $-\int_0^{\infty} U_{\alpha}(t)dt$ est l'inverse de $-(-A)^{\alpha}$.

Ce lemme permet la :

DEFINITION III–3. bis. – *Pour A appartenant à la Classe (o), nous posons, pour* $1/2 \leqslant \alpha < 1$,

$$-(-A)^{\alpha} = -[(-A)^{\alpha/2}]^2$$

De par le lemme (III–4), pour $1/2 \leqslant \alpha < 1$, $-(-A)^{\alpha}$ est un opérateur fermé, de domaine dense, et le théorème (III–1) nous permet d'affirmer le :

THEOREME III–4. bis. – *Pour A appartenant à la Classe (o) et pour* $0 < \alpha < 1$, $-(-A)^{\alpha}$ *est un opérateur générateur d'un Semi Groupe Fortement Continu, Analytique dans* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, *et borné.*

De ce théorème découlent les propriétés spectrales de $-(-A)^{\alpha}$:

THEOREME III–5. – *Si A appartient à la Classe (o), alors pour* $0 < \alpha < 1$,

i) $\rho(-(-A)^{\alpha}) \supset S_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$

ii) $\forall \eta > 0,\ \exists M_{\eta}\ ;\ \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(1-\alpha)-\eta}$

$$\|(\lambda + (-A)^{\alpha})^{-1}\| \leqslant M_{\eta}/|\lambda| .$$

Démonstration. — Ce théorème est une conséquence du fait que U_{α} est FC, borné et analytique dans $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, et de la caractérisation de tels opérateurs (Kato [11]).

COROLLAIRE. — *Le calcul opérationnel construit est interne à la Classe (o) : si* A *appartient à cette Classe, il est de même de* $-(-A)^{\alpha}$ *pour* $0 < \alpha < 1$.

Démonstration. — Il reste à démontrer que $0 \in \rho(-(-A)^{\alpha})$. Et ceci se fait comme dans le lemme (III–4).

Vérifions maintenant que ce calcul opérationnel satisfait les propriétés classiques des puissances fractionnaires :

THEOREME III–6. — *Pour* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, et $0 < \alpha + \beta < 1$, *nous avons, au sens des opérateurs, et de leurs domaines :*

$$(-A)^{\alpha}\ (-A)^{\beta} = (-A)^{\alpha+\beta}$$

Démonstration. — i) $(-A)^{\alpha}\ (-A)^{\beta} \supset (-A)^{\alpha+\beta}$: En effet, $D(A^{\infty})$ étant dense dans $D((-A)^{\alpha+\beta})$ pour la norme du graphe (vérification immédiate), il existe, pour tout $x \in D((-A)^{\alpha+\beta})$, une suite (x_n) d'éléments de $D(A^{\infty})$, tels que :

$$x_n \to x \quad \text{et} \quad (-A)^{\alpha+\beta} x_n \to (-A)^{\alpha+\beta} x .$$

Or, d'après la proposition (II–4),

$$(-A)^{\alpha+\beta} x_n = (-A)^{\alpha}\ (-A)^{\beta} x_n .$$

Le fait que $(-A)^{\beta}$ soit fermé, et que $(-A)^{\alpha}$ soit fermé d'inverse continu entraîne alors que :

$$x \in D((-A)^{\beta}) \quad \text{et} \quad (-A)^{\beta} x \in D((-A)^{\alpha})$$

et
$$(-A)^{\alpha}\ (-A)^{\beta} x = (-A)^{\alpha+\beta} x.$$

ii) $(-A)^\alpha\ (-A)^\beta \subset (-A)^{\alpha+\beta}$: En effet, soit $x \in D((-A)^\beta)$, avec $(-A)^\beta x \in D((-A)^\alpha))$. Il existe alors une suite (x_n) d'éléments de $D(A^\infty)$ telle que $x_n \to (-A)^\beta x$ et $(-A)^\alpha x_n \to (-A)^\alpha (-A)^\beta x$.

Soit $y_n = [(-A)^\beta]^{-1} x_n$; $y_n \in D(A^\infty)$ et nous avons :

$$y_n \to x \quad \text{et} \quad (-A)^\alpha (-A)^\beta y_n \to (-A)^\alpha (-A)^\beta x.$$

Or, $(-A)^\alpha (-A)^\beta y_n = (-A)^{\alpha+\beta} y_n$, et nous pouvons conclure du fait que $(-A)^{\alpha+\beta}$ est fermé.

