ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PAUL MALLIAVIN

Équation de la chaleur associée à une fonction plurisousharmonique d'exhaustion et comportement frontière

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 447-464

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_447_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 447-464.

ÉQUATION DE LA CHALEUR ASSOCIÉE A UNE FONCTION PLURISOUSHARMONIQUE D'EXHAUSTION ET COMPORTEMENT FRONTIÈRE

par Paul MALLIAVIN

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

Étant donné une fonction plurisousharmonique d'exhaustion p, définie sur une variété de Stein, on associera à p une équation de la chaleur dans laquelle le temps sera constitué par la *coordonnée radiale* p.

On obtient ainsi une interprétation de la distorsion intervenant dans la *convergence admissible* de A. Koranyi [13] en termes du comportement de la solution élémentaire de cette équation de la chaleur.

Des formules de représentation intégrale de $\log|f|$, où f est holomorphe, seront obtenues, ces formules ne font intervenir que la connaissance des zéros de f dans une « couronne » (contrairement au cas de la dimension complexe 1). Un énoncé majorant la croissance d'un diviseur de la classe de Nevanlinna en sera également une conséquence.

La théorie de Calderon-Lusin de l'intégrale d'aire peut être développée dans ce contexte, parallèle à la théorie développée par E. Stein [18] dans le cas d'une métrique du type de Bergmann. Une des méthodes utilisées est un *calcul symbolique* qui, ne faisant pas intervenir de temps d'arrêt, pourrait, semble-t-il, donner des informations dans le cas des bimartingales. Le théorème de Paley-Littlewood admissible est enfin obtenu comme corollaire.

TABLE DES MATIÈRES

1. Équation de la chaleur associée à une fonction d'exhaustion.

Soit V une variété analytique complexe de dimension n, connexe, p une fonction réelle positive de classe C^3, définie sur V, strictement plurisousharmonique, de différentielle $\partial p \neq 0$ en tout point. Supposons que $p^{-1}([\varepsilon, R])$ est une partie compacte de V pour tout $\varepsilon > 0$, $R < +\infty$.

Munissons V de la métrique kählérienne

1.1. $$ds^2 = \partial\bar{\partial} p.$$

Nous *ne supposerons pas* que V soit *complète* pour cette métrique; le gradient de p relativement à 1.1. est noté ∇p, sa longueur est notée $\|\nabla p\|$. On définit un champ de vecteur sur V

1.2.1. $$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{n-1}{\|\nabla p\|^2} \cdot \nabla p$$

(où n est la dimension complexe de V).

Alors

1.2.2. $$\frac{\partial}{\partial t} p = n - 1$$

1.3. *Laplacien de J.-J. Kohn* [11].

Chaque variété $V_\xi = p^{-1}(\xi)$ est munie de la métrique riemannienne induite par 1.1. Soit $z_0 \in V_\xi$. Notons par u_{z_0} la carte normale de centre z_0, $u_{z_0}\colon T_{z_0}(V_\xi) \to V_\xi$. Soit

$T^{\mathbf{C}}_{z_0}(V_\xi) = T_{z_0}(V_\xi) \cap i T_{z_0}(V_\xi)$ le plan tangent complexe à V_ξ.

Définissons le laplacien $\Delta^{K}_{z_0}$ par la formule

$$1.3.1. \qquad (\Delta^{K}_{z_0} f)(z_0) = \sum_{s=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta_s \partial\overline{\zeta}_s} f(u_{z_0}(\zeta))\right]_{\zeta=0}$$

où $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ est un système de coordonnées orthonormales de $T^{C}_{z_0}(V_\xi)$ pour la métrique induite sur $T^{C}_{z_0}(V_\xi)$ par $(\partial\overline{\partial}p)_{z_0}$. La formule 1.3.1. a un sens si f est une fonction de classe C^2 définie sur V_ξ. Plus généralement si h est une fonction de classe C^2 définie sur V nous posons

$$(\Delta^{K} h)(z_0) = (\Delta^{K}_{z_0} h_\xi)(z_0)$$

où h_ξ dénote la restriction de h à $p^{-1}(p(z_0))$.

1.4. Théorème. — *Soit h une fonction pluriharmonique définie sur* V, *alors h satisfait l'équation de la chaleur*

$$1.4.1. \qquad -\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta^{K} u$$

Preuve. — Elle dépendra des lemmes suivants; par souci d'être complet nous indiquerons leurs démonstrations bien qu'il s'agisse souvent de faits bien connus.

