ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MICHEL BONY

PIERRE SCHAPIRA

Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 1 (1976), p. 81-140

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_1_81_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 1 (1976), 81-140

PROPAGATION DES SINGULARITÉS ANALYTIQUES POUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

par J.M. BONY et P. SCHAPIRA

Cet article[1] est consacré à l'étude des opérateurs (pseudo)-différentiels analytiques P dont la variété caractéristique est régulière, involutive, de codimension $n \geqslant 1$. Nous démontrons alors (voir le n° 1.1. pour les hypothèses et énoncés précis) que si u vérifie $Pu = 0$, le support essentiel (analytic wave front) de u se propage le long de n-feuilles bicaractéristiques. Nous démontrons également un théorème d'existence microlocal.

Lorsque la variété caractéristique complexe est régulière (ce qui implique $n = 1$ ou 2), les théorèmes de propagation le long des courbes ou des 2-feuilles relatives à Re P et Im P sont bien connus, ainsi que leurs analogues dans le cadre C^∞ (voir Anderson [1], Duistermaat-Hörmander [6], Hörmander [8], Kawaï [11], Sato-Kawaï-Kashiwara [S.K.K.]).

Une transformation canonique permet de se ramener au cas d'opérateurs pseudo-différentiels partiellement elliptiques : deux groupes de variables x et t étant fixés, la partie principale de $P(x, t, D_x, D_t)$ est d'ordre 0 par rapport à t et est elliptique par rapport à x. Nous démontrons dans ce cas des résultats plus précis. En particulier, la propagation des singularités résultera d'un théorème de régularité partielle : si une microfonction $u(x, t)$ vérifie $P(x, t, D_x, D_t)\, u = 0$ dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, il existe $\widetilde{u}(z, t)$, microfonction sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p$, vérifiant

$$\partial/\partial \bar{z}_i \widetilde{u} = 0 (i = 1 \ldots n),$$

dont la restriction à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ est égale à u. (Voir le n° 1.2. pour les énoncés précis).

---

[1] Les résultats de cet article ont été annoncés dans la note [4].

Nous utilisons systématiquement dans ce travail la théorie des hyperfonctions et des microfonctions de Sato [14] [15] développée par M. Sato, T. Kawaï et M. Kashiwara [S.K.K.]. Afin de ne pas rendre la lecture de cet article trop dépendante de la lecture de [S.K.K.] nous avons résumé dans un paragraphe 0, en écartant systématiquement la cohomologie, les définitions et résultats de [S.K.K.] qui suffisent pour la compréhension des démonstrations (à l'exception d'un théorème démontré en appendice).

Dans le paragraphe 2, nous étudions les opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe, en modifiant un peu le point de vue de [S.K.K.]. Les résultats essentiels consistent à montrer que l'on peut faire opérer globalement les opérateurs pseudo-différentiels sur les fonctions holomorphes, dans des domaines dont la forme est géométriquement contrôlée (domaines plats), et à démontrer des estimations à la frontière pour ces opérateurs.

Dans le paragraphe 3, nous utilisons les résultats précédents pour démontrer un théorème de Cauchy-Kowalewski pour des opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe $P(z, w, D_z, D_w)$ dont la partie principale est d'ordre 0 en w et est non caractéristique par rapport à z_n. Le point important est de contrôler avec précision la forme des domaines dans lesquels on sait résoudre le problème de Cauchy.

Cela permet aux paragraphes 4 et 5 pour des opérateurs partiellement non-caractéristiques de démontrer des théorèmes d'existence et de prolongement pour l'équation $Pf = g$ où f et g sont holomorphes dans des domaines qui "touchent le réel", et donc de démontrer des théorèmes d'existence et de régularité pour l'équation $P(x, t, D_x, D_t)u=v$ où les microfonctions u et v sont les valeurs au bord de f et g.

On en déduit au paragraphe 6, dans le cas partiellement elliptique, le théorème d'existence et le fait que, si u vérifie $Pu = 0$, u est restriction au réel d'une microfonction $u(z, t)$ sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p$, partiellement holomorphe en z. Le théorème de propagation résulte alors du théorème de propagation de [S.K.K.] pour les solutions du système $\partial/\partial\bar{z}_i$.

Les arguments utilisés aux paragraphes 4,5 et 6 reprennent de très près (avec paramètre) ceux que nous avons utilisés dans [2], [3]. En particulier, les arguments cohomologiques sont très élémentaires (résolution du problème de Cousin). Toutefois, ces arguments s'insèreraient naturellement dans la théorie cohomologique très élaborée ("micro-microlocale") de M. Kashiwara (non publiée), théorie sur laquelle il a bien voulu nous dire quelques mots [9], ce dont nous le remercions. Il est très probable que les résultats qu'il a obtenus, joints à ceux de notre paragraphe 5, permettraient d'obtenir des résultats de propagation des singularités très précis, lorsque l'on suppose que la variété caractéristique de P *contient* une sous-variété involutive régulière.

0. NOTATIONS ET RAPPELS DE THEORIE DES MICROFONCTIONS

Ce paragraphe rassemble des définitions et propriétés concernant le faisceau $\mathcal{C}$ de M. Sato, qui seront d'un usage constant dans la suite de l'article. La référence de base est le long article de Sato-Kawaï-Kashiwara [S.K.K.] et ne sera pas systématiquement rappelée dans ce paragraphe.

Le choix des définitions et l'ordre dans lequel nous présentons les propriétés ne reflètent en rien l'ordre des démonstrations des dites propriétés. Ainsi dans [S.K.K.] la propriété que nous choisissons comme définition des microfonctions est démontrée à la 208ème page, alors que la définition cohomologique apparaît à la 11ème page.

Pour simplifier l'exposé nous nous placerons sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}^\nu$ ou son complexifié $\mathbf{C}^\nu$. Nous aurons aussi à considérer les espaces $\mathbf{S}^{\nu-1} = (\mathbf{R}^\nu - \{0\})/\mathbf{R}_+$ et $\mathbf{P}^{\nu-1} = (\mathbf{C}^\nu - \{0\})/\mathbf{C} - \{0\}$.

Si Γ est un cône de $\mathbf{R}^\nu$ nous notons $\Gamma^\circ \subset \mathbf{S}^{\nu-1}$ son polaire.

Nous désignons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$, par $\mathcal{A}$ sa restriction à $\mathbf{R}^\nu$, et par $\mathcal{B}$ le faisceau sur $\mathbf{R}^\nu$ des hyperfonctions de Sato [14].

0.1. Support essentiel et microfonctions.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$, $\widetilde{\Omega}$ un voisinage ouvert de Ω dans $\mathbf{C}^\nu$. Si Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbf{R}^\nu$ et f une fonction holomorphe dans $(\Omega + i\Gamma) \cap \widetilde{\Omega}$, on sait définir [13], [12] la valeur au bord $b(f)$ de f: c'est une hyperfonction sur Ω.

DEFINITION 0.1.1. – *Soit* $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ *et* $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{S}^{\nu-1}$. *On dit que* (x, ξ) *n'appartient pas au support essentiel*(²) *de* u *(en abrégé :* S.E.(u)) *si il existe un voisinage* W *de* x *dans* $\mathbf{C}^\nu$, *des cônes* Γ_α, *en nombre fini, dont les polaires* Γ°_α *ne rencontrent pas* ξ, *et des fonctions* f_α, *holomorphes dans* $(\Omega + i\Gamma_\alpha) \cap \mathrm{W}$ *telles que* $u = \sum_\alpha b(f_\alpha)$ *dans* $\mathbf{R}^\nu \cap \mathrm{W}$.

DEFINITION 0.1.2. – *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{S}^{\nu-1}$. *On pose*

$$\mathcal{C}(\mathrm{U}) = \frac{\mathcal{B}(\mathbf{R}^\nu)}{\{u \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^\nu)\ \mathrm{S.E.}(u) \subset \complement\, \mathrm{U}\}}$$

L'application $\mathrm{U} \to \mathcal{C}(\mathrm{U})$ définit évidemment un préfaisceau sur $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{S}^{\nu-1}$.

THEOREME 0.1.3. – *Le préfaisceau* $\mathrm{U} \to \mathcal{C}(\mathrm{U})$ *est un faisceau*

– *Ce faisceau est flasque*

– *Si* Ω *est un ouvert de* $\mathbf{R}^\nu$,

$$\mathcal{C}(\Omega \times \mathbf{S}^{\nu-1}) \cong \frac{\mathcal{B}(\Omega)}{\mathcal{A}(\Omega)}$$

et le support essentiel de $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ *est le support de son image dans* $\mathcal{C}(\Omega \times \mathbf{S}^{\nu-1})$.

Nous désignons par $\mathcal{C}$ le faisceau ainsi obtenu.

Si u est une section de $\mathcal{C}$ au-dessus d'un ouvert U de $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{S}^{\nu-1}$, nous dirons (avec M. Sato) que u est une microfonction sur U.

Remarquons en particulier que les hyperfonctions dont le support essentiel est vide sont les fonctions analytiques.

(²) "Singular support" dans [S.K.K.].

THEOREME 0.1.4. – *Soit* $u \in \mathcal{B}(\Omega)$, *avec* $S.E.(u) \subset \Omega \times I$, *où* I *est une partie convexe (i.e. : le cône engendré est convexe) propre* ($I \cap (-I) = \phi$), *fermée de* $S^{\nu-1}$. *Il existe une fonction f qui pour tout voisinage fermé convexe propre* I′ *de* I *est holomorphe dans* $(\Omega + i\Gamma') \cap \widetilde{\Omega}'$, *où* Γ' *est un cône ouvert convexe dont le polaire est contenu dans* I′, *et* $\widetilde{\Omega}'$ *est un voisinage (dépendant de* I′*) de* Ω *dans* $\mathbf{C}^\nu$ *telle que* $b(f) = u$.

Si f est holomorphe dans $(\Omega + i\Gamma) \cap \widetilde{\Omega}$, $b(f)$ est une hyperfonction u sur Ω dont le support essentiel est contenu dans $\Omega \times I$ où I est le polaire de Γ.

Par abus de langage nous désignerons encore par $b(f)$ la microfonction sur $\Omega \times S^{\nu-1}$ image de u, c'est-à-dire la classe de u modulo $[\mathcal{Q}(\Omega)]$.

Les notions introduites ici sont invariantes par changement de coordonnées, à condition de considérer $\Omega \times S^{\nu-1}$ comme le fibré en sphères cotangent à Ω.

0.2. Restriction des microfonctions.

Soit $\mathbf{R}^p \cong \mathbf{R}^p \times \{0\} \subset \mathbf{R}^{p+q}$, u une hyperfonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^{p+q}$, et supposons $S.E.(u) \cap \{(x, 0, 0, \tau)\} = \phi$ (en désignant par (x, t, ξ, τ) un point de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \times (\mathbf{R}^{p+q} - \{0\})$ ou son image dans $\mathbf{R}^{p+q} \times S^{p+q-1}$). On sait alors définir la restriction de u à $\mathbf{R}^p$: $u|_{\mathbf{R}^p}$ est une hyperfonction sur $\mathbf{R}^p \cap \Omega$.

Dans le cas où $u = b(f)$, f holomorphe dans $(\Omega + i\Gamma) \cap \widetilde{\Omega}$, le polaire de Γ ne rencontrant pas $\{(0, \tau)\}$, $u|_{\mathbf{R}^p} = b_{\mathbf{R}^p}(f(z_1, \ldots, z_p, 0 \ldots 0))$.

Soit maintenant U un ouvert de $\mathbf{R}^p \times S^{p-1}$, u une microfonction définie au voisinage de $\{(x, 0, \xi, \tau) \mid (x, \xi) \in U\}$ et supposons l'application $(x, 0, \xi, \tau) \to (x, \xi)$ propre sur le support de u. Alors on peut définir la restriction de u à $\mathbf{R}^p$, microfonction sur U.

Les applications de restriction ci-dessus sont compatibles.

0.3. Opérateurs pseudo-differentiels complexes.

Si U est un ouvert de $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{P}^{\nu-1}$, notons $\widetilde{\mathrm{U}}$ l'ouvert de $\mathbf{C}^\nu \times (\mathbf{C}^\nu - \{0\})$ canoniquement associé à U, et vérifiant donc

$$\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \ , \ \forall (z, \zeta) \in \widetilde{\mathrm{U}} \ , \ (z, \lambda\zeta) \in \widetilde{\mathrm{U}}$$

On appelle *symbole d'ordre inférieur ou égal à* m (où $m \in \mathbf{Z}$) dans U, la donnée d'une série $\sum_{k=-\infty}^{m} p_k(z, \zeta)$, où les p_k sont des fonctions holomorphes dans $\widetilde{\mathrm{U}}$, homogènes en ζ de degré k, telles que pour tout compact de $\widetilde{\mathrm{U}}$, il existe une constante M telle que l'on ait $|p_k(z, \zeta)| \leqslant \mathrm{M}^{-k+1}(-k)\,!$ pour (z, ζ) dans ce compact, et k négatif.

L'anneau $\mathcal{P}(\mathrm{U})$ *des opérateurs pseudo-différentiels* (d'ordre fini) dans U est défini comme étant un espace en bijection avec l'ensemble des symboles d'ordre fini dans U.

L'application $\mathrm{U} \to \mathcal{P}(\mathrm{U})$ définit le faisceau $\mathcal{P}$ des opérateurs pseudo-différentiels.

On note $\mathrm{P}(z, \mathrm{D}_z) = \sum_{k=-\infty}^{m} p_k(z, \mathrm{D}_z)$ l'opérateur associé à $\mathrm{S} = \sum_{k=-\infty}^{m} p_k(z, \zeta)$. On dit alors que P est d'ordre inférieur ou égal à m, que S est le symbole de P et que $\mathrm{P}_m(z, \zeta)$ est le symbole principal d'ordre m de P.

La somme et l'opérateur identité I étant définis de façon évidente, le produit $\mathrm{R}(z, \mathrm{D}_z) = \mathrm{P}(z, \mathrm{D}_z)\,\mathrm{Q}(z, D_z)$ des opérateurs P et Q de symboles respectifs $\sum_{k=-\infty}^{m} p_k(z, \zeta)$ et $\sum_{k=-\infty}^{l} q_k(z, \zeta)$ est l'opérateur R de symbole $\sum_{k=-\infty}^{m+l} r_k(z, \zeta)$ défini par :

$$r_k(z, \zeta) = \sum_{i+j-|\alpha|=k} 1/\alpha!\,(\mathrm{D}_\xi^\alpha p_i)(\mathrm{D}_z^\alpha q_j)(^3)$$

----

(3) N'utilisant ni adjoint ni transformation de Fourier nous notons $\mathrm{D}_{z_i} = \partial/\partial z_i$

Les calculs de Boutet de Monvel et Krée [5] [cf. aussi S.K.K., ch. 2, § 15] montrent que ce produit est une loi interne dans $\mathcal{P}(U)$ et démontrent également le résultat suivant :

PROPOSITION 0.3.1. – *Soit* $P(z, D_z)$ *un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* m *dans* U, *dont le symbole principal d'ordre* m *ne s'annule pas dans* U. *Il existe alors un et un seul opérateur* $Q(z, D_z)$ *appartenant à* $\mathcal{P}(U)$, *d'ordre* $-m$, *tel que l'on ait* $PQ = QP = I$.

On note $Q = P^{-1}$.

Le théorème suivant, dû à Kashiwara, est l'analogue pour les opérateurs pseudo-différentiels, du théorème de préparation de Weierstrass.

PROPOSITION 0.3.2. [S.K.K., ch. 2, § 22]. – *Soit* $P(z, D_z)$ *un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* μ, *défini au voisinage de* $(z_0, \zeta^\circ) \in C^\nu \times P^{\nu-1}$, *avec* $\zeta^\circ = (1,0\ldots0)$. *Supposons que*

$$p_\mu(z_0, 1, 0\ldots, 0, t) = at^m + 0(t^m), a \neq 0.$$

Il existe alors des opérateurs pseudo-différentiels E *et* $P_j (j = 0\ldots, m-1)$, *définis au voisinage de* (z_0, ζ°), *tels que :*

– E *est d'ordre* $\mu - m$, *et inversible*

– *les* P_j *sont d'ordre* $m - j$, *et indépendants de* D_{z_ν}

– $P(z, D_z) = E(z, D_z)\,[D^m_{z_\nu} + P_{m-1}(z, D_{z'})\,D^{m-1}_{z_\nu} + \ldots + P_0(z, D_{z'})]$

(*On a posé* $D_{z'}$ *pour* $(D_{z_1}, \ldots, D_{z_{\nu-1}})$).

0.4. Opérateurs pseudo-différentiels réels.

Désignons par γ l'application naturelle de $R^\nu \times S^{\nu-1}$ dans $C^\nu \times P^{\nu-1}$.

Le faisceau $\mathcal{P}_R$ des opérateurs pseudo-différentiels réels est le faisceau sur $R^\nu \times S^{\nu-1}$ image réciproque de $\mathcal{P}$ par γ. Un germe d'opérateur pseudo-différentiel réel au point (x, ξ) de $R^\nu \times S^{\nu-1}$ est ainsi un germe d'opérateur pseudo-différentiel au point de $C^\nu \times P^{\nu-1}$ correspondant.

La donnée d'un opérateur pseudo-différentiel réel $P(x, D_x)$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{S}^{\nu-1}$ est équivalente à la donnée d'un symbole $P(x, \xi) = \Sigma\, p_k(x, \xi)$ dans l'ouvert conique $\widetilde{U}$ de $\mathbf{R}^\nu \times (\mathbf{R}^\nu - \{0\})$ où les fonctions analytiques $p_k(x, \xi)$, positivement homogènes de degré k en ξ, se prolongent holomorphiquement à un même voisinage complexe de U dans $\mathbf{C}^\nu \times \{\mathbf{C}^\nu \setminus 0\}$.

Nous renvoyons à [S.K.K.] pour l'invariance par difféomorphisme et la définition des opérateurs pseudo-différentiels dans le cas d'un ouvert U du fibré projectif cotangent $P^*(X)$ à une variété analytique complexe X, ou du fibré en sphère cotangent $S^*(M)$ à une variété analytique réelle M.

PROPOSITION 0.4.1. – *Le faisceau $\mathcal{C}$ est muni d'une structure de faisceau de module sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ des opérateurs pseudo-différentiels réels.*

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{S}^{\nu-1}$, si $u \in \mathcal{C}(U)$ et $P(x, D_x)$ est un opérateur pseudo-différentiel réel sur U, on sait donc définir $P(x, D_x)\, u \in \mathcal{C}(U)$, cet accouplement étant compatible avec la composition et la restriction à un ouvert $U' \in U$. Il est d'autre part compatible avec l'action des opérateurs différentiels sur les hyperfonctions.

Nous donnerons au n° 2.5, une interprétation fondée sur [10] de cet accouplement, en termes de valeurs au bord.

Remarque 0.4.2. – Si P est défini sur l'ouvert $\Omega \times \omega \subset \mathbf{R}^\nu \times \mathbf{S}^{\nu-1}$ et si f est holomorphe sur $(\Omega + i\Gamma) \cap \widetilde{\Omega}$ avec $\Gamma^\circ \subset \omega$, avec l'abus de notations signalé plus haut, $b(f)$ est une microfonction sur $\Omega \times \mathbf{S}^{\nu-1}$ à support dans $\Omega \times \Gamma^\circ \subset \Omega \times \omega$.

Alors $Pb(f)$, microfonction sur $\Omega \times \omega$ à support dans $\Omega \times \Gamma^\circ$, peut être considérée comme une microfonction sur $\Omega \times \mathbf{S}^{\nu-1}$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{B}(\Omega)/\mathcal{A}(\Omega)$.

0.5 Transformations canoniques. ([S.K.K., Ch. 2, n° 3.3]

Soient U_0 et U_1 deux ouverts de $\mathbf{R}^\nu \times \mathbf{S}^{\nu-1}$ et $\widetilde{U}_0$ et $\widetilde{U}_1$ les ouverts associés dans $\mathbf{R}^\nu \times (\mathbf{R}^\nu - \{0\})$. Soit T une transformation canonique (c'est-à-dire un difféomorphisme analytique, conservant la forme symplectique $\sum_i d\xi_i \wedge dx_i$) homogène de degré 1, appliquant $\widetilde{U}_0$ sur $\widetilde{U}_1$.