Examinons maintenant les propriétés d'approximation des opérateurs $-(-A)^\alpha$. Nous avons :

THEOREME III–7. – $\forall \alpha,\ 0 \leqslant \alpha < 1,\ \forall \epsilon > 0,\ \forall x \in D((-A)^{\alpha+\epsilon})$,

$$\lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \alpha < \beta < \alpha+\epsilon}} (-A)^\beta x = (-A)^\alpha x \qquad (\text{où } (-A)^0 = I)$$

En vue de démontrer ce théorème, établissons le

LEMME III–5. – *Si* A *appartient à la Classe (o), alors :*

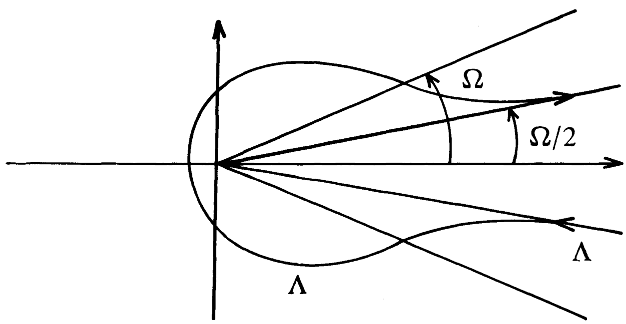
i) *il existe* Ω, $0 < \Omega < \pi/2$, *et* $N > 0$ *tels que* :

$$\lambda \in S_\Omega \Rightarrow \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant N/|\lambda|$$

ii) *Nous avons, pour* $0 < \alpha < 1/2$,

$$[-(-A)^\alpha]^{-1} = \frac{-1}{2i\pi} \int_\Lambda \frac{1}{(-\lambda)^\alpha} (\lambda - A)^{-1}\, d\lambda$$

où Λ *est une courbe orientée du type :*



Démonstration du lemme. – Comme A appartient à la Classe (o), nous savons qu'il existe une constante M telle que :

$$\lambda > 0 \Rightarrow \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M/\lambda.$$

Pour tout $\mu \in C$ tel que $|\mathrm{Arg}\ \mu| < \mathrm{Arc\ tg}\ (1/2\ M)$ et $\mathrm{Re}\ \mu > 0$, la série :

$$(\mathrm{Re}\ \mu - A)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (\mathrm{Im}\ \mu)^n (\mathrm{Re}\ \mu - A)^{-n}$$

converge en norme, et définit donc un opérateur continu qui inverse $(\mu - A)$. Et nous avons :

$$\|(\mu - A)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\ \mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n |\mathrm{Im}\ \mu|^n}{(\mathrm{Re}\ \mu)^n} < \frac{2M}{\mathrm{Re}\ \mu} \leqslant \frac{2M}{\cos \Omega} \frac{1}{|\mu|}$$

où $\Omega = \mathrm{Arc\ tg}\ (1/2\ M)$. Ce qui prouve (i).

(ii) découle du fait que l'intégrale qui y figure converge en norme et coïncide sur $D(A^\infty)$ avec $[-(-A)^\alpha]^{-1}$.

Démonstration du théorème. – Supposons d'abord que $\alpha = 0$. Soit $x \in D((-A)^\epsilon)$, et $y = (-A)^\epsilon x$. Nous avons, pour $0 < \beta < \epsilon$, et en posant $(-A)^{\beta-\epsilon} = [(-A)^{\epsilon-\beta}]^{-1}$,

$$(-A)^\beta x = (-A)^{\beta-\epsilon}\ y = \frac{1}{2i\pi} \int_\Lambda \frac{1}{(-\lambda)^{\epsilon-\beta}} (\lambda - A)^{-1}\ y\ d\lambda$$

Et le théorème de Lebesgue, qui s'applique en vertu du lemme, permet de dire :

$$\lim_{\beta \to 0} (-A)^\beta x = (-A)^{-\epsilon}\ y = x.$$

Pour $\alpha \neq 0$, nous écrivons $(-A)^\beta x = (-A)^{\beta-\alpha} (-A)^\alpha x$ et nous appliquons le résultat précédent.

Remarque. – Ici apparaît une différence avec le cas traité en I (Théorème I–4) : nous n'avons plus la continuité en α de $-(-A)^\alpha$, mais uniquement la continuité à droite.

Notons enfin que le théorème (I–7) subsiste :

THEOREME I–7. bis. – *Si A appartient à la Classe (o), alors, pour* $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$, *et pour* $x \in D((-A)^\gamma)$, *nous avons :*

$$\|-(-A)^{\beta} x\| \leqslant C(\alpha,\beta,\gamma) \| -(-A)^{\gamma} x\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \|-(-A)^{\alpha} x\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}$$

la démonstration est analogue à celle donnée par Krein [13] pp. 115-116 ;

2. Caractérisation de A pour que U_α soit un SGD fonction Régulier. La Classe (ϵ).

a) *Caractérisation de la Classe (ϵ). Régularité de* U_α :

Nous nous intéressons maintenant au cas où la résolvante de A décroit "légèrement" moins vite, sur $\mathbf{R}_+$, que dans le cas du § 1. Pour cela, adoptons la :

DEFINITION III–4. – *Un opérateur* A *générateur de Semi Groupe Distribution Régulier appartient à la Classe* (ϵ) *si* $\rho(A) \supset \overline{\mathbf{R}_+}$ *et si*

$$\forall \epsilon > 0 \;,\; \exists M_\epsilon \;;\; \forall \lambda > 0 \;,\; \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant M_\epsilon/\lambda^{1-\epsilon}$$

L'intérêt de cette définition provient de la :