1.4.2. Lemme. — *Soit $z_0 \in V$, alors il existe une carte locale analytique complexe φ telle que les coefficients de Riemann Christofell de la métrique riemannienne* 1.1. *s'annulent tous en z_0.*

Preuve. — Soit $\tilde{\varphi}$ une carte locale analytique quelconque. Posons

$$\tilde{z}^k = z^k + \frac{1}{2} \sum_{j,q} a^k_{j,q} z^j z^q$$

$$ds^2 = \sum_{r,s} \tilde{p}_{r,\bar{s}} (dz^r + a^r_{j,q} z^j dz^q)(d\overline{z}^s + \overline{a}^s_{l,m} \overline{z}^l d\overline{z}^m)$$

où l'on note les dérivées partielles par des indices inférieurs. Soit ν un indice de dérivation. Dérivons par rapport à ν la forme hermitienne en $dz^q\, d\overline{z}^{\bar{s}}$ figurant dans le second membre et faisons $z = 0$, on obtient en écrivant que cette dérivée est nulle

$$\tilde{p}_{r,\bar{s},\nu}\, dz^r\, d\overline{z}^s + \tilde{p}_{q,\bar{s}} a^q_{\nu,r}\, dz^q\, d\overline{z}^{\bar{s}} = 0$$

ou encore

$$\tilde{p}_{r,\bar{s},u} + \tilde{p}_{q,\bar{s}} a^q_{v,r} = 0.$$

La matrice hermitienne $\tilde{p}_{v,\bar{s}}$ étant définie positive et ainsi inversible on en déduit le calcul des $a^v_{u,r}$ et 1.4.2. est établi.

1.4.3. Les calculs des opérateurs du second ordre introduits ne faisant intervenir que des dérivées secondes de la métrique, il suffit d'établir 1.4.1. dans le cas où V est l'espace $\mathbf{C}^n$ muni de sa métrique hermitienne canonique. En prenant comme premier vecteur de base de $\mathbf{C}^n$ un vecteur proportionnel à ∇p et utilisant le fait que d'après 1.4.2. toutes les dérivées $p_{r,\bar{s},u}(z_0)$ sont nulles on obtient, posant $z_0 = 0$,

$$p(z) - p(z_0) = -\alpha \operatorname{Re}(z^1) + \operatorname{Re}(\psi(z)) + \|z\|^2 + 0(\|z\|^3)$$

où $\psi(z)$ est un polynôme holomorphe en z contenant des termes de degré 2 et 3.

1.4.4. Lemme. — *Soit* V_0 *une sous-variété de* $\mathbf{R}^{2n}$, *de dimension* $2n-1$, *d'équation* $x^1 = u(y)$ *où* $y \in \mathbf{R}^{2n-1}$, $u(0) = u'(0) = 0$. *Munissons* V_0 *de la métrique riemannienne induite par la métrique euclidienne de* $\mathbf{R}^{2n}$, *alors la carte*

$$y \to (u(y), y)$$

est tangente à la carte normale.

Preuve. —

$$ds^2_{V_0} = \sum_s (dy^s)^2 + \sum_{s,l} \frac{\partial u}{\partial y^s}\frac{\partial u}{\partial y^l}\, dy^s\, dy^l$$

les coefficients de la seconde forme quadratique possèdent un zéro d'ordre 2 à l'origine, d'où l'annulation des coefficients de Riemann Christofell à l'origine.

1.4.5. *Preuve du théorème.* — Posons $z = (z^1, v) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1}$. Soit

$$\theta(v) = \alpha^{-1}[\|v\|^2 + \operatorname{Re}(\tilde{\psi}(v))]$$

où $\tilde{\psi}(v) = \psi(0, v)$, ψ étant défini en 1.4.3. Alors d'après 1.4.3. et 1.4.4.

$(\Delta^{\mathrm{K}}h)(z_0) = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial v_s\, \partial \overline{v}_s} h(\theta(v), v)$ cette formule étant prise en $v = 0$. Posons

$$\Delta_v = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial v_s \partial \overline{v}_s}.$$

En tenant compte que $(\nabla \theta)(z_0) = 0$ on obtient en faisant $v = 0$ dans le second membre

$$(\Delta h^{\mathrm{K}})(z_0) = \Delta_v(h(0, v)) + h_{x^1}(\Delta_v\theta)(v)$$

Tenant compte du fait que $\mathrm{Re}\,(\tilde{\psi})$ est pluriharmonique on obtient finalement

$$1.4.6. \qquad (\Delta_v\theta)(0) = (n-1)$$

et

$$(\Delta^{\mathrm{K}}h)(z_0) = (\Delta_v h(0, v))_{v=0} + \alpha^{-1}(n-1)h_{x^1}(z_0)$$

En tenant compte des différentes constantes de normalisation ceci s'écrit

$$1.4.7. \qquad \left(\Delta^{\mathrm{K}}h + \frac{\partial h}{\partial t}\right)(z_0) = (\Delta_v h(0, v))_{v=0}.$$

Si h est pluriharmonique le second membre est nul et le théorème est établi.

