THIERRY VUST

Sur la théorie des invariants des groupes classiques

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 1 (1976), p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 1 (1976), 1-31

SUR LA THÉORIE DES INVARIANTS DES GROUPES CLASSIQUES (*)

par Thierry VUST

Soit N un espace vectoriel de dimension finie (le corps de base k étant algébriquement clos et de caractéristique nulle), N′ le dual de N et S un sous-groupe du groupe des automorphismes de N. On considère l'espace vectoriel $E = \bigoplus^{m} N \oplus \bigoplus^{m'} N'$ et l'opération naturelle de S dans E. La théorie (classique) des invariants des groupes classiques, comme elle est exposée dans le livre de H. Weyl : the classical groups, consiste en la description de l'algèbre $k[E]^S$ des fonctions polynomiales sur E invariantes par S (celles qui vérifient $f(s.x) = f(x)$, $s \in S$, $x \in E$) lorsque S est le groupe spécial linéaire, le groupe (spécial) orthogonal ou le groupe symplectique. H. Weyl procède par voies algébriques (avec comme outil essentiel une identité de A. Capelli) et explicite dans chaque cas un système de générateurs et relations pour les algèbres $k[E]^S$. Dans le premier appendice de leur article [1], M. Atiyah, R. Bott et V.K. Patodi traitent un cas particulier en faisant usage de la théorie de Galois. Ici on reprend ce problème en utilisant des techniques de nature géométrique.

Pour illustrer nos techniques (et orienter le lecteur), nous allons traiter dans ses grandes lignes le cas du groupe symplectique.

Rappelons tout d'abord que la donnée d'un système de générateurs de la k-algèbre $k[E]^S$ (qui est de type fini puisque S est réductif) est équivalente à celle d'un homomorphisme surjectif

$$\tilde{\psi} : k[x_1, \dots, x_p] \to k[E]^S \ ;$$

(*) Ce travail est une reprise de la première partie de la thèse de l'auteur et a été réalisé en partie pendant un séjour au laboratoire de Mathématiques Pures de l'Université de Grenoble.

le noyau $\mathrm{Ker}(\widetilde{\psi})$ de $\widetilde{\psi}$ est alors l'idéal des relations entre ces générateurs ; la donnée d'un système de générateurs de $\mathrm{Ker}(\widetilde{\psi})$ revient cette fois à celle d'un homomorphisme $\widetilde{\varphi} : k[y_1, \ldots, y_q] \to k[x_1, \ldots, x_p]$ tel que $\widetilde{\varphi}(\mathfrak{m}) = \mathrm{Ker}(\widetilde{\psi})$, où $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal $(y_1, \ldots, y_q)$ de $k[y_1, \ldots, y_q]$. On désigne par E/S la variété algébrique affine dont l'algèbre $k[\mathrm{E/S}]$ des fonctions régulières est $k[\mathrm{E}]^{\mathrm{S}}$, par P (resp. Q) un espace vectoriel de dimension p (resp. q), de sorte que

$$k[\mathrm{P}] = k[x_1, \ldots, x_p]$$

(resp. $k[\mathrm{Q}] = k[y_1, \ldots, y_q]$). La donnée d'un système de générateurs et relations pour $k[\mathrm{E}]^{\mathrm{S}}$ revient donc à celle d'une *présentation* de la variété algébrique affine E/S, i.e. d'une suite de morphismes

$$\mathrm{E/S} \xrightarrow{\psi} \mathrm{P} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Q}$$

telle que

(a) ψ est une immersion fermée ;

(b) ψ induit un isomorphisme entre E/S et la fibre $\varphi^{-1}(\mathrm{O})$.

Soit $f \in \Lambda^2(\mathrm{N}')$ une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur N (qui est donc de dimension $2n$) ; on note Sp(N) le sous-groupe d'isotropie de f pour l'opération de GL(N) dans $\Lambda^2(\mathrm{N})$. Les deux Sp(N)-modules N et N' sont isomorphes si bien qu'il suffit de considérer le cas où $\mathrm{E} = \overset{m}{\bigoplus} \mathrm{N}$; on identifie alors E avec Hom(M , N) où M est de dimension m ; le groupe Sp(N) opère dans E par $s.\alpha = s \circ \alpha$, $s \in \mathrm{Sp(N)}$, $\alpha \in \mathrm{E}$.

On considère le morphisme

$$\begin{aligned} \chi : \mathrm{E} &\to \Lambda^2(\mathrm{M}') \\ \alpha &\mapsto \alpha^*(f) \end{aligned}$$

où $\alpha^*(f)$ est le "pull back" de f sur M défini par

$$\alpha^*(f)\ (x, y) = f(\alpha(x), \alpha(y)), \ x, y \in \mathrm{M}.$$

On note $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{E/Sp(N)}$ le morphisme correspondant à l'inclusion $k[\mathrm{E}]^{\mathrm{Sp(N)}} \to k[\mathrm{E}]$; puisque $\chi(s.\alpha) = \chi(\alpha)$, $s \in \mathrm{Sp(N)}$, $\alpha \in \mathrm{E}$, le morphisme χ induit un morphisme $\psi : \mathrm{E/Sp(N)} \to \Lambda^2(\mathrm{M}')$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{E} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ \mathrm{E/Sp(N)} \arrow[rr, "\psi"] & & \Lambda^2(\mathrm{M}') \end{tikzcd}$$

commutatif. On considère enfin le morphisme

$$\varphi_{n+1} : \Lambda^2(\mathrm{M}') \to \Lambda^{2n+2}(\mathrm{M}')$$
$$\omega \mapsto \omega\Lambda\ldots\Lambda\,\omega\ .$$

On a alors le

THEOREME. — *La suite*

$$\mathrm{E/Sp(N)} \xrightarrow{\psi} \Lambda^2(\mathrm{M}') \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \Lambda^{2n+2}(\mathrm{M}')$$

est une présentation de E/Sp(N).

Preuve. — Le cas où $m < 2n$ se déduit facilement du cas $m = 2n$; on va donc supposer dans la suite que $m \geqslant 2n$.

On commence par montrer que l'image ψ(E/Sp(N)) est le cône C_n de $\Lambda^2(\mathrm{M}')$ formé des éléments de support de dimension $\leqslant 2n$ et que ψ, considéré comme morphisme E/Sp(N) $\to \mathrm{C}_n$ est birationnel (le support de $\omega \in \Lambda^2(\mathrm{M}')$ est le plus petit sous-espace vectoriel V de M$'$ tel que $\omega \in \Lambda^2(\mathrm{V})$).

D'un autre côté, on dispose du résultat suivant qui a été communiqué par R.W. Richardson :

(1) *Soit* X *et* Y *deux variétés algébriques* affines *irréductibles et réduites et* ψ : X $\to$ Y *un morphisme surjectif et birationnel. Si* Y *est normale, alors* ψ *est un isomorphisme.*

Dès lors, la difficulté se concentre sur l'étude de la sous-variété C_n de $\Lambda^2(\mathrm{M}')$: pour démontrer que ψ : E/Sp(N) $\to \mathbf{C}_n$ est un isomorphisme, il suffit de prouver que C_n est normale ; pour enfin obtenir les relations, il faut identifier un système de générateurs de l'idéal de C_n dans $k[\Lambda^2(\mathrm{M}')]$. La clef de cette étude est formée des deux résultats que voici :

(2) *Soit* G *un groupe algébrique réductif connexe,* U *un sous-groupe unipotent maximal de* G *et* X *une variété algébrique affine irréductible réduite ; on suppose que* G *opère dans* X. *Alors, pour que* k[X] *soit intégralement clos* (i.e. X *normale*), *il faut et il suffit que* $k[\mathrm{X}]^{\mathrm{U}}$ *soit intégralement clos.*

(3) *On note* U *un sous-groupe unipotent maximal de* GL(M). *L'algèbre* $k[\Lambda^2(\mathrm{M}')]^{\mathrm{U}}$ *est une algèbre de polynômes à* $[m/2]$ *indéterminées.*

Le résultat (3) peut être précisé : l'inclusion $C_n \subset \Lambda^2(M')$ devient après passage aux invariants par U, une inclusion entre deux espaces vectoriels. Pour le démontrer lorsque la dimension de M est paire (le cas impair en découle facilement), on procède comme suit : le groupe GL(M) opère dans $\Lambda^2(M')$ et y possède une orbite ouverte isomorphe à GL(M)/Sp(M) ; on a donc un homomorphisme injectif

$$k[\Lambda^2(M')]^U \to k[GL(M)/Sp(M)]^U \;;$$

l'espace homogène affine GL(M)/Sp(M) étant symétrique, on peut utiliser un travail antérieur [8] qui donne la structure de GL(M)-module de l'algèbre k[GL(M)/Sp(M)] ; on déduit de là la description de l'algèbre $k[GL(M)/Sp(M)]^U$ puis celle de $k[\Lambda^2(M')]^U$.

Au § 1 on démontre le critère de normalité (2). Le § 2 est consacré à l'étude de certains cônes (ceux du type C_n ci-dessus) qui fourniront en fin de compte la réalisation géométrique des variétés E/S (S = O(N), Sp(N) ou GL(N)). Au § 3, on fait la théorie des invariants des groupes classiques ; nos résultats ne sont complets que dans le cas où S = O(N), Sp(N) ou GL(N). Dans une annexe enfin, on justifie une divergence mineure entre nos résultats et ceux de H. Weyl concernant les relations de $k[E]^{Sp(N)}$.

1. Un critère de normalité.

1.0 Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe ([5], [10]). On suppose que G opère linéairement dans un espace vectoriel M ; on notera M^G le sous-espace des éléments de M laissés fixes par G et M' le dual de M muni de l'opération $(s.\epsilon)(x) = \epsilon(s^{-1}.x)$, $s \in G$, $\epsilon \in M'$, $x \in M$. Soit X une variété algébrique affine ; on notera $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X. Enfin, si H est un sous-groupe de G, $k[G]^H$ désignera la sous-algèbre des fonctions de $k[G]$ laissées fixes par l'opération de H définie par $(s.f)(t) = f(ts)$, $s \in H$, $t \in G$, $f \in k[G]$. Le groupe G opère dans $k[G]^H$ par $(s.f)(t) = f(s^{-1}t)$, $s, t \in G$, $f \in k[G]^H$.

Lorsqu'on parlera d'un G-module M (sans autre précision), il est sous-entendu qu'il s'agit d'un G-module rationnel de dimension finie, i.e. que la représentation $G \to GL(M)$ correspondante est rationnelle ([10] chap. I § 1).