PROPOSITION III–7. – *Il est équivalent de dire :*

i) A *appartient à la Classe* (ϵ)

ii) $\forall \phi \,,\, 0 < |\phi| < \dfrac{\pi}{2}(1-\alpha),\ \forall\lambda,\ 0 < \mathrm{Re} < \dfrac{1}{\alpha}$

$$t^{\lambda}\, U_\alpha(t\, e^{i\phi}) \in L^1\left(]0,\infty[\ ;\frac{dt}{t}\right)$$

Démonstration. – (i) ⇒ (ii) d'après la majoration donnée par le théorème (II–5). (ii) entraîne l'existence de $\mu(U_\alpha)(\lambda)$ pour Re $\lambda > 0$, et, jointe à la remarque de la proposition (III–5), elle permet d'écrire, pour $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1/\alpha$:

$$(I - t^{1/\alpha} B)^{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{\lambda} \; \frac{\pi\alpha}{\Psi(\lambda,\alpha)}\, \mu(U_\alpha)(\lambda)\, d\lambda$$

D'où nous déduisons la majoration :
$\forall \sigma \,,\, 0 < \sigma < 1/\alpha,\ \|(I - t^{1/\alpha} B)^{-1}\| \leqslant$

$$\frac{\alpha}{2t^{\sigma}} \left\| \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-i\tau}\; \frac{1}{\Psi(\lambda,\alpha)}\, \mu(U_\alpha)(\lambda)\, d\lambda \right\|$$

et l'assertion (i) en découle.

Si A appartient à la Classe (ϵ), $U_\alpha(t)$ est intégrable au voisinage de l'origine, et le semi groupe distribution $\mathcal{G}_\alpha$ (notation II–1) que U_α définit est régulier. Il est alors naturel d'adopter la définition suivante de $-(-A)^\alpha$:

b) *Définition et analyse spectrale de* $-(-A)^\alpha$ *pour* A *appartenant à la Classe* (ϵ)

DEFINITION III–5. – *Pour* A *appartenant à la Classe* (ϵ), *et pour* $0 < \alpha < 1/2$, *nous définissons* $-(-A)^\alpha$ *comme étant le générateur du Semi Groupe Distribution Régulier* $\mathcal{G}_\alpha$. *Pour* $1/2 \leqslant \alpha < 1$, *nous posons* $-(-A)^\alpha = -[(-A)^{\alpha/2}]^2$.

De cette définition découle l'analyse spectrale de $-(-A)^\alpha$:

THEOREME III–8. – *Pour* A *appartenant à la Classe* (ϵ), $-(-A)^\alpha$ *est un opérateur fermé, de domaine dense, générateur d'un Semi Groupe Distribution Régulier Analytique dans* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, *et il existe, pour tout* $\eta > 0$, *un polynôme* P_η, *tel que :*

$$\lambda \in S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)+\frac{\pi}{2}-\eta} \Rightarrow (\lambda \in \rho(-(-A)^\alpha))$$

$$\text{et } \|(\lambda + (-A)^\alpha)\| \leqslant P_\eta(|\lambda|)$$

Démonstration. – De par sa définition, $-(-A)^\alpha$, pour $0 < \alpha < 1/2$, est générateur d'un Semi Groupe Distribution Régulier. L'analycité de ce semi groupe découle du théorème (II–3). Le théorème (III–1) permet d'étendre ce résultat à $0 < \alpha < 1$. D'autre part, il est facile de voir que ce semi groupe est à croissance exponentielle d'ordre 0 (Lions [16]), et les propriétés spectrales de $-(-A)^\alpha$ découlent alors de la caractérisation d'un tel opérateur (Da Prato-Mosco [6]).

En fait, pour $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}_+$, la majoration de la résolvante de $-(-A)^\alpha$ peut être affinée :

PROPOSITION III–8. – $\forall \alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\overline{\mathbf{R}}_+ \subset \rho(-(-A)^\alpha)$, *et nous avons :*

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists M_\epsilon \ ; \ \forall \lambda \geqslant 0 \ , \ \|(\lambda + (-A)^\alpha)^{-1}\| \leqslant \frac{M_\epsilon}{\lambda^{1-\epsilon}}$$

Démonstration. – Notons d'abord que, d'après Lions [16], le sous espace $\mathbf{R}_\alpha = [\bigcup_{\phi \in \mathcal{D}_0} \mathcal{G}_\alpha(\phi) X]$ est dense dans X, et nous avons evidemment :

$$\mathbf{R}_\alpha = \left\{ x \in X \; ; x = \int_0^\infty \phi(t)\, U_\alpha(t)\, y\, dt \text{ avec } \phi \in \mathcal{D}_0, y \in X \right\}.$$

Or, sur $\mathbf{R}_\alpha$, l'opérateur $\int_0^\infty e^{-\lambda t} U_\alpha(t)\, dt$ inverse $(\lambda + (-A)^\alpha)$, $(\lambda \geqslant 0)$. Cet opérateur étant continu, et son image incluse dans $D(\lambda + (-A)^\alpha)$, le théorème du graphe fermé permet de conclure :

$$\forall \lambda \geqslant 0 \;,\; (\lambda + (-A)^\alpha)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, U_\alpha(t)\, dt.$$

La majoration s'en déduit.