Fonctions plurisousharmoniques.

Si h est plurisousharmonique de classe C^2 on déduit de 1.4.7.

$$1.4.8. \qquad \left(\Delta^{\mathrm{K}} + \frac{\partial}{\partial t}\right)h \geqslant 0$$

1.5. *Expression de l'équation de la chaleur en coordonnées analytiques.*

Soit $\tilde{\varphi}$ une carte locale analytique quelconque, définie au voisinage de z_0; $\tilde{\varphi}$ permet d'identifier $T_z^{\mathbf{C}}(V_\xi)$ à un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$. On peut trouver localement un isomorphisme J_z de $\mathbf{C}^{n-1}$ sur ce sous-espace, unitaire pour les structures hermitiennes de $\mathbf{C}^{n-1}$ et celle induite par 1.1., dépendant de z de classe C^2.

Lemme. — *Soit* h *une fonction de classe* C^2 *sur* V, *alors*

1.5.4. $$\left(\Delta^K + \frac{\partial}{\partial t}\right)h(z) = \left[\sum_{s=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial\zeta_s\partial\bar{\zeta}_s}(J_z(\zeta))\right]_{\zeta=0}$$

Preuve. — Il suffit de vérifier cette identité en z_0, la carte $\tilde{\varphi}$ ne possédant aucune propriété particulière en ce point.

Prenons ζ comme paramètre analytique sur la variété $z^1 = 0$ de la carte 1.4.5. Alors il existe une application analytique $\psi(\zeta)$ telle que $\psi(\zeta) = 0(\|\zeta\|^2)$ vérifiant

$$v = J_{z_0}(\zeta) + \psi(\zeta).$$

Comme ψ est analytique $\Delta_\zeta\psi = 0$ et comme en 1.4.7. on en déduit

$$(\Delta_v h)(z_0) = \Delta_\zeta (h \circ J_{z_0}).$$

Remarques. — Soit $\alpha_r^j(z)$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1,\ 1 \leqslant r \leqslant n)$ la matrice associée à J_z. Alors 1.5.4. s'écrit

1.5.5. $$\left(\Delta^K + \frac{\partial}{\partial t}\right)h = \sum_{j,r,s} \alpha_r^j \bar{\alpha}_s^j \frac{\partial_h^2}{\partial z^r \partial \bar{z}^s}$$

où h est une fonction de classe C^2, $z_1, \ldots, z_n$ étant des coordonnées locales analytiques quelconques.

Notons par L l'opérateur hypoelliptique

1.5.6. $$L = \frac{1}{n-1}\sum_{j,r,s} \alpha_r^j \bar{\alpha}_s^j \frac{\partial^2}{\partial z^r \partial \bar{z}^s}$$

et par ∇^K le gradient associé.

1.5.7. $$\|\nabla^K h\|^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{j,r,s} \alpha_r^j \bar{\alpha}_s^j \frac{\partial h}{\partial z^r}\frac{\partial h}{\partial \bar{z}^s}.$$

On remarque que

1.5.8. $$\|\nabla^K p\| = 0.$$

D'autre part

1.5.9. $$Lp = 1.$$

Notons par $z_\omega(t)$ la diffusion associée à l'opérateur L. La formule de Ito donne alors

$$p(z_\omega(t)) - p(z_\omega(0)) = t.$$

On retrouve ainsi que le mouvement de $p(z_\omega(t))$ est une translation uniforme en t, d'où si l'on fait apparaître p dans une carte adaptée comme variable radiale, L se lit dans cette carte sous forme d'une équation de la chaleur le temps étant cette variable radiale.

2. Formules de représentation intégrales, croissance des diviseurs.

2.0. Nous noterons par $\Omega(V)$ l'espace de probabilité de la diffusion associé à l'opérateur L semi elliptique sur V et par $z_\omega(\tau)$ $\omega \in \Omega(V)$, τ notant le temps, la trajectoire d'un échantillon de cette diffusion. Alors la variation de p est *certaine* le long d'une trajectoire d'après 1.2.2. On a

2.0.1. $$p(z_\omega(\tau)) - p(z_\omega(\tau')) = \tau - \tau'.$$

Nous noterons $P_\tau(z_0, dz)$ la probabilité de transition partant de z_0, d'arriver en dz dans le temps τ. L'opérateur Δ^K satisfaisant les conditions de hypoellipticité de Hörmander [10], [11].