1.1 Soit G un groupe algébrique réductif connexe et X une variété algébrique affine où G opère (morphiquement). Soit M un G-module ; un *G-morphisme* φ de X dans M est un morphisme $\varphi : X \to M$ commutant aux opérations de G dans X et M : $\varphi(s.x) = s.\varphi(x)$, $s \in G$, $x \in X$. Pour $\varphi : X \to M$, on note $\varphi_0 : M' \to k[X]$ l'homomorphisme défini par $\varphi_0(\epsilon) = \epsilon \circ \varphi$, $\epsilon \in M'$; on obtient ainsi une bijection canonique entre l'ensemble $\mathrm{Mor}_G(X, M)$ des G-morphismes de X dans M et l'ensemble $\mathrm{Hom}_G(M', k[X])$ des homomorphismes de G-modules $M' \to k[X]$.

Lorsque M est irréductible, l'ensemble $\mathrm{Mor}_G(X, M)$ est donc une interprétation géométrique de la composante isotypique de type M' du G-module $k[X]$: en fait cette composante isotypique est canoniquement isomorphe à $M' \otimes \mathrm{Hom}_G(M', k[X])$ via l'application $x \otimes \alpha \to \alpha(x)$, $x \in M'$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_G(M', k[X])$. Cette application est en effet surjective par définition ; pour voir qu'elle est injective, il suffit de prouver que si la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_G(M', k[X])$ est linéairement indépendante, alors les sous-espaces $\mathrm{Im}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{Im}(\alpha_p)$ sont linéairement indépendants. On suppose que $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, p$ et on note $J \subset \{1, \ldots, p\}$ un sous-ensemble maximal tel que les sous-espaces $(\mathrm{Im}(\alpha_j))_{j \in J}$ sont linéairement indépendants. On a $\bigoplus_{j \in J} \mathrm{Im}(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(\alpha_i)$: en effet, pour $i \notin J$,

$$\mathrm{Im}(\alpha_i) \cap \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Im}(\alpha_j) \neq 0,$$

d'où $\mathrm{Im}(\alpha_i) \subset \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Im}(\alpha_j)$ par irréductibilité de $\mathrm{Im}(\alpha_i)$. Maintenant, si $J \neq \{1, \ldots, p\}$, pour $i \notin J$ et tout $x \in M'$, on peut écrire

$$\alpha_i(x) = \sum_{j \in J} \alpha_j(x_j)$$

où les x_j sont les éléments de M' univoquement déterminés par x (les α_j étant non nuls, sont injectifs) ; on obtient ainsi des applications $x \mapsto x_j$ qui commutent à l'opération de G dans M'. Par irréductibilité de M' encore une fois, il existe $\lambda_j \in k$ tels que $x_j = \lambda_j x$, donc tels que

$$\alpha_i = \sum_{j \in J} \lambda_j \alpha_j .$$

Soit B un sous-groupe de Borel de G, U son radical unipotent ; en particulier U est un sous-groupe unipotent maximal de G. On rappelle que pour tout G-module irréductible M, le sous-espace M^U est de dimension 1 ([11] exp. 15) ; le groupe B opère donc dans M^U via un caractère $\bar{\omega}$: c'est le poids dominant de M relatif à B. Le poids dominant d'un G-module irréductible caractérise ce G-module. Les éléments non nuls de M^U s'appellent les vecteurs primitifs de M (relatifs à B) :

On note $M(\bar{\omega})$ un G-module irréductible de poids dominant $\bar{\omega}$. D'après ce qui précède, de la décomposition du G-module $k[X]$ en somme directe de ses composantes isotypiques, on déduit l'isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{\bar{\omega}} (M(\bar{\omega}) \otimes \mathrm{Hom}_G(M(\bar{\omega}), k[X]) \to k[X]$$

d'où par restriction, l'isomorphisme

$$\bigoplus_{\bar{\omega}} (M(\bar{\omega})^U \otimes \mathrm{Hom}_G(M(\bar{\omega}), k[X]) \to k[X]^U \ ;$$

on a encore les isomorphismes (canoniques à homothéties près)

$$M(\bar{\omega})^U \otimes \mathrm{Hom}_G(M(\bar{\omega}), k[X]) \to \mathrm{Mor}_G(X, M(\bar{\omega})').$$

Par transport de structure de $k[X]^U$ à $\bigoplus_{\bar{\omega}} \mathrm{Mor}_G(X, M(\bar{\omega}))$, on obtient une structure de k-algèbre sur l'espace vectoriel $\bigoplus_{\bar{\omega}} \mathrm{Mor}_G(X, M(\bar{\omega}))$: si $\varphi_i \in \mathrm{Mor}_G(X, M(\bar{\omega}_i))$, $i = 1,2$, le produit de φ_1 et φ_2 est défini par la composition

$$X \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \varphi_2} M(\bar{\omega}_1) \otimes M(\bar{\omega}_2) \xrightarrow{pr} M(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)$$

et dépend du choix d'un élément non nul pr de l'espace vectoriel de dimension 1 $\mathrm{Hom}_G(M(\bar{\omega}_1) \otimes M(\bar{\omega}_2), M(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2))$.

Remarque 1. — Si X est irréductible et réduite et si φ_i n'est pas nul, $i = 1,2$, alors le produit de φ_1 et φ_2 n'est pas non plus nul (puisque $k[X]^U$ est intégre).

1.2 On conserve les notations précédentes ; en particulier U désigne un sous-groupe unipotent maximal de G. Puisque le G-module $k[G]^U$ contient tous les G-modules irréductibles exactement une fois(*), l'algèbre $k[\mathrm{G}]^{\mathrm{U}}$ est de type fini engendrée par ses sous-G-modules irréductibles dont les poids dominants engendrent le monoïde des poids dominants de G. On définit une variété algébrique affine Z par $k[\mathrm{Z}] = k[\mathrm{G}]^{\mathrm{U}}$; le groupe G opère dans Z et y possède une orbite ouverte isomorphe à l'espace homogène G/U : on note z_0 un point de cette orbite dont l'isotropie est égale à U.

Soit X une variété algébrique affine dans laquelle le groupe G opère. On a le morphisme de restriction $\phi : k[\mathrm{X} \times \mathrm{Z}] \to k[\mathrm{X} \times \{z_0\}]$, d'où on déduit, faisant opérer G "diagonalement" dans X × Z, un homomorphisme $\psi : k[\mathrm{X} \times \mathrm{Z}]^{\mathrm{G}} \to k[\mathrm{X} \times \{z_0\}]^{\mathrm{U}}$.

PROPOSITION 1. – (**) *L'homomorphisme*

$$\psi : k[\mathrm{X} \times \mathrm{Z}]^{\mathrm{G}} \to k[\mathrm{X} \times \{z_0\}]^{\mathrm{U}}$$

est un isomorphisme.

Preuve. – Puisque l'ensemble $\mathrm{G}.(\mathrm{X} \times \{z_0\})$ des translatés par G de $\mathrm{X} \times \{z_0\}$ est ouvert dense dans X × Z, ψ est injectif. On identifie ensuite $k[\mathrm{X}]$ et $k[\mathrm{X} \times \{z_0\}]$; cela fournit à $k[\mathrm{X} \times \{z_0\}]$ une structure de G-module dont la restriction à U coïncide avec celle provenant de l'opération de U dans la sous-variété $\mathrm{X} \times \{z_0\}$ de X × Z. Soit alors M un sous-G-module irréductible de $k[\mathrm{X} \times \{z_0\}]$ et N le sous-G-module de $k[\mathrm{Z}] = k[\mathrm{G}]^{\mathrm{U}}$ isomorphe au dual de M. On vérifie facilement que $\phi\,(\mathrm{M} \otimes \mathrm{N})$ est contenu dans M : en effet, pour $f \in k[\mathrm{X}]$, $g \in k[\mathrm{Z}]$, on a $\phi\,(f \otimes g) = g(z_0) f$. Puisque $\dim(\mathrm{M} \otimes \mathrm{N})^{\mathrm{G}} = \dim(\mathrm{M}^{\mathrm{U}}) = 1$ et puisqu'on sait déjà que ψ est injectif, M^{U} est contenu dans l'image de ψ ; ceci prouve que ψ est surjectif.

COROLLAIRE. – (cf. [3]) *L'algèbre* $k[\mathrm{X}]^{\mathrm{U}}$ *est de type fini.*
Cela résulte de la réductivité de G (cf. [5] chap. 1 § 2).

LEMME 1 – (cf. [7]) *Soit* A *une k-algèbre commutative intégre,* K *son corps des quotients et* U *un groupe unipotent opérant rationnellement dans* A *(par automorphismes de k-algèbres). Alors, le corps des quotients de* A^{U} *est égal à* K^{U}.

(*) Pour tout sous-groupe H de G, la multiplicité du G-module irréductible M dans $k[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$ est égale à $\dim(\mathrm{M}')^{\mathrm{H}}$.

(**) La preuve de cette proposition a été obtenue en collaboration avec D. Luna.

Preuve. – Il est évident que le corps des quotients de A^U est contenu dans K^U. Réciproquement, soit a/b un élément de K^U, $a, b \in A$. Puisque U est unipotent, le sous-espace vectoriel de A engendré par les $(s.a)_{s\in U}$ contient un élément a′ non nul invariant par U. On écrit

$$a' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s_i \,.\, a) \quad \text{et} \quad b' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s_i \,.\, b)\ ;\ \lambda_i \in k^*\ ,\ s_i \in U\ ;$$

alors comme $a/b = \lambda_i(s_i \,.\, a)/\lambda_i(s_i \,.\, b)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a aussi $a/b = a'/b'$; on en déduit que b' est invariant par U, i.e. que a/b appartient au corps des quotients de A^U, ce qui achève la démonstration.

LEMME 2. – *Soit* A *une k-algèbre commutative et* B *une sous-algèbre de* A. *On suppose que le groupe réductif* G *opère rationnellement dans* A *et* B. *Alors, si* A *est entière sur* B, A^G *est aussi entière sur* B^G.

Preuve. – On désigne par $a \to a^\natural$ l'opérateur de Reynolds sur A (cf. [5] chap. I § 1). Soit alors a un élément de A^G ; puisque A est entière sur B, il existe $b_i \in B$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que

$$a^n + b_1 a^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

Comme
$$(b_i\, a^{n-i})^\natural = b_i^\natural\ a^{n-i},$$

on a aussi
$$a^n + b_1^\natural\, a^{n-1} + \ldots + b_n^\natural = 0,$$

ce qui montre que a est entier sur B^G.