Corollaire. – *Le calcul symbolique construit est interne à la Classe* (ϵ).

c) *Propriétés des puissances fractionnaires*

Theoreme III–9. – *Si* A *appartient à la Classe* (ϵ), *alors* $\forall \alpha$, $\forall \beta$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha + \beta \leqslant 1$,

i) $D(-(-A)^\alpha) \supset D(-(-A)^{\alpha+\beta})$

ii) $-(-A)^\alpha) - (-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}$ *au sens des opérateurs et de leurs domaines.*

Démonstration. – Il suffit d'écrire $[(-A)^\alpha]^{-1} = \int_0^\infty U_\alpha(t)\, dt$ et de constater que $[(-A)^\alpha]^{-1}\, [(-A)^\beta]^{-1} = [(-A)^{\alpha+\beta}]^{-1}$.

Proposition III–9. – *Si* A *appartient à la Classe* (ϵ), alors,

$\forall \alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\forall \epsilon > 0$, $\forall x\, D(-(-A)^{\alpha+\epsilon})$,

$$\lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha+\epsilon}} -(-A)^\beta x = -(-A)^\alpha x.$$

Démonstration. – Analogue à celle du théorème III–7, en y remplaçant la courbe Λ par une courbe Λ' asymptote à l'axe réel pour $|\lambda| \to \infty$.

d) *Comparaison de* $-(-A)^\alpha$ *et* A_α

THEOREME III–10. – *Pour* A *appartenant à la Classe* (ϵ), $-(-A)^\alpha$ *est la fermeture de l'opérateur* A_α. *De plus, il est équivalent de dire* :

(a) A_α *est fermé*

(b) *la moyenne de Césaro de la résolvante de* A *est bornée* :

$$\exists M \; ; \; \forall t \geqslant 0, \quad \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (I - s^{1/\alpha} A)^{-1} \, ds \right\| \leqslant M$$

(c) U_α *est Fortement Continu au sens de Césaro.*

Démonstration. –

i) Montrons d'abord que $\overline{A_\alpha} \subset -(-A)^\alpha$; $-(-A)^\alpha$ étant un opérateur fermé, il suffit pour cela de montrer que $A_\alpha \subset -(-A)^\alpha$. Pour cela, pour $x \in D(A_\alpha)$, nous allons exhiber une suite (x_n) d'éléments de $\mathbf{R}_\alpha$ telle que :

$$x_n \to x \quad \text{et} \quad -(-A)^\alpha x_n \to A_\alpha x .$$

Soit (ρ_n) une suite régularisante de $\mathcal{D}_0$, telle que

$$\int_0^\infty t \, |\rho_n'(t)| dt < 2 \quad \text{et soit} \quad x_n = \int_0^\infty \rho_n(t) \, U_\alpha(t) x \, dt.$$

Nous avons : $x_n \to x$ et :

$$\begin{aligned}
\|A_\alpha x + (-A)^\alpha x_n\| &= \|A_\alpha x + \int_0^\infty \rho_n'(t) \, U_\alpha(t) x \, dt \| \\
&= \|A_\alpha x - \int_0^\infty \rho_n(t) A_\alpha \, U_\alpha(t) x \, dt\| \\
&= \| \int_0^\infty t\rho_n'(t) \left[\frac{1}{t} \int_0^t A_\alpha \, U_\alpha(s) x \, ds - A_\alpha x \right] dt\| \\
&= \| \int_0^\infty t\rho_n'(t) \left[\frac{U_\alpha(t)x - x}{t} - A_\alpha x \right] ds\| \\
&\leqslant 2 \sup_{t \in \operatorname{supp} \rho_n} \| \frac{U_\alpha(t)x - x}{t} - A_\alpha x\|.
\end{aligned}$$

ii) Montrons maintenant que $-(-A)^{\alpha} \subset \overline{A}_{\alpha}$. Pour cela constatons simplement que A_{α} prolonge la restriction de $-(-A)^{\alpha}$ à $\mathbf{R}_{\alpha}$.

iii) Montrons maintenant que A_{α} est fermé si et seulement si la moyenne de Césaro de U_{α} est bornée.

Pour cela, constatons que si A_{α} est fermé, alors il admet un inverse continu : $\int_0^{\infty} U_{\alpha}(t)\,dt$, et nous avons :

$$\frac{1}{t}\int_0^t U_{\alpha}(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t A_{\alpha}\, U_{\alpha}(s) A_{\alpha}^{-1}\, ds = \frac{U_{\alpha}(t)\, A_{\alpha}^{-1} - A_{\alpha}^{-1}}{t}$$

et cet opérateur est borné au voisinage de $t = 0$.