2.0.2. $$P_\tau(z_0, dz) = P_\tau(z_0, z)\, da_{V_{\xi_0+\tau}}$$

où
$$\xi_0 = p(z_0), \quad \text{et où} \quad da_{V_\xi}$$

dénote la mesure $(2n-1)$ dimensionnelle sur V_ξ pour la métrique riemannienne 1.1.

2.1. Proposition. — *Soit* h *une fonction de classe* C^2, *alors* :

2.1.1. $$h(z_0) = \int_{V_{\xi_0+\tau}} P_\tau(z_0, dz) h(z) + \int_0^\tau d\eta \int_{V_{\xi_0+\eta}} P_\eta(z_0, dz)\, (Lh)(z)$$

où L *a été défini en* 1.5.6.

Preuve. — ([7]) Posons $g = Lh$.
Alors

$$E^{\mathfrak{M}_t}(h(z_\omega(\eta + \delta\eta)) - h(z_\omega(\eta)) = (g(z_\omega(\eta)) + o(1))\,\delta t$$

d'où d'après la formule de Dynkin

$$E_{z_0}(h(z_\omega(\tau)) - h(z_0)) = E_{z_0}\left(\int_0^\tau g(z_\omega(\eta))\, d\eta\right)$$
$$E_{z_0}(g(z_\omega(\eta))) = \int_{V_{\xi_0+\eta}} P_\eta(z_0, dz) g(z)$$

et la formule est établie.

2.2. Théorème. — *Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe bornée sur* V, $D = f^{-1}(0)$ *son diviseur,* da^{2n-2} *l'aire* $(2n-2)$ *dimensionnelle sur* V *associé à la métrique* 1.1. *En presque tout point* $z \in D$, *définissons*

$$\theta_z = \text{angle de } T_z(D) \text{ avec } (\partial p)(z), \quad 0 \leqslant \theta_z \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Alors pour tout $\tau > 0$

$$\log|f(z_0)| = \int_{V_{\xi_0+\tau}} P_\tau(z_0, dz) \log|f(z)|$$
$$C + \int_{D \cap p^{-1}([\xi_0, \xi_0+\tau])} P_{p(z)-\xi_0}(z_0, z) \cos^2\theta_z\, da^{2n-2}(z)$$

(où $P_\eta(z_0, z)$ a été défini en 2.0.2. et où $C^{-1} = \pi(n-1)$.

Remarque. — Contrairement à ce qui se passe en une variable complexe la partie du diviseur située dans $p^{-1}(]-\infty, \delta_0[)$ n'intervient pas dans cette formule, c.f. [6] pour un exemple d'utilisation de ce fait.

Preuve. — La méthode de démonstration consistera à approcher la fonction $\log|f|$ par une fonction C^2.

Notons par $\alpha(\lambda)$ une fonction définie sur **C**, $\alpha(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}$ si $|\lambda| < 1$, $\alpha(\lambda) = 0$ sinon. Posons $\alpha_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^{-2}\alpha\left(\dfrac{\lambda}{\varepsilon}\right)$.

Posons

$$\chi_\varepsilon(\zeta) = \int \log|\zeta - \lambda| \alpha_\varepsilon(\lambda)\, d\lambda.$$

Alors

$$\chi_\varepsilon(f(z)) \to \log|f(z)| \qquad \text{si} \qquad f(z) \neq 0.$$

Calculons

$$\Delta_v(\chi_\varepsilon \circ f) = \frac{\partial}{\partial\bar\varphi}\left(\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial\zeta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) = \Delta_\zeta \chi_\varepsilon \|\nabla^K f\|^2$$

où on a défini comme en 1.5.7.

$$(n-1)\|\nabla^K f\|^2 = \sum_{s=1}^{n-1}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial\varphi_s}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial\bar\varphi_s}\right|^2\right)$$

(le dernier terme de la somme est nul lorsque f est holomorphe). Enfin

$$\Delta_\zeta \chi_\varepsilon = 2\pi\alpha_\varepsilon \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_v(\chi_\varepsilon \circ f) = 2\pi\alpha_\varepsilon(f)\|\nabla^{\mathrm{K}} f\|^2.$$

Utilisons la formule de représentation intégrale 2.1.1.