THEOREME 1.– *Soit G un groupe algébrique réductif connexe opérant dans une variété algébrique affine irréductible réduite* X *et* U *un sous-groupe unipotent maximal de* G. *Alors, pour que* X *soit normale, il faut et il suffit que* $k[X]^U$ *soit intégralement clos.*

Preuve. – La nécessité est facile (et ne dépend pas de la nature du sous-groupe U). On suppose alors que $k[X]^U$ est intégralement clos. On note $\widetilde{X}$ la normalisée de X et $\varphi : \widetilde{X} \to X$ le morphisme canonique : le groupe G opère dans $\widetilde{X}$. On considère aussi la variété affine Z définie par $k[Z] = k[G]^U$. D'après le lemme 2, le morphisme fini $\varphi \times id$: $\widetilde{X} \times Z \to X \times Z$ induit un morphisme fini $(\widetilde{X} \times Z)/G \to (X \times Z)/G$ (on fait opérer G "diagonalement dans $\widetilde{X} \times Z$ et $X \times Z$; les notations sont celles introduites plus loin en (3.0)). De la proposition 1 résulte donc que $k[\widetilde{X}]^U$ est entier sur $k[X]^U$; or d'après le lemme 1, $k[\widetilde{X}]^U$ et $k[X]^U$ ont le même corps des quotients ; l'hypothèse signifie donc que $k[\widetilde{X}]^U = k[X]^U$. Maintenant, si $k[\widetilde{X}]$ était distinct de $k[X]$, il existerait dans $k[X]$ un sous-G-module M non réduit à (O) tel que $k[\widetilde{X}] = k[X] \oplus M$; mais alors $k[\widetilde{X}]^U = k[X]^U \oplus M^U$, d'où la contradiction puisque M^U n'est pas réduit à (O). On a donc $k[\widetilde{X}] = k[X]$, d'où la conclusion.

1.3 Soit $M = M(\bar{\omega})$ un G-module irréductible de poids dominant $\bar{\omega}$ (relatif à un sous-groupe de Borel B de G). On désigne par C(M) l'adhérence de l'orbite d'un élément primitif de M ; la variété C(M) est un cône.

Pour montrer l'utilisation du critère du théorème 1, on va prouver le résultat suivant qui est déjà démontré dans [6].

THEOREME 2. — (i) *La composante homogène de degré n de* $k[C(M)]$ *est G-isomorphe à* $M(n\bar{\omega})'$.

(ii) *La variété* C(M) *est normale.*

Preuve. — On note U le radical unipotent de B et N un G-module irréductible de poids dominant χ. Soit $\varphi \in \mathrm{Mor}_G(C(M),N)$. On a $\varphi(C(M)^U) \subset N^U$; par conséquent, puisque la dimension de N^U est égale à 1 et puisque φ est entièrement déterminé par sa valeur en un vecteur primitif donné de M, la dimension de $\mathrm{Mor}_G(C(M),N)$ est inférieure ou égale à 1 ; le G-morphisme φ est donc nécessairement homogène (C(M) est un cône). Alors, si r est le degré de φ, on a $\chi(b)\varphi(x) = b\,.\,\varphi(x) = \varphi(b.x) = \varphi(\bar{\omega}(b)x) = \bar{\omega}(b)^r\varphi(x)$ pour tout $x \in C(M)^U$ et $b \in B$, d'où $\chi = \bar{\omega}^r$ si φ n'est pas nul. Enfin, comme la restriction à C(M) de l'application identique de M fournit un élément non nul de $\mathrm{Mor}_G(C(M),M)$, la dimension de $\mathrm{Mor}_G(C(M),N)$ est égale à 1 si $\chi = \bar{\omega}^r$, $r \in \mathbf{N}$, et est égale à 0 sinon. La première assertion est donc prouvée. Puisque $k[C(M)]^U$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée (cf. (1.1)), la seconde assertion résulte du théorème 1.

2. Sur certains cônes des espaces $S^2(N)$, $\Lambda^2(N)$ et Hom(M,N).

2.0 On conserve les notations et conventions du paragraphe précédent.

Soit X une variété algébrique affine et $f \in k[X]$; on note X_f l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$: c'est un ouvert affine de X dont l'algèbre des fonctions régulières est le localisé $k[X]_f$ de $k[X]$ relativement à la partie multiplicative $(f^n)_{n \geqslant 0}$.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe et U un sous-groupe unipotent maximal de G. On suppose que G opère dans X ; on notera généralement u un isomorphisme $\bigoplus_{\varpi} \mathrm{Mor}_G(X,M(\varpi)) \to k[X]^U$ (cf. (1.1)), et pour $\varphi \in \mathrm{Mor}_G(X,M(\bar{\omega}))$, on dira que $u(\varphi)$ est le vecteur primitif de $k[X]$ correspondant à φ.

On utilisera aussi la notion que voici qui correspond à celle de générateurs et relations de la k-algèbre $k[X]$ (cf. l'introduction) : une *présentation* de la variété algébrique affine X consiste en la donnée d'une suite

$$X \overset{\psi}{\to} P \overset{\varphi}{\to} Q$$

où P et Q sont des espaces vectoriels de dimension finie et ψ, φ des morphismes de variétés algébriques affines tels que

a) ψ est une immersion fermée,

b) ψ induit un isomorphisme $X \to \varphi^{-1}(O)$.

Ici la fibre $\varphi^{-1}(0)$ est munie de sa structure de variété algébrique intrinsèque définie par $k[\varphi^{-1}(O)] = k[P]/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est l'idéal de $k[P]$ engendré par $(\epsilon \circ \varphi)_{\epsilon \in Q'}$.

Soit N un espace vectoriel de dimension n, B un sous-groupe de Borel de GL(N) et U le radical unipotent de B : identifiant GL(N) avec l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$, on peut prendre pour B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et pour U le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. On note $\bar{\omega}_i$ le poids dominant (relatif à B) du GL(N)-module $\Lambda^i(N)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; le poids dominant d'un GL(N)-module irréductible s'écrit $\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{\omega}_i$ avec $a_i \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant i < n$ et $a_n \in \mathbf{Z}$. On notera comme avant $M(\bar{\omega})$ un GL(N)-module irréductible de poids dominant $\bar{\omega}$.

Soit M un espace vectoriel de dimension finie ; on rappelle enfin que tout GL(M) x GL(N)-module irréductible est de la forme Hom(P,Q) où P (resp. Q) est un GL(M)-module (resp. GL(N)-module) irréductible.

2.1 Soit N un espace vectoriel de dimension n, On identifie $S^2(N)$ avec l'espace vectoriel des applications linéaires $\alpha : N' \to N$ telles que $\alpha = {}^t\alpha$. Le groupe GL(N) opère dans $S^2(N)$ par $s.\alpha = s\alpha{}^ts$ $s \in GL(N)$, $\alpha \in S^2(N)$. Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, on a le GL(N)-morphisme

$$\varphi'_p : S^2(N) \to S^2(\Lambda^p N) ;$$
$$\alpha \mapsto \Lambda^p \alpha$$

par composition de φ'_p avec un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{GL(N)}(S^2(\Lambda^p N), M(2\bar{\omega}_p))$ on obtient un GL(N)-morphisme non nul φ_p de $S^2(N)$ à valeur dans $M(2\bar{\omega}_p)$ (cf. remarque 1 ci-dessous). Après identification de $S^2(\Lambda^n N)$ avec k, le morphisme φ_n (ou φ'_n) devient simplement une application proportionnelle au déterminant usuel sur $S^2(N)$; il est alors bien connu que φ_n est un générateur de l'algèbre $k[S^2(N)]^{SL(N)}$ et par suite que φ_n est un élément irréductible de l'anneau $k[S^2(N)]$.

Remarque 1. – Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de N, $(\epsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base duale. Soit T le tore maximal de GL(N) formé des automorphismes de N dont la matrice dans la base (e_i) est diagonale. Pour toute suite $S = (i_1 < i_2 < \ldots < i_p)$ d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on pose

$$e_S = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \quad \text{et} \quad \epsilon_S = \epsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon_{i_p} ;$$

on définit ensuite un élément β_S de $S^2(\Lambda^p N)$ par la formule

$$\beta_S(\epsilon_{S'}) = \delta_{SS'} e_S .$$

Les β_S sont des vecteurs propres simultanés pour l'opération de T relativement à la valeur propre $\chi_S : \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \to (t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p})^2$. On a $\chi_{(1,\ldots,p)} = 2\bar{\omega}_p$; de plus, le sous-espace de poids $2\bar{\omega}_p$ dans $\otimes^2(\Lambda^p N)$ (donc dans $S^2(\Lambda^p N)$) est de dimension 1 ; comme les χ_S se déduisent de $\chi_{(1,\ldots,p)}$ par l'opération du groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ (le groupe de Weyl), le sous-espace de poids χ_S de $S^2(\Lambda^p N)$ est de dimension 1 et appartient au sous-GL(N)-module irréductible M de poids dominant $2\bar{\omega}_p$ (cf. [11] exp. 16) ; ainsi les β_S appartiennent à M.

On considère enfin l'élément α de $S^2(N)$ défini par $\alpha(\epsilon_i) = e_i$ $1 \leqslant i \leqslant n$; alors $\Lambda^p \alpha = \varphi'_p(\alpha)$ est somme des β_S et par suite appartient à M. Comme l'orbite de α dans $S^2(N)$ est ouverte, on en déduit que $\varphi'_p(S^2(N))$ est contenu dans M. Par conséquent, les relations $\varphi'_p(\alpha) = 0$ et $\varphi_p(\alpha) = 0$ sont équivalentes.

On désigne par C_p le cône des éléments de $S^2(N)$ de rang $\leqslant p$; ensemblistement on a $C_p = \varphi_{p+1}^{-1}(O)$. Il est classique que $GL(N)$ opère transitivement dans $C_p - C_{p-1}$; en particulier, et par définition même du groupe orthogonal $O(N)$, la variété $S^2(N) - C_{n-1}$ est $GL(N)$-isomorphe à $GL(N)/O(N)$.

Remarque 2. – Identifiant φ_n à une application polynomiale sur $S^2(N)$, $u(\varphi_n)$ est proportionnel à φ_n. On a donc

$$S^2(N) - C_{n-1} = S^2(N)_{u(\varphi_n)} \simeq GL(N)/O(N).$$

Puisque les poids des vecteurs primitifs $u(\varphi_i)$ sont linéairement indépendants, les $u(\varphi_i)$ sont algébriquement indépendants. On va démontrer que $k[S^2(N)]^U = k[u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_n)]$.

LEMME 1. – *On a* $(k[S^2(N)]^U)_{u(\varphi_n)} = k[u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_n)]_{u(\varphi_n)}$.