Inversement, si $\frac{1}{t}\int_0^t U_{\alpha}(s)\,ds$ est borné au voisinage de l'origine, et si (x_n) est une suite d'éléments de $D(A_{\alpha})$ telle que $x_n \to x$ et $A_{\alpha}\, x_n \to y$, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{t}\int_0^t U_{\alpha}(s) A\, x_n\; ds = \frac{U_{\alpha}(t)x_n - x_n}{t}$$

Le théorème de Lebesgue permet d'en déduire :

$$\frac{1}{t}\int_0^t U_{\alpha}(s) y\; ds = \frac{U_{\alpha}(t)x - x}{t}$$

$\frac{1}{t}\int_0^t U_{\alpha}(s)ds$ étant borné, il converge fortement vers l'identité quand $t \to 0$, ce qui prouve que $x \in D(A_{\alpha})$ et $A_{\alpha}\, x = y$.

iv) Montrons maintenant que si la moyenne de Césaro de U_{α} est bornée, alors la moyenne de Césaro de la résolvante de A est bornée. Pour cela restreignons-nous à $0 < \alpha < 1/2$, et posons :

$$G(t) = \frac{1}{t}\int_0^t U_{\alpha}(s)ds \quad \text{et} \quad F(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (I - s^{1/\alpha}\, B)^{-1}\, ds.$$

$G(t)$ est un opérateur continu, borné, admettant une extension analytique sur $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$ De plus, pour $0 < \phi < \frac{\pi}{2}(1 - \alpha) + \alpha(\theta - \pi)$, $\rho\|G(\rho e^{i\phi})\|$ est borné quand ρ tend vers l'infini. Nous en déduisons que pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$, $\mu(G)\,(\lambda)$ existe, et

$$\|\mu(\mathrm{G})\ (\sigma + i\tau)\| \leqslant \mathrm{M}e^{-|\tau|\phi}$$

(même démonstration que pour le lemme (III-2)).

De même, F(t) *est un opérateur continu pour* $t > 0$, et A appartenant à la Classe (ϵ), $t\|\mathrm{F}(t)\|$ est borné pour $t \to \infty$. Pour $t \to 0$, nous avons la majoration : $\|\mathrm{F}(t)\| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_\epsilon}{t^{\epsilon/\alpha}}$. Donc, pour $0 < \mathrm{Re}\,\lambda < 1, \mu(\mathrm{F})(\lambda)$ existe. Nous avons :

$$\mathrm{G}(t) = \frac{1}{\alpha\pi}\int_0^{\infty} e^{-z}\ \sin\beta z\ \mathrm{F}\left(\frac{t}{z}\right)\, dz$$

et par le même raisonnement qu'en (III– § 1) nous montrons que :

$$\mu(\mathrm{G})\ (\lambda) = \frac{\Psi(\lambda\ , \alpha)}{\pi\,\alpha}\ \mu(\mathrm{F})\ (\lambda).$$

Ce qui nous permet de conclure, de même qu'en (III– § 1), que Fest borné au voisinage de l'origine dès que G l'est.

v) Enfin si F est borné au voisinage de l'origine, G l'est. Ceci découle du fait que :

$$\mathrm{G}(t) = \frac{1}{\alpha\pi}\int_0^{\infty} e^{-z}\ \sin(\beta\, z)\ \mathrm{F}\left(\frac{t}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

3. Cas général.

Dans le cas général, U_α est à croissance polynômiale au voisinage de l'origine. Il existe donc une distribution sur **R** qui le régularise (Gelfand Shilov : generalized functions t 1). U_α n'étant pas intégrable au voisinage de l'origine, cette distribution définit un SGD analytique, non nécessairement régulier. Nous n'avons donc pas de moyen naturel de définir un SGD régulier que $-(-\mathrm{A})^\alpha$, formellement, engendre. Pour définir $-(-\mathrm{A})^\alpha$ dans ce cas nous pouvons chercher les conditions à imposer à A pour que $\overline{\mathrm{A}}_\alpha$ soit générateur de SGDRA, et poser $-(-\mathrm{A})^\alpha = \overline{\mathrm{A}}_\alpha$, ou caractériser A pour que U_α (cf. notation II.1) soit régulier, et poser $-(-\mathrm{A})^\alpha = \overline{\mathcal{G}_\alpha(-\delta')}$;

En fait, ces démarches sont équivalentes :

PROPOSITION III–10. – *Il est équivalent de dire :*

i) $\overline{A}_\alpha$ *engendre un Semi Groupe Distribution Régulier Analytique* G_α.

ii) *Il existe un Semi Groupe Distribution Régulier Analytique* G_α *tel que :*

$$\overline{G_\alpha(\delta_t)} = U_\alpha(t) \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

iii) *Il existe un Semi Groupe Distribution Régulier Analytique* G_α *tel que :*

$$G_{\alpha | \mathcal{D}(R_+)} = U_\alpha$$

iv) *Il existe un Semi Groupe Distribution Régulier Analytique* G_α *tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{R}_\alpha = \left[\underset{\phi \in \mathcal{D}_0}{\mathrm{U}} \left(\int_0^\infty \phi(t)\, U_\alpha(t)\, dt \right) (X) \right]$$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_- \ , \ G_\alpha(\phi) x = \int_0^\infty \phi(t)\, U_\alpha(t) x \, dt.$$

Démonstration. – (i) ⇒ (iv) : en effet, si $\overline{A}_\alpha$ engendre un SGDRA G_α, alors $\rho(\overline{A}_\alpha)$ contient un secteur contenant le demi plan $S_{\frac{\pi}{2}}$ et nous avons : $\| (\lambda - \overline{A}_\alpha)^{-1} \| < \mathrm{Pol}(|\lambda|)$ (Da Prato-Mosco [7]).
D'après Chazarain [5] nous avons :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_- \ , \ G_\alpha(\phi) = \frac{1}{2 i \pi} \int_\Gamma \hat{\phi}(\lambda)\, (\lambda - \overline{A}_\alpha)^{-1} \, d\lambda$$

Or, nous savons que, pour $x \in \mathcal{R}_\alpha$,

$$(\lambda - \overline{A}_\alpha)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, U_\alpha(t) x \, dt.$$

D'où (iv).