2.2.1.
$$(\chi_\varepsilon \circ f)(z_0) = \int_{\mathrm{V}_{\xi_0+\tau}} \mathrm{P}_\tau(z_0, dz)\chi_\varepsilon(f(z)) + 2\pi \int_0^\tau d\eta \int_{|f(z)|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \mathrm{P}_\eta(z_0, dz)\|\nabla^{\mathrm{K}} f\|^2(z).$$

Nous devons calculer

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|f(z)|<\varepsilon} \frac{\|\nabla^{\mathrm{K}} f\|^2}{\pi\varepsilon^2} \mathrm{P}_\eta(z_0, dz)$$

ou en intégrant en η et posant

$$\int_0^\tau \mathrm{P}_\eta(z_0, dz)\, d_\eta = \mathrm{G}_\tau(z_0, dz)$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|f(z)|<\varepsilon} \frac{\|\nabla^{\mathrm{K}} f\|^2}{\pi\varepsilon^2} (z)\, \mathrm{G}_\tau(z_0, dz)$$

Remarquons que si $z \in \mathrm{D}$

$$\|\nabla^{\mathrm{K}} f\|^2(z) = \cos^2\theta_z \|\nabla f\|^2 (n-1)^{-1}$$

où $\|\nabla f\|$ est le gradient de f pour la métrique 1.1.

La limite s'écrit ainsi

$$\mathscr{L} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|f(z)|<\varepsilon} \frac{\|\nabla f\|^2}{\pi\varepsilon^2} (z) \cos^2\theta_z \mathrm{G}_\tau(z_0, dz)$$

Effectuons la construction de Cantor Minkowski sur D c'est-à-dire à tout point de D associons la boule géodésique de centre ce point et de rayon ε_1 (où $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \mathrm{D}$).

D'autre part distance de z à $\mathrm{D} \leqslant \varepsilon_1$ est équivalent à des infiniment petits d'ordre supérieur à

$$|f(z)| \leqslant \|\nabla f\| \cdot \varepsilon_1.$$

Posant ainsi

$$\|\nabla f\|\varepsilon_1 = \varepsilon$$

on obtient

$$\mathscr{L} = \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{\mathrm{dist}(z,\mathrm{D})<\varepsilon_1} \frac{1}{\pi\varepsilon_1^2} \cos^2\theta_z \mathrm{G}_\tau(z_0, dz)$$

Posons $G_\tau(z_0, dz) = P_{\bar{p}(z)-\xi_0}(z_0, z)\, dw$ où dw est l'élément de volume sur V associé à la métrique 1.1.

$$\mathcal{L} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int \cos^2 \theta_z\, P_{\bar{p}(z)-\xi_0}(z_0, z) \frac{dw}{\pi \varepsilon_1^2}$$

d'où

$$\mathcal{L} = \int_D \cos^2 \theta_z\, P_{p(z)-\xi_0}(z_0, z)\, da^{2n-2}$$

et en reportant dans 2.2.1.

$$\log |f(z_0)| = \int_{V_{\xi_0+\tau}} P_\tau(z_0, dz) \log |f(z)| + C \int_D \cos^2 \theta_z P_{p(z)-p(z_0)}(z_0, z)\, da^{2n-2}(z)$$

Corollaire [16]. — *Soit* D *un diviseur de la classe de Nevanlinna dans* $p(z) < R$, *alors*

2.2.2. $$\int_{D \cap p^{-1}([\xi_0, R[)} \cos^2 \theta_z\, da^{2n-2}(z) < +\infty.$$

Preuve. — Posons

2.2.3. $$q(z) = \int_{V_{\xi_0}} P_\tau(z_0, z)\, da^{2n-1}_{V_{\xi_0}}(z_0)$$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que

2.2.4. $q(z) \geqslant \delta$ quel que soit $z \in p^{-1}([\xi_0, R[)$.

En effet utilisant le fait que $\partial p \neq 0$, on peut joindre tout point de V_ξ à un point de V_{ξ_0} par une ligne de courant du champ de vecteur ∇p. L'estimée 2.2.4. résulte alors de [1], [2], [19].

Ensuite 2.2. donne par un passage à la limite classique 2.2.2.