Preuve. – Puisque le groupe des caractères de U est trivial, on a les isomorphismes

$$(k[S^2(N)]^U)_{u(\varphi_n)} \simeq (k[S^2(N)]_{u(\varphi_n)})^U \simeq k[S^2(N)_{u(\varphi_n)}]^U .$$

D'un autre côté, $S^2(N)_{u(\varphi_n)}$ est $GL(N)$-isomorphe à l'espace homogène $GL(N)/O(N)$ (remarque 2) ; ainsi, la dimension de

$$\mathrm{Mor}_{GL(N)}(S^2(N)_{u(\varphi_n)}, M(\bar{\omega}))$$

est égale à la dimension de $M(\bar{\omega})^{O(N)}$. D'après l'exemple 2 § 3 de [8], on sait que la dimension de $M(\bar{\omega})^{O(N)}$ est égale à 1 si

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{n} 2\, a_i\, \bar{\omega}_i \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant i < n \quad \text{et} \quad a_n \in \mathbf{Z}.$$

Vu l'isomorphisme de B-modules

$$k[S^2(N)_{u(\varphi_n)}]^U \to \bigoplus_{\bar{\omega}} M(\bar{\omega})^U \otimes \mathrm{Hom}_{GL(M)}(M(\bar{\omega}), k[S^2(N)_{u(\varphi_n)}]))$$

et l'isomorphisme

$$M(\bar{\omega})^U \otimes \mathrm{Hom}_{GL(N)}(M(\bar{\omega}), k[S^2(N)_{u(\varphi_n}])$$
$$\to \mathrm{Mor}_{GL(N)}(S^2(N)_{u(\varphi_n)}, M(\bar{\omega}))$$

(voir (1.1)), cela signifie que les composantes isotypiques du B-module

$(k[S^2(N)]^U)_{u(\varphi_n)}$ sont de dimension 1 et contenues dans

$$k[u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_n)]_{u(\varphi_n)},$$

d'où la conclusion.

LEMME 2. – *On a*

$$u(\varphi_n)\, k[u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_n)] = u(\varphi_n)\, k[S^2(N)]^U \cap k[u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_n)]$$

Preuve. – Puisque les composantes isotypiques du B-module

$$k[u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_n)]$$

sont de dimension 1 engendrées par les monômes $u(\varphi_1)^{a_1} \ldots u(\varphi_n)^{a_n}$, et puisque les deux membres de l'égalité proposée sont des sous-B-modules de $k[u(\varphi_1), \ldots, u(\varphi_n)]$, il suffit de vérifier qu'un monôme de la forme $u(\varphi_1)^{a_1} \ldots u(\varphi_{n-1})^{a_{n-1}}$ n'appartient pas à

$$u(\varphi_n)\, k[S^2(N)]^U = (u(\varphi_n)\, k[S^2(N)])^U.$$

Cela provient de ce que $(u(\varphi_n)\, k[S^2(N)])^U$, comme trace sur $k[S^2(N)]^U$ de l'idéal de $k[S^2(N)]$ engendré par le déterminant, est un idéal premier de $k[S^2(N)]^U$ d'une part, et de ce que, pour $1 \leqslant i < n$, chacun des φ_i ne s'annulant pas sur $C_{n-1} = \varphi_n^{-1}(O)$, les $u(\varphi_i)$ n'appartiennent pas à $(u(\varphi_n)\, k[S^2(N)])^U$ d'autre part.

PROPOSITION 1. – *L'algèbre* $k[C_p]^U$ *est une algèbre de polynômes à* p *indéterminées engendrée par les vecteurs primitifs* $u(\varphi_i)$ *correspondant aux* GL(N)-*morphismes* φ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$.

Remarque 3. – La proposition signifie que la dimension de $\mathrm{Mor}_{GL(N)}(C_p, M(\bar\omega))$ est égale à 1 si $\bar\omega = \sum_{i=1}^{p} 2a_i\, \bar\omega_i, a_i \in \mathbf{N}$, et est égale à O sinon. De plus, puisque φ_i (donc $u(\varphi_i)$) est homogène de degré i, on a un GL(N)-isomorphisme

$$k[C_p]'_r \simeq \bigoplus_{a_i \geqslant 0,\ \Sigma i a_i = r} M\Big(\sum_{i=1}^{p} 2a_i\, \bar\omega_i\Big)$$

où $k[C_p]_r$ désigne la composante homogène de degré r de $k[C_p]$.

Preuve de la proposition 1. – On commence par considérer le cas où $p = n$; on a donc $C_p = S^2(N)$ et on a déjà vu que les $u(\varphi_i)$ sont des éléments algébriquement indépendants de $k[S^2(N)]^U$. Du lemme 1 résulte qu'on a la situation que voici :

$$\begin{array}{ccc} k[S^2(N)]^U & \to & (k[S^2(N)]^U)_{u(\varphi_n)} \\ \cup & & \| \\ k[u(\varphi_1), \dots, u(\varphi_n)] & \to & k[u(\varphi_1, \dots, u(\varphi_n)]_{u(\varphi_n)} . \end{array}$$

L'égalité $k[S^2(N)]^U = k[u(\varphi_1), \dots, u(\varphi_n)]$ résulte alors très facilement du lemme 2.

Il est clair que la restriction de φ_i à C_p est (resp. n'est pas) identiquement nulle pour $p + 1 \leqslant i \leqslant n$ (resp. $1 \leqslant i \leqslant p$) (cf. remarque 1). D'autre part, puisque un GL(N)-morphisme de C_p dans $M(\bar{\omega})$ est la restriction à C_p d'un GL(N)-morphisme de $S^2(N)$ dans $M(\bar{\omega})$(*), le morphisme de restriction $\psi : k[S^2(N)]^U \to k[C_p]^U$ est surjectif ; son noyau étant clairement l'idéal engendré par les vecteurs primitifs $u(\varphi_i)$ correspondant aux φ_i, $p + 1 \leqslant i \leqslant n$ ($k[C_p]$ donc $k[C_p]^U$ est intégre), la proposition 1 est démontrée.

THEOREME 1. – *La sous-variété fermée* C_p *de* $S^2(N)$ *formée des éléments de rang* $\leqslant p$ *est normale ; la suite*

$$C_p \to S^2(N) \overset{\varphi'_{p+1}}{\to} S^2(\Lambda^{p+1} N)$$

est une présentation de C_p.

Preuve. – La première assertion résulte de la proposition 1, du théorème 1 § 1 et du fait que la variété C_p est irréductible (comme étant presque homogène pour l'opération de GL(N)).

Comme C_p est invariante par GL(N), l'idéal $\mathfrak{a}$ de C_p dans $k[S^2(N)]$ est engendré par un sous-GL(N)-module de $k[S^2(N)]$. On note M_i le sous-GL(N)-module de $k[S^2(N)]$ engendré par $u(\varphi_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et ψ le morphisme de restriction $k[S^2(N)]^U \to k[C_p]^U$. Le noyau de ψ est engendré par $u(\varphi_{p+1}), \dots, u(\varphi_n)$ (cf. proposition 1) ; en première approximation, l'idéal $\mathfrak{a}$ est donc engendré par $\bigoplus_{i=p+1}^{n} M_i$. Pour démontrer la seconde affirmation du théorème, il reste encore à prouver que l'idéal

---

(*) L'homomorphisme surjectif $\mathrm{Hom}(M(\bar{\omega})', k[S^2(N)]) \to \mathrm{Hom}(M(\bar{\omega})', k[C_p])$ reste surjectif après passage aux invariants par GL(N).

de $k[S^2(N)]$ engendré par M_{p+1} contient M_i, $p+1 \leqslant i \leqslant n$. Or d'après la remarque 1, M_i est égal au sous-espace $(\epsilon \circ \varphi_i')_{\epsilon \in S^2(\Lambda^i N)'}$; de plus, le composé

$$S^2(N) \xrightarrow{\varphi_i' \otimes \varphi_1'} S^2(\Lambda^i N) \otimes S^2(N) \xrightarrow{c} S^2(\Lambda^{i+1} N),$$

où c est la restriction à $S^2(\Lambda^i N) \otimes S^2(N)$ du morphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^i N', \Lambda^i N) \otimes \mathrm{Hom}(N', N) \to (\otimes^2(\Lambda^i N)) \otimes (\otimes^2 N) \to$$
$$\to \otimes^2(\Lambda^{i+1} N) \to S^2(\Lambda^{i+1} N)$$

est égal (à un multiple près) à φ_{i+1}', (voir le début du n° 1 de l'annexe) ce qui achève la démonstration du théorème.

2.2 Soit N un espace vectoriel de dimension n. Le groupe GL(N) opère dans $\Lambda^2(N)$. Pour $1 \leqslant p \leqslant [n/2]$, on a le GL(N)-morphisme

$$\varphi_p : \Lambda^2(N) \to \Lambda^{2p}(N)$$
$$\alpha \mapsto \alpha \wedge \ldots \wedge \alpha$$

à valeurs dans le GL(N)-module irréductible de poids dominant $\bar{\omega}_{2p}$. On désigne par C_p le cône des éléments de $\Lambda^2(N)$ de support de dimension $\leqslant 2p$; identifiant $\Lambda^2(N)$ avec l'espace vectoriel des applications linéaires $\alpha : N' \to N$ telles que $\alpha = -{}^t\alpha$, C_p devient le cône des éléments de rang $\leqslant 2p$. Ensemblistement, on a $C_p = \varphi_{p+1}^{-1}(O)$; de plus, le groupe GL(N) opère transitivement dans $C_p - C_{p-1}$.

Proposition 2. — *L'algèbre* $k[C_p]^U$ *est une algèbre de polynômes à p indéterminées engendrée par les vecteurs primitifs* $u(\varphi_i)$ *correspondant aux* GL(N)-*morphismes* φ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$.

Preuve. — (a) Lorsque $n = 2m$ est pair et après identification de $\Lambda^n(N)$ avec k, φ_m est une application proportionnelle au pfaffien sur $\Lambda^2(N)$; il est alors bien connu que φ_m est un générateur de l'algèbre $k[\Lambda^2(N)]^{SL(N)}$ et par suite que φ_m est un élément irréductible de l'anneau $k[\Lambda^2(N)]$. Par définition du groupe symplectique Sp(N), $\Lambda^2(N) - C_{m-1}$ est GL(N)-isomorphe à GL(N)/Sp(N).

En suivant exactement le même schéma de démonstration qu'au numéro (2.1), et en utilisant cette fois l'exemple 1 du § 3 de [8], on prouve la proposition lorsque $n = 2m$ est pair.