(iv) ⇒ (iii) : en effet, (iv) affirme l'existence d'un SGDRA : G_α tel que $\forall x \in \mathcal{R}_\alpha$, $\forall \phi \in \mathcal{D}_-$, $G_\alpha(\phi) x = \int_0^\infty \phi(t)\, U_\alpha(t) x \, dt$. Or, pour $\phi \in \mathcal{D}(R_+)$, $\phi(t) U_\alpha(t)$ est intégrable, et l'opérateur $\int_0^\infty \phi(t) U_\alpha(t)\, dt$ se prolonge de $\mathcal{R}_\alpha$ à X, et nous avons :

$$G_\alpha(\phi) = \int_0^\infty \phi(t)\, U_\alpha(t)\, dt.$$

(iii) ⇒ (ii) : découle de la continuité de $U_\alpha(t)$ pour $t > 0$, et du fait que pour tout SGDRA G_α, $\overline{G_\alpha(\delta_t)}$ est un opérateur continu (Da Prato [8]).

(ii) ⇒ (i) : il suffit de démontrer que si G_α est le SGDRA intervenant dans (ii), et si $\widetilde{A}_\alpha$ est son générateur, alors $\overline{A}_\alpha = \widetilde{A}_\alpha$. Or, il est évident que $A_\alpha \subset \widetilde{A}_\alpha$, d'où, comme $\widetilde{A}_\alpha$ est fermé $\overline{A}_\alpha \subset \widetilde{A}_\alpha$. D'autre part, pour $x \in \mathcal{R}_\alpha$, $x \in D(A_\alpha)$ et $A_\alpha x = \widetilde{A}_\alpha x$. Comme $A_\alpha = \overline{A_{\alpha|\mathcal{R}_\alpha}}$, nous avons $\widetilde{A}_\alpha = \overline{A_{\alpha|\mathcal{R}_\alpha}} \subset \overline{A}_\alpha$.

a) *Conditions sur* A *pour que* $-(-A)^\alpha$ *puisse être défini :*

Cherchons donc les conditions à imposer à A pour que (iii) soit vérifié : qu'il existe un SGDRA G_α tel que $G_{\alpha|\mathcal{D}(R_+)} = U_\alpha$. Pour cela, supposons qu'un tel semi groupe existe.

Considérons le SGD non régulier G'_α défini par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_-,\ G'_\alpha(\phi) = \int_0^\infty \Big(\phi(t) - \phi(o) - t\,\phi'(o) \dots - \frac{t^{\widetilde{N}}}{\widetilde{N}!}\,\phi^{(\widetilde{N})}(o)\Big)\, U_\alpha(t)\, dt$$

où $\widetilde{N}$ est un entier supérieur à $\dfrac{N+1}{\alpha}$.

La distribution $G_\alpha - G'_\alpha$ est nulle sur $\mathbf{R} - \{o\}$. Son support est donc réduit à $\{o\}$; Cette distribution étant d'ordre fini au voisinage de $\{o\}$, il existe un entier Q tel que :

$$G_\alpha - G'_\alpha = \sum_{i=0}^{Q} \delta^{(i)} \otimes L_i$$

où L_i est un opérateur continu sur X (puisque G_α et G'_α sont à valeur dans $\mathcal{L}(X)$). En appliquant ceci à $x \in \mathcal{R}_\alpha$ et à $\phi \in \mathcal{D}_-$, et d'après (iv), ceci donne $\widetilde{N} = Q$ et :

$$\forall x \in \mathbf{R}_\alpha\ ,\ L_i(x) = \int_0^\infty t^i\, U_\alpha(t)\, x\, dt.$$

L_i étant continu, ceci entraîne :

$$\forall i = 1, \ldots, \widetilde{N}, \ \exists M_i \ , \forall x \in \mathcal{R}_\alpha \ , \ \left\| \int_0^\infty t^i U_\alpha(t) x \, dt \right\| \leqslant M_i \ \|x\|$$

Il est bien évident qu'inversement, si ces conditions sont réalisées, nous pouvons définir un SGDRA G_α qui régularise U_α. Plus précisément :

PROPOSITION III–11. – *Les deux assertions suivantes sont équivalentes* :

v) *L'opérateur* L_0 défini sur $\mathcal{R}_\alpha$ par :

$$\forall x \in \mathcal{R}_\alpha \ , \ L_0 \, x = \int_0^\infty U_\alpha(t) x \, dt$$

se prolonge en un opérateur continu sur X.

vi) $\rho(\overline{A}_\alpha) \neq \phi$.