En restreignant au besoin U_0 et U_1, il existe (de façon non unique) un isomorphisme $\widetilde{T}$ de $\mathcal{P}_{R|U_0}$ sur $\mathcal{P}_{R|U_1}$, un isomorphisme (noté encore $\widetilde{T}$) de $\mathcal{C}|U_0$ sur $\mathcal{C}|U_1$ qui respecte les structures de faisceau d'anneau pour $\mathcal{P}_R$, de faisceau de $\mathcal{P}_R$-module pour $\mathcal{C}$, et compatible avec l'action de T sur le symbole principal. En d'autres termes :

$$\widetilde{T}(P \,.\, Q) = \widetilde{T}(P)\,.\,\widetilde{T}(Q) \quad ; \quad \widetilde{T}(Pu) = \widetilde{T}(P)\,\widetilde{T}(u)$$

$\sigma[\widetilde{T}(P)] = \sigma(P) \circ T^{-1}$ en désignant par $\sigma(P)$ le symbole principal de P.

Dans [S.K.K.], les applications $\widetilde{T}$ sont appelées transformations de contact quantifiées. Dans le cadre des distributions, $\widetilde{T}u$ et $\widetilde{T}P$ correspondent à l'image de u et au transmué de P par un opérateur intégral de Fourier inversible associé à T.

1. ENONCE DES RESULTATS ET REDUCTION AU CAS PARTIELLEMENT ELLIPTIQUE

1.1. Enoncé des théorèmes d'existence et de propagation.

Soit U un ouvert de $R^\nu \times S^{\nu-1}$ et $\widetilde{U}$ l'ouvert conique correspondant de $R^\nu \times (R^\nu - \{0\})$. Soit P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre μ sur U, du symbole principal $P_\mu(x, \xi)$. Soit $V \subset U$ sa variété caractéristique, correspondant à

$$\widetilde{V} = \{(x, \xi) \in \widetilde{U} | P_\mu(x, \xi)\} = 0$$

Nous ferons les hypothèses suivantes sur P :

(A) – $\widetilde{V}$ est une variété analytique réelle non singulière, de codimension n dans $\widetilde{U}$.

(B) – $P_\mu(x, \xi)$ s'annule sur $\widetilde{V}$ exactement à l'ordre m, c'est-à-dire : pour tout point (x, ξ) de $\widetilde{V}$ et tout vecteur $(\Delta x, \Delta\xi)$ transverse en (x, ξ) à $\widetilde{V}$, il existe $a \neq 0$ tel que l'on ait :

$$P_\mu (x + \epsilon\Delta x \, , \, \xi + \epsilon\Delta\xi) = a\,\epsilon^m + o\,(\epsilon^m)$$

(C) – $\widetilde{V}$ est involutive et la restriction de la 1-forme canonique $\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \, dx_i$ à $\widetilde{V}$ est partout non nulle.

La condition (C) signifie que, si $q_1(x\,,\xi),\ldots, q_n(x\,,\xi)$ sont des fonctions homogènes en ξ, s'annulant sur $\widetilde{V}$ et dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur $\widetilde{V}$, on a :

$$-\{q_i\,,q_j\} = \sum_{l=1}^{\nu} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi_l}\,\frac{\partial q_j}{\partial x_l} - \frac{\partial q_j}{\partial \xi_l}\,\frac{\partial q_i}{\partial x_l}\right) = 0 \text{ sur } \widetilde{V}$$

et :

– $dq_1,\ldots,dq_n$ et $\Sigma \xi_i \, dx_i$ sont linéairement indépendants en tout point $(x\,,\xi)$ de $\widetilde{V}$.

Il en résulte que V est une variété régulière de codimension n dans $R^\nu \times S^{\nu-1}$, que les projections des champs hamiltoniens $H_{q_1},\ldots, H_{q_n}$ sur $R^\nu \times S^{\nu-1}$ sont indépendantes et définissent localement un feuilletage de V par des feuilles régulières de dimension n (indépendant du choix des q_i).

Ce sont ces n-feuilles que l'on appelle *feuilles bicaractéristiques* de P.

THEOREME 1.1.1. – *Supposons que* P *vérifie les conditions* (A), (B), (C) *et soit u une microfonction sur* U *solution de* $Pu = 0$.

Alors le support de u est une réunion de n-feuilles bicaractéristiques.

COROLLAIRE 1.1.2. – *Soit* P *un opérateur différentiel, f et g des hyperfonctions telles que* $Pf = g$. *Soit* U *un ouvert de* $R^\nu \times S^{\nu-1}$ *où* P *vérifie les conditions* (A), (B), (C), *et tel que le support essentiel de g ne rencontre pas* U. *Alors,* S.E.$(f) \cap$ U *est réunion de feuilles bicaractéristiques.*

THEOREME 1.1.3. – *Sous les hypothèses* (A), (B), (C) *pour* P, *soit v une microfonction définie au voisinage d'un point* $(x\,,\xi)$ *de* U.

Il existe alors u, microfonction définie au voisinage de $(x\,,\xi)$, *solution de* $Pu = v$.

Exemple 1.1.4.

1/ Les opérateurs (pseudo-) différentiels de multiplicité complexe constante, la 1-forme canonique ne s'annulant pas sur la variété caractéristique réelle, et vérifiant l'hypothèse a) ou b) satisfont aux hypothèses des théorèmes précédents.

a) p, le symbole principal réduit de P est réel.

b) p est complexe, mais $d\,\mathrm{Re}\,p$ et $d\,\mathrm{Im}\,p$ sont linéairement indépendants et leur crochet de Poisson s'annule sur V.

On a, selon les cas, propagation des singularités le long des courbes ou de 2-feuilles. Ces résultats ont été démontrés par Sato-Kawai-Kashiwara [S.K.K., ch. 3]. Leurs analogues dans le cadre des distributions ont été démontrés par Anderson [1] et Hörmander [8].

2/ Soient $(P_i)_{i=1,\dots,r}$ des opérateurs différentiels de même ordre et de partie principale réelle. Soit $P = \Sigma\, p_i^{2m} + Q$ avec Q d'ordre inférieur. Si on suppose que les dP_i et la 1-forme canonique sont linéairement indépendants et que les crochets de Poisson $\{P_i , P_j\}$ sont nuls sur $V = \{(x , \xi) | \forall_i , P_i(x , \xi) = 0\}$, on a propagation des singularités le long de r-feuilles pour les solutions de $Pu = 0$.

3/ Soit $P\left(x , t , \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel sur $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^p_t$ qui pour chaque t est elliptique en x. Le support essentiel d'une solution u de $P\left(x , t , \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ se propage le long des feuilles définies par $\xi = 0$, $t =$ constante, $\tau =$ constante.

1.2. Forme réduite de P et nouvelles notations.

Les théorèmes 1.1.1. et 1.1.3 sont de caractère "micro-local" : il suffit de les démontrer au voisinage de chaque point (x_0 , ξ_0) de U. D'autre part, la multiplication de P par un opérateur pseudo-différentiel E dont le symbole principal ne s'annule pas en (x_0 , ξ_0) ne change ni les hypothèses des théorèmes (la variété caractéristique est inchangée) ni les conclusions (E est un isomorphisme du faisceau e au voisinage de (x_0 , ξ_0)).

De plus, ces théorèmes sont invariants par transformation canonique. Plus précisément, si T est une transformation canonique de U_0 sur U_1, et si $\widetilde{T}$ est une "transformation de contact quantifiée" associée, il est clair que :

– Les hypothèses (A), (B), (C) sur P qui ne font intervenir que le symbole principal de P et les structures différentielles et symplectiques sont encore valables pour $\widetilde{T}(P)$. Pour les mêmes raisons, les feuilles bicaractéristiques de $\widetilde{T}(P)$ sont les images par T des feuilles bicaractérisitques de P.

– Les supports de $\widetilde{T}(P)\,\widetilde{T}(u)$ et de $\widetilde{T}(u)$ sont respectivement les images par T des supports de Pu et u.

D'après la théorie classique de Jacobi, il est possible de trouver, au voisinage de (x_0, ξ_0) une transformation canonique telle que, en nommant $(x_1, \dots, x_n ; t_1, \dots, t_{\nu-n})$ et $(\xi_1, \dots, \xi_n ; \tau_1, \dots, \tau_{\nu-n})$ les nouvelles coordonnées, l'image de (x_0, ξ_0) soit le point $x = t = o$, $\xi = o$, $\tau = (1, o, \dots, o)$ et l'image de la varieté caractéristique V soit définie par $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$.

En multipliant $\widetilde{T}(P)$ par un opérateur elliptique d'ordre $\mu - m$, on se ramène à démontrer les théorèmes 1.1.1. et 1.1.3. dans le cas suivant.

Nouvelles notations. – $R^\nu = R^n \times R^p$; $x \in R^n$; $t \in R^p$; $(\xi, \tau) \in S^{n+p-1}$.

L'opérateur pseudo-différentiel $P(x, t, D_x, D_t)$ d'ordre m est défini dans un voisinage U du point de coordonnées $x = t = \xi = o$, $\tau = (1, o \dots o)$. On a :

$$P_m(x, t, \xi, \tau) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \xi, \tau)\xi^\alpha$$

où les a_α sont des symboles d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, vérifiant

$$(B') \qquad \forall \xi \in R^n \setminus 0 \ , \quad \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, o, \tau)\xi^\alpha \neq 0$$

pour $(x ; t ; \tau)$ voisin de $(o ; o ; (1, o \dots o))$.

Les feuilles bicaractéristiques sont les n-feuilles F_{t_0, τ_0} d'équations $\xi = 0$, $\tau = \tau_0$, $t = t_0$.

Les a_α s'obtiennent en effet en développant

$$P_m(x, t, \xi) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-\theta)^{m-1} \left(\frac{d}{d\theta}\right)^m [P_m(x, t, \theta\xi, \tau)] \, d\theta ,$$

la fonction P_m s'annulant à l'ordre $m-1$ pour $\xi = 0$. De plus, on a $a_\alpha(x, t, 0, \tau) = \dfrac{1}{\alpha!} \dfrac{\partial^{|\alpha|} P_m(x, t, o, \tau)}{\partial \xi^\alpha}$. La condition (B) est bien équivalente à la condition (B').

Nous démontrerons au § 6 les théorèmes suivants.

THEOREME 1.2.1. (existence). – *Soit Ω un voisinage de* (0,0) *dans* R^{n+p} *et* K *un compact de* S^{n+p-1} *avec* $\Omega \times K \subset U$. *Pour tout voisinage* K' *de* K *et toute microfonction v définie sur* $\Omega = S^{n+p-1}$ *et à support dans* $\Omega \times K$, *il existe un voisinage* Ω' *de* (0,0) *et une microfonction u définie dans* $\Omega' \times S^{n+p-1}$ *et à support dans* $\Omega' \times K'$ *solution de* $Pu = v$.

Le faisceau $\mathcal{C}$ étant flasque, l'existence dans les germes en résulte aisément.

THEOREME 1.2.2. (régularité). – *Soit u une microfonction sur* U *solution de* $Pu = 0$. *Il existe alors une microfonction* $\tilde{u}$, *définie dans un voisinage* $\tilde{U}$ *de* U *dans* $C^n \times R^p \times S^{2n+p-1}$, *solution de* $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_i} u = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *telle que la trace de* $\tilde{u}$ *sur* U *soit égale à u.*

THEOREME 1.2.3. (propagation). – *Nous identifions la variété caractéristique* $V = \{(x, t, \xi, \tau) \in U | \xi = 0\}$ *au sous-ensemble correspondant de* $R^n \times R^p \times S^{p-1}$. *Soient alors* Ω *un ouvert connexe de* R^n *et* ω *un ouvert de* $R^p \times S^{p-1}$ *avec* $\Omega \times \omega \subset V$. *Soit* Ω' *un ouvert non vide de* Ω *et u une microfonction sur* U, *solution de* $Pu = 0$. *Alors, si u est nulle sur* $\Omega' \times \omega$, *elle est nulle sur* $\Omega \times \omega$.

Le support essentiel de *u* (qui est contenu dans V) est donc de la forme $\Omega \times F$ où F est un fermé de ω. On a localement (et donc globalement) propagation le long des *n*-feuilles bicaractéristiques $\xi = 0, (t, \tau) =$ cte.

Il est clair d'après ce qui précède que les théorèmes 1.2.1. et 1.2.3. entraînent respectivement les théorèmes 1.1.1. et 1.1.3.

2. CALCUL PRECISE POUR LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS DANS LE DOMAINE COMPLEXE

Les opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe sont définis dans [S.K.K.] par voie cohomologique, et ils opèrent sur les "microfonctions holomorphes". Nous définissons ici élémentairement la manière dont on peut, un hyperplan étant donné, les faire opérer sur les fonctions holomorphes (point de vue lié au précédent, voir Remarque 2.2.3.), en précisant les domaines de définition et la croissance au bord de ces fonctions.

Dans tout ce paragraphe, Σ désignera un hyperplan complexe de $\mathbf{C}^\nu$, de normale $\zeta_0 \in \mathbf{P}^{\nu-1}$. Sans restreindre la généralité, nous supposerons $\zeta_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Soit $z_1 = \sigma$ l'équation de Σ.

Nous désignerons par P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre m défini dans un ouvert de la forme $\Omega \times W$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^\nu$, et W un ouvert de $\mathbf{P}^{\nu-1}$ contenant $\{\zeta \in \mathbf{P}^{\nu-1} ; \zeta_1 = 1$ et $|\zeta_i| \leqslant k_0\}$, $(i = 2, \ldots, \nu)$. Si $\sum_{-\infty}^{m} \mathrm{P}_l(z, \zeta)$ est le symbole de P, pour chaque compact de Ω, il existe M_0 telle que

$$\sup |\mathrm{P}_{-l}(z, \zeta)| \leqslant \mathrm{M}_0^{l+1}\, l\,!$$

pour z appartenant au compact, $\zeta_1 = 1$ et $|\zeta_i| \leqslant k_0$ $(i = 2, \ldots, \nu)$.

Les constantes k_0 et M_0 (que l'on peut supposer uniformes sur Ω, quitte à le restreindre un peu) sont fixées dans tout ce paragraphe.

2.1. Action locale des opérateurs pseudo-différentiels sur les fonctions holomorphes.

Chaque terme $\mathrm{P}_l(z, \zeta)$ du symbole de P est défini pour $\zeta_1 = 1$, $|\zeta_i| \leqslant k_0$ $(i = 2, \ldots, \nu)$. Nous pouvons donc avec [S.K.K.], le développer en série entière. On obtient :

$$\mathrm{P}_l(z, 1, \zeta') = \sum_{\alpha' \geqslant 0} a_{l-|\alpha'|, \alpha'}(z)\, \zeta'^{\alpha'}$$

où
$$P_l(z\,,\zeta) = \sum_{\substack{|\alpha|=l\\ \alpha'\geqslant 0}} a_\alpha(z)\zeta^\alpha$$

en notant $\zeta = (\zeta_1\,,\zeta')$ et $\alpha = (\alpha_1\,,\alpha')$, l'indice α_1 pouvant prendre des valeurs négatives, ainsi que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \alpha_1 + |\alpha'|$.

Les inégalités de Cauchy et les majorations des P_l entraînent que

$$|a_\alpha(z)| \leqslant \frac{M_0^{-|\alpha|+1}\,(-\alpha)\,!}{k_0^{|\alpha'|}} \qquad \text{pour } |\alpha| < 0.$$

Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1\,,\alpha')$ vérifiant $\alpha' \geqslant 0$, et pour toute fonction f holomorphe au voisinage d'un point de Σ, nous poserons :

$$D_\Sigma^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_\nu^{\alpha_\nu}}$$

si $\alpha_1 \geqslant 0$, et nous désignerons par $D_\Sigma^\alpha f$, *la* $(-\alpha_1)^e$ primitive de $\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^{\alpha'} f$ qui s'annule sur Σ ainsi que ses $(-\alpha_1 - 1)$ premières dérivées lorsque $\alpha_1 < 0$.

PROPOSITION et DEFINITION 2.1.1. – *Soit f holomorphe au voisinage d'un point z_0 de $\Omega \cap \Sigma$. Alors la série*

$$P_\Sigma f(z) = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ \alpha'\geqslant 0}} a_\alpha(z)\, D_\Sigma^\alpha f(z)$$

converge au voisinage de z_0 et définit l'opérateur P_Σ.

En effet, si f est holomorphe et bornée dans un polydisque de centre z_0 et de rayon r, on a une majoration du type suivant dans le polydisque de rayon $r' < r$ (pour $\alpha_1 > 0$)

$$|D^\alpha f(z)| \leqslant \frac{r'^{(-\alpha_1)}\,\alpha'\,!}{|r - r'|^{|\alpha'|}\,(-\alpha_1)\,!}$$

et donc $|a_\alpha(z)\,D^\alpha f(z)| \leqslant CM_0 \dfrac{(-\alpha)\,!\ \ \alpha'\,!\ \ M_0^{-|\alpha|}\,r'^{(-\alpha_1)}}{(-\alpha_1)\,!\ \ k_0^{|\alpha'|}\,|r - r'|^{\alpha'}}$

Les termes avec $\alpha_1 \geqslant 0$ étant en nombre fini, il en résulte que la série converge dans le polydisque de rayon r' dès que $M_0 r' < 1$ et $\dfrac{r'}{k_0(r - r')} < 1$ et définit donc $P_\Sigma f$ au voisinage de z.

PROPOSITION 2.1.2. – *Soient* P *et* Q *deux opérateurs pseudo-différentiels définis au voisinage de* (z_0, ζ_0), *l'opérateur* Q *étant d'ordre inférieur ou égal à* 0. *Alors, pour toute fonction* f *holomorphe au voisinage de* z_0, *on a*

$$(P.Q)_\Sigma f = P_\Sigma\ Q_\Sigma f \qquad \textit{au voisinage de } z_0.$$

Ce résultat peut se déduire de [S.K.K.] (voir remarque suivante). bornons-nous ici à esquisser une démonstration directe.

Soit $P(z, D_z) = \Sigma\ a_\alpha(z)\, D^\alpha$ et $Q(z, D_z) = \Sigma\ b_\beta(z)\, D^\beta$. Comme Q est d'ordre négatif ou nul, on a $\beta_1 \leqslant 0$. En développant les b_β en série entière, on se ramène à démontrer le théorème pour des expressions du type $D^\alpha_\Sigma\ .\ (z^\gamma\ D^\beta_\Sigma f)$. Comme il est bien connu que la composition des opérateurs différentiels obéit à la loi de composition des symboles donnée en 0.3., et comme D_1^{-k} commute avec $D_1^{-1}, D_2, \ldots, D_\nu, z_2, \ldots, z_\nu$, on est ramené à démontrer la proposition pour $D_{1\Sigma}^{-k}(z_1^l f)$.

Par intégration par partie, on obtient $D_{1\Sigma}^{-1}(z_1 f) = z_1 D_{1\Sigma}^{-1} f - D_{1\Sigma}^{-2} f$ et par recurrence

$$D_{1\Sigma}^{-k}(z_1^l f) = \sum_{r=0}^{l} (-k)\ldots(-k-r+1)\, l \ldots (l-r+1)\, z_1^{l-r}\, D_{1\Sigma}^{-k-r} f$$

ce qui est le résultat cherché.

Remarque 2.1.3. – Dans [S.K.K.] les opérateurs pseudo-différentiels opèrent sur les "microfonctions holomorphes". Dans le cas simple de l'hypersurface Σ (d'équation $z_1 = 0$ par exemple), plongée dans $\mathbf{C}^\nu$, les éléments de $\mathcal{C}_{\Sigma|\mathbf{C}^\nu}$ s'écrivent de la façon suivante :

$$u = f(z)\, Y(z_1) + \sum_{l \geqslant 0} f_l(z_2, \ldots, z_\nu)\, \delta^l(z_1)$$

et le faisceau des opérateurs pseudo-différentiels opère (comme faisceau d'anneau) sur $\mathcal{C}_{\Sigma|\mathbf{C}^\nu}$.