(b) Lorsque $n = 2m + 1$ est impair, on considère un sous-espace M de dimension $2m$ de N ; on identifie GL(M) à un sous-groupe de GL(N) et $\Lambda^2(M)$ à un sous-espace de $\Lambda^2(M)$. Le stabilisateur H de sous-espace $\Lambda^2(M)$ dans GL(N) contient un sous-groupe unipotent maximal U de GL(N) ; en fait U n'opère effectivement dans $\Lambda^2(M)$ que comme sous-groupe unipotent maximal U′ de GL(M) : en effet, dans une base de N dont les $2m$-premiers vecteurs engendrent **M**, **H** est de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{GL(M)} & * \\ \mathrm{O} & * \end{pmatrix}.$$

On note enfin $C_p(M)$ (resp. $C_p(N)$) le cône des éléments de $\Lambda^2(M)$ (resp. $\Lambda^2(N)$) de rang $\leqslant 2p$; on a $GL(N).C_p(\dot{M}) = C_p(N)$. Par restriction, on a des homomorphismes

$$\phi : k[C_p(N)]^U \to k[C_p(M)]^U = k[C_p(M)]^U$$

dont on va montrer que ce sont des isomorphismes. De là et de la partie (a) de la preuve résultera l'affirmation de la proposition lorsque $n = 2m + 1$.

Soit $f = u(\varphi) \in k[C_p(N)]^U$; dire que $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$ signifie que la restriction à $C_p(M)$ du GL(N)-morphisme φ de $C_p(N)$ est nulle ; or puisque $C_p(N) = GL(N).C_p(M)$, cette condition implique que φ est nul : l'homomorphisme ϕ est donc injectif. Comme enfin l'image par ϕ des $u(\varphi_i|_{C_p(N)})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, constitue un système de générateurs de $k[C_p(M)]^{U'}$ (c'est la proposition 2 dans le cas $n = 2m$), ϕ est surjectif.

THEOREME 2.– *La sous-variété fermée* C_p *de* $\Lambda^2(N)$ *formée des éléments de rang (ou de support de dimension)* $\leqslant 2p$ *est normale ; la suite*

$$C_p \to \Lambda^2(N) \overset{\varphi_{p+1}}{\to} \Lambda^{2p+2}(N)$$

est une présentation de C_p.

La preuve du théorème 2 est semblable à celle du théorème 1.

2.3 Soit M et N deux espaces vectoriels de dimension m et n respectivement. On fait opérer le groupe $GL(M) \times GL(N)$ dans $E = \mathrm{Hom}(M,N)$ par $(s,t).\alpha = t\,\alpha\, s^{-1}$, $s \in GL(M)$, $t \in GL(N)$, $\alpha \in E$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant \inf(m,n)$, on a le $\mathrm{GL(M)} \times \mathrm{GL(N)}$-morphisme

$$\varphi_p : \mathrm{E} \to \mathrm{Hom}(\Lambda^p(\mathrm{M}), \Lambda^p(\mathrm{N})).$$
$$\alpha \mapsto \Lambda^p \alpha$$

On désigne par C_p le cône des éléments de E de rang $\leqslant p$; ensemblistement on a $\mathrm{C}_p = \varphi_{p+1}^{-1}(\mathrm{O})$. Le groupe $\mathrm{GL(M)} \times \mathrm{GL(N)}$ opère transitivement dans $\mathrm{C}_p - \mathrm{C}_{p-1}$.

Dans ce numéro, on note U un sous-groupe unipotent maximal de $\mathrm{GL(M)} \times \mathrm{GL(N)}$.

Poposition 3. — *L'algèbre $k[\mathrm{C}_p]^{\mathrm{U}}$ est une algèbre de polynômes à p indéterminées engendrée par les vecteurs primitifs $u(\varphi_i)$ correspondant aux* $\mathrm{GL(M)} \times \mathrm{GL(N)}$*-morphismes* φ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$.

Preuve. — (a) Lorsque $m = n$ et après identification de M avec N et de $\mathrm{Hom}(\Lambda^n(\mathrm{N}), \Lambda^n(\mathrm{N}))$ avec k, φ_n est une application proportionnelle au déterminant sur E ; il est alors bien connu que φ_n est un générateur de $k[\mathrm{E}]^{\mathrm{SL(N)} \times \mathrm{SL(N)}}$ et par suite que φ_n est un élément irréductible de l'anneau $k[\mathrm{E}]$. La variété $\mathrm{E}-\mathrm{C}_{n-1}$ est $\mathrm{GL(N)} \times \mathrm{GL(N)}$-isomorphe à $\mathrm{GL(N)} \times \mathrm{GL(N)}/\mathrm{K}$ où $\mathrm{K} = \{(s,s), s \in \mathrm{GL(N)}\}$.

La démonstration de la proposition 3 lorsque $m = n$ se fait comme celle de la proposition 1. Pour obtenir l'analogue du lemme 1, il est nécessaire de connaître la dimension de $\mathrm{Hom(P,Q)}^{\mathrm{K}}$ (P,Q deux GL(N)-modules irréductibles) ; or cette dimension est égale à dim $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL(N)}}(\mathrm{P,Q}))$ et vaut 1 ou 0 suivant que P et Q sont isomorphes ou non (puisque K est l'ensemble des points fixes de l'automorphisme involutif $(s,t) \to (t,s)$ de $\mathrm{GL(N)} \times \mathrm{GL(N)}$, ce résultat rentre aussi dans le cadre de [8]).

(b) Lorsque $m \neq n$, $m < n$ par exemple (aux changements évidents près, le cas $m > n$ se traite de la même manière) on procède comme pour la proposition 2. On identifie M à un sous-espace de N, $\mathrm{G}' = \mathrm{GL(M)} \times \mathrm{GL(M)}$ à un sous-groupe de $\mathrm{G} = \mathrm{GL(M)} \times \mathrm{GL(N)}$ et $\mathrm{E}' = \mathrm{Hom(M,M)}$ à un sous-espace de $\mathrm{E} = \mathrm{Hom(M,N)}$. Le stabilisateur H du sous-espace E′ dans G contient un sous-groupe unipotent maximal U de G ; en fait U n'opère effectivement dans E′ que comme sous-groupe unipotent maximal U′ de G′ : en effet, dans une base de N dont les m-premiers vecteurs engendrent M, H est de la forme

$$\mathrm{GL(M)} \times \begin{pmatrix} \mathrm{GL(M)} & 0 \\ & \\ * & * \end{pmatrix}.$$

On note C_p (resp. C'_p) le cône des éléments de E (resp. E′) de rang $\leqslant p$; on a $G.C'_p = C_p$ et par restriction des homomorphismes

$$\phi : k[C_p]^U \rightarrow k[C'_p]^U = k[C'_p]^{U'}$$

dont on montre comme au numéro (2.2) que ce sont des isomorphismes.

THEOREME 3. – *La sous-variété fermée* C_p *de* Hom(M,N) *formée des éléments de rang* $\leqslant p$ *est normale ; la suite*

$$C_p \rightarrow \mathrm{Hom(M,N)} \overset{\varphi_{p+1}}{\rightarrow} \mathrm{Hom}(\Lambda^{p+1}(\mathrm{M}), \Lambda^{p+1}(\mathrm{N}))$$

est une présentation de C_p.

La preuve du théorème 3 est semblable à celle du théorème 1.

3. Sur la théorie des invariants des groupes classiques.

3.0 Les notations et conventions sont celles des paragraphes précédents.

Soit G un groupe algébrique réductif et X une variété algébrique affine ; on suppose que G opère (morphiquement) dans X. La sous-algèbre $k[X]^G$ de $k[X]$ formée des fonctions régulières sur X invariantes par G est de type fini ; on définit alors une variété algébrique affine X/G par $k[X/G] = k[X]^G$ et on désigne par $\pi : X \rightarrow X/G$ le morphisme correspondant à l'inclusion $k[X]^G \subset k[X]$. Le morphisme π est surjectif et possède la propriété universelle que voici : pour toute variété algébrique affine Y et tout morphisme $\varphi : X \rightarrow Y$ tel que $\varphi(s.x) = \varphi(x)$, $x \in X$, $s \in G$, il existe un unique morphisme $\psi : X/G \rightarrow Y$ tel que $\psi \circ \pi = \varphi$. Pour plus de détails au sujet du morphisme π voir [5] chap. 1.

L'expression "un point en position générale dans X possède la propriété (P)" signifie qu'il existe un ouvert dense de X formé de points vérifiant (P).

3.1 Soit N un espace vectoriel de dimension n et $f \in S^2(N')$ une forme bilinéaire symétrique sur N de rang maximum. Le groupe GL(N) opère dans $S^2(N')$; on note O(N) le sous-groupe d'isotropie de f. Soit M un espace vectoriel de dimension m. On considère les $GL(M) \times O(N)$-modules $E = \mathrm{Hom}(M,N)$ et $S^2(M')$ (O(N) opérant trivialement dans $S^2(M')$). On a alors un $GL(M) \times O(N)$-morphisme

$$\begin{aligned} \chi : E &\to S^2(M') \\ \alpha &\mapsto \alpha^*(f) \end{aligned}$$

où $\alpha^*(f)$ est la forme bilinéaire symétrique sur M définie par

$$\alpha^*(f)\,(x,y) = f(\alpha(x), \alpha(y)),\ x, y \in M\ ;$$

par définition de $\pi : E \to E/O(N)$, χ se factorise en

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ E/O(N) \arrow[rr, "\psi"] & & S^2(M') \end{tikzcd}$$

où ψ est un GL(M)-morphisme.

THEOREME 1. — *Le morphisme* ψ *est une immersion fermée d'image le cône* C_n *de* $S^2(M')$ *formé des éléments de rang* $\leqslant n$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin de deux lemmes.

LEMME 1. — *Soit* X *et* Y *deux variétés algébriques affines irréductibles et réduites et* $\psi : X \to Y$ *un morphisme surjectif et birationnel. Si* Y *est normale, alors* ψ *est un isomorphisme.*

Preuve. — On note $A = k[\psi]$, $B = k[X]$ et K le corps des quotients de A ; identifiant A à son image dans B, on peut supposer que $A \subset B \subset K$. D'après le corollaire du théorème 2 et le théorème 4 du § 1 de [2], A est l'intersection $\bigcap_{\mathfrak{p} \in I} A_{\mathfrak{p}}$, où I est l'ensemble des ideaux premiers de hauteur 1 de A ; de plus les $A_{\mathfrak{p}}$ sont des anneaux de valuation discrète. On suppose alors que A est distinct de B ; il existe donc $b \in B$ et $\mathfrak{p} \in I$ tel que $b \notin A_{\mathfrak{p}}$. Puisque les corps des fractions de A, $A_{\mathfrak{p}}$ et B coïncident, b s'écrit $b = u^r g$ où $u \in \mathfrak{p}$ est une uniformisante pour

$A_{\mathfrak{p}}$, $r < 0$ et g un élément inversible de $A_{\mathfrak{p}}$; on écrit encore $g = a'/a''$, a', $a'' \in A - \mathfrak{p}$, d'où l'égalité $bu^{-r}a'' = a'$ dans B. Comme $a' \notin \mathfrak{p}$, il existe un idéal maximal m_y de A tel que $\mathfrak{p} \subset m_y$ et $a' \notin m_y$. Soit alors m_x un idéal maximal de B tel que $m_x \cap A = m_y$ (un tel idéal existe d'après l'hypothèse de surjectivité de ψ). Alors, $a' \notin m_x$ d'une part et $bu^{-r}a'' \in m_x$ d'autre part, ce qui contredit l'égalité $a' = bu^{-r}a''$.