De plus, ces assertions sont équivalentes aux assertions de la proposition III–10.

Démonstration. – (v) ⇒ (vi) : il suffit de constater que l'égalité, vérifiée pour tout $x \in \mathbf{R}_\alpha$:

$$\overline{A}_\alpha \int_0^\infty U_\alpha(t) x \, dt = \int_0^\infty A_\alpha \, U_\alpha(t) x \, dt = -x$$

montre que si (v) est vérifiée, alors A_α admet un inverse continu : $-L_0$, donc $0 \in \rho(\overline{A}_\alpha)$.

(vi) ⇒ (v) : soit q un entier supérieur à $(N+1)/\alpha$. $\rho(\overline{A}_\alpha)$ étant non vide, $(\overline{A}_\alpha)^q$ est fermé et prolonge la fermeture de A_α^q. Or, pour $x \in R_\alpha$,

$$(-1)^{q-1} \ \overline{A_\alpha^q} \int_0^\infty t^q \, U_\alpha(t) x \, dt = x$$

Donc, pour tout $x \in X$:

$$(-1)^{q-1} \ \overline{A}_\alpha^q \int_0^\infty t^q \, U_\alpha(t) x \, dt = x$$

L'opérateur : $(-1)^{q-1} \ \overline{A}_\alpha^{q-1} \int_0^\infty t^q \, U_\alpha(t) \, dt$ a donc pour domaine X.

Il est fermé car l'intégrale est convergente en norme et $\rho(\overline{A_\alpha}) \neq \phi$. Il est donc continu. La conclusion découle du fait que, sur R_α, cet opérateur coïncide avec $-L_0$.

(v) $\Leftrightarrow$ (i) : il suffit de vérifier, d'après ce qui a été montré plus haut, que si L_0 est continu, alors, $\forall i \in \mathbf{N}$, L_i est continu. Or, par simple intégration par partie, et en utilisant le fait que $L_0 = -(\overline{A}_\alpha)^{-1}$, il ressort que sur R_α, $L_i = (L_0)^{i+1}$.

Caractérisons maintenant la classe des opérateurs A pour lesquels ces assertions sont vraies :

PROPOSITION III–12. – *Les assertions (i), . . . , (vi) sont équivalentes à la continuité de l'opérateur défini sur* R_α *par :*

$$\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1}\, d\lambda.$$

Démonstration. – Par application du théorème de Fubini, il est immédiat de voir que sur R_α, cet opérateur coïncide avec $-L_0$.

DEFINITION III–5. – *Un opérateur* A *est dit appartenir à la Classe (I) si* A *engendre un Semi Groupe Distribution Régulier, si* $\rho(A) \supset R_+$ *et si l'opérateur intervenant dans la proposition* (III-12) est *continu pour tout* α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) *Définition et propriétés de* $-(-A)^\alpha$ *pour* A *appartenant à la Classe (I) :*

Pour A appartenant à la Classe (I), nous posons évidemment, pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $-(-A)^\alpha = \overline{A}_\alpha$. Pour $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$, nous posons

$$+ (-A)^\alpha = (\overline{A_{\alpha/2}})^2 .$$

THEOREME III–11. – *Si* A *appartient à la Classe (I), alors :*

i) $-(-A)^\alpha$ *engendre un Semi Groupe Distribution Régulier Analytique dans* $S_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}$, *à croissance exponentielle d'ordre 0.*

ii) $S_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} \subset \rho(-(-A)^\alpha)$

iii) $\forall \eta > 0,\ \exists N_\eta\ ,\ \exists M_\eta\ ;$

$$\lambda \in S_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(1-\alpha)-\eta} \Rightarrow \|(\lambda + (-A)^\alpha)^{-1}\| < M_\eta\ (1 + |\lambda|)^{N_\eta}$$

iv) $-(-A)^\alpha$ admet un inverse continu : $-\int_0^\infty U_\alpha(t)\,dt.$

Démonstration. — (i) découle du fait que $G_{\alpha|\mathcal{D}(R_+)} = U_\alpha$.

(ii) et (iii) découlent des résultats de Da Prato-Mosco [6].

(iv) découle de la proposition (III–11).

CORROLLAIRE. — *Le calcul symbolique construit est interne à la Classe (I).*

Vérifions maintenant les propriétés classiques des puissances fractionnaires :

THEOREME III–11. — (i) $\forall \alpha,\ 0 < \alpha < 1, \forall \beta,\ 0 < \beta < 1,$ $0 < \alpha + \beta < 1,\ (-A)^\alpha\ (-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}.$

ii) *Si, pour tout* α, *nous munissons* $D(-(-A)^\alpha)$ *de la norme du graphe, c'est un espace de Banach ; pour* $0 < \alpha < \beta < 1$, $D(-(-A)^\beta)$ *s'injecte continuement dans* $D(-(-A)^\alpha)$ *et y est dense.*

iii) $\forall \alpha,\ 0 < \alpha < 1,\ \forall x \in D(A^\infty)$

$$\lim_{\beta \to \alpha} (-A)^\beta x = (-A)^\alpha x.$$

Démonstration. — (i) Par application du théorème de Fubini nous montrons que sur $D(A^\infty)$,

$$\int_0^\infty U_\alpha(t)\,dt \int_0^\infty U_\beta(t)\,dt = \int_0^\infty U_{\alpha+\beta}(t)\,dt$$