L'opérateur P_Σ peut s'interpréter de la façon suivante : à $f(z)$ on associe $u = f(z)\, Y(z_1)$, puis on fait opérer P comme dans [S.K.K.]

$$Pu = g(z)\, Y(z_1) + \Sigma\ g_l(z_2, \ldots, z_\nu)\, \delta^\nu(z_1)$$

et on oublie les couches multiples : $P_\Sigma f(z) = g(z)$.

Dans le cas où Q est d'ordre inférieur ou égal à 0, il ne s'introduit pas de couches multiples dans $Q[f(z)\,Y(z_1)]$ et la proposition précédente se déduit immédiatement de

$$(P \circ Q)\,[f(z)\,Y(z_1)] = P\,[Q(f(z)\,Y(z_1))].$$

2.2. Noyau d'un opérateur pseudo-différentiel.

Nous rappelons ici la définition du noyau d'un opérateur pseudo-différentiel, et démontrons une majoration qui sera importante dans la suite. Nous poserons avec [S.K.K.] :

$$\Phi_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{2i\pi}\,\frac{n!}{t^{n+1}} \qquad \text{pour } n \geqslant 0$$

$$\Phi_{-n}(t) = \frac{-1}{2i\pi}\,\frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1}\log t \qquad \text{pour } n > 0$$

et $\Phi_\alpha(w_1, \ldots, w_\nu) = \Phi_{\alpha_1}(w_1) \ldots \Phi_{\alpha_\nu}(w_\nu)$.

PROPOSITION et DEFINITION 2.2.1. – ([S.K.K.], ch. II, n° 1.4.), *la série* $K(z, w) = \sum\limits_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ \alpha' \geqslant 0}} a_\alpha(z)\,\Phi_\alpha(w)$ *est convergente pour* $z \in \Omega_0$;

$0 < |w_1| < k_0\,|w_i|$ $(i = 2, \ldots, \nu)$; $|w_1| < \dfrac{1}{M_0}$.

La fonction K *est appelée noyau de* $P(z, D_z)$.

Nous renvoyons à [S.K.K.] pour la démonstration. Un calcul presque identique sera d'ailleurs fait dans la proposition suivante.

Remarque 2.2.2. – On a $K(z, w) = M(z, w) + N(z, w)\log w_1$, où M est la somme (finie) des termes de la série avec $\alpha_1 \geqslant 0$, et est le noyau de l'opérateur différentiel $\sum\limits_{\alpha_1 \geqslant 0} a_\alpha(z)\,D^\alpha$.

PROPOSITION 2.2.3. – *Supposons* P *d'ordre inférieur ou égal à* 0. *On a alors* $K(z, w) = \dfrac{m(z)}{w_1 \ldots w_\nu} + N(z, w)\log w_1$.

Quels que soient $k < k_0$ et $r < 1/M_0$, il existe μ_{kr} telle que

$$\left.\begin{array}{l} |w_j| \leqslant r (j = 1, \dots, \nu) \\ 0 < |w_1| \leqslant k\,|w_i|\ (i = 2, \dots, \nu) \end{array}\right\} \longrightarrow N(z, w) \leqslant \frac{\mu_{k_r}}{|w_2| \dots |w_\nu|} \sup_{i=2, \dots, \nu} \frac{1}{|w_i|}$$

La constante $\mu_{k,r}$ *ne dépend que de* k_0, k, M_0, r.

On a

$$N(z, w) = \sum_{\substack{\alpha_1 < 0, \alpha' \geqslant 0 \\ |\alpha| \leqslant 0}} \frac{1}{w_1 \dots w_\nu} a_\alpha(z) \frac{\alpha' !}{(-\alpha_1)!} \frac{w_1^{-\alpha_1}}{w'^{\alpha'}},$$

$$N(z, w) = \frac{1}{w_1 \dots w_\nu} \sum \frac{\alpha' !}{(-\alpha_1)!} a_\alpha(z) \left(\frac{w_1}{w'}\right)^{\alpha'} w_1^{-|\alpha|} = \frac{S(z, w)}{w_1 \dots w_\nu}.$$

On a d'autre part

$$|a_\alpha(z)| \leqslant M_0\, (-|\alpha|)!\ M_0^{-|\alpha|} \frac{1}{k_0^{|\alpha'|}}$$

La série définissant $S(z, w)$ converge donc normalement pour $|\frac{w_1}{w_i}| \leqslant k$ et $|w_1| \leqslant r$, et sa somme est majorée par μ'_{kr}, borne ne dépendant que de M_0, k_0, k et r.

Fixons maintenant z et w'. La fonction $w_1 \to S(z, w_1)$ est holomorphe pour $|w_1| \leqslant \inf_{i > 1} (kw_i, r)$ et s'annule pour $w_1 = 0$ (la série ne contient que des termes avec $\alpha_1 < 0$). On a donc d'après le lemme de Schwarz

$$\left|\frac{1}{w_1} S(z, w)\right| \leqslant \frac{\mu'_{kr}}{\inf (k\,|w_i|, r)} \qquad i = 2, \dots, \nu$$

ce qui établit la proposition avec $\mu_{kr} = \mu'_{kr} \sup (1, 1/k)$.

2.3. Action globale des opérateurs pseudo-différentiels dans les domaines plats.

Dans des domaines Ω suffisamment "plats" relativement à Σ, les propriétés du noyau $K(z, w)$ permettent de montrer que P_Σ opère sur les fonctions holomorphes dans Ω.

DEFINITION 2.3.1. – *Soit $k > 0$. Nous dirons qu'un ouvert convexe Ω de $\mathbf{C}^\nu$ est $k - \Sigma -$ plat s'il possède la propriété suivante :*

$$\forall z \in \Omega\,,\ \forall \tilde{z} \in \Sigma \quad \text{tels que} \quad |z_1 - \tilde{z}_1| \geqslant k\,|z_i - \tilde{z}_i| \quad i = 2, \ldots, \nu$$

on a $\tilde{z} \in \Omega \cap \Sigma$.

Il est clair qu'un ouvert $k - \Sigma -$ plat est aussi $k' - \Sigma -$ plat pour $k' > k$, c'est-à-dire qu'un ouvert est d'autant plus "plat" que k est petit. D'autre part, en utilisant des affinités relativement à Σ, on voit facilement qu'un ouvert $k - \Sigma -$ plat est réunion de domaines $k' - \Sigma -$ plats pour des $k' < k$.

DEFINITION 2.3.2. – *Nous appellerons ν-cycle s'appuyant sur Σ une application $\gamma : \mathbf{T}^\nu \to \Omega$ telle que l'on ait $\gamma(0, t_2, \ldots, t_\nu) \in \Sigma$ ($\mathbf{T}^\nu$ désigne le tore de dimension ν).*

Si $\alpha \neq \sigma$, et si $f(z_1 \ldots z_\nu)$ est définie au voisinage de l'image de γ avec $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, on définit $\int_{\Sigma\gamma\Sigma} f(z) \log (z_1 - \alpha)\,dz$ de la façon suivante : pour $0 < \epsilon$ assez petit, $\gamma_1(\epsilon, t_2, \ldots, t_\nu)$ est voisin de σ et il existe une détermination continue de $f(\gamma(t)) \log [\gamma_1(t) - \alpha]$.

Cette détermination se prolonge en une détermination continue pour $0 < t_1 < 1$; $(t_2, \ldots, t_\nu) \in \mathbf{T}^{\nu-1}$.

La différence de deux telles déterminations est proportionnelle à $f(z)$, et comme $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, l'intégrale

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} f(z) \log (z_1 - \alpha)\,dz \quad \text{est définie sans ambiguité.}$$

PROPOSITION 2.3.3. – *Soit Ω un ouvert convexe $k_0 - \Sigma -$ plat de diamètre inférieur à $1/M_0$.*

Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On a alors :

a) $P_\Sigma f(z) = \Sigma\, a_\alpha(z)\, D_\Sigma^\alpha f(z)$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

b) Pour tout z appartenant à Ω, il existe un ν-cycle γ dans Ω, s'appuyant sur Σ, et possédant les propriétés suivantes :

$$(2i\pi)^{-\nu} \int_\gamma \frac{1}{(\tilde{z}_1 - z_1)\dots(\tilde{z}_\nu - z_\nu)} \, d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_\nu = 1$$

$\forall \tilde{z} \in \gamma$, *on a* $|\tilde{z}_1 - z_1| < k_0 \, |\tilde{z}_j - z_j|$; $(j = 2, \dots, \nu)$

c) Pour tout ν-cycle possédant ces propriétés, on a

$$P_\Sigma f(z) = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z\,,z - \tilde{z}) f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

où K *est le noyau de l'opérateur* P.

Il suffit de démontrer la proposition lorsque Ω est un domaine $k - \Sigma -$ plat, de diamètre inférieur à r, avec $k < k_0$ et $r < r_0$.

Démontrons alors b). Soit $\gamma_1(t_1)$ un cycle dans **C**, avec $\gamma(0) = \gamma(1) = \sigma$, tournant une fois autour du point z_1, tel que $\gamma(t_1)$ soit toujours à une distance inférieure à ϵ du segment σz_1. Soit $\rho(t_1) = \dfrac{1}{k_1}\left|z_1 - \gamma(t_1)\right|$ avec $k < k_1 < k_0$.

Il est clair que le ν-cycle

$$(t_1, \dots, t_\nu) \longrightarrow [\gamma_1(t_1), \dots, z_j + \rho(t_1)\, e^{2i\pi t_j}, \dots]$$

satisfait aux conditions b) et est inclus dans Ω pour ϵ assez petit et k_1 suffisamment voisin de k_0.

Soit maintenant $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_\nu)$ un ν-cycle satisfaisant aux conditions b), et soient

$$\eta = \inf |\gamma_i(t) - z_i|\,,\ r = \sup |\gamma_1(t) - \sigma|\,,\ \text{et } k_1 = \sup \frac{|\gamma_1(t) - z_1|}{|\gamma_j(t) - z_j|}$$

pour $t \in T^\nu$; $i = 1, \dots, \nu$; $j = 2, \dots, \nu$. On a $\eta > 0$, $r < 1/M_0$, et $k_1 < k_0$. La série $K(z\,, w) = \Sigma\, a_\alpha(z)\, \phi_\alpha(w)$ converge normalement pour $\eta \leqslant |w_i| \leqslant r$ et $|w_1| \leqslant k_1\, |w_j|$. On a donc

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} K(z\,, z - \tilde{z}) f(\tilde{z})\, d\tilde{z} = \Sigma\, a_\alpha(z) \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \phi_\alpha(z - \tilde{z}) f(\tilde{z})\, d\tilde{z}$$

Pour $\alpha_1 \geqslant 0$, la formule de Cauchy donne immédiatement

$$\int_\gamma \phi_\alpha(z - \tilde{z}) f(\tilde{z})\, d\tilde{z} = D^\alpha f(z)$$

Pour $\alpha_1 < 0$, en remarquant que $\frac{\partial}{\partial w_1} \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_\nu}(w) = \phi_{\alpha_1+1, \ldots \alpha_\nu}(w) + h$ où h est une fonction holomorphe pour $w_1 = 0$, $w_j \neq 0$, on obtient par intégration par parties en t_1

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \phi_\alpha(z - \widetilde{z}) f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z} = \int_{\Sigma\gamma\Sigma} \phi_{\alpha_1+1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}(z - \widetilde{z})\, \mathrm{F}(\widetilde{z})\, d\widetilde{z}$$

où on a posé $\mathrm{F}(z) = \mathrm{D}_{1\Sigma}^{-1} f(z)$, les intégrales sur le $(\nu - 1)$ cycle correspondant à $t_1 = 0$ ou 1 étant nulles du fait de la nullité de F. On obtient ainsi par récurrence :

$$\int_{\Sigma\gamma\Sigma} \phi_\alpha(z - \widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z} = \mathrm{D}_\Sigma^\alpha f(z)$$

On voit facilement que si γ vérifie les conditions b) relativement au point z, il les vérifie également relativement aux points voisins de z. On en déduit que la série $\Sigma\, a_\alpha(z)\, \mathrm{D}_\Sigma^\alpha f(z)$ converge uniformément au voisinage de chaque point et donc sur tout compact de Ω, ce qui démontre c) et a).

COROLLAIRE 2.3.4. – *Supposons* P *d'ordre* $m \geqslant 0$, *et supposons que l'on ait* $\mathrm{P}_m(z, \zeta_0) \neq 0$ *dans* Ω_0 *(avec toujours* $\zeta_0 = (1, 0 \ldots 0)$*)*. *L'opérateur* P^{-1} *est alors défini au voisinage de* $\Omega_0 \times \{\zeta_0\}$. *Quitte à restreindre un peu* Ω_0, *on peut associer à* P^{-1} *des constantes* k'_0 *et* M'_0 *(analogues à* k_0, M_0 *pour* P*)*.

Soit alors Ω *un ouvert* $k - \Sigma -$ *plat (avec* $k = \inf(k_0, k'_0)$*) de diamètre inférieur à* $\inf(1/\mathrm{M}_0, 1/\mathrm{M}'_0)$. *Quelles que soient les fonctions g holomorphes dans* Ω *et* $(h_l)_{l=0,\ldots,m-1}$ *holomorphe sur* $\Omega \cap \Sigma$, *il existe une et une seule fonction f, holomorphe dans* Ω, *solution de*

$$\mathrm{P}_\Sigma f = g$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^l f(0, z_2, \ldots, z_\nu) = h_l(z_2, \ldots, z_\nu) \text{ pour } l = 0, \ldots, m-1.$$

On peut trouver f_0 holomorphe dans Ω ayant ses m premières traces égales aux h_l, et en remplaçant f par $f - f_0$, on se ramène au cas des traces nulles.

On a $\mathrm{I} = \mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1}$ et P^{-1} d'ordre $\leqslant 0$, d'où

$$\mathrm{P}_\Sigma\, \mathrm{P}_\Sigma^{-1}\, g = g.$$

D'autre part, P^{-1} étant d'ordre $-m$, les m premières traces de $P_\Sigma^{-1}\, g$ sont nulles, ce qui prouve l'existence.

Soit maintenant f, solution de $P_\Sigma\, f = 0$ et ayant ses m premières traces nulles. Si on pose $\varphi = D_{z_1}^m\, f$, on a alors $f = (D_{z_1}^{-m})_\Sigma\, \varphi$.

On a : $$(P\, D_{z_1}^{-m})_\Sigma\, \varphi = P_\Sigma\, (D_{z_1}^{-m})_\Sigma\, \varphi = P_\Sigma f = 0.$$

Comme $P\, D_{z_1}^{-m}$ est inversible et d'ordre 0, on a $\varphi = 0$ et donc $f = 0$, ce qui prouve l'unicité.

2.4. Majorations dans les domaines plats.

Nous conservons les mêmes notations. Le noyau K de P s'écrit $K(z\,,\,w) = M(z\,,\,w) + N(z\,,\,w)\log w_1$ et nous notons P_d et P_i les opérateurs différentiel et pseudo-différentiel de noyaux respectifs M et $N \log w_1$.

Soit Ω un ouvert convexe, $k_0 - \Sigma -$ plat, de diamètre $\leqslant 1/M_0$, et soit $z \in \Omega$.

Considérons la ν-chaîne suivante :

$$\gamma : [0,1] \times T^{\nu-1} \longrightarrow \Omega$$

$$\gamma_1(t) = z_1 + t_1\,(\sigma - z_1)$$

$$\gamma_j(t) = z_j + \left[a_j + \frac{t_1}{k}\,|\sigma - z_1|\right] e^{2i\pi t_j}$$

Si les $a_j > 0$ sont assez petits pour que $(z_1, \ldots, z_j + a_j\, e^{2i\pi t_j}, \ldots)$ appartienne à Ω, pour $k < k_0$ suffisamment voisin de k_0, cette ν-chaîne est dans Ω.

On a alors le résultat suivant.

PROPOSITION 2.4.1. – *Avec les notations ci-dessus, on a, pour* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$
$$P_i f(z) = 2i\pi \int_\gamma N(z\,,\,z - \widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z}$$

Considérons le 1-cycle $\widetilde{\gamma}_1$ de C obtenu en parcourant le segment $[\sigma\,,\,\sigma + (1-\epsilon)\,(z_1 - \sigma)]$, puis le cercle de centre z_1 et de rayon $\epsilon\,|z_1 - \sigma|$ puis le segment $[\sigma + (1-\epsilon)\,(z_1 - \sigma), \sigma]$, et soit $\widetilde{\gamma}$ le ν-cycle

$$\widetilde{\gamma}_1(t) = \widetilde{\gamma}_1(t_1)$$

$$\widetilde{\gamma}_j(t) = z_j + \left[a_j + \frac{|\widetilde{\gamma}_1(t_1) - z_1|}{k} \right] e^{2i\pi t_j}$$

Pour ϵ assez petit, ce ν-cycle est inclus dans Ω et satisfait aux hypothèses de la proposition 2.3.3. et on a

$$\mathrm{P}_i f(z) = \int_{\Sigma\widetilde{\gamma}\Sigma}^{\cdot} \mathrm{N}(z, z - \widetilde{z}) f(\widetilde{z}) \log(z_1 - \widetilde{z}_1) d\widetilde{z}$$

Pour $\widetilde{\gamma}_1(t_1)$ appartenant au segment $[\sigma, \sigma + (1 - \epsilon)(z_1 - \sigma)]$ on n'a à intégrer que la différence des déterminations de $\mathrm{N}(z, z - \widetilde{z})$ $\log(z_1 - \widetilde{z}_1)$ intégrale qui converge vers l'intégrale de $2i\pi \mathrm{N}(z, z - \widetilde{z}) f(\widetilde{z})$ sur γ lorsque $\epsilon \to 0$, tandis que l'intégrale relative au petit cercle tend vers 0 avec ϵ, d'où le résultat.

Notation 2.4.2. — Soit Ω un ouvert et z un point de Ω. On pose, pour toute partie $\mathrm{I} \subset \{2, \ldots, \nu\}$

$$d_{\mathrm{I}}(z) = \inf \{ \sup_{i \in \mathrm{I}} |z_i - \widetilde{z}_i| \mid z \in \complement \Omega \} \quad \widetilde{z}_j = z_j \text{ pour } j \notin \mathrm{I}$$

PROPOSITION 2.4.3. — *Supposons* P *d'ordre inférieur ou égal à* 0. *Soit* I, J *une partition de* $\{2, \ldots, \nu\}$. *Soit* Ω *un ouvert convexe* $k_1 - \Sigma -$ *plat de diamètre inférieur ou égal à* r_1, *avec* $k_1 < k_0$ *et* $r_1 < 1/\mathrm{M}_0$. *Il existe alors une constante* C *telle que, quelle que soit* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, *vérifiant*

$$\forall z \in \Omega, \ |f(z)| \leqslant d_{\mathrm{I}}(z)^{-\alpha} d_{\mathrm{J}}(z)^{-\beta}, \alpha > 0, \beta > 0$$

on ait $\quad \forall z \in \Omega, \ |\mathrm{P}_\Sigma f(z)| \leqslant \mathrm{C}\, d_{\mathrm{I}}(z)^{-\alpha} d_{\mathrm{J}}(z)^{-\beta}$

On peut choisir la constante C *ne dépendant que de* $k_0, \mathrm{M}_0, r_1, \alpha, \beta$.

On a $\mathrm{K}(z, w) = \dfrac{m(z)}{w_1 \ldots w_\nu} + \mathrm{N}(z,w) \log w_1$. Le résultat étant évident pour la multiplication par $m(z)$, nous n'avons à considérer que la partie relative à N.

Un point z étant donné, construisons la ν-chaîne intervenant dans la proposition 2.4.1. avec :

– les a_j tous égaux à $a_I < d_I(z)$ pour $j \in I$ (3)

– les a_j tous égaux à $a_J < d_J(z)$ pour $j \in J$

– k vérifiant $k_1 < k < k_0$.