LEMME 2. – *On suppose* $m \geqslant n$; *pour tout* $\alpha \in E$ *de rang maximum,* $\chi^{-1}\chi(\alpha) = O(N).\alpha$.

La preuve du lemme 2 n'offre pas de difficultés.

Preuve du théorème 1. – (a) On a $\chi(E) = \psi(E/O(N)) = C_n$. Puisque π est surjectif, il suffit de montrer que l'image de χ est égale à C_n. Cette image est contenue dans C_n et contient visiblement un élément de rang p pour $0 \leqslant p \leqslant \inf(m,n)$; puisqu'elle est stable par GL(M), elle coïncide nécessairement avec C_n.

(b) Pour $m \geqslant n$, le morphisme $\psi : E/O(N) \to C_n$ est birationnel. On note V l'ouvert de E formé des éléments de rang maximum. D'après le lemme 2, pour $\alpha \in V$, on a $\pi^{-1}\pi(\alpha) = \chi^{-1}\chi(\alpha) = O(N).\alpha$; le morphisme $\psi : \pi(V) \to \chi(V)$ est donc bijectif, d'où l'affirmation (en caractéristique nulle, un morphisme bijectif est birationnel ; cf. [12] § 4 n° 4 et § 5 n° 3, ou § 5 n° 4).

(c) Il résulte du théorème 1 du § 2, du lemme 1 et de (a) et (b) que $\psi : E/O(N) \to C_n$ est un isomorphisme lorsque $m \geqslant n$.

(d) Le cas $m < n$.

Soit δ un homomorphisme surjectif $N \to M$; à δ correspondent des homomorphismes injectifs $E \to \mathrm{Hom}(N,N)$ et $S^2(M') \to S^2(N')$: le premier commute aux opérations de O(N) et induit une immersion fermée $E/O(N) \to \mathrm{Hom}(N,N)/O(N)$. On a de plus le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^2(M') & \rightarrow & S^2(N') \\ {\scriptstyle\psi_m}\uparrow & & {\scriptstyle\psi_n}\uparrow \\ E/O(N) & \rightarrow & \mathrm{Hom}(N,N)/O(N) \end{array}$$

où ψ_m et ψ_n sont comme dans l'énoncé du théorème. D'après ce qui précède, ψ_m est surjectif et ψ_n un isomorphisme ; on déduit alors immédiatement du fait que les flèches horizontales de ce diagramme représentent des immersions fermées, que ψ_m est un isomorphisme.

Remarque 1. – L'affirmation du lemme 2 est encore vraie lorsque $m < n$ pour α en position générale dans E ; sa démonstration n'étant plus tout-à-fait évidente, il a paru plus simple (et plus court) de déduire le cas $m < n$ du cas $m = n$.

Suivant (2.1), pour $1 \leqslant p \leqslant m$, on désigne par φ'_p le GL(M)-morphisme $S^2(M') \to S^2(\Lambda^p M')$ défini par $\varphi'_p(\alpha) = \Lambda^p \alpha$, $\alpha \in S^2(M')$ identifié à un élément de Hom(M,M'). Le corollaire que voici est une conséquence immédiate du théorème 1 ci-dessus et du théorème 1 § 2.

COROLLAIRE. – *La suite*

$$E/O(N) \xrightarrow{\psi} S^2(M') \xrightarrow{\varphi'_{n+1}} S^2(\Lambda^{n+1} M')$$

est une présentation de la variété E/O(N).

Remarque 2. – Soient (m_i) et (n_j) des bases respectives de M et N ; soient (μ_i) et (ν_j) les bases duales. Soit $f \in S^2(N')$ définie par $f(n_i, n_j) = \delta_{ij}$ $i, j = 1, \ldots, n$. Au moyen de ces bases, on identifie E avec l'ensemble des matrices $n \times m$ et $S^2(M')$ avec l'ensemble des matrices symétriques $m \times m$, si bien que χ est l'application $\alpha \to {}^t\alpha\alpha$. Notant enfin x_i les vecteurs colonne de α, $1 \leqslant i \leqslant m$, le corollaire précédent redonne les résultats classiques relatifs à $k[E]^{O(N)}$ (cf. [9] chap. II § 9 et 17), à savoir que l'ensemble des "produits scalaires" (x_i, x_j) constituent un système de générateurs de $k[E]^{O(N)}$, qu'il n'y a pas de relations entre ceux-ci si $m \leqslant n$, et que toute relation pour $m > n$ est conséquence des relations exprimant que les mineurs d'ordre $(n + 1)$ de la matrice symétrique $((x_i, x_j))$ sont nuls.

3.2 Soit N un espace vectoriel de dimension $2n$ et $f \in \Lambda^2(N')$ une forme bilinéaire antisymétrique sur N de rang maximum. Le groupe GL(N) opère dans $\Lambda^2(N')$; on note Sp(N) le sous-groupe d'isotropie de f. Soit M un espace vectoriel de dimension m. On considère les GL(M) × Sp(N)-modules E = Hom(M,N) et $\Lambda^2(M')$ (Sp(N) opérant trivialement dans $\Lambda^2(M')$). On a alors un GL(M) × Sp(N)-morphisme

$$\chi : E \to \Lambda^2(M')$$
$$\alpha \mapsto \alpha^*(f)$$

où $\alpha^*(f)$ est la forme bilinéaire antisymétrique sur M définie par

$$\alpha^*(f)\ (x, y) = f(\alpha(x), \alpha(y)), \quad x, y \in M \ ;$$

par définition de π : E/Sp(N), χ se factorise en

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ E/Sp(N) \arrow[rr, "\psi"] & & \Lambda^2(M') \end{tikzcd}$$

où ψ est un GL(M)-morphisme.

Exactement comme au numéro (3.1) on démontre le théorème suivant et son corollaire.

THEOREME 2. – *Le morphisme ψ est une immersion fermée d'image le cône C_n de $\Lambda^2(M')$ formé des éléments de rang* (*ou de support de dimension*) $\leqslant 2n$.

Suivant (2.2), pour $1 \leqslant p \leqslant [m/2]$, on désigne par φ_p le GL(M)-morphisme $\Lambda^2(M') \to \Lambda^{2p}(M')$ défini par $\varphi_p(\alpha) = \alpha \wedge \ldots \wedge \alpha$ (p-fois).

COROLLAIRE. – *La suite*

$$E/Sp(N) \xrightarrow{\psi} \Lambda^2(M') \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \Lambda^{2n+2}(M')$$

est une présentation de E/Sp(N).

Remarque 3. – L'affirmation analogue à celle du lemme 2 selon laquelle $\chi^{-1}\chi(\alpha) = Sp(N).\alpha$ pour α en position générale dans E n'est pas vraie pour m impair plus petit que $2n$; c'est aussi une raison pour ne pas prouver directement que $\psi : E/Sp(N) \to C_n$ est birationnel pour $m < 2n$ (cf. remarque 1).

Remarque 4. – Soient (m_i) et (n_j) des bases respectives de M et N ; soient (μ_i) et (ν_j) les bases duales. Soit $f \in \Lambda^2(N')$ définie par $f(n_i, n_j) = \delta_{i,2s-1}\ \delta_{i+1,j}$ $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$, $1 \leqslant s \leqslant n$. Au moyen de ces bases on identifie E avec l'ensemble des matrices $2n \times m$ et $\Lambda^2(M')$ avec l'ensemble des matrices antisymétriques $m \times m$, si bien que χ est l'application $\alpha \to {}^t\alpha A \alpha$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notant x_i les vecteurs colonne de α, $1 \leqslant i \leqslant m$, le corollaire précédent redonne les résultats classiques relatifs à un système de générateurs de $k[\mathrm{E}]^{\mathrm{Sp(N)}}$ (cf. [9] chap. VI § 1) : l'ensemble des "produits scalaires alternés" $[x_i, x_j]$ engendre $k[\mathrm{E}]^{\mathrm{Sp(N)}}$. Au même endroit H. Weyl donne comme système de générateurs pour l'idéal des relations entre les $[x_i, x_j]$ les n (comprenez $n+1$) relations

$$(*)\quad \begin{aligned} \mathrm{J}_1 &\equiv \Sigma \pm [x_0, y_0]\,[x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0 \\ \mathrm{J}_2 &\equiv \Sigma \pm [x_0, y_0]\,[x_1, y_1]\,[x_2, y_2]\,[x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0 \\ &\ \ \vdots \\ \mathrm{J}_{n+1} &\equiv \Sigma \pm [x_0, y_0]\,[x_1, y_1] \ldots [x_{2n}, y_{2n}] = 0 \end{aligned}$$

où les sommations sont étendues à l'ensemble des permutations des $2n+1$ vecteurs $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ (en tenant compte de la signature).

Pour interpréter ces relations, on a besoin de quelques notations.

Pour $s \geqslant 1$, on définit

$$i_1 : \Lambda^s(\mathrm{M}') \to \mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \Lambda^{s-1}(\mathrm{M}'))$$

par $[i_1(\alpha)(y)](z_1, \ldots, z_{s-1}) = \alpha(y, z_1, \ldots, z_{s-1})$, $y, z_i \in \mathrm{M}$; l'élément $i_1(\alpha)(y)$ de $\Lambda^{s-1}(\mathrm{M}')$ est donc égal au produit intérieur $i(y)\,\alpha$ de $y \in \mathrm{M}$ et $\alpha \in \Lambda^s(\mathrm{M}')$.