3. Intégrales d'aire et théorème de Littlewood Paley dans la boule.

3.0. *Notations.* — La boule B de $\mathbf{C}^2$ sera rapporté et à un *système de coordonnées polaires*

$$z = e^\lambda \sigma \quad \lambda \in R^-, \quad \sigma \in \partial B \approx SU(2);$$

on conviendra dans cette dernière identification que

$$(1, 0) \in \partial B$$

sera l'élément unité de SU(2); Notons X, Y les champs de vecteurs de SU(2) invariants à gauche $X_e \approx \frac{\partial}{\partial x_2}$, $Y_e \approx \frac{\partial}{\partial y_2}$. Posons $U = [X, Y]$. Alors

$$(U.f)(\sigma) = \left[\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}\sigma)\right]_{\theta=0}.$$

Posons

3.0.1.
$$\begin{aligned} \bar{\partial}_b &= X + iY \\ \partial_b &= X - iY \\ \Delta^K &= X^2 + Y^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\partial_b\bar{\partial}_b = X^2 + Y^2 + i[X, \ Y] = \Delta^K + iU$$

Si f est une fonction holomorphe sur B, alors

$$0 = \partial_b\bar{\partial}_b f = \Delta^K f - i\mathscr{L}_U f$$

Utilisant maintenant l'équation de Cauchy-Riemann sur le plan normal complexe

$$i\mathscr{L}_U f = \frac{\partial}{\partial\lambda} f.$$

Si h *est une fonction pluriharmonique définie sur* B *alors* h *satisfait l'équation.*

3.0.2. $$\Delta^K_\sigma h(\sigma, \lambda) + \frac{\partial}{\partial\lambda} h(\sigma, \lambda) = 0 \quad \lambda < 0.$$

Dans cette équation le laplacien Δ^K ne dépend pas de λ, on a ainsi une équation de la chaleur de type *stationnaire*, l'opérateur elliptique ne *dépendant pas du temps.*

La densité de probabilité est donnée par un noyau de convolution à gauche sur SU(2).

Il suffit donc de calculer $P_\tau(e, \sigma) = P_\tau(\sigma)$ la *densité* de probabilité de la diffusion sur SU(2) partant de e ($d\sigma$ dénotera la mesure de Haar de SU(2)). Lorsque $\tau \to 0$

3.0.3. $$P_\tau(\exp(\xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 U) \approx \tau^{-2} \exp\left(-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\tau} - \frac{\xi_3^2}{\tau^2}\right)$$

Ce développement asymptotique est connu [8], [14]. Il résulte également d'estimées obtenues dans le cadre général

des groupes de Lie réels semi-simples [15]. On calcule l'holonomie stochastique de la représentation $e^{ih\theta}$.
La mesure de Haar $d\sigma$ est *invariante* sous l'action du semi-groupe adjoint. Il en résulte [12] que l'on peut, si l'on prend la mesure $d\sigma$ comme mesure initiale, *retourner* le temps. Les trajectoires du processus pour le temps retourné seront gouvernées par l'opérateur

3.0.4. $$\Delta^{K} - \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

3.1. Théorème de Fatou. — La théorie dans ce contexte est due à A. Koranyi [13]. Indiquons comment elle s'interprète en termes de l'équation 3.0.2. Un *domaine admissible* de Koranyi est défini par, ε, c étant deux constantes fixées,

$$A_{\sigma,\varepsilon,c} = \{e^{\lambda}\sigma \exp(+\xi_1 X + \xi_2 X + \xi_3 U);\\ -\varepsilon < \lambda < 0, \xi_1^2 + \xi_2^2 < c|\lambda|, |\xi_3| < c|\lambda|\}.$$

Théorème de Fatou.

Soit $u \in L^1(SU(2))$,

$$P_{-\tau} + u = h(\sigma, \tau) \quad \tau < 0$$

son intégrale de Poisson. Alors quel que soit c, *on a* $z \to (\sigma, 0)$

3.1.1. $$\lim_{z \in A_{\sigma,c}} h(z) = u(\sigma) \quad \textit{presque partout.}$$

3.1.2. *Presque sûrement* $z_\omega(t) \to (\sigma, 0) \in \partial B$ *et presque sûrement*

$$h(z_\omega(E)) \to u(\sigma)$$

(on note $z_\omega(t)$ les trajectoires de la diffusion associée à 3.0.2.).

La propriété 3.1.2. n'est autre que le théorème de convergence des martingales appliqué d'abord à $\tilde{h}$ = fonctions coordonnées puis à h ensuite.

On passe de 3.1.2. à 3.1.1. utilisant la méthode de Brelot-Doob [3] : écrivant $u = u^+ - u^-$ on se ramène au cas où u est positif. Ensuite l'expression 3.0.3. donne un principe de Harnack adapté à la géométrie des « boules » en τ et τ^2. Enfin le retournement du temps permet de décrire la *topologie cofine* comme la *topologie fine* du processus gouverné par 3.0.4.