La continuité de ces opérateurs (propriété III–11) entraîne que l'égalité a lieu sur X. Ce qui s'écrit :

$$(-\overline{A}_\alpha)^{-1}\ (-\overline{A}_\beta)^{-1} = (-\overline{A}_{\alpha+\beta}))^{-1}.$$

D'où la conclusion.

ii) Montrons le résultat de densité. Pour cela, constatons qu'il suffit de le prouver pour $\alpha < \beta < 2\alpha$. Or, dans le cas

$$\mathcal{R}_\alpha \subset D(-(-A)^{2\alpha}) \subset D(-(-A)^\beta \subset D(-(-A)^\alpha)$$

et $\mathcal{R}_\alpha$ est dense dans ce dernier espace (Lions [16]).

iii) Découle du théorème de Lebesgue.

4. Conclusion.

Ainsi, nous avons construit un calcul symbolique sur la classe des opérateurs générateurs de Semi Groupes Distribution Réguliers, pour les fonctions $f(z) = -(-z)^\alpha$. Nous avons montré qu'en général, les opérateurs construits engendrent des Semi Groupes Distribution Analytiques non Réguliers. Nous avons caractérisé la classe des opérateurs (Classe (I)) dont les puissances fractionnaires engendrent un Semi Groupe Distribution Analytique Régulier, celle où les puissances fractionnaires engendrent un Semi Groupe Distribution fonction Analytique Régulier (la Classe (ϵ)), et enfin la Classe (0) : classe des opérateurs dont les puissances fractionnaires engendrent un Semi Groupe Fortement Continu Analytique. Le calcul Symbolique construit est interne à chacune de ces classes, et vérifie les propriétés classiques des puissances fractionnaires.

Remarque. – La plupart des résultats établis se généralisent immédiatement aux opérateurs qui, sans être nécessairement générateurs de SGDR, contiennent $\overline{\mathbf{R}_+}$ dans leur ensemble résolvant, et dont la résolvante satisfait une majoration polynômiale sur $\overline{\mathbf{R}_+}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BALAKRISHNAN, Fractionnal powers of Closed operators, *Pacific Journal of Math.*, 10 (1960).

[2] BALABANE, Seminaire Gouaouic-Schwartz, Ecole polytechnique, Paris, 1974.

[3] BARDOS, Cours de DEA, Université Paris VII, 1970.

[4] BUTZER-BERENS, Semi Groups Of Operators and approximation, Springer.

[5] CHAZARAIN, Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problème mixtes, *Journal Functional Analysis*, Vol. 7 n° 3 (1971).

[6] DA PRATO-MOSCO, Semi Gruppi Distribuzioni Analitici, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, 3 (19) (1965).

[7] DA PRATO-MOSCO, Semi Gruppi di crescenza n, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, 3 (19) (1965).

[8] DA PRATO, Regolarizzazioni dei Semi Gruppi Distribuzioni Analitici, *Ann. Sc. Norm. Sup.*, Pisa, (20) (1966).

[9] FOIAS, Remarques sur les Semi Groupes Distribution d'opérateurs normaux, *Portugaliae Math.*, 4 (19) (1960).

[10] HILLE-PHILLIPS, Functional Analysis and Semi Groups, *Am. Math. Soc.*, XXXI.

[11] KATO, Perturbation of linear operators, Springer.

[12] KATO, Notes on fractionnal powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, vol. 36. n° 3.

[13] KREIN, Linear differential equations in Banach spaces, *Translations of Math. Monographs. AMS*, vol. 29.

[14] KOMATSU, Fractionnal powers of operators I, *Pacific. Journ. Math.*, 2 (19) (1966).

[15] KOMATSU, Fractional powers of operators II, *Pacific Journ. Math.*, 1 (21) (1967).

[16] LIONS, Les Semi Groupes Distribution, *Portugaliae Math.*, 19 (1960).

[17] SCHWARTZ, Cours de l'Ecole Polytechnique (1969).

[18] TITCHMARSH, Theory of Fourier Integrals, Oxford Univ. Press.

[19] TITCHMARSH, Theory of functions, Oxford Univ. Press.

[20] WIDDER, An introduction to Transform Theory, Acad. Press.

[21] YOSIDA, Functional Analysis, Springer.

[22] YOSIDA, Fractional powers of infinitesimal generators and the analycity of the Semi Groups Generated by them, *Proc. Japan Acad.*, 36 (1960).

[23] GOLDSTEIN, Some remarks on infinitesimal generators of Analytic Semi Groups, *Proc. Am. Math. Soc.*, 1 (22) (1969).

Manuscrit reçu le 11 février 1975
Accepté par J. Dieudonné.

Mikhael BALABANE,
Département de Mathématiques
Centre Scientifique et Polytechnique
Université de Paris - Nord
Place du 8 mai 1945
93206 Saint - Denis.