Soit $\widetilde{z}$ le point de cette ν-chaîne relatif aux valeurs (t_1, t') du paramètre. On peut minorer aisément $d_I(\widetilde{z})$ en remarquant que la ν-chaîne construite en remplaçant a_I par d_I et k par k_1 resterait dans Ω. On en déduit

$$d_I(\widetilde{z}) \geqslant d_I(z) - a_I + t_1 \left[\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right)|\sigma - z_1|\right]$$

$$d_J(z) \geqslant d_J(z) - a_J + t_1 \left[\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right)|\sigma - z_1|\right]$$

On posera $\theta = \dfrac{1}{k_1} - \dfrac{1}{k}$.

D'après la proposition 2.3.3. on a une majoration :

$$|P_\Sigma f(z)| \leqslant \mu \int_\gamma \frac{1}{|\widetilde{z}_2 - z_2| \dots |\widetilde{z}_\nu - z_\nu|} \left(\sup_{i=2,\dots,\nu} \frac{1}{|\widetilde{z}_i - z_i|}\right) |f(\widetilde{z})| \; |d\widetilde{z}|$$

et donc en posant $\mu' = (2\pi)^{\nu-1}\, \mu$

$$|P_\Sigma f(z)| \leqslant \mu' \int_0^1 \quad [d_I - a_I + \theta\, |\sigma - z_1|\, t_1]^{-\alpha}$$

$$[d_J - a_J + \theta\, |\sigma - z_1|\, t_1]^{-\beta} \sup_{L=I,J} \left[a_L + \frac{1}{k}|\sigma - z_1|\, t_1\right]^{-1} \quad |\sigma - z_1|\, dt_1$$

Choisissons $a_I = \dfrac{1}{\alpha + 1} d_I$ et $a_J = \dfrac{1}{\beta + 1} d_J$.

On obtient $|P_\Sigma f(z)| \leqslant \sup (T_I \; ; T_J)$ avec

$$T_I \leqslant \mu' \int_0^\infty \left[\frac{\alpha}{\alpha + 1} d_I(z) + \theta t\right]^{-\alpha} \left[\frac{\beta}{\beta + 1} d_J(z) + \theta t\right]^{-\beta}$$

$$\left[\frac{1}{\alpha + 1} d_I(z) + \frac{1}{k} t\right]^{-1} dt$$

(3) Ajouté sur épreuves. Il faut en fait prendre $a_I < d_I(z)/2$ pour que la ν-chaîne soit contenue dans Ω, et remplacer d_I par $d_I/2$ dans le reste de la démonstration, ce qui ne modifie μ" que par un facteur $2^{\alpha+\beta}$.

On a $\alpha > 0$ et on peut donc choisir k suffisamment voisin de k_1 pour que l'on ait $\theta \leqslant \dfrac{\alpha}{k}$. On a donc

$$T_I \leqslant \mu' \left[\frac{\beta}{\beta+1} d_J(z) \right]^{-\beta} \int_0^{\infty} \alpha \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} d_I(z) + \theta t \right]^{-\alpha-1} dt$$

et $\quad T_I \leqslant \mu'' \dfrac{1}{\theta} \cdot e^2 \; (d_J(z))^{-\beta} \; (d_I(z))^{-\alpha}$

On majore le terme T_J de façon analogue, ce qui démontre la proposition, le choix de θ et la valeur de μ ne dépendant que de k_0, M_0, k_1, r_1, α, β (Prop. 2.2.3.).

2.5. Dépendance de P_Σ par rapport à Σ.

Il n'est pas possible de faire opérer directement les opérateurs pseudo-différentiels sur les fonctions holomorphes. Néanmoins, le résultat suivant montre en quelque sorte que, "modulo des fonctions holomorphes dans des ouverts plus grands", $P_\Sigma f$ ne dépend pas de Σ.

Nous conservons les mêmes hypothèses et notations pour P.

THEOREME 2.5.1. – *Soit Ω un ouvert convexe $k_0 - \Sigma -$ plat de diamètre $\leqslant 1/M_0$, où Σ est l'hyperplan d'équation $z_1 = \sigma$.* Soit Σ' *l'hyperplan d'équation $z_1 = \sigma'$, et soit Ω' un ouvert convexe, $k_0 - \Sigma' -$ plat, tel que $\Omega' \cap \Sigma' \subset \Omega$. Alors, pour toute fonction f holomorphe dans Ω, la fonction $P_\Sigma f - P_{\Sigma'} f$ qui est définie dans $\Omega \cap \Omega'$ se prolonge à Ω' tout entier.*

Pour z appartenant à Ω', choisissons $\gamma_1(t_1)$, cycle dans C, avec $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = \sigma'$, tournant une fois dans le sens positif autour de z_1, tel que $\gamma_1(t_1)$ soit suffisamment voisin du segment σz_1. Nous pouvons lui associer les cycles suivants de C :

δ_1^1 obtenu en parcourant successivement le segment $\sigma\sigma'$, le cycle γ_1 et le segment $\sigma'\sigma$.

δ_1^2 obtenu en parcourant successivement γ_1, le segment $\sigma\sigma'$ et le segment $\sigma\sigma'$.

Considérons maintenant les ν-cycles de C^ν :

$$\gamma(t) = \left[\gamma_1(t_1), \ldots, z_j + \frac{1}{k}|z_1 - \gamma_1(t_1)|\, e^{2i\pi t_j}, \quad \ldots\right]$$

$$\delta^l(t) = \left[\delta_1^l(t_1), \ldots, z_j + \frac{1}{k}|z_1 - \delta_1^l(t_1)|\, e^{2i\pi t_j} \ldots\right] \quad l = (1,2)$$

avec $k < k_0$ suffisamment proche de k_0 et $t \in \mathbf{T}^\nu$.

Lorsque $z \in \Omega \cap \Omega'$, le cycle γ est contenu dans $\Omega \cap \Omega'$, et δ^1 et δ^2 sont contenus dans Ω.

Pour $z \in \Omega \cap \Omega'$, on a (Proposition 2.3.3.)

$$\mathrm{P}_{\Sigma'} f(z) = \int_{\Sigma'\gamma\Sigma'} \mathrm{K}(z, z - \widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z} = \int_{\Sigma'\delta^2\Sigma'} \mathrm{K}(z, z - \widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z}$$

$$\mathrm{P}_{\Sigma} f(z) = \int_{\Sigma\delta^1\leqslant} \mathrm{K}(z, z - \widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z}$$

Dans le calcul de la différence, il n'apparaît que la partie relative au changement de détermination de $\log z_1$ sur la ν-chaîne Δ :

$$\Delta_1(t) = \sigma + t_1(\sigma' - \sigma)$$

$$\Delta_j(t) = z_j + \frac{1}{k}\left|z_1 - \Delta_1(t)\right| e^{2i\pi t_j}$$

$$\mathrm{P}_{\Sigma'} f(z) - \mathrm{P}_{\Sigma} f(z) = \int_{\Delta} 2i\,\mathrm{TN}(z, z - \widetilde{z})\, f(\widetilde{z})\, d\widetilde{z}$$

Mais le second membre est défini quel que soit z appartenant à Ω' (la ν-chaîne Δ étant toujours incluse dans Ω) et définit une fonction holomorphe dans Ω', ce qui établit le théorème.

Cette propriété permet d'interpréter simplement la manière dont les opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine réel opèrent sur les microfonctions.

Soit donc maintenant $\mathrm{P}(x, \mathrm{D}_x)$ défini au voisinage du point $x = 0$, $\xi = (1, 0 \ldots 0)$. Il lui correspond l'opérateur $\mathrm{P}(z, \mathrm{D}_z)$ défini dans $\mathbf{C}^\nu \times \mathbf{P}^{\nu-1}$ pour z voisin de 0 et $\zeta = (1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu)$ avec $\sup\limits_2^\nu |\zeta_j| \leqslant k_0$ convenable.

Soit alors G un cône de $\mathbf{R}^\nu$, dont le polaire est contenu dans

$$\{\xi \mid \xi_1 = 1 \text{ et } \sup_2^\nu |\xi_j| \leqslant k_0\}$$

THEOREME 2.5.2. (Kashiwara-Kawaï). – *Soit f une fonction holomorphe dans l'intersection de* $\mathbf{R}^\nu + i\mathrm{G}$ *et d'un voisinage de 0 dans* $\mathbf{C}^\nu$. *Sa valeur au bord $b(f)$ définit une microfonction pour x voisin de 0, $\xi_1 = 1$ et $|\xi_j| < k$. Il existe alors g, holomorphe dans l'intersection de* $\mathbf{R}^\nu + i\mathrm{G}$ *et d'un voisinage de 0, telle que l'on ait $Pb(f) = b(g)$.*

Plus précisément, si Σ est l'hyperplan complexe d'équation $z_1 = i\sigma$ avec $\sigma > 0$ assez petit, alors $\mathrm{P}_\Sigma(z, \mathrm{D}_z) f(z)$ est définie dans l'intersection de $\mathbf{R}^\nu + i\mathrm{G}$ *et d'un voisinage de 0, et on a*

$$b\,[\mathrm{P}_\Sigma(z, \mathrm{D}_z) f(z)] = \mathrm{P}(x, \mathrm{D}_x)\, b(f)$$

Avec des notations un peu différentes, ce théorème est démontré par Kashiwara et Kawaï dans [10], th. 3.3. [Il suffit de remarquer que l'on peut (avec les notations de leur théorème) prendre $\alpha_1 = \alpha_2 = i\sigma$, $\lambda = 1$, et que les chaînes qu'ils notent $\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_n$ sont en fait du type des chaînes qui nous ont permis de calculer P_Σ à partir du noyau K].

Il est facile de voir que, si $k' < k_0$ est assez voisin de k_0 pour que $\left\{ z \mid z_1 = i\sigma\,, |z_j| \leqslant \frac{\sigma}{k} \right\}$ soit contenu dans $\mathbf{R}^\nu + i\mathrm{G}$, le domaine $\mathrm{D} = \left\{ z \mid |z_j| < \frac{\sigma}{k} - \frac{|z_1 - i\sigma|}{k_0} \right\}$ est un voisinage de 0 qui est $k - \Sigma -$ plat ainsi que $\mathrm{D} \cap (\mathbf{R}^\nu + i\mathrm{G})$. Le théorème 2.5.1. montre alors que $\mathrm{P}_\Sigma f$ ne dépend pas de Σ, modulo des fonctions holomorphes au voisinage de 0, ce qui ne change pas la microfonction valeur au bord. Par contre, pour montrer que $b(\mathrm{P}_\Sigma f) = \mathrm{P}(bf)$ il est bien sûr nécessaire de faire le lien avec la définition (cohomologique) de l'action de $\mathrm{P}(x, \mathrm{D}_x)$ sur les microfonctions.

Remarque 2.5.3. – Le théorème 2.5.1. peut s'étendre au cas où les hyperplans Σ et Σ' ne sont pas parallèles (on se ramène à ce cas en utilisant des difféomorphismes convenables). Ce résultat, joint au corollaire 2.3.4., et en utilisant des méthodes analogues à celles que nous avons développées dans [2] permet d'obtenir le résultat suivant :

THEOREME 2.5.4. – *L'opérateur* P *vérifiant les hypothèses faites dans ce numéro, soient $\Omega \subset \Omega'$ deux ouverts convexes, $k_0 - \Sigma -$ plats, tels que l'on ait $\Omega \cap \Sigma = \Omega' \cap \Sigma$. Posons*

$$\mathrm{A} = \{ \zeta \in \mathrm{P}^{\nu-1} \mid \zeta = (1, \zeta'), |\zeta'_j| \leqslant k_0 \ \ et\ \ \exists\, z \in \Omega', \mathrm{P}_m(z, \zeta) = 0 \}$$

Supposons que pour tout hyperplan réel affine de normale N, *qui coupe* Ω' *sans couper* Ω, *on ait* $N \notin \overline{A}$.

Alors si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *et si* $P_\Sigma f \in \mathcal{O}(\Omega')$, *on a* $f \in \mathcal{O}(\Omega')$.

N'ayant pas à utiliser ce résultat dans la suite, nous nous bornons à l'énoncer sans démonstration. Ce résultat et ceux qui précèdent permettent d'étendre aux opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe les résultats d'existence et de prolongement démontrés dans [2] pour les opérateurs différentiels.

3. THEOREME DE CAUCHY-KOWALEWSKI POUR LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

3.1. Hypothèses et énoncé du théorème.

Dans tout ce paragraphe, (z, w) désignera un point de $\mathbf{C}^\nu = \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$ et (ζ, θ) un point de $\mathbf{C}^{n+p}\backslash\{0\}$ ou son image dans $\mathbf{P}^{n+p-1}$. Nous utiliserons les notations

$$z = (z', z_n) \quad ; \quad w = (w_1, w')$$

et les notations duales correspondantes.

Nous désignerons par P un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m \geqslant 0$, défini au voisinage du point de coordonnées $z = w = \zeta = 0$; $\theta = (1, 0, \dots, 0)$. Nous supposerons que P est "non caractéristique et sous forme de Weierstrass" par rapport à D_{z_n} et que sa partie principale est "d'ordre zéro par rapport à D_w", c'est-à-dire :

$$P = D_{z_n}^m + \sum_{0<|\alpha'|\leqslant m} A_{\alpha'}(z, w, D_{z'}, D_w)\, D_{z'}^{\alpha'} D_{z_n}^{m-|\alpha'|}$$
$$+ \sum_{0\leqslant l<m} B_l(z, w, D_{z'}, D_w)\, D_{z_n}^{m-l-1}$$

où les $A_{\alpha'}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 et les B_l des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre l, les symboles (complets) des $A_{\alpha'}$ et des B_l ne dépendent pas de ζ_n.

Soit Σ un hyperplan d'équation $w_1 = \sigma$ et soit H un hyperplan d'équation $z_n = h$.

DEFINITION 3.1.1. – *Soit Ω un ensemble convexe de $\mathbf{C}^{n+p}$.*

On dit que Ω est $z_n - k - \Sigma -$ plat s'il possède la propriété suivante : Si $(z, w) \in \Omega$ et $(\widetilde{z}, \widetilde{w}) \in \Sigma$ vérifient

$$|w_1 - \widetilde{w}_1| \geqslant k\, |w_i - \widetilde{w}_i| \qquad i = 2, \ldots, p$$

$$|w_1 - \widetilde{w}_1| \geqslant k\, |z_j - \widetilde{z}_j| \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

$$z_n = \widetilde{z}_n$$

alors on a $(\widetilde{z}, \widetilde{w}) \in \Sigma \cap \Omega$.

On dit que Ω est *$w - \delta - \mathrm{H} -$ plat s'il possède la propriété suivante :*

si $(z, w) \in \Omega$ et *$(\widetilde{z}, \widetilde{w}) \in \mathrm{H}$ vérifient*

$$|z_n - \widetilde{z}_n| \geqslant \delta\, |z_j - \widetilde{z}_j| \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

$$w = \widetilde{w}$$

alors on a $(\widetilde{z}, \widetilde{w}) \in \mathrm{H} \cap \Omega$.

Remarquons que ces propriétés expriment simplement que les tranches $z_n = \text{cte}$ ($w = \text{cte}$) de Ω sont plates en un sens analogue à celui de la définition 2.4.1.

THEOREME 3.1.2. – *Il existe un voisinage Ω_0 de* 0, *des constantes $k > 0$ et $\delta > 0$ telles que, quels que soient h et σ définissant* H *et* Σ, *quel que soit l'ouvert convexe Ω contenu dans Ω_0, $z_n - k - \Sigma -$ plat et $w - \delta - \mathrm{H} -$ plat, on ait :*

pour toute fonction g holomorphe dans Ω, et pour tout m-uple (h) *de fonctions holomorphes dans* $\Omega \cap \mathrm{H}$, *il existe une et une seule fonction f holomorphe dans Ω, solution du problème de Cauchy :*

$$\mathrm{P}_\Sigma(f) = g \quad ; \quad \gamma_{\mathrm{H}}(f) = (h)$$

où γ_{H} désigne les m premières traces de u sur H.

3.2. Quelques résultats géométriques.

Dans le théorème 3.1.2., les ouverts ne sont supposés plats que dans certaines directions. Une première étape va consister à se ramener au cas d'ouverts qui sont de plus un peu aplatis dans la direction w_1.

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit Ω un ouvert convexe $z_n - k - \Sigma -$ plat et $w - \delta - \mathrm{H} -$ plat. Alors Ω est réunion d'ouverts Ω_ϵ qui sont également $z_n - k - \Sigma -$ plats et $w - \delta - \mathrm{H}$ plats, et qui de plus possèdent la propriété suivante $\left((z, w') - \frac{1}{\epsilon} - \text{H-platitude}\right)$:*

si on a $$(z, w) \in \Omega_\epsilon \;;\; (\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathrm{H}$$

avec $$z' = \tilde{z}' \;;\; w' = \tilde{w}' \;;\; |\tilde{z}_n - z_n| \geqslant \frac{1}{\epsilon} |\tilde{w}_1 - w_1|$$

alors $$(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \Omega_\epsilon$$

Nous utiliserons la notation suivante : si $\mathrm{M} = (z, w)$ est un point de Ω, nous noterons $\mathrm{M_H}$ et M_Σ ses projections respectives sur H et Σ.

D'autre part, un groupe de variables étant donné nous noterons $\mathrm{B}_{z'}(\rho)$ l'intersection de la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ avec le sous-espace d'équation $z_n = w = 0$.

$\mathrm{B}_{z', w'}(\rho)$ l'intersection de cette même boule avec le sous-espace d'équation $z_n = w_1 = 0$, etc. . .

Si M appartient à Ω, on a, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\mathrm{M} + t(\mathrm{M_H} - \mathrm{M}) + \mathrm{B}_{z'}\left(\frac{t}{\delta} |\mathrm{M_H} - \mathrm{M}|\right) \subset \Omega$$

et, comme pour tout point M' de cet ensemble, on a $\mathrm{M}'_\Sigma - \mathrm{M}' = \mathrm{M}_\Sigma - \mathrm{M}$, on a

$$\Gamma_{st}(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + t(\mathrm{M_H} - \mathrm{M}) + s(\mathrm{M}_\Sigma - \mathrm{M}) + \mathrm{B}_{z'}\left(\frac{t}{\delta} |\mathrm{M_H} - \mathrm{M}|\right) + \mathrm{B}_{z'w'}\left(\frac{s}{k} |\mathrm{M}_\Sigma - \mathrm{M}|\right) \subset \Omega$$

pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Soit maintenant $\Gamma^\epsilon_{st}(M) = \Gamma_{st}(M) + B_{w_1}(\epsilon t\,|M_H - M|)$. On voit facilement que l'on a les propriétes suivantes :

a) Si M appartient au segment $M_1 M_2$, alors $\Gamma^\epsilon_{st}(M)$ est inclus dans l'enveloppe convexe de $\Gamma^\epsilon_{st}(M_1)$ et $\Gamma^\epsilon_{st}(M_2)$.

b) Si $M_1 \in \Gamma_{st}(M)$ et $M_2 \in \Gamma^\epsilon_{s't'}(M_1)$ alors $M_2 \in \Gamma^\epsilon_{s''t''}(M)$ avec

$(1 - s'') = (1 - s)(1 - s')$ et $(1 - t'') = (1 - t)(1 - t')$

c) Si $M \in H$ on a $\Gamma_{st}(M) = \Gamma^\epsilon_{st}(M)$

Soit alors $\Omega_\epsilon = \{M \in \Omega \mid \forall s \in [0\,,1]\,, \forall\, t \in [0\,,1]\,, \Gamma^\epsilon_{st}(M) \subset \Omega\}$.

Il résulte facilement de a) que Ω_ϵ est convexe et de b) qu'il est $z_n - k - \Sigma -$ plat et $w - \delta - H -$ plat. Il résulte enfin de c) que $\Omega_\epsilon \cap H = \Omega \cap H$.

Soit alors $M = (z\,, w)$ un point de Ω_ϵ et $\widetilde{M} = (\widetilde{z}\,, \widetilde{w})$ un point de H vérifiant $z' = \widetilde{z}'$, $w' = \widetilde{w}'$, $|\widetilde{z}_n - z_n| \geqslant \frac{1}{t}|\widetilde{w}_1 - w_1|$. On a $\widetilde{M} \in \Gamma^\epsilon_{0,1}(M)$ et donc $\widetilde{M} \in \Omega \cap H = \Omega_\epsilon \cap H$ ce qui prouve que Ω_ϵ satisfait aux conditions de la proposition.

COROLLAIRE 3.2.2. *Soit* $M_t = (z'\,, tz_n\,, w)$, *on a alors*

$$d_{z'}(M_t) \geqslant d_{z'}(M) + \frac{(1 - t)|z_n|}{\delta}$$

$$d_{w'}(M_t) \geqslant d_{w'}(M)$$

$$d_{w_1}(M_t) \geqslant d_{w_1}(M) + \epsilon(1 - t)\,|z_n'|.$$

3.3. Démonstration du théorème 3.1.2.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy se fera par une méthode d'approximation successive voisine de celle utilisée dans [7] pour le problème de Goursat. Nous devons faire au préalable un certain nombre de réductions, et le besoin de contrôler Ω_0, k et δ nécessite une certaine précision.

A – *FORME DE L'OPERATEUR P*

$$\text{On a } P = D_{z_n}^m + \sum_{0<|\alpha'|\leqslant m} A_{\alpha'} D_{z'}^{\alpha'} D_{z_n}^{m-|\alpha'|} + \sum_{0\leqslant l<m} B_l D_{z_n}^{m-l-1}$$

où les $A_{\alpha'}$ (d'ordre 0) et les B_l (d'ordre l) ont un symbole (complet) indépendant de ζ_n.

Si $Q(z, w, D_{z'}, D_w)$ d'ordre q a un symbole indépendant de ζ_n, il est facile de démontrer les résultats suivants :

$QD_{z'}^{\alpha'} = D_{z'}^{\alpha'} Q + R$, où R est d'ordre $q + |\alpha'| - 1$ et a son symbole indépendant de ζ_n.

$$QD_{z_n}^l = D_{z_n}^l Q + \sum_{0\leqslant\lambda\leqslant l-1} D_{z_n}^{\lambda} R_\lambda ,$$

où les R_λ sont d'ordre q et ont leur symbole indépendant de ζ_n.

On en déduit que P peut se mettre sous la forme :

$$P = D_{z_n}^m + \sum_{0<|\alpha'|\leqslant m} D_{z_n}^{m-|\alpha'|} D_{z'}^{\alpha'} A_{\alpha'} + \sum_{0\leqslant l<m} D_{z_n}^{m-l-1} B'_l$$

où les B'_l d'ordre l ont leur symbole indépendant de ζ_n. Si on pose $C_l = D_{w_1}^{-l} B'_l$, on obtient la forme suivante :

$$P = D_{z_n}^m + \sum_{0<|\alpha'|\leqslant m} D_{z_n}^{m-|\alpha'|} D_{z'}^{\alpha'} A_{\alpha'}(z, w, D_{z'}, D_w)$$

$$+ \sum_{0\leqslant l<m} D_{z_n}^{m-l-1} D_{w_1}^l C_l(z, w, D_{z'}, D_w)$$

où les $A_{\alpha'}$ et les C_l sont d'ordre $\leqslant 0$.

B – *CHOIX DE Ω_0 ET K*

Les A_α et les C_l sont des opérateurs pseudo-différentiels définis au voisinage du point de coordonnées $z = w = \zeta = \theta' = 0$; $\theta_1 = 1$, et à ce titre possèdent des symboles satisfaisant aux majorations du § 2. Mais, pour z_n fixé, ils définissent des opérateurs A_{α', z_n} et C_{l, z_n} pseudo-différentiels d'ordre 0 dans $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}^p$, définis au voisinage du point de coordonnées $z' = w = \zeta' = \theta' = 0$; $\theta_1 = 1$. Pour z_n suffisamment voisin de 0 dans $\mathbf{C}$ les constantes (k_0, M_0) relatives à ces opérateurs peuvent être choisies indépendamment de z_n.

On peut donc appliquer la proposition 2.4.3., avec les constantes k et C uniformes, dans chacun des hyperplans z_n = constante. On obtient ainsi le résultat suivant :

LEMME B. – *Il existe $k > 0$, $C > 0$ et un voisinage Ω_0 de 0, tels que pour tout ouvert convexe Ω, $z_n - k - \Sigma$ – plat et contenu dans Ω_0, et pour toute fonction f holomorphe dans Ω et vérifiant*

$$|f(M)| \leqslant d_{z'}(M)^{-\alpha}\, d_{w'}(M)^{-\beta} \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \beta > 0$$

on a

$$\sup_{\alpha',l} \left(|A_{\alpha'\Sigma} f(M)|\ ,\ |C_{l\Sigma} f(M)|\right) \leqslant C\, d_{z'}(M)^{-\alpha}\, d_{w'}(M)^{-\beta}$$

on a posé $M = (z\,,\, w)$ *et*

$$d_{z'}(M) = \inf\{|\widetilde{z}' - z'|\ |(\widetilde{z}', z_n\,,\, w) \in \complement\,\Omega\}$$

$$d_{w'}(M) = \inf\{|\widetilde{w}' - w'|\ |(z\,,\, w_1\,,\, \widetilde{w}') \in \complement\,\Omega\}$$

$$d_{w_1}(M) = \inf\{|\widetilde{w}_1 - w_1|\ |(z, \widetilde{w}_1, w') \in \complement\,\Omega\}$$

Enfin, les considérations qui précèdent montrent clairement que tous les choix faits pour P peuvent être faits pour l'opérateur $P(z'\,,\, z_n - h\,,\, w_1 - \sigma\,,\, w'\,,\, D_z\,,\, D_w)$ indépendamment de h et σ pourvu que ceux-ci soient assez petits. En restreignant au besoin Ω_0, cela nous autorise à supposer dans toute la suite que

$$\Sigma \text{ est l'hyperplan d'équation } w_1 = 0$$

$$\text{H est l'hyperplan d'équation } z_n = 0.$$

C – *MAJORATION DES DERIVEES*

LEMME C. – *Soit $f(u_1, \dots, u_r)$ holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^r$ et vérifiant $|f(u)| \leqslant d(u\,,\, \complement\,\Omega)^{-l}$ $l \geqslant 0$.*

On a $\left|\dfrac{\partial}{\partial z_i} f(u)\right| \leqslant e(l+1)\, d(u\,,\, \complement\,\Omega)^{-l-1}$.

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy sur le disque parallèle au plan des u_i, de centre u et de rayon $\dfrac{d(u\,,\, \complement\,\Omega)}{l+1}$ (cf. [7], lemme 5.1.3.).

D – *RESOLUTION PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES*

Les fonctions g et (h) étant données, il suffit évidemment de démontrer le résultat d'existence et d'unicité dans tout ouvert se déduisant de Ω par une homothétie de centre 0 et de rapport < 1, si bien que l'on peut supposer g et (h) définies au voisinage de Ω, et donc bornées dans Ω.

Il suffit de même de démontrer le théorème dans chacun des ouverts Ω_ϵ construits au n° 3.2., ce qui nous autorise à supposer que les majorations du Corollaire 3.2.2. sont valables dans Ω.

Enfin, si $\widetilde{h}$ désigne une fonction holomorphe bornée dans Ω dont les m premières traces sur H sont égales à (h), en remplaçant f par $f - \widetilde{h}$, on se ramène au cas où $(h) = 0$.

Nous définissons alors les f_ν dans Ω par récurrence :

$$f_0 = 0$$

$$D^m_{z_n} f_{\nu+1} = g - \sum_{0<|\alpha'|\leqslant m} D^{m-|\alpha'|}_{z_n} D^{\alpha'}_{z'} A_{\alpha',\Sigma} f_\nu - \sum_{0\leqslant l<m} D^{m-l-1}_{z_n} D^l_{w_1} C_{l,\Sigma}\, f_\nu$$

$$D^j_{z_n} f_{\nu+1}|_H = 0 \quad ; \quad j = 0, \dots, m-1$$

Posant $v_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu$, nous obtenons

$$D^m_{z_n} v_{\nu+1} = - \sum_{0<|\alpha'|\leqslant m} D^{m-|\alpha'|}_{z_n} D^{\alpha'}_{z'} A^{\alpha'}_{\alpha'\Sigma}\, v_\nu - \sum_{0\leqslant l<m} D^{m-l-1}_{z_n} D^l_{w_1} C_{l\Sigma}\, v_\nu$$

Nous avons $v_\nu = \sum_{\alpha'} v^{\alpha'}_\nu + \sum_l v^l_\nu$, où les $v^{\alpha'}_\nu$ et v^l_ν sont définis par

$$D^{|\alpha'|}_{z_n} v^{\alpha'}_{z'} = - D^{\alpha'}_{z'} A_{\alpha'\Sigma}\, v_\nu$$

$$D^j_{z_n} v^{\alpha'}_{\nu+1}|_H = 0 \quad j = 0, \dots, |\alpha'| - 1$$

et :

$$D^{l+1}_{z_n} v^l_{\nu+1} = - D^l_{w_1} C_{l\Sigma}\, v_\nu$$

$$D^j_{z_n} v^l_{\nu+1}|_H = 0 \quad j = 0, \dots, l$$

Démontrons par récurrence, que l'on a pour des constantes K_0 et K convenables

$$v_\nu(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{K}_0 \left[\sum_{p=0}^{\nu} \frac{\mathrm{K}^\nu \, \delta^{\nu-p} \, |z_n|^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right) \delta^{p(m+1/2)}} \right] d_{z'}(\mathrm{M})^{-1} \; d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$$

La fonction g étant supposée bornée, il en est de même pour $v_0 = f_1$ et il est donc possible de choisir K_0 valable pour $\nu = 0$.

Supposons donc la formule établie au rang ν. Nous poserons

$$\mathrm{L}(z_n) = \mathrm{K}_0 \sum_{p=0}^{\nu} \frac{\mathrm{K}^\nu \, \delta^{\nu-p} \, |z_n|^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right) \delta^{p(m+1/2)}}$$

On a

$$|\mathrm{D}_{z'}^{\alpha'} \mathrm{A}_{\alpha'\Sigma} \, v_\beta| \leqslant \mathrm{C} \, \mathrm{L}(z_n)(e^{|\alpha'|} + 1)! \;\; d_{z'}(\mathrm{M})^{-|\alpha'|-1} \;\; d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$$

en appliquant le lemme B (la constante C est celle de ce lemme), puis $|\alpha'|$ fois de suite le lemme C.

Soit maintenant

$$\mathrm{M}_t = (z', tz_n, w) \text{ et formons } \int_0^1 \mathrm{D}_{z'}^{\alpha'} \mathrm{A}_{\alpha'\Sigma} \, v_\nu(\mathrm{M}_t) \, z_n \, dt$$

Nous pouvons majorer cette intégrale en utilisant la relation précédente, en majorant $|tz_n|$ par $|z_n|$, $d_{w'}(\mathrm{M}_t)^{-1}$ par $d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$, $d_{z'}(\mathrm{M}_t)^{-|\alpha'|-1}$ par $\left[d_{z'}(\mathrm{M}) + \dfrac{(1-t)|z_n|}{\delta}\right]^{-|\alpha'|-1}$ et en intégrant sur $[0, +\infty]$. On obtient :

$$|\mathrm{D}_{z'}^{\alpha'} \mathrm{A}_{\alpha'\Sigma} \, v_\nu(\mathrm{M}_t) \, z_n \, dt| \int \leqslant \frac{\delta}{|\alpha'|} \mathrm{C} \, \mathrm{L}(z_n) \, e^{|\alpha'|}$$

$$(|\alpha'| + 1)! \;\; d_{z'}(\mathrm{M})^{-\alpha'} \; d_{w'}(\mathrm{M})^{-1} .$$

En itérant $|\alpha'|$ fois ce calcul, nous obtenons

$$|v_{\nu+1}^{\alpha'}(\mathrm{M})| \leqslant \mathrm{C} \, e^{|\alpha'|} \, (|\alpha'| + 1) \, \delta^{|\alpha'|} \, \mathrm{L}(z_n) \, d_{z'}(\mathrm{M})^{-1} \; d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$$

Soit encore, en remarquant que $|\alpha'|$ varie entre 1 et m.

(*) $\quad |v_{\nu+1}^{\alpha'}(\mathrm{M})| \leqslant \mathrm{C} \, e^m \, (m+1) \, . \, \delta \, . \, \mathrm{L}(z_n) \, d_{z'}(\mathrm{M})^{-1} \; d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$,

en supposant, ce qui est loisible, $\delta \leqslant 1$.

On a de même, en appliquant le lemme B et l fois le lemme C

$$|D^l_{w_1} C_{l\Sigma} v_\nu(M)| \leqslant C\, L(z_n)\, e^l\, l!\ d_{z'}(M)^{-1}\, d_{w'}(M)^{-1}\, d_{w_1}(M)^{-l}$$

Nous pouvons majorer $d_{w_1}(M)^{-l}$ par $d_{w_1}(M)^{-l-1/2}$, en supposant, ce qui est loisible, le diamètre de Ω_0 inférieur à 1. Un calcul analogue au précédent (en majorant $d_{w_1}(M)^{-l-1/2}$ par

$$[d_{w_1}(M) + \epsilon(1-t)\,|z_n|]^{-l-1/2})$$

permet de démontrer que la fonction φ vérifiant :

$$D^l_{z_n} \varphi(M) = - D^l_{w_1} C_{l\Sigma} v_\nu(M) \ ; \ D^j_{z_n} \varphi(M)_H = 0 \quad j = 0, \ldots, l-1$$

admet la majoration suivante :

$$|\varphi(M)| \leqslant C\, e^l \frac{l!\ \epsilon^{-l}}{(l-1/2)\ldots 3/2\,.\,1/2}$$

$$L(z_n)\, d_{z'}(M)^{-1}\, d_{w'}(M)^{-1}\, d_{w_1}(M)^{-1/2},$$

et donc $|\varphi(M) \leqslant 2C\, m e^m\ \epsilon^{-m}\ L(z_n)\, d_{z'}(M)^{-1}\, d_{w_1}(M)^{-1}\, d_{w_1}(M)^{-1/2}$.

On a $v^l_{\nu+1}(M) = \int_0^1 \varphi(M_t)\, z_n\, dt$, et donc

$$|v^l_{\nu+1}(M)| \leqslant 2\,C\, m e^m\ \epsilon^{-m}\ d_{z'}(M)^{-1}\, d_{w_1}(M)^{-1} \int_0^1 L(tz_n)$$

$$[d_{w_1}(M) + \epsilon(1-t)\,|z_n|]^{-1/2}\ |z_n|\, dt.$$

Nous pouvons majorer chacune des intégrales :

$$\int_0^1 |tz_n|^{p/2}\ [d_{w_1}(M) + \epsilon(1-t)\,|z_n|]^{-1/2}\ |z_n|\, dt \leqslant |z_n|^{\frac{p+1}{2}}\ \epsilon^{-1/2}$$

$$\times \int_0^1 t^{p/2}\,(1-t)^{-1/2}\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+1\right)}\ |z_n|^{\frac{p+1}{2}}\ \epsilon^{-1/2}$$

Il en résulte que l'on a

$$(^{**})\ |v^l_{\nu+1}(\mathrm{M})| \leqslant \mathrm{K}_0 \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(2\mathrm{C}\, me^m \sqrt{\pi})\, k^\nu\, \delta^{\nu-p}\, |z_n|^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+1\right)\, \epsilon^{(p+1)\,(m+1/2)}}$$

$$d_{z'}(\mathrm{M})^{-1}\, d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$$

On déduit maintenant de (*) et (**) que, en choisissant K tel que l'on ait

$$\mathrm{K} \geqslant 2\mathrm{C}\, me^m \sqrt{\pi}\,.\, m$$

et :

$$\mathrm{K} \geqslant \mathrm{C}\,(m+1)\, e^m\,.\, \mathrm{card}\{\alpha' \,|\, |\alpha'| \leqslant m\}$$

On a

$$|v_{\nu+1}(\mathrm{M})| \leqslant \mathrm{K}_0 \sum_{p=0}^{\nu+1} \frac{\mathrm{K}^{\nu+1}\, \delta^{\nu+1-p}\, |z_n|^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\, \epsilon^{p(m+1/2)}}\, d_{z'}(\mathrm{M})^{-1}\, d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$$

ce qui achève la récurrence.

On a alors :

$$\sum_0^\infty |v_\nu(\mathrm{M})| \leqslant \mathrm{K}_0 \sum_{p\geqslant 0} \sum_{q\geqslant 0} \frac{\mathrm{K}^{p+q}\, \delta^q\, |z_n|^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\, \epsilon^{p(m+1/2)}}\, d_{z'}(\mathrm{M})^{-1}\, d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}$$

$$\sum_0^\infty |v_\nu(\mathrm{M})| \leqslant \mathrm{K}_0 \left(\sum_{q=0}^\infty \mathrm{K}^q\, \delta^q\right) \left(\sum_{p=0}^\infty \frac{\mathrm{K}^p\, |z_n|^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\, \epsilon^{p(m+1/2)}}\right)$$

$$d_{z'}(\mathrm{M})^{-1}\, d_{w'}(\mathrm{M})^{-1}\,.$$

Il suffit donc de choisir $\delta < \frac{1}{\mathrm{K}}$ (qui ne dépend que de m et de la constante C du lemme (B)) pour que la série $\Sigma\, v_\nu$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

On a $\sum_0^\infty v_\nu = \lim_{n\to\infty} f_\nu = f$ et f est bien une solution du problème de Cauchy.

Pour prouver l'unicité, soit f holomorphe dans Ω, solution de $P_\Sigma f = 0$; $\gamma_H f = 0$. Posons alors $v_\nu = f$ quel que soit ν. On a bien

$$D^m_{z_n} v_{\nu+1} = - \Sigma\, D^{m-|\alpha'|}_{z_n} D^{\alpha'}_{z'} A_{\alpha'\Sigma}\, v_\nu - \Sigma\, D^{m-l-1}_{z_n} D^l_{w_1} C_{l\Sigma}\, v_\nu$$

Or, sous ces seules hypothèses, nous avons démontré dans ce qui précède que $\lim_{\nu\to\infty} v_\nu = 0$, ce qui implique $f = 0$.

4. EXISTENCE ET PROLONGEMENT DANS DES TUBES LOCAUX

Nous conservons les notations du paragraphe 3, ainsi que les hypothèses sur l'opérateur $P(z, w, D_z, D_w)$. Les constantes k_0 et δ_0 désigneront les constantes intervenant dans le théorème de Cauchy-Kowalewski précisé (th. 3.1.2.) valables pour P dans un voisinage donné de 0.

Nous noterons $z = x + iy$, $w = t + is$ les parties réelles et imaginaires des variables z et w, et de même $\zeta = \xi + i\eta$; $\theta = \tau + i\sigma$.

Si G est un cône ouvert convexe (non nécessairement saillant) de $\mathbf{R}^{n+p}$, nous noterons TG (le "tube" de base G) l'ouvert $\mathbf{R}^{n+p} + i\mathrm{G}$. De même, pour Γ cône ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, nous poserons $\mathrm{T}\Gamma = \mathbf{R}^n + i\Gamma$ fréquemment identifié à $\{(z, w) \in \mathbf{C}^{n+p} \mid z \in \mathrm{T}\Gamma \text{ et } w = 0\}$. On a ainsi $\mathrm{T}(\mathrm{G} + \Gamma) = \mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma$.

4.1. Construction d'ouverts plats associés à G et Γ.

PROPOSITION 4.1.1. – *Supposons que* G *soit contenu dans le demi-espace* $s_1 > 0$ *et qu'il contienne le cône de révolution d'équation :* $s_1 > k\left(\sum_1^n |y_i|^2 + \sum_2^p |s_j|^2\right)^{1/2}$ *avec* $k < k_0/\sqrt{n+p}$ *et que* Γ *contienne le cône de révolution d'équation*

$$y_n > \delta\left(\sum_2^{n-1} |y_i|^2\right)^{1/2} \quad avec \quad \delta < \delta_0/\sqrt{n}$$

Il existe alors un système fondamental de voisinages de l'origine $(\Omega_{\sigma h})_{\substack{\sigma>0\\ h>0}}$ *à chacun desquels on associe les hyperplans complexes* Σ *et* H *d'équations respectives* $w_1 = i\sigma$ *et* $z_n = ih$, *tels que l'on ait :*

a) $\Omega_{\sigma h}$ est $z_n - k_0 - \Sigma$ *– plat et* $w - \delta_0 - \mathrm{H}$ *– plat*

b) $\Omega_{\sigma h} \cap \Sigma$ *est contenu dans* $\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma$

c) $\Omega_{\sigma h} \cap \mathrm{H} \cap (\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n)$ *est contenu dans* $\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma$

d) les ouverts $\Omega_{\sigma h} \cap (\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma)$ *et* $\Omega_{\sigma h} \cap (\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n)$ *sont* $z_n - k_0 - \Sigma$ *– plats et* $w - \delta_0 - \mathrm{H}$ *– plats.*

Nous utiliserons le lemme suivant (où Σ et H sont fixés).

LEMME 4.1.2. – *Soit* K *un compact convexe* $z_n - k - \Sigma$ *– plat et* $w - \delta - \mathrm{H}$ *– plat. Alors,* K *possède un système fondamental de voisinages ouverts, convexes,* $z_n - k - \Sigma$ *– plats et* $w - \delta - \mathrm{H}$ *– plats.*

Comme dans la démonstration de la proposition 3.2.1., à tout point $\mathrm{M} = (z, w)$ nous associons ses projections $\mathrm{M_H}$ et M_Σ sur H et Σ et définissons le compact

$$\mathrm{L_M} = \bigcup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1}} \mathrm{M} + t(\mathrm{M_H} - \mathrm{M}) + \mathrm{B}_{z'}\left(\frac{t}{\delta}\,|\mathrm{M_H} - \mathrm{M}|\right) + s(\mathrm{M}_\Sigma - \mathrm{M}) + \mathrm{B}_{z'w'}\left(\frac{s}{k}\,|\mathrm{M}_\Sigma - \mathrm{M}|\right)$$

(ou $\mathrm{B}_{z'}(\rho)$ est la boule en les variables z' de centre 0 et de rayon ρ, etc. . .).

Soit alors Ω_1 un voisinage ouvert convexe de K, et posons

$$\Omega = \{\mathrm{M} \in \Omega_1 \mid \mathrm{L_M} \subset \Omega_1\}$$

Comme dans la proposition 3.2.1., on voit facilement que Ω est un ouvert convexe, $z_n - k - \Sigma$ – plat et $w - \delta - \mathrm{H}$ – plat. Il est d'autre part évident que l'on a $\mathrm{K} \subset \Omega \subset \Omega_1$.

Démonstration de la proposition 4.1.1. – Soit k_1 et δ_1 vérifiant $k < k_1 < k_0/\sqrt{n+p}$ et $\delta < \delta_1 < \delta_0/\sqrt{n}$ et construisons les cônes de révolution dans $\mathbf{C}^{n+p}$ et $\mathbf{C}^n$.

$$G_1 = \left\{ (z\,,\,w) \mid s_1 > k_1 \left[t_1^2 + \sum_2^p |w_j|^2 + \sum_1^n |z_i|^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$\Gamma_1 = \left\{ z \mid y_n > \delta_1 \left[x_n^2 + \sum_1^{n-1} |z_j|^2 \right]^{1/2} \right\}$$

Leurs adhérences $\overline{G}_1$ et $\overline{\Gamma}_1$, diminuées de 0, sont respectivement contenues dans TG et TΓ. Soit enfin $G_1' = G_1 \cap \{(z\,,\,w) \mid z_n = 0\}$.

Les hyperplans Σ et H d'équations $w_1 = i\sigma$ et $z_n = ih$ étant fixés, construisons le compact suivant :

$$K = \{(z\,,\,w) \in \overline{G}_1' \mid s_1 \leqslant \sigma\} + \{(z\,,\,0) \mid z \in \overline{\Gamma} \text{ et } y_n \leqslant h\}$$

Il est manifestement $z_n - k_1 - \Sigma -$ plat et $w - \delta_1 - H -$ plat.

Nous allons choisir un voisinage Ω de K, $z_n - k_1 - \Sigma -$ plat et $w - \delta_1 - H -$ plat, assez petit pour que l'on ait les deux propriétés suivantes :

– $\Omega \cap \Sigma$ est relativement compact dans TG + TΓ. Cela est possible, $K \cap \Sigma$ étant un compact contenu dans $(\overline{G}_1' + \overline{\Gamma}_1) - \{0\}$ donc dans TG + TΓ.

– $\Omega \cap H$ est contenu dans l'ensemble des points distants de $K \cap H$ de moins de $\sin\alpha \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta_1}\right) h$ avec $\alpha = \text{Arc}\, tg\, k_1$.

Si l'on remarque que, pour tout w vérifiant $0 \leqslant \operatorname{Im} w_1 \leqslant \sigma$, on a $\{z' \mid (z'\,,\,ih\,,\,w) \in K\} \subset \{z' \mid |z'| \leqslant 1/\delta_1 h + 1/k_1 \operatorname{Im} w_1\}$ il résulte aisément de la seconde propriété de Ω que l'on a

$$\{z' \mid (z'\,,ih\,,\,w) \in \Omega\} \subset \left\{ z' \mid |z'| \leqslant \frac{1}{\delta} h + \frac{1}{k_1} \operatorname{Im} w_1 \right\}$$

On en conclut que, pour chaque w vérifiant $\operatorname{Im} w_1 > 0$, si N_w désigne le sous-espace affine $\{(z,\; w) \mid z \in \mathbf{C}^n\}$, on a :

$$\Omega \cap H \cap N_w \text{ est relativement compact dans TG + T}\Gamma$$

En effet, $(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma) \cap H \cap N_w \supset \left\{ z' \mid |z'| < \frac{1}{\delta}\; h + \frac{1}{k} \operatorname{Im} w_1 \right\}$.

Il en résulte que $\Omega \cap H \cap (\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n)$ est contenu dans TG + TΓ.

Il est maintenant facile de voir que $\Omega' = \Omega \cap (TG + T\Gamma)$ est $z_n - k_1 - \Sigma -$ plat puisque $\Omega' \subset \Omega$ tandis que $\Omega' \cap \Sigma = \Omega \cap \Sigma$. Le raisonnement est le même pour $\Omega'' = \Omega \cap (TG + C^n)$.

Pour démontrer qu'un ouvert Ω est $w - \delta - H -$ plat, il suffit de démontrer que, pour chaque w tel que N_w coupe Ω, l'ouvert (relativement à N_w) $\Omega \cap N_w$ est $\delta - (H \cap N_w) -$plat. Or pour chaque w avec $\operatorname{Im} w_1 > 0$, on a $\Omega' \cap N_w \subset \Omega \cap N_w$ et $\Omega' \cap N_w \cap H = \Omega \cap N_w \cap H$, d'où le résultat, les autres hyperplans N_w ne coupant pas Ω'. On raisonne de même pour Ω''.

4.2. Théorème d'existence et de prolongement.

THEOREME 4.2.1. — *L'opérateur* $P(z, w, D_z, D_w)$ *satisfaisant toujours les hypothèses du § 3, il existe des constantes* $k > 0$ *et* $\delta > 0$ *telles que l'on ait la propriété suivante. Si* G *est un cône ouvert convexe de* R^{n+p} *contenu dans le demi-espace* $t_1 > 0$ *et dont le polaire* G° *vérifie* $G^\circ \subset \{(\xi, 1, \tau') \in S^{n+p-1} \mid |\xi|^2 + |\tau'|^2 \leqslant k^2\}$, *et si* Γ *est un cône ouvert convexe de* R^n *avec* $\Gamma^\circ \subset \{(\xi', 1) \mid |\xi'| \leqslant \delta\}$, *il existe un système fondamental de voisinages* V_j *de* 0 *dans* C^{n+p}, *des hyperplans* Σ_j *d'équation* $w_1 = i\sigma_j$ *(avec* $\sigma_j > 0$ *et* $\sigma_j \to 0$*) tels que* V_j *soit* $z_n - k - \Sigma_j -$ *plat et que l'on ait :*

a) Pour toute fonction g holomorphe dans $(TG + T\Gamma) \cap V_j$, *il existe f holomorphe dans* $(TG + T\Gamma) \cap V_j$ *solution de* $P_{\Sigma_j} f = g$.

b) Pour tout voisinage V_j' *de* 0, *il existe un voisinage* V_j'' *de* 0 *tels que si f est holomorphe dans* $(TG + T\Gamma) \cap V_j$ *et si* $P_{\Sigma_j} f$ *se prolonge holomorphiquement dans* $(TG + C^n) \cap V_j'$, *alors f se prolonge holomorphiquement dans* $(TG + C^n) \cap V_j''$.

Les constantes k et δ sont celles intervenant dans le théorème 3.1.2.

Les hypothèses de la proposition 4.1.1. étant satisfaites, nous pouvons construire les ouverts $\Omega_{\sigma h}$ correspondants. Nous choisirons

$$V_j = \Omega_{\sigma_j h_j} \qquad \text{où} \qquad \sigma_j \longrightarrow 0 \qquad \text{et } h_j \longrightarrow 0$$

Soit alors g holomorphe dans $\Omega_{\sigma_j h_j} \cap (TG + T\Gamma)$. Cet ouvert étant $z_n - k - \Sigma_j -$ plat et $w - \delta - H_j -$ plat, il résulte du théorème 3.1.2. que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} P_{\Sigma_j} f = g \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^r f|_{H_j} = 0 \qquad r = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

possède une solution f holomorphe dans $\Omega_{\sigma_j h_j} \cap (TG + T\Gamma)$, ce qui prouve la première partie du théorème.

Pour démontrer la seconde partie, toujours avec $V_j = \Omega_{\sigma_j h_j}$, nous choisirons $V_j'' = \Omega_{\sigma_l h_l}$, où l est suffisamment grand pour que $\Omega_{\sigma_l h_l} \subset V_j' \cap \Omega_{\sigma_j h_j}$. On a alors $\Omega_{\sigma_l h_l} \cap \Sigma_l \subset \Omega_{\sigma_j h_j} \cap (TG + T\Gamma)$ et nous pouvons appliquer le théorème 2.5.1. qui nous assure que, si f est holomorphe dans $\Omega_{\sigma_j h_j} \cap (TG + T\Gamma)$, la fonction $P_{\Sigma_j} f - P_{\Sigma_l} f$ se prolonge holomorphiquement dans $\Omega_{\sigma_l h_l}$. Il en résulte que $P_{\Sigma_l} f$ est holomorphe dans $\Omega_{\sigma_l h_l} \cap (TG + \mathbf{C}^n)$. La fonction f est alors l'unique solution u du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} P_{\Sigma_l} u = P_{\Sigma_l} f \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^r u|_{H_l} = \left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^r f|_{H_l} \qquad r = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

Comme $P_{\Sigma_l} f$ est holomorphe dans $\Omega_{\sigma_l h_l} \cap (TG + \mathbf{C}^n)$ et comme $\left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^r f|_{H_l}$ est holomorphe dans

$$\Omega_{\sigma_l h_l} \cap H \cap (TG + T\Gamma) = \Omega_{\sigma_l h_l} \cap H \cap (TG + \mathbf{C}^n),$$

il en résulte que f est holomorphe dans $\Omega_{\sigma_l h_l} \cap (TG + \mathbf{C}^n)$ ce qui démontre le théorème.

5. EXISTENCE ET PROLONGEMENT POUR DES OPERATEURS PARTIELLEMENT NON CARACTERISTIQUES

5.1. Lemmes de décomposition.

Désignons par Λ l'ensemble $\bigcup\limits_{n>0} \{0,1\}^n$ et si $\alpha \in \{0,1\}^n$ posons $|\alpha| = n$.

LEMME 5.1.1. – *Soit* Γ *un cône ouvert convexe de* $\mathbf{R}^n$. *Il existe des cônes ouverts convexes* Γ_α, $\alpha \in \Lambda$, *tels que :*

$$\Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$$

$$\forall \alpha \in \Lambda\,,\ \Gamma_\alpha = \Gamma_{(\alpha,0)} \cap \Gamma_{(\alpha,1)}$$

$$\forall \alpha \in \Lambda\,,\ \Gamma_{(\alpha,0)} \cup \Gamma_{(\alpha,1)} \text{ est convexe.}$$

Le diamètre de Γ_α^0 *tend vers* 0 *quand* $|\alpha|$ *tend vers* $+\infty$

Démonstration. – Soit δ une droite de $\mathbf{R}^n$ passant par 0, δ^+ et δ^- deux demi-droites de δ issues de 0 et opposées. Si Γ contient un demi-espace le lemme est évident. Sinon choisissons δ telle que $\delta \cap \Gamma = \phi$ et désignons par Γ_0 (resp. Γ_1) l'intérieur de l'enveloppe convexe de $(\Gamma \cup \delta^+)$ (resp. $\Gamma \cup \delta^-$).

Alors on a $\Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ et $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma + \delta$ est l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\Gamma \cup \delta$. Le polaire de Γ_0 (resp. Γ_1) est l'intersection du polaire de Γ et de l'hémisphère polaire de δ^+ (resp. δ^-).

On décompose de cette manière Γ_α en $\Gamma_{\alpha,0}$ et $\Gamma_{\alpha,1}$. Il est clair que, en choisissant convenablement pour tout α une droite δ_α correspondante, on peut faire tendre le diamètre de Γ_α° vers 0.

LEMME 5.1.2. – *Soit* G *un cône ouvert convexe de* $\mathbf{R}^{n+p}$, Γ *un cône ouvert convexe de* $\mathbf{R}^n$, Γ_α *des cônes de* $\mathbf{R}^n$ *vérifiant les conclusions du lemme 5.1.1. et* V *un voisinage de Stein de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{n+p}$.

Pour tout $g \in \mathcal{O}(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma) \cap \mathrm{V})$ *on peut trouver* $(g_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *avec* $g_\alpha \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_\alpha) \cap \mathrm{V})$ *tels que pour tout m, on ait* $g = \sum\limits_{|\alpha|=m} g_\alpha$

Démonstration. – Il suffit de savoir décomposer chaque g_α *en* $g_{\alpha,0} + g_{\alpha,1}$. Nous nous limiterons donc à Γ

$$(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma) = [(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_0) \cap \mathrm{V}] \cap [(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_1) \cap \mathrm{V}]$$

$$[(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_0) \cap \mathrm{V}] \cup [(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_1) \cap \mathrm{V}] = [(\mathrm{TG} + (\mathrm{T}\Gamma_0 \cup \mathrm{T}\Gamma_1)) \cap \mathrm{V}]$$

et ce dernier ouvert est un ouvert de Stein. Le lemme résulte de ce que l'on sait résoudre le premier problème de Cousin dans les ouverts de Stein.

5.2. Forme réduite de Weierstrass.

Dans ce chapitre P désigne un opérateur pseudo-différentiel défini dans un voisinage complexe du point $(o, o, o, \tau_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{n+p-1}$ dont le symbole principal s'écrit :

$$P_m(x, t, \xi, \tau) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \xi, \tau)\, \xi^\alpha$$

où les a_α sont des symboles d'ordre 0.

DEFINITION 5.2.1. – [*cf. S.K.K., ch. 2, déf. 3.5.4.*]. *Sous les hypothèses précédentes on dit que la direction* $\xi_0 \in \mathbf{S}^{n-1}$ *est non caractéristique en* (o, o, o, τ_0) *si*

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(o, o, o, \tau_0)\, \xi_0^\alpha \neq 0$$

LEMME 5.2.2. – *L'hypothèse* ξ_0 *non caractéristique entraîne l'existence de* W_{ξ_0}, E_{ξ_0}, Q_{ξ_0}, δ_{ξ_0}, k_{ξ_0}, *tels que*

a) W_{ξ_0} *est un voisinage de* (o, o)

b) E_{ξ_0} *et* Q_{ξ_0} *sont des opérateurs pseudo-différentiels définis sur* $W_{\xi_0} \times \{(\xi, 1, \tau)| \;^2 + \tau'^2 < k_{\xi_0}^2\}$

c) E_{ξ_0} *est elliptique d'ordre* 0 *sur cet ouvert*

d) $P = E_{\xi_0} \cdot Q_{\xi_0}$

e) les conclusions du théorème 4.2.1. sont vérifiées pour l'opérateur Q_{ξ_0} *avec les constantes* δ_{ξ_0} *et* k_{ξ_0}.

Démonstration. – On peut supposer $\xi_0 = (0, \ldots, 0, 1)$. Le théorème de préparation (théorème 0.3.2.) entraîne l'existence de W_{ξ_0}, E_{ξ_0}, Q_{ξ_0} vérifiant a) b) c) d), et tels que en écrivant Q au lieu de Q_{ξ_0}, et en posant $\xi = (\xi', \xi_n)$

$$Q(x, t, D_x, D_t) = D_{x_n}^m + \sum_{1 \leqslant l \leqslant m} B_l(x, t, D_{x'}, D_t)\, D_{z_n}^{m-l}$$

où les B_l sont d'ordre $\leqslant l$.

Désignons par b_l le symbole principal de B_l et écrivons que les dérivées d'ordres $\leqslant m-1$ de P_m sont nulles pour $\xi = 0$; on obtient que les dérivées d'ordres $\leqslant l-1$ de b_l sont nulles pour $\xi' = 0$, d'où la décomposition analogue à celle du n° 1.2. :

$$b_l(x, t, \xi', \tau) = \sum_{|\alpha'|=l} b_{\alpha'}(x, t, \xi', \tau)\, \xi'^{\alpha'}$$

où les $b_{\alpha'}$ sont des symboles d'ordre 0.

On peut donc écrire

$$\mathrm{Q}(x, t, \mathrm{D}_x, \mathrm{D}_t) = \mathrm{D}_{x_n}^m + \sum_{1 \leqslant |\alpha'| \leqslant m} \mathrm{A}_{\alpha'}(x, t, \mathrm{D}_{x'}, \mathrm{D}_t)\, \mathrm{D}_{x_n}^{m-|\alpha'|}\, \mathrm{D}_{x'}^{\alpha'}$$

$$+ \sum_{1 \leqslant l \leqslant m} \mathrm{C}_l(x, t, \mathrm{D}_{x'}, \mathrm{D}_t)\, \mathrm{D}_{x_n}^{m-l}$$

où les A_α sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $\leqslant 0$ et les C_l d'ordre $\leqslant l-1$ dont les symboles complets ne dépendent pas de ξ_n.

L'opérateur Q vérifie donc les hypothèses du théorème 4.2.1., ce qui, pour une nouvelle constante k_{ξ_0}, démontre le lemme.

5.3. Existence et prolongement.

THEOREME 5.3.1. – *Soit* P *un opérateur pseudo-différentiel défini au voisinage de* $(0, 0, 0, \tau_0)$, *dont le symbole principal s'écrit*

$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, t, \xi, \tau)\, \xi^\alpha$, *les* a_α *étant homogènes d'ordre* 0.

Soit I *une partie compacte de* S^{n-1}, *et supposons toutes les directions* $\xi \in \mathrm{I}$ *non caractéristiques en* $(0, 0, 0, \tau_0)$.

Il existe $k > 0$ *tel que si* G *est un cône ouvert convexe de* R^{n+p}, *dont le polaire contient* τ_0 et est contenu dans $\{(\xi, 1, \tau') \mid \xi^2 + \tau'^2 < k^2\}$ *et si* Γ *est un cône ouvert convexe de* R_n *dont le polaire* Γ° *est contenu dans* I, *on a en désignant par* $\mathrm{V}, \mathrm{V}', \mathrm{V}''$ *des voisinages (dépendant des fonctions considérées) de* $(0, 0)$ *dans* C^{n+p} :

a) Pour tout $g \in \mathcal{O}(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma) \cap \mathrm{V}')$ *il existe* $f \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma) \cap \mathrm{V})$ *solution de* $\mathrm{P}b(f) = b(g)$.

b) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma) \cap \mathrm{V})$ *et supposons* $\mathrm{P}b(f) = b(g)$ *où* $g \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n) \cap \mathrm{V}')$. *Alors* $f \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n) \cap \mathrm{V}''$.

Les égalités ci-dessus ont lieu au sens des microfonctions sur l'ouvert $(x, t) \in \mathbf{R}^{n+p} \cap \mathrm{V}$, $(\xi, \tau) \in \{(\xi, 1, \tau') \mid \xi^2 + \tau'^2 < k^2\}$ (cf. remarque 0.4.2.).

Démonstration. – A tout $\xi \in \mathrm{I}$ associons W_ξ, E_ξ, Q_ξ, δ_ξ, k_ξ donnés par le lemme 5.2.2.

Les boules de centre $\xi \in \mathrm{S}^{n-1}$ de rayon $\frac{1}{4}\delta_\xi$ recouvrent I. On peut en extraire un recouvrement fini $\mathrm{B}\left(\xi_i, \frac{1}{4}\delta_{\xi_i}\right)$, $i = 1, \ldots, q$,

Posons :

$$\mathrm{W} = \bigcap_i \mathrm{W}_{\xi_i}, \quad \delta = \inf_i \delta_{\xi_i}, \quad k = \inf_i k_{\xi_i}$$

Démontrons a) : d'après le lemme 5.1.2. on peut décomposer g en $\sum_\alpha g_\alpha$ avec $g_\alpha \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_\alpha) \cap \mathrm{V}')$ et diamètre $\Gamma_\alpha^\circ \leqslant \frac{\delta}{4}$ (en supposant V′ ouvert de Stein). Il suffit donc de savoir résoudre $\mathrm{P}b(f_\alpha) = b(g_\alpha)$. Comme le diamètre de Γ_α° est inférieur à $\frac{\delta}{4}$, Γ_α° est contenu dans une boule $\mathrm{B}(\xi_i, \delta_{\xi_i})$; décomposons donc P en $\mathrm{P} = \mathrm{E}_{\xi_i} \cdot \mathrm{Q}_{\xi_i}$, et soit, d'après le théorème 2.5.2. $g'_\alpha \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_\alpha) \cap \mathrm{V}'_\alpha)$ telle que $\mathrm{E}_{\xi_i}^{-1} b(g_\alpha) = b(g'_\alpha)$. D'après le théorème 4.2.1. on peut trouver un voisinage V_α de 0, un hyperplan Σ et une fonction f_α holomorphe dans $(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_\alpha) \cap \mathrm{V}_\alpha$, solution de

$$\mathrm{Q}_{\xi_i, \Sigma} f_\alpha = g'_\alpha$$

Alors d'après le théorème 2.5.2.

$$\mathrm{Q}_{\xi_i} b(f_\alpha) = b(g'_\alpha) = \mathrm{E}_{\xi_i}^{-1} b(g_\alpha)$$

et
$$\mathrm{P}b(f_\alpha) = \mathrm{E}_{\xi_i} \mathrm{Q}_{\xi_i} b(f_\alpha) = b(g_\alpha)$$

Démontrons b)

Lemme 5.3.2. – *Sous les hypothèses précédentes soient* Γ_0 *et* Γ_1 *deux cônes ouverts convexes de* $\mathbf{R}_n$ *avec* $\Gamma = \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ *et* $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$

convexe. Alors si f appartient à $\mathcal{O}(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma) \cap \mathrm{V})$ *et vérifie* $\mathrm{Pb}(f) = 0$, *il existe des fonctions* $f_i (i = 0,1)$ *appartenant à* $\mathcal{O}(\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_i) \cap \mathrm{V}')$ *telles que l'on ait* $f = f_0 + f_1$ *et* $\mathrm{P}b(f_i) = 0$ $(i = 0,1)$.

Démonstration du lemme. – D'après le lemme 5.1.2. on peut décomposer f en $f = h_0 + h_1$ avec $h_i \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_i) \cap \mathrm{V})$.

Soient d'après le théorème 2.5.2., g_0 et g_1 holomorphes dans $\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_0$ et $\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_1$ au voisinage de 0, telles que $\mathrm{Pb}(h_i) = b(g_i)$ $(i = 0,1)$. Comme $\mathrm{Pb}(h_0) = -\mathrm{Pb}(h_1)$, la fonction $g_0 + g_1$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0, et la fonction g_0 se prolonge donc à $\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_0 + \mathrm{T}\Gamma_1$ au voisinage de 0.

D'après la partie a) du théorème 5.3.1. que l'on vient de démontrer, on sait résoudre $\mathrm{P}b(h) = b(g_0)$ avec $h \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_0 + \mathrm{T}\Gamma_1) \cap \mathrm{V}')$. Posons $f_0 = h_0 - h$, $f_1 = h_1 + h$. Les fonctions f_i répondent au problème.

Fin de la démonstration. – En résolvant $\mathrm{P}b(h) = b(g)$ où h est holomorphe dans $(\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n)$ au voisinage de 0, ce qui est possible d'après le a), on peut supposer $\mathrm{P}b(f) = 0$.

Appliquons le lemme 5.1.1. et le lemme 5.3.2. : il existe

$$f_\alpha \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{T}\Gamma_\alpha) \cap \mathrm{V}_\alpha)$$

telles que
$$f = \sum_{|\alpha|=m} f_\alpha \,, \ \mathrm{P}b(f_\alpha) = 0$$

Pour m assez grand le diamètre de Γ°_α est inférieur à $\frac{\delta}{4}$. Donc pour tout α tel que $|\alpha| = m$, il existe un $i \leqslant q$ tel que $\Gamma^\circ_\alpha \subset \mathrm{B}(\xi_i\,,\ \delta_{\xi_i})$.

Ecrivons P sous la forme $\mathrm{E}_{\xi_i} . \mathrm{Q}_{\xi_i}$. On a $\mathrm{E}_{\xi_i} . \mathrm{Q}_{\xi_i} b(f_\alpha) = 0$ et par suite $\mathrm{Q}_{\xi_i} b(f_\alpha) = 0$.

Soit V'_α un voisinage de 0 contenu dans V_α, Σ un hyperplan d'équation $w_1 = i\alpha$, tels que V'_α soit $k_{\xi_i} - \Sigma -$ plat.

D'après le théorème 2.5.2., $\mathrm{Q}_{\xi_i, \Sigma} f_\alpha$ est holomorphe au voisinage de 0, et d'après le théorème 4.2.1. cela entraîne $f_\alpha \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n) \cap \mathrm{V}''_\alpha)$.

Par suite $f = \sum_{|\alpha|=m} f_\alpha$ est holomorphe dans $(\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n) \cap \mathrm{V}''$.

6. DEMONSTRATIONS DES THEOREMES POUR UN OPERATEUR PARTIELLEMENT ELLIPTIQUE

6.1. Microfonctions partiellement holomorphes.

Identifions l'espace $\mathbf{C}^n$ à l'espace $\mathbf{R}^{2n}$ muni du système de Cauchy-Rieman $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$, $(i = 1, \ldots, n)$. Soit u une microfonction définie sur un ouvert de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{2n+p-1}$, solution de $\partial/\partial\bar{z}_i u = 0 (i = 1, \ldots n)$: nous dirons que u est partiellement holomorphe. Son support est alors contenu dans l'ensemble $\{(z, t, \zeta, \tau) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{2n+p-1} ; \zeta = 0\}$ ensemble canoniquement isomorphe à $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1}$.

Désignons par $\mathcal{C}_h$ le faisceau des microfonctions partiellement holomorphes, et identifions $\mathcal{C}_h$ à sa restriction à $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1}$.

Le faisceau $\mathcal{C}_h$ a la propriété suivante :

THEOREME 6.1.1. – [S.K.K., ch. 3, th. 2.2.8.]. *Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbf{C}^n$ avec Ω connexe, Ω' non vide, $\Omega' \subset \Omega$, et soit ω un ouvert de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1}$. Soit u une microfonction partiellement holomorphe sur $\Omega \times \omega$, nulle sur $\Omega' \times \omega$. Alors u est nulle sur $\Omega \times \omega$.*

D'autre part on sait, d'après le n° 02, définir la restriction d'une microfonction partiellement holomorphe u sur $\Omega \times \omega \subset \mathbf{C}^n \times (\mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1})$ à $(\Omega \cap \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^p$: c'est une microfonction sur l'ouvert

$$\mathcal{U} = \{(x, t, \xi) \in \mathbf{R}^{n+p} \times \mathbf{S}^{n+p-1} \mid (x, t, \tau) \subset \Omega \times \omega\}$$

et son support est contenu dans $\{\xi = 0\}$.

Identifiant $\mathbf{R}^n \times \{0\} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1}$ à son image dans $\mathbf{R}^{n+p} \times \mathbf{S}^{n+p-1}$, nous appellerons ρ le morphisme de "restriction au réel" :

$$\rho : \mathcal{C}_h (\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1})|_{\mathbf{R}^{n+p} \times \mathbf{S}^{p-1}} \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{R}^{n+p} \times \mathbf{S}^{p-1}} (\mathbf{R}^{n+p} \times \mathbf{S}^{n+p-1}, \mathcal{C})$$

THEOREME 6.1.2. – *Le morphisme ρ est injectif.*

M. Kashiwara nous a indiqué qu'il possédait une démonstration de ce théorème [9] Pour être complet nous en donnons une démonstration en appendice.

COROLLAIRE 6.1.3. – *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^n$, avec $\Omega \cap \mathbf{R}^n \neq \phi$. Soit ω un ouvert de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1}$.*

Soit u une microfonction partiellement holomorphe sur $\Omega \times \omega$. Si la restriction de u à $(\Omega \cap \mathbf{R}^n) \times \omega$ est nulle, u est nulle sur $\Omega \times \omega$.

Démonstration. – D'après le théorème 6.1.2. u sera nulle au voisinage de $(\Omega \cap \mathbf{R}^n) \times \omega$: il suffit alors d'appliquer le théorème 6.1.1.

6.2. Lemme de décomposition.

Nous poserons dans ce numéro :

$$A_n = \{+ , -\}^n$$

$$B_n = \{\beta \in \{+ , 0 , -\}^n \mid \beta_i \neq 0 \text{ sauf pour un } i\}$$

A tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ correspond une application $\hat{\imath}$ de A_n dans B_n :

$$\hat{\imath}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, 0, \ldots, \alpha_n).$$

A $\alpha \in A_n$ on associe le "quadrant" de $\mathbf{R}^n$ $Q_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \alpha_i x_i > 0\}$ et à $\beta \in B_n$ on associe $D_\beta = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \beta_i x_i > 0$ pour $\beta_i \neq 0$.

On identifie $\mathbf{R}_n$ à son image dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$.

LEMME 6.2.1. – *Soit* G *un cône ouvert convexe de* $\mathbf{R}^{n+p}$, V *un voisinage ouvert de Stein de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{n+p}$.

a) Pour tout $f \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} \cap \mathrm{V})$ il existe $(f_\alpha)_{\alpha \in A_n}$, avec

$$f_\alpha \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{TQ}_\alpha) \cap \mathrm{V}) \quad \text{et} \quad f = \sum_{\alpha \in A_n} f_\alpha$$

b) Soient $(f_\alpha)_{\alpha \in A_n}$, avec f_α holomorphe dans $(\mathrm{TG} + \mathrm{TQ}_\alpha) \cap \mathrm{V}$, et supposons $\sum_{\alpha \in A_n} f_\alpha = 0$ dans $\mathrm{TG} \cap \mathrm{V}$.

Alors il existe $(f_\beta)_{\beta \in B_n}$, avec $f_\beta \in \mathcal{O}((\mathrm{TG} + \mathrm{TD}_\beta) \cap \mathrm{V})$ telles que $\forall \alpha \in A_n , f_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{\hat{\imath}(\alpha)}$.

La démonstration se fera par récurrence sur n, la démonstration pour $n = 1$ étant intégrée dans le passage de $n - 1$ à n (ou si l'on préfère, le théorème est trivial pour $n = 0$).

D'autre part l'ouvert V étant fixé et ne jouant aucun rôle dans la démonstration, nous ne l'écrirons pas.

Supposons donc le théorème démontré jusqu'à la dimension $n - 1$ $(n > 0)$.

a) Soit f holomorphe dans TG

Soit e_1 le vecteur $(1,0,\dots,0)$ de $\mathbf{R}^n$,

$$\mathbf{R}\,,\ \delta^+ = \mathbf{R}^+ e_1\,,\ \delta^- = \mathbf{R}^- e_1\,,\ \delta = \mathbf{R}\, e_1$$

On peut écrire (lemme 5.1.2.) :

$$f = f_+ + f_- \qquad \text{avec} \qquad f_\pm \in \mathcal{O}\,(\mathrm{TG} + \delta^\pm)$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{G}^+ = \mathrm{G} + \delta^+$ et $\mathrm{G}^- = \mathrm{G} + \delta^-$ dans $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^{p+1}$

$$f_+ = \sum_{\gamma \in \mathrm{A}_{n-1}} f_{+,\gamma}$$

où $f_{+,\gamma}$ est holomorphe dans le tube $\mathrm{T}(\mathrm{G} + \delta^+ + \mathrm{Q}_\gamma)$, c'est-à-dire le tube $\mathrm{T}(\mathrm{G} + \mathrm{Q}_\alpha)$, avec $\alpha = (+\,,\gamma)$ et de même pour f_-. On a donc

$$f = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}_n} f_\alpha\,,\ f_\alpha \in \mathcal{O}\,(\mathrm{TG} + \mathrm{TQ}_\alpha)$$

b) Soient $f_\alpha \in \mathcal{O}(\mathrm{TG} + \mathrm{TQ}_\alpha)\,,\ \alpha \in \mathrm{A}_n$, avec $\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha = 0$ dans TG. Les $\alpha \in \mathrm{A}_n$ sont de la forme $(+\,,\gamma)$ ou $(-\,,\gamma)$ avec $\gamma \in \mathrm{A}_{n-1}$. Posons :

$$h_+ = \sum_{\gamma \in \mathrm{A}_{n-1}} f_{(+,\gamma)}\,,\ h_- = \sum_{\gamma \in \mathrm{A}_{n-1}} f_{(-,\gamma)}$$

La fonction h_+ est holomorphe dans $\mathrm{T}(\mathrm{G} + \delta^+)$ (avec les notations du a)) et h_- dans $\mathrm{T}(\mathrm{G} + \delta^-)$. Comme $h_+ + h_- = 0$, ces fonctions définissent une fonction h holomorphe dans $\mathrm{T}(\mathrm{G} + \delta)$, avec $h_+ = h\,,\ h_- = -\,h$. D'après l'hypothèse de récurrence a) on peut écrire :

$$h = \sum_{\gamma \in A_{n-1}} h_\gamma \, , \, h_\gamma \in \mathcal{O}(T(G + \delta + Q_\alpha))$$

donc
$$\sum_{\gamma \in A_{n-1}} f_{(+,\gamma)} - h_\gamma = 0$$

$$\sum_{\gamma \in A_{n-1}} f_{(-,\gamma)} + h_\gamma = 0$$

D'après l'hypothèse de récurrence b) il existe des fonctions g_λ^+ et $g_\lambda^-(\lambda \in B_{n-1})$, holomorphes dans $T(G + \delta^+ + D_\lambda)$ et $T(G + \delta^- + D_\lambda)$ telles que $\forall \gamma \in A_{n-1}$:

$$f_{(+,\gamma)} - h_\gamma = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \, g^+_{\hat{\imath}(\gamma)}$$

$$f_{(-,\gamma)} + h_\gamma = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \, g^-_{\hat{\imath}(\gamma)}$$

Pour $\beta \in B_n$ posons :

si $\beta = (0 , \gamma) , f_\beta = h_\gamma$

si $\beta = (+ , \hat{\imath}(\gamma)) , f_\beta = g^+_{\hat{\imath}(\gamma)}$

si $\beta = (- , \hat{\imath}(\gamma)) , f_\beta = g^-_{\hat{\imath}(\gamma)}$

On vérifie que

$$\forall \alpha \in A_n \ \ f_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, f_{\hat{\imath}(\alpha)}$$

avec $f_{\hat{\imath}(\alpha)}$ holomorphe dans $TG + TD_{\hat{\imath}(\alpha)}$.

6.3. Existence, régularité, propagation.

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes du n° 1.2., Nous désignerons donc par P un opérateur pseudo-différentiel défini sur un ouvert U de R^{n+p-1}, dont le symbole principal s'écrit :

$$P_m(x , t , \xi , \tau) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x , t , \xi , \tau)\xi^\alpha$$

où les a_α sont des symboles homogènes d'ordre 0. Comme au n° 1.2. nous supposerons que la variété caractéristique V de P est définie par $\xi = 0$ et que pour tout ξ appartenant à S^{n-1} la direction est non caractéristique en $(x_0, t_0, 0, \tau_0)$.

Rappelons que l'opérateur P est un isomorphisme du faisceau $\mathcal{C}$ au-dessus des points de U n'appartenant pas à V. En particulier si $Pu = 0$, le support de u est contenu dans V.

Démonstration du théorème 1.2.1. – Recouvrons le compact K par un nombre fini de boules ouvertes B_i, $i \in I_1 \cup I_2$ de centre (ξ_i, τ_i) de rayon k_i, telles que :

– Si $i \in I_1$, on a $\xi_i \neq 0$ et k_i est inférieur à la distance de (ξ_i, τ_i) à V.

– Si $i \in I_2$, on a $\xi_i = 0$ et k_i est inférieur à la constante k donnée par le théorème 5.3.1. au point $(x_0, t_0, 0, \tau_i)$.

– La réunion de ces boules est contenue dans K'.

Le faisceau $\mathcal{C}$ étant flasque on peut écrire $v = \sum_i v_i$ où le support de v_i est contenu dans $\Omega \times B_i$. Pour $i \in I_1$, posons $u_i = P^{-1} v_i$. Pour $i \in I_2$ soit g_i une fonction holomorphe dans $TG_i \cap W_i$, où W_i est un voisinage de $(x_0\ t_0)$ et où G_i est un cône ouvert convexe de $\mathbf{R}^{n+p}$, avec $G_i^\circ \subset B_i$, $\tau_i \in G_i^\circ$, telle que l'on ait $b(g_i) = v_i$.

D'après le lemme 6.2.1. on peut décomposer g_i en

$$g_i = \sum_{\alpha \in A_n} g_{i,\alpha}, \ g_{i,\alpha} \in \mathcal{O}(TG_i + TQ_\alpha) \cap W_i$$

et d'après le théorème 5.3.1. on sait résoudre

$$Pb(f_{i,\alpha}) = b(g_{i,\alpha})\ f_{i,\alpha} \in \mathcal{O}(TG_i + TQ_\alpha) \cap W'_i$$

il suffit alors de poser

$$u = \sum_{i \in I_1} u_i + \sum_{i \in I_2} \sum_{\alpha \in A_n} b(f_{i,\alpha})$$

Nous démontrerons le théorème 1.2.2. en deux étapes.

LEMME 6.3.1. – *Soit $(x_0, t_0, 0, \tau_0) \in U$, u une microfonction définie au voisinage de ce point, solution de $Pu = 0$. Il existe une* *microfonction* $\widetilde{u}$, *définie au voisinage de l'image de ce point dans* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{2n+p-1}$ *partiellement holomorphe, et dont la "restriction au réel" est u.*

Démonstration du lemme 6.3.1. – Nous prendrons $x_0 = t_0 = 0$.

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^{n+p}$ avec $0 \in \partial\Omega$, on désignera par $\widetilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de 0 dans Ω :

$$\widetilde{\mathcal{O}}(\Omega) = \varinjlim_{W \supset 0} \mathcal{O}(\Omega \cap W)$$

A) On va se ramener au cas où $u = b(f)$, avec $f \in \widetilde{\mathcal{O}}(TG)$ le polaire G° de G étant un voisinage de $(0, \tau_0)$ contenu dans $\{(\xi, 1, \tau') | \xi^2 + \tau'^2 < k^2\}$.

Soit u' une microfonction à support dans $\mathbf{R}^{n+p} \times K$, où K est un voisinage compact de $(0, \tau_0)$ dont la restriction à un voisinage de $(0, 0, 0, \tau_0)$ soit u. Le support de Pu' est contenu dans $\mathbf{R}^{n+p} \times K'$ où K' est un compact ne rencontrant pas $(0, \tau_0)$.

D'après le théorème 1.2.1. on sait résoudre $Pv = Pu'$, le support de v ne rencontrant pas $(0, 0, 0, \tau_0)$. On peut donc, en remplaçant u par $u - v$, supposer que u est une microfonction sur $W \times \mathbf{S}^{n+p-1}$, avec W voisinage de $(0, 0)$, à support dans $W \times K$, où K est un compact de $\mathbf{S}^{p-1}$ contenu dans $\{(\xi, 1, \tau') | \xi^2 + \tau'^2 < k^2\}$, où k est donné par le théorème 5.3.1. dans lequel on prend $I = \mathbf{S}^{n-1}$.

Soit G un cône ouvert convexe de $\mathbf{R}^{n+p}$ dans le polaire est un voisinage de τ_0 contenu dans $(\xi, 1, \tau') | \xi^2 + \tau'^2 < k^2$, f une fonction holomorphe de $\widetilde{\mathcal{O}}(TG)$, avec $b(f) = u$. On a donc $Pb(f) = 0$ (cf. la remarque 0.4.2.).

B) Démontrons que en fait, $f \in \widetilde{\mathcal{O}}(TG + C_n)$.

Appliquons le lemme 6.2.1. à la fonction f et soit $f_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}(TG + TQ_\alpha)$ avec $f = \sum_\alpha f_\alpha$. Soient, d'après le théorème 2.5.2., $g_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}(TG + TQ_\alpha)$ telles que $Pb(f_\alpha) = b(g_\alpha)$. La fonction $g = \sum_{\alpha \in A_n} g_\alpha$ est holomorphe dans TG au voisinage de 0, et $b(g) = \sum_\alpha b(g_\alpha) = \sum_\alpha Pb(f_\alpha) = 0$.

La fonction g est donc holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^{n+p}$.

En remplaçant $g_{(+,\dots,+)}$ par $g_{(+,\dots,+)} - g$, on peut supposer $\sum_{\alpha \in A_n} g_\alpha = 0$. D'après le lemme 6.2.1. b) : il existe $(g_\beta)_{\beta \in B_{n-1}}$, avec $g_\beta \in \mathcal{O}(\mathrm{TG} + \mathrm{TD}_\beta)$ et pour $\alpha \in A_n$, $g_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, g_{\hat{\imath}(\alpha)}$.

D'après le théorème 5.3.1. on sait résoudre

$$Pb(f_\beta) = b(g_\beta)\,, f_\beta \in \widetilde{\mathcal{O}}(\mathrm{TG} + \mathrm{TD}_\beta)$$

Posons
$$\varphi_\alpha = f_\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, f_{\hat{\imath}}(\alpha)$$

$$Pb(\varphi) = Pb(f_\alpha) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, b(g_{i(\alpha)}) = 0$$

D'après le théorème 5.3.1. cela entraîne $\varphi_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}(\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n)$ et donc

$$f = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha \varphi_\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}(\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n).$$

C) L'ouvert $(\mathrm{TG} + \mathbf{C}^n)$ contient un ouvert de la forme $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{R}^p + i\Gamma)$, où Γ est un cône ouvert convexe de $\mathbf{R}^p$ et Γ° est un voisinage de $\tau_0 \in \mathbf{S}^{p-1}$. On peut alors prendre la "valeur au bord partielle en t", $b'(f)$ de f [cf. 12] : c'est une hyperfonction sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p$ (au voisinage de (0,0)) partiellement holomorphe, et sa restriction à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ sera $b(f)$, la valeur au bord (hyperfonction) de f. Le germe de f en $(0\,,0\,,0\,,\tau_0)$ est donc la restriction au réel d'un germe de microfonction partiellement holomorphe à savoir le germe de $b'(f)$ en l'image de $(0\,,0\,,0\,,\tau_0)$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{2n+p-1}$.

Remarque. – On démontrerait de la même manière que si Pu est la restriction d'une microfonction partiellement holomorphe il en est de même de u.

Fin de la démonstration du théorème 1.2.2. – A tout point $(x_0\,, t_0\,, 0\,, \tau_0)$ de V associons grâce au lemme 6.3.1. un ouvert $\widetilde{\Omega}_0 \times \omega_0$ de $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1})$ et une microfonction partiellement holomorphe u_0 sur cet ouvert, avec $\widetilde{u}_0|_{(\widetilde{\Omega}_0 \cap \mathbf{R}^n) \times \omega_0} = u$.

Si $\widetilde{u}_i$ est défini sur $\Omega_i \times \omega_i$ et $\widetilde{u}_j$ sur $\widetilde{\Omega}_j \times \widetilde{\omega}_j$, $\widetilde{u}_i$ et $\widetilde{u}_j$ coïncident sur $(\widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j \cap \mathbf{R}^n) \times (\omega_i \cap \omega_j)$, donc d'après le corollaire 6.1.3. sur $(\widetilde{\Omega}_i \cap \widetilde{\Omega}_j) \times (\omega_i \cap \omega_j) = (\widetilde{\Omega}_i \times \omega_i) \cap (\widetilde{\Omega}_j \times \omega_j)$.

Les $\widetilde{u}_i$ se recollent donc et définissent une microfonction $\widetilde{u}$ sur $\bigcup_i \widetilde{\Omega}_i \times \omega_i$ dont la restriction au réel est u.

Démonstration du théorème 1.2.3. – En remplaçant Ω et ω par deux ouverts $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $\omega_0 \subset\subset \omega$, on peut supposer d'après le théorème 1.2.2. qu'il existe $\widetilde{\Omega}$ voisinage de Ω dans $\mathbf{C}^n$ et $\widetilde{u}$ microfonction partiellement holomorphe sur $\widetilde{\Omega} \times \omega$, avec $\widetilde{u} \mid \Omega \times \omega = u$.

Alors $\widetilde{u} \mid \Omega' \times \omega = 0$, et le corollaire 6.1.3. joint au théorème 6.1.1. entraîne $\widetilde{u} = 0$ sur $\widetilde{\Omega} \times \omega$, et donc $u = 0$ sur $\Omega \times \omega$.

APPENDICE

Démonstration du théorème 6.1.2.

A) Soit u une microfonction partiellement holomorphe sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p$, définie au voisinage du point $(0, \tau_0) \in (\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^p) \times \mathbf{S}^{p-1}$, où on a identifié $\mathbf{S}^{p-1}$ à son image dans $\{(\zeta, \tau) \in \mathbf{S}^{2n+p-1} \mid \zeta = 0\}$.

En considérant les différents plongements :

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{C} \times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^p \to \ldots \to \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^n$$

on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour $n = 1$. Nous supposerons donc $n = 1$.

B) Désignons par $(\mathcal{C}_h)_{(0,\tau_0)}$ l'espace des germes en $(0,\tau_0) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{S}^{p-1}$ des microfonctions partiellement holomorphes.

Il résulte de [S.K.K., ch. 1, prop. 1.2.3. et ch. 3, prop. 2.2.5.] que

$$(\mathcal{C}_h)_{(0,\tau_0)} \cong \varinjlim_{\mathrm{V}.\Gamma} \mathrm{H}^p_{(\mathbf{C}\times\mathbf{R}^p + i\Gamma)\cap \mathrm{V}}(\mathrm{V}, \mathcal{O})$$

où V parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{p+1}$, et Γ parcourt l'ensemble des cônes convexes fermés de $\mathbf{R}^p$ dont le polaire dans $\mathbf{S}^{p-1}$ est un voisinage de τ_0.

Rappelons d'autre part [S.K.K., ch. 1, démonstration du th. 1.3.2.] que en désignant encore par 0 l'origine de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$, et par τ_0 un point de $\mathbf{S}^p$:

$$\mathcal{C}_{0,\tau_0)} = \varinjlim_{\mathrm{V},\mathrm{G}} \mathrm{H}^{p+1}_{(\mathbf{R}^{p+1}+i\mathrm{G})\cap \mathrm{V}}(\mathrm{V}, \mathcal{O})$$

où V parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{p+1}$, et G l'ensemble des cônes fermés convexes de $\mathbf{R}^{p+1}$ dont le polaire est un voisinage de τ_0 dans $\mathbf{S}^p$.

C) Désignons par δ la droite $\mathbf{R} \times \{0\}$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$, δ^+ et δ^- les demi-droites fermées $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \{0\}$ et $\bar{\mathbf{R}}_- \times \{0\}$ de δ. Si G est un cône convexe fermé de $\mathbf{R}^{p+1}$ dont le polaire G° est un voisinage de τ_0 dans $\mathbf{S}^p$ où $\tau_0 \in \{0 \times \mathbf{S}^{p-1}\}$, $G + \delta$ est de la forme $\mathbf{R} \times \Gamma$, avec Γ° voisinage de τ_0 dans $\mathbf{S}^{p-1}$ et

$$\begin{aligned} G + \delta &= (G + \delta^+) \cup (G + \delta^-) \\ G &= (G + \delta^+) \cap (G + \delta^-) \\ \Gamma &= (G + \delta) \cap (\{0\} \times \mathbf{R}^p) \end{aligned}$$

Considérons la suite exacte de cohomologie à support :

$$\ldots \longrightarrow H^p_{\mathbf{R}^{p+1}+i(G+\delta^-)}(V, \mathcal{O}) \times H^p_{\mathbf{R}^{p+1}+i(G+\delta^+)}(V, \mathcal{O})$$
$$\longrightarrow H^p_{\mathbf{R}^{p+1}+i(G+\delta)}(V, \mathcal{O}) \xrightarrow[\rho_{G,V}]{} H^{p+1}_{\mathbf{R}^{p+1}+iG}(V, \mathcal{O}) \longrightarrow \ldots$$

et désignons par ρ_G l'application obtenue par passage à la limite inductive en V.

Si $G + \delta^+$ ne contient aucune droite on a [13, ou S.K.K., ch. 1, démonstration du th. 1.3.2.] :

$$\varinjlim_{V \supset 0} H^p_{\mathbf{R}^{p+1}+i(G+\delta^+)}(V, \mathcal{O}) = 0$$

et de même avec $G + \delta^-$.

Il en résulte que si G° est un voisinage de τ_0 dans $\mathbf{S}^p$ l'application ρ_G est injective. Comme

$$H^p_{\mathbf{R}^{p+1}+i(G+\delta)}(V, \mathcal{O}) = H^p_{\mathbf{C}\times(\mathbf{R}^p+i\Gamma)}(V, \mathcal{O})$$

l'application ρ' :

$$\varinjlim_{V \supset \Gamma} H^p_{\mathbf{C}\times(\mathbf{R}^p+i\Gamma)}(V, \mathcal{O}) \xrightarrow[\rho']{} \varinjlim_{V, G} H^{p+1}_{\mathbf{R}^{p+1}+iG}(V, \mathcal{O})$$

est injective.

D) Il faut maintenant vérifier que les applications ρ et ρ' coïncident.

Pour cela nous prendrons pour $\mathbf{R} \times \Gamma$ une intersection de p demi-espaces fermés H_j de la forme $\mathbf{R} \times \mathrm{H}'_j$, et pour G l'intersection de $\mathbf{R} \times \Gamma$ et de deux demi-espaces fermés K_0 et K_1, de telle sorte que

$$\mathrm{G} + \delta^+ = (\mathbf{R} \times \Gamma) \cap \mathrm{K}_0 \ , \ \mathrm{G} + \delta^- = (\mathbf{R} \times \Gamma) \cap \mathrm{K}_1$$

Les cônes Γ et G ainsi construits forment une base des cônes dont le polaire est un voisinage de τ_0 (dans $\mathbf{S}^{p-1}$ pour Γ, dans $\mathbf{S}^p$ pour G).

Pour simplifier l'écriture nous prendrons $\mathrm{V} = \mathbf{C}^{p+1}$.

Désignons par $\widetilde{\mathrm{H}}_j$ les demi-espaces ouverts de $\mathbf{C}^{p+1}$ de complémentaires $\mathbf{R}^{p+1} + i\mathrm{H}_j$, et par $\widetilde{\mathrm{K}}_0$ et $\widetilde{\mathrm{K}}_1$ les demi-espaces ouverts de complémentaires respectifs $\mathbf{R}^{p+1} + i(\mathrm{G} + \delta^+)$ et $\mathbf{R}^{p+1} + i(\mathrm{G} + \delta^-)$

Les $\mathrm{H}_j (j = 1, \ldots, p)$ forment un recouvrement acyclique du complémentaire de $\mathbf{R}^{p+1} + i(\mathbf{R} \times \Gamma)$ pour le faisceau $\mathcal{O}$. On en déduit une application surjective :

$$\mathcal{O}\Big(\bigcap_{j=1}^{p} \widetilde{\mathrm{H}}_j\Big) \longrightarrow \mathrm{H}^p_{\mathbf{C} \times (\mathbf{R}^p + i\Gamma)} (\mathbf{C}^{p+1}, \mathcal{O})$$

On a de même des applications

$$\mathcal{O}\Big(\Big(\bigcap_{j=1}^{p} \widetilde{\mathrm{H}}_j\Big) \cap \widetilde{\mathrm{K}}_l\Big) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+1}_{\mathbf{R}^{p+1}+i\mathrm{G}} (\mathbf{C}^{p+1}, \mathcal{O}) \, , \, l = (0,1)$$

Désignons par G' l'intérieur du cône $-\mathrm{G}$ et par Γ' l'intérieur de $-\Gamma$.

$$\bigcap_{j=1}^{p} \widetilde{\mathrm{H}}_j = \mathrm{T}(\mathbf{R} \times \Gamma')$$

$$\Big(\bigcap_{j=1}^{p} \widetilde{\mathrm{H}}_j\Big) \cap \mathrm{K}_0 = \mathrm{T}(\mathrm{G}' + \delta^-)$$

$$\Big(\bigcap_{j=1}^{p} \widetilde{\mathrm{H}}_j\Big) \cap \widetilde{\mathrm{K}}_1 = \mathrm{T}(\mathrm{G}' + \delta^+)$$

Comme l'application

$$\mathcal{O}(\mathrm{T}(\mathrm{G}' + \delta^-)) \times \mathcal{O}(\mathrm{T}(\mathrm{G}' + \delta^+)) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathrm{TG}')$$

$$(f, g) \longrightarrow f + g$$

est surjective, on en déduit une application

$$\mathcal{O}(\mathrm{TG}') \longrightarrow \mathrm{H}^{p+1}_{\mathbf{R}^{p+1}+i\mathrm{G}}(\mathbf{C}^{p+1}, \mathcal{O})$$

Désignons par $\mathcal{B}_h$ le faisceau sur $\mathbf{C} \times \mathbf{R}^p$ des hyperfonctions partiellement holomorphes, par ρ l'application de restriction au réel de telles hyperfonctions, et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathrm{T}(\mathrm{R} \times \Gamma')) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "b'"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(1)"] & \mathcal{O}(\mathrm{TG}') \arrow[dr, "b"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "(2)"] & \\
\mathrm{H}^p_{\mathrm{C}\times\mathrm{R}^p}(\mathrm{C}^{p+1}, \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \mathcal{B}_h(\mathrm{C} \times \mathrm{R}^p) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & \mathcal{B}(\mathrm{R}^{p+1}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^p_{\mathrm{C}\times(\mathrm{R}^p+i\Gamma)}(\mathrm{C}^{p+1}, \mathcal{O}) \arrow[r] & \mathcal{C}_{h(0,\tau_0)} \arrow[r] & \mathcal{C}_{(0,\tau_0)}
\end{tikzcd}$$

Rappelons que b' désigne la valeur au bord partielle en t.

Les diagrammes (1) et (2) sont commutatifs (cf. par ex. [12]). Le diagramme (4) est commutatif d'après [S.K.K., ch. 1, th. 2.2.6.] et il résulte de la démonstration du théorème 2.2.5. de [S.K.K., ch. 3] que le diagramme (3) est commutatif.

Soit alors $u \in (\delta_h)_{(0,\tau)}$. On lui associe $\hat{u} \in \mathrm{H}^p_{\mathrm{C}\times(\mathrm{R}^p+i\Gamma)}(\mathrm{V}, \mathcal{O})$ pour voisinage V de 0 dans $\mathbf{C}^{p+1}$ et un cône Γ convenable. Soit

$$f \in \mathcal{O}(\mathrm{T}(\mathbf{R} \times \Gamma'))$$

(en prenant $\mathrm{V} = \mathbf{C}^{p+1}$ pour simplifier), dont l'image est $\hat{u}$.

Pour envoyer u dans $\mathcal{C}_{(0,\tau_0)}$ il suffit donc d'envoyer f dans $\mathcal{O}(\mathrm{TG}')$ et de "redescendre" en $\mathcal{C}_{(0,\tau_0)}$.

Considérons le nouveau diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(TG') & \longleftarrow & \mathcal{O}(T(G'+\delta^-)) \times \mathcal{O}(T(G'+\delta^+)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{B}(R^{p+1}) & \longleftarrow & H^{p+1}_{R^{p+1}}(C^{p+1}, \mathcal{O}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{C}_{(0,\tau_0)} & \longleftarrow & H^{p+1}_{R^{p+1}+iG}(C^{p+1}, \mathcal{O})
\end{array}$$

ce diagramme est commutatif, et au lieu d'envoyer f dans $\mathcal{O}(TG')$ on peut envoyer f dans $\mathcal{O}(TG' - \delta^-) \times \mathcal{O}(T(G' + \delta^-))$, par exemple par $f \to (f, 0)$, et redescendre en $H^{p+1}_{R^{p+1}+iG}(C^{p+1}, \mathcal{O})$: mais il s'agit alors de l'application

$$H^p_{C\times(R^p+i\Gamma)}(C^{p+1}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^{p+1}_{R^{p+1}+iG}(C^{p+1}, \mathcal{O})$$

ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K.G. Anderson, Analytic wave front sets for solution of linear partial differential equations of principal type, *Trans. Amer. Mat. Soc.*, 176 (1973), 5-22.

[2] J.M. Bony et P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, *Inventiones Math.*, 17 (1972), 95-105.

[3] J.M. Bony et P. Schapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, *Lecture-Notes in Math.*, Springer, 287, (1973), 82-98.

[4] J.M. Bony et P. Schapira, Propagation des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles, *C.R. Acad. Sc. Paris*, série A, 279 (1974), 231-233.

[5] L. Boutet De Monvel et P. Kree, Pseudo-differential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier*, 17 (1967), 295-323.

[6] J.J. Duistermaat et L. Hörmander, Fourier Integral Operators II, *Acta Math.*, 128 (1972), 183-289.

[7] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer.

[8] L. HÖRMANDER, Uniqueness theorem and wave front sets for solutions of linear differential operators equations with analytic coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, 24 (1971), 617-704.

[9] M. KASHIWARA, Communication personnelle, Nice, Juin 1973.

[10] M. KASHIWARA et T. KAWAÏ, Microhyperbolic pseudo-differential operators I (à paraître).

[11] T. KAWAÏ, Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients I, *Publ. R.I.M.S.*, Kyoto Univ., 7 (1971), 363-397.

[12] H. KOMATSU, An introduction to the theory of hyperfunctions, *Lecture-Notes in Math.*, Springer, 287 (1973), 3-40.

[13] A. MARTINEAU, Le "edge of the wedge theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato, *Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics*, Univ. of Tokyo Press, (1969), 95-106.

[14] M. SATO, Theory of hyperfunctions II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, (1960), 387-437.

[15] M. SATO, Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations, *Proc. Nice, Congress 2*, Gauthiers-Villars, (1970), 785-794.

[S.K.K.] M. SATO, T. KAWAÏ et M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Lecture-Notes in Math.*, Springer, (1973), 265-529.

Manuscrit reçu le 6 janvier 1975
accepté par B. Malgrange.

J.M. BONY,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91 405 - Orsay.

P. SCHAPIRA.
Université de Paris-Nord
Centre Scientifique et Polytechnique
Département de Mathématiques
Place du 8 Mai 1945
93 206 - Saint-Denis.