3.2. *Domaines admissibles.* — Soit F un ensemble mesurable, de mesure positive sur ∂B. Fixant c et ε, posons

$$A_{F,\varepsilon,c} = \bigcup_{\sigma \in F} A_{\sigma,\varepsilon,c}$$

on obtient une partie ouvert de B, appelé *domaine admissible* basé sur F.

On se propose de remplacer la considération des domaines admissibles par un *calcul symbolique* sur des solutions de certains problèmes de Dirichlet.

Si F' est un ensemble mesurable sur ∂B, on note par $h_{F'}$ la solution du problème de Dirichlet pour 3.0.2. avec comme valeur au bord l'indicatrice de F' :

$$h_{F'}(\sigma_0, \tau) = \int P_{-\tau}(\sigma) \mathbf{1}_{F'}(\sigma_0 \sigma)\, d\sigma.$$

Étant donné δ, ε, $0 < \delta < 1$, $\varepsilon > 0$, on note

$$A^*_{F',\varepsilon,\delta} = \{(\sigma, \lambda);\ -\varepsilon < \lambda < 0, h_{F'}(\sigma, \lambda) > 1 - \delta\}.$$

Le lemme géométrique suivant permet de comparer A et A^*.

Lemme géométrique. — *Étant donné* ε, c *il existe* δ *tel que quel que soit* F

3.2.1. $$A_{F,\varepsilon,c} \supset A^*_{F,\varepsilon,\delta}.$$

Inversement étant donné c, $\delta > 0$, F *et* $\eta > 0$, *il existe* $F' \subset F$, $\varepsilon' > 0$ *tels que*

3.2.2. $$\text{mesure } (F - F') < \eta \quad \textit{et} \quad A^*_{F,\varepsilon',\delta} \supset A_{F',\varepsilon',c}.$$

Preuve. — Soit $(\sigma, \lambda) \notin A_{F,\varepsilon,c}$, $-\varepsilon < \lambda < 0$, alors posant

$$\varepsilon_{\sigma,\lambda} = \{\sigma \exp(\xi_1 X + \xi_2 Y + \xi_3 U),\ \xi_1^2 + \xi_2^2 < c|\lambda|,\ |\xi_3| < c\lambda\}.$$

on a

$$\varepsilon_{\sigma,\lambda} \cap F = \emptyset.$$

Utilisant 3.0.3. on obtient qu'il existe $\delta > 0$, indépendant de λ, tel que

$$\int_{\varepsilon_{c,\lambda}} P_{-\lambda}(e, \sigma)\, d\sigma > \delta$$

d'où

$$h_F(\sigma, \lambda) < 1 - \delta \quad \text{et 3.2.1. est établi.}$$

Inversement appliquons à h_F le théorème de Fatou *admissible* 3.1.1. on obtient la convergence admissible presque partout vers 1 sur F. En éliminant un ensemble de mesure arbitrairement petite cette convergence est uniforme et 3.2.2. est établi.

3.3 *L'identité d'énergie et le théorème de localisation.* — Posons

3.3.1. $$\|\nabla^K u\|^2 = |\mathscr{L}_X u|^2 + |\mathscr{L}_Y u|^2.$$

Proposition. — *Soit* h *une fonction solution de* 3.0.2., $h(\sigma, 0) \in L^2(\partial B)$, *alors*

3.3.2. $$\int_{\partial B} \{|h(\sigma, 0)|^2 - |h(\sigma, \lambda)|^2\} \, d\sigma = 2\int_{\partial B}\int_\lambda^0 \|\nabla^K h\|^2(\sigma, \xi) \, d\sigma \, d\xi.$$

Preuve. — D'après l'identité de Dirichlet

$$\int_{\partial B} \|\nabla^K h\|^2(\sigma, \xi) \, d\sigma = -(\Delta^K h(.,\ \xi)|h(.,\ \xi))_{L^2(\partial)B}.$$

Utilisant 3.0.3. le second membre de 3.3.2. s'écrit

$$2\int_\lambda^0 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} h(.,\ \xi)|h(.,\ \xi)\right)_{L^2(\partial B)} d\xi = \int_\lambda^0 \frac{d}{d\xi} \|h(.,\ \xi)\|^2_{L^2(\partial)B} \, d\xi.$$

Intégrales de Calderon-Lusin [5].

Étant donné ε, c, $\sigma \in \partial B$ posons

3.3.3. $$I_{\varepsilon, c}(\sigma, h) = \int_{A_{\sigma, \varepsilon, c}} \|\nabla^K h\|^2(\sigma, \lambda) \, d\sigma \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

considérons les trois propositions suivantes où F note une partie mesurable de ∂B.

3.3.4. Pour presque tout $\sigma \in F$, il existe c et ε tels que h soit borné dans $A_{\sigma, \varepsilon, c}$.

3.3.5. Pour presque tout $\sigma \in F$, et pour tout c, h possède une limite admissible finie $z \in A_{\sigma, ., c}$.

3.3.6. Pour presque tout $\sigma \in F$, il existe ε et c_1 tels que $I_{\varepsilon, c_1}(\sigma, h)$ soit fini.

THÉORÈME DE LOCALISATION. — *Supposons que* h *satisfait* 3.0.2.

3.3.7. *La proposition* 3.3.4. *entraîne* 3.3.6.

3.3.8. *La proposition* 3.3.6. *entraîne* 3.3.5.

Remarque. — E. Stein a obtenu dans [18] un théorème de localisation (cf. également [17]) pour une intégrale d'aire associée à une métrique kählerienne du type de Bergmann; cette intégrale diffère de 3.3.3. par l'adjonction d'un terme comprenant une dérivée suivant $\mathscr{L}_{\mathrm{U}}$.

3.4. *Calcul symbolique.* — La méthode que nous allons utiliser pour démontrer l'implication 3.3.7. n'utilise pas de temps d'arrêt ou de lemmes de recouvrement; elle est, en principe au moins, applicable aux fonctions biharmoniques.

Utilisant des arguments d'uniformité bien connus en théorie de l'intégrale de Lebesgue on se ramène au cas où dans 3.3.4 c et ε sont fixés indépendamment de σ, et où $h \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{A}_{\mathrm{F},\varepsilon,c})$. Déterminons δ par 3.2.1. Soit φ une fonction positive définie sur $\mathbf{R}$, de classe C^2, vérifiant $0 < \varphi < 1$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= 0 \qquad \text{si} \qquad \alpha \leqslant 1 - \delta \\ \varphi(\alpha) &= 1 \qquad \text{si} \qquad \alpha \geqslant 1 - \frac{\delta}{2}; \end{aligned}$$

enfin il existe une constante $m = m(\delta)$

3.4.1. $$(\varphi'(\alpha))^2 \leqslant m^2\varphi(\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha$$

Posons

3.4.2. $$\wp = h^2\varphi(h_{\mathrm{F}})$$

D'après 3.2.1.

$$\|\wp\|_{\mathrm{L}^\infty} \leqslant \mathrm{M}^2 \qquad \text{où} \qquad \mathrm{M} = \|h\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{A}_{\mathrm{F},\iota,c})}$$

Un calcul élémentaire donne avec 3.3.2.

3.4.3. $$\left|\int_{-\varepsilon}^{0}\int_{\partial\mathrm{B}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \Delta^{\mathrm{K}}\right)\wp \, d\lambda \, d\sigma\right| \leqslant 2\mathrm{M}^2$$

et $\left(\dfrac{\partial}{\partial\lambda} + \Delta^{\mathrm{K}}\right)\wp = 2\varphi\|\nabla^{\mathrm{K}}h\|^2 + 2h\varphi'\nabla^{\mathrm{K}}h.\nabla^{\mathrm{K}}h_{\mathrm{F}} + h^2\varphi''\|\nabla^{\mathrm{K}}h_{\mathrm{F}}\|^2.$

Notant $L^2 = L^2([-\varepsilon, 0] \times \partial B, d\lambda \times d\sigma)$, on a d'après 3.3.2.

3.4.4. $$\|\nabla^K h_F\|_{L^2} \leqslant 1.$$

D'après l'inégalité de Schwarz et 3.4.4.

$$\|h\varphi'\nabla^K h . \nabla^K h_F\|_{L^1} \leqslant M\|\varphi'\nabla^K h\|_{L^2}.$$

D'après 3.4.1.

$$\|\varphi'\nabla^K h\|_{L^2} \leqslant mJ \qquad \text{où} \qquad J = \|\varphi\|\nabla^K h\|^2\|_{L^1}^{1/2}.$$

L'inégalité 3.4.3. donne alors

3.4.5. $$J^2 - mMJ \leqslant \gamma M^2 \qquad \text{où} \qquad \gamma = 1 + \frac{1}{2}\|\varphi''\|_{L^\infty}.$$

d'où

3.4.6. $$J \leqslant \frac{M}{2}(m + \sqrt{m^2 + 4\gamma}),$$

d'où

$$\int_{A^*_{F,\varepsilon,\delta/2}} \|\nabla^K h\|^2 \, d\sigma \, d\lambda < +\infty.$$

Utilisons maintenant