Pour $\omega \in \Lambda^2(\mathrm{M}')$ et $1 \leqslant s \leqslant n+1$ on pose ensuite

$$\mathrm{J}_s(\omega) : \Lambda^{2s-1}(\mathrm{M}) \to \Lambda^{2n+1}(\mathrm{M}')$$

$$(y_1, \ldots, y_{2s-1}) \mapsto i(y_1)\,\omega \wedge \ldots \wedge i(y_{2s-1})\,\omega \wedge \omega^{n-s+1}.$$

Alors, les résultats de H. Weyl signifient que la suite

$$\mathrm{E}/\mathrm{Sp(N)} \xrightarrow{\psi} \Lambda^2(\mathrm{M}') \to \bigoplus_{s=1}^{n+1} \mathrm{Hom}\,(\Lambda^{2s-1}(\mathrm{M}), \Lambda^{2n+1}(\mathrm{M}'))$$

$$\omega \mapsto (\mathrm{J}_1(\omega), \ldots, \mathrm{J}_{n+1}(\omega))$$

est une présentation de la variété E/Sp(N).

D'autre part, puisque le produit intérieur $i(y)$ est une anti-dérivation de $\Lambda(\mathrm{M}')$, on a le diagramme commutatif (à une homothétie près).

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda^{2n+2}(\mathrm{M}') \arrow[d, "i_1"] \\
\Lambda^2(\mathrm{M}') \arrow[ur, "\varphi_{n+1}"] \arrow[r, "\mathrm{J}_1"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{M}\,,\Lambda^{2n+1}(\mathrm{M}'))
\end{tikzcd}$$

où i_1 est injectif. L'énoncé du corollaire du théorème 2 peut donc prendre la forme : la suite

$$\mathrm{E}/\mathrm{Sp}(\mathrm{N}) \xrightarrow{\ \psi\ } \Lambda^2(\mathrm{M}') \xrightarrow{\ \mathrm{J}_1\ } \mathrm{Hom}(\mathrm{M}\,,\Lambda^{2n+1}(\mathrm{M}'))$$

est une présentation de $\mathrm{E}/\mathrm{Sp}(\mathrm{N})$. On en déduit que les relations (*) sont surabondantes et en fait que les relations J_s, $s > 1$, sont conséquences de J_1. Une preuve directe de ce résultat est donnée dans l'annexe.

3.3. Soit N, P et Q des espaces vectoriels de dimension n, p et q respectivement. On considère les $\mathrm{GL(P)} \times \mathrm{GL(Q)} \times \mathrm{GL(N)}$ – modules $\mathrm{E} = \mathrm{Hom}(\mathrm{P}\,,\mathrm{N}) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Q}\,,\mathrm{N}')$ et $\mathrm{Hom}(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q}')$ ($\mathrm{GL(N)}$ opérant trivialement dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q}')$). On a alors un $\mathrm{GL(P)} \times \mathrm{GL(Q)} \times \mathrm{GL(N)}$ – morphisme

$$\begin{aligned} \chi : \mathrm{E} &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q}') \\ (\alpha\,,\beta) &\longmapsto {}^t\beta\alpha \end{aligned}$$

qui par définition de $\pi : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}/\mathrm{GL(N)}$ se factorise en

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{E} \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\
\mathrm{E}/\mathrm{GL(N)} \arrow[rr, "\psi"] & & \mathrm{Hom}(\mathrm{P}\,,\mathrm{Q}')
\end{tikzcd}$$

où ψ est un $\mathrm{GL(P)} \times \mathrm{GL(Q)}$ – morphisme.

THEOREME 3. — *Le morphisme* ψ *est une immersion fermée d'image le cône* C_n *de* Hom(P , Q′) *formé des éléments de rang* $\leqslant n$.

La démonstration du théorème 3 se fait comme celle du théorème 1. On commence par supposer que $\min(p,q) \geqslant n$, auquel cas il est facile d'avoir un analogue du lemme 2 (i.e. pour x en position générale dans E, $\chi^{-1}\chi(x) = GL(N) . x)$; on déduit ensuite le cas $\min(p , q) < n$ du cas $\min(p , q) = n$.

Suivant (2.3.), pour $1 \leqslant s \leqslant \min(p , q)$, on note φ_s le

$$GL(P) \times GL(Q) - \text{morphisme } \mathrm{Hom}(P , Q') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^s(P) , \Lambda^s(Q'))$$

défini par $\varphi_s(\alpha) = \Lambda^s\alpha$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(P , Q')$. En utilisant cette fois le théorème 3 du § 2, on obtient le

COROLLAIRE. — *La suite*

$$E/GL(N) \xrightarrow{\ \psi\ } \mathrm{Hom}(P , Q') \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \mathrm{Hom}(\Lambda^{n+1}(P) , \Lambda^{n+1}(Q'))$$

est une présentation de E/GL(N).

3.4. Soit M et N deux espaces vectoriels de dimension m et n respectivement. On considère les GL(M) x SL(N) — modules E = Hom(M , N) et $\mathrm{Hom}(\Lambda^n(M) , \Lambda^n(N))$: le dernier n'est différent de 0 que pour $m \geqslant n$, le groupe SL(N) y opère trivialement et considéré comme GL(M) — module, il est irréductible. On a alors un GL(M) x SL(N) — morphisme

$$\begin{aligned} \chi : E &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^n(M) , \Lambda^n(N)) \\ \alpha &\longmapsto \Lambda^n\alpha \end{aligned}$$

qui par définition de $\pi : E \longrightarrow E/SL(N)$ se factorise en

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\chi"] & \\ E/SL(N) \arrow[rr, "\psi"] & & \mathrm{Hom}(\Lambda^n(M) , \Lambda^n(N)) \end{tikzcd}$$

où ψ est un GL(M) — morphisme (χ est le morphisme φ_n considéré en (2.3)).

THEOREME 4. — *Le morphisme* ψ *est une immersion fermée d'image l'adhérence de l'orbite d'un élément primitif du* GL(M) – *module irréductible* $\mathrm{Hom}(\Lambda^n(\mathrm{M}), \Lambda^n(\mathrm{N}))$.

La preuve du théorème 4 est semblable à celle du théorème 1. On suppose que $m \geqslant n$ (sinon $\mathrm{E}/\mathrm{SL}(\mathrm{N}) = \{*\}$ et il n'y a rien à démontrer). Pour montrer que l'image de ψ est égale à l'adhérence C de l'orbite d'un élément primitif de $\mathrm{Hom}(\Lambda^n(\mathrm{M}), \Lambda^n(\mathrm{N}))$, il suffit de montrer que l'image de χ est égale à C. On vérifie très facilement que si $\alpha \in \mathrm{E}$ est de rang n (resp. de rang $< n$), alors $\chi(\alpha) \in \mathrm{C} - (0)$ (resp. $\chi(\alpha) = 0$) ; on a donc $\chi(\mathrm{E}) \subset \mathrm{C}$ et $\chi(\mathrm{E}) \neq (0)$, d'où l'affirmation puisque $\chi(\mathrm{E})$ est stable par GL(M) et puisque GL(M) n'a que deux orbites dans C. On procède ensuite comme en (3.1) en utilisant cette fois le théorème 2 du § 1.

Remarque 5. — Un système de générateurs de l'idéal de C dans $\mathrm{Hom}(\Lambda^n(\mathrm{M}), \Lambda^n(\mathrm{N})) \approx \Lambda^n(\mathrm{M}')$ est bien connu (cf. [4] vol. 1 chap. 7 § 7) ; on peut interpréter ces résultats en disant que la suite

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{C} & \longrightarrow & \Lambda^n(\mathrm{M}') & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Hom}(\Lambda^{n-1}(\mathrm{M}), \Lambda^{n+1}(\mathrm{M}')) \\ & & \omega & \longrightarrow & (y \longrightarrow i(y)\ \omega \wedge \omega) \end{array}$$

où $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ et $i(y)\,\omega$ est la forme linéaire sur M définie par $[i(y)\,\omega](z) = \omega(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ — avec les notations de l'annexe $\varphi(\omega)$ est égal à $i_{n-1}(\omega) \wedge i_0(\omega)$ — est une présentation de C.

Annexe.

Cette annexe se rapporte à la remarque 4 du § 3 ; on y donne une preuve directe du fait que le système de relations $\mathrm{J}_1, \dots, \mathrm{J}_{n+1}$ entre les générateurs de $k[\mathrm{E}]^{\mathrm{Sp(N)}}$ est surabondant.

1. Soit M un espace vectoriel de dimension finie ; on note M′ le dual de M, $\Lambda^p(\mathrm{M})$ la puissance extérieure p-ième de M et $\Lambda(\mathrm{M})$ l'algèbre extérieure de M. On considère l'algèbre produit tensoriel $\Lambda(\mathrm{M}') \otimes \Lambda(\mathrm{M}')$; par transport de structure, on obtient une structure d'algèbre associative sur $\mathrm{Hom}(\Lambda(\mathrm{M}), \Lambda(\mathrm{M}'))$ dont le produit est

comme suit : pour $u \in \mathrm{Hom}(\Lambda^r(\mathrm{M}), \Lambda(\mathrm{M}'))$ et $v \in \mathrm{Hom}(\Lambda^s(\mathrm{M}), \Lambda(\mathrm{M}'))$, le produit $u \Lambda v$ de u et v est l'élément de $\mathrm{Hom}(\Lambda^{r+s}(\mathrm{M}), \Lambda(\mathrm{M}'))$ défini par

$$u \Lambda v(y_1, \ldots, y_{r+s}) = \frac{1}{r!\, s!} \Sigma\, \epsilon(\sigma)\, u(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(r)}\ \Lambda$$

$$v(y_{\sigma(r+1)}, \ldots, y_{\sigma(r+s)}),$$

la somme étant étendue à l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, r+s\}$, $y_i \in \mathrm{M}$.

Remarque. – l'application $\mathrm{Hom}(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \to \mathrm{Hom}(\Lambda^r(\mathrm{M}), \Lambda^r(\mathrm{M}'))$ qui à u fait correspondre $u \Lambda \cdots \Lambda u$ (r-fois) est à un facteur près celle qui est induite par le foncteur Λ^r.

Pour $r \geqslant 0$, on introduit les homomorphismes

$$i_r : \Lambda(\mathrm{M}') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^r(\mathrm{M}), \Lambda(\mathrm{M}'))$$

définis pour $\alpha \in \Lambda^s(\mathrm{M}')$ par

$$[i_r(\alpha)\,(z_1, \ldots, z_r)]\,(y_1, \ldots, y_{s-r}) = \alpha(z_1, \ldots, z_r, y_1, \ldots, y_{s-r})$$

lorsque $s \geqslant r$ et par $i_r(\alpha) = 0$ lorsque $s < r$, y_i, $z_j \in \mathrm{M}$.

Dans la suite on se donne deux entiers positifs p et q. On considère les homomorphismes

$$f_r : \otimes^q(\Lambda^2 \mathrm{M}') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^p(\mathrm{M}) . \Lambda^{2q-p}(\mathrm{M}'))$$

définis pour $\max(0, p-q) \leqslant r \leqslant [p/2]$ par la formule

$$f_r(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_q) = i_2(\omega_1) \Lambda \cdots \Lambda\, i_2(\omega_r) \Lambda\, i_1(\omega_{r+1}) \Lambda \ldots \Lambda$$

$$i_1(\omega_{p-r}) \Lambda\, i_0(\omega_{p-r+1}) \Lambda \ldots \Lambda\, i_0(\omega_q).$$

De plus, on définit un homomorphisme

$$g : \otimes^q(\Lambda^2(\mathrm{M}') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^p(\mathrm{M}), \Lambda^{2q-p}(\mathrm{M}'))$$

par la formule

$$g(\omega_1 \otimes \ldots \otimes \omega_q) = i_p(\omega_1 \Lambda \ldots \Lambda \omega_q).$$

Le but de ce numéro est de démontrer le résultat suivant :

LEMME. – *Il existe des constantes non nulles c_r (ne dépendant que de p, q et r) telles que, pour tout $\omega \in \Lambda^2(\mathrm{M}')$, on ait*

$$g(\omega\otimes\ldots\otimes\omega) = \sum_{r=\max(0,p-q)}^{[p/2]} c_r f_r(\omega\otimes\ldots\otimes\omega)$$

Preuve. – a) On désigne par $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots ,\} 2q$ et par P_j la paire $\{2j-1, 2j\}$, $1 \leqslant j \leqslant q$. Pour max $(0,p-q) \leqslant r \leqslant [p/2]$, on note A_r le sous-ensemble de $\mathfrak{S}$ formé des permutations σ telles qu'il existe r paires P_i avec $\sigma(\mathrm{P}_j) \subset \{1, \ldots, p\}$ et $p-2r$ paires P_j avec $\sigma(\mathrm{P}_j) \cap \{1, \ldots, p\}$ est réduit à un élément. On désigne par G le sous-groupe de $\mathfrak{S}$ formé des σ telles que $\sigma(\{1, \ldots, p\}) = \{1, \ldots, p\}$ et par H le sous-groupe de $\mathfrak{S}$ formé des éléments qui induisent une permutation des P_j, $1 \leqslant 1 \leqslant q$: on fait opérer $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ dans $\mathfrak{S}$ par $(\sigma_1, \sigma_2).\sigma = \sigma_1 \sigma \sigma_2^{-1}$, $\sigma_1 \in \mathrm{G}$, $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\sigma_2 \in \mathrm{H}$. Il est facile de vérifier que A_r est $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$-homogène.

b) On considère l'opération naturelle de $\mathfrak{S}$ dans le produit Π^{2q} M, puis l'opération associée de $\mathfrak{S}$ dans l'ensemble des fonctions sur Π^{2q} M.

A tout $\omega \in \Lambda^2(\mathrm{M}')$, on fait correspondre l'application

$$\begin{aligned} \underline{\omega}^q : \Pi^{2q}\,\mathrm{M} &\longrightarrow k \\ y = (y_1, \ldots, y_{2q}) &\longmapsto \prod_{j=1}^{q} \omega(y_{2j-1}, y_{2j}). \end{aligned}$$

Puisque ω est alternée, on a $\sigma.\underline{\omega}^q = \epsilon(\sigma)\underline{\omega}^q$ pour $\sigma \in \mathrm{H}$. De là et du fait que A_r est $\mathrm{G}\times\mathrm{H}$-homogène, résulte que la somme

$$\sum_{\tau \in \mathrm{G}.\sigma} \epsilon(\tau)\, \tau . \underline{\omega}^q$$

est indépendante du choix de $\sigma \in \mathrm{A}_r$; par suite, il existe des constantes non nulles a_r – en fait $a_r = 2^{p-2r}\binom{s}{r}\binom{s-r}{p-2r}$ – telles que

$$\sum_{\tau \in \mathrm{A}_r} \epsilon(\tau)\tau.\underline{\omega}^q = a_r \sum_{\tau \in \mathrm{G}.\rho} \epsilon(\tau)\, \tau . \underline{\omega}^q$$

où ρ est l'élément de A_r dont la restriction à $\{1, \ldots, 2r\}$ et $\{2p-2r+1, \ldots, 2q\}$ est l'identité et dont la restriction à $\{2r+1, \ldots, 2p-2r\}$ est du genre

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \ldots & n_{2j-1} & n_{2j} & \ldots & n_{2s-1} & n_{2s} \\ n_1 & n_{s+1} & \ldots & n_j & n_{s+j} & \ldots & n_s & n_{2s} \end{pmatrix}.$$

c) Par définition on a

$$2^{q-p+2r}\ [f_r(\omega\otimes\ldots\otimes\omega)\ (y_1, \ldots, y_p)]\ (y_{p+1}, \ldots, y_{2q}) =$$

$$\sum_{\sigma\in G} \epsilon(\sigma)\ \omega(y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}) \ldots \omega(y_{\sigma(2r-1)}, y_{\sigma(2r)})\ \omega(y_{\sigma(2r+1)}, y_{\sigma(p+1)}) \ldots .$$

$$\ldots \omega(y_{\sigma(p)}, y_{\sigma(2p-2r)})\ \omega(y_{\sigma(2p-2r+1)}, y_{\sigma(2p-2r+2)}) \ldots \omega(y_{\sigma(2q-1)}, y_{\sigma(2q)})$$

$$= \sum_{\tau\in G.\rho} \epsilon(\rho)\, \epsilon(\tau)\, \tau\, .\, \underline{\omega}^q\ (y).$$

On a donc :

$$2^q\ [g(\omega\otimes\ldots\otimes\omega)\ (y_1, \ldots, y_p)]\ (y_{p+1}, \ldots, y_{2q}) = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}} \epsilon(\tau)\tau . \underline{\omega}^q\ (y) =$$

$$\sum_{r=\max(0,p-q)}^{[p/2]}\ \sum_{\tau\in A_r} \epsilon(\tau)\ \tau\, .\ \underline{\omega}^q\ (y) = \sum_{r=\max(0,p-q)}^{[p/2]} a_r \sum_{\tau\in G.\rho} \epsilon(\tau)\ \tau\ .\ \underline{\omega}^q(y)$$

$$= \sum_{r=\max(0,p-q)}^{[p/2]} \epsilon(\rho)\, a_r\, 2^{q-p+2r}\ [f_r(\omega\otimes\ldots\otimes\omega)\ (y_1, \ldots, y_p)]\ (y_{p+1}, \ldots, y_{2q}),$$

d'où la conclusion.

2. On rappelle que pour $\omega\in\Lambda^2(M')$, la relation J_s est donnée par

$$J_s(\omega) : \Lambda^{2s-1}(M) \longrightarrow \Lambda^{2n+1}\ (M')$$

$$(y_1, \ldots, y_{2s-1}) \longmapsto i(y_1)\ \omega \wedge \ldots \wedge i(y_{2s-1})\ \omega \wedge \omega^{n-s+1}$$

et que J_1 est équivalente à φ_{n+1}.

Posant $p = 2s - 1$ *et* $q = n + s$, $J_s(\omega)$ est proportionnel à $f_0(\omega\otimes\ldots\otimes\omega)$; de plus, pour $0 \leqslant r \leqslant s - 1 = [p/2]$, le produit dans $\mathrm{Hom}(\Lambda(M), \Lambda(M'))$ de $i_2(\omega) \wedge \ldots \wedge i_2(\omega)$ (r-fois) et de $J_{s-r}(\omega)$ est proportionnel à $f_r(\omega\otimes\ldots\otimes\omega)$. On a donc les diagrammes commutatifs (à homothétie près).

$$\begin{tikzcd}
 & \otimes^{n+s}(\Lambda^2 M') \arrow[r, "f_r"] & \mathrm{Hom}(\Lambda^{2s-1}(M), \Lambda^{2n+1}(M') \\
\Lambda^2(M') \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "d\otimes 1"'] & & \\
 & \otimes^r(\Lambda^2 M')\otimes\Lambda^2(M') \arrow[r, "i_2\otimes J_{s-r}"] & \mathrm{Hom}(\Lambda^{2r}(M), k)\otimes\mathrm{Hom}(\Lambda^{2s-2r-1}(M), \Lambda^{2n+1}(M')) \arrow[uu, "\Lambda"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches d sont les applications diagonales $\omega \mapsto \omega\otimes\ldots\otimes\omega$.

D'autre part, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^2(M') \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & \otimes^{n+s}(\Lambda^2 M') \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "\varphi_{n+1}\otimes\varphi_{s-1}"'] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(\Lambda^{2s-1}(M), \Lambda^{2n+1}(M')) \\
 & \Lambda^{2n+2}(M')\otimes\Lambda^{2s-2}(M') \arrow[rr, "\Lambda"] & & \Lambda^{2n+2s}(M') \arrow[ur, "i_{2s-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Le lemme montre alors que la relation J_s est conséquence des relations $J_{s-1}, \ldots, J_1$ et φ_{n+1}, donc des relations $J_{s-1}, \ldots, J_1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Atiyah, R. Bott, V.K. Patodi, On the Heat Equation and the Index Theorem, *Inventiones math.*, 19 (1973), 279-330.

[2] N. Bourbaki, Algèbre commutative, chap. 7, Hermann (1965).

[3] F. Grosshans, Observable groups and Hilbert's fourteenth problem, *Amer, J. Math.*, 95 (1973), 229-253.

[4] W.V.D. Hodge, D. Pedoe, Methods of Algebraic Geometry, Cambridge University Press (1968).

[5] D. Mumford, Geometric invariant theory, Springer (1965).

[6] V.L. Popov, E.B. Vinberg, On a class of quasihomogeneous affine varieties, *Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser. Mat.*, Tom 36 n° 4 (1972), 749-764 ; english transl. : *Mathematics of the USSR-Izvestija*, vol. 6 n° 4, (1972), 743-758.

[7] M. ROSENLICHT, On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 101, n° 2 (1961), 211-223.

[8] Th. VUST, Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes, *Bull. Soc. math. France*, 102 (1974), 317-333.

[9] H. WEYL, Classical groups, Princeton University Press (1946).

[10] A. BOREL, Linear algebraic groups, Benjamin (1969).

[11] Séminaire C. CHEVALLEY, Classification des groupes de Lie algébriques, Ecole Normale Supérieure, Paris (1958).

[12] J. DIEUDONNE, Cours de géométrie algébrique, Presses universitaires de France (1974).

Manuscrit reçu le 19 décembre 1974
Accepté par J. Dieudonné.

Thierry VUST,
Université de Genève
Institut de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
CH-1211 Genève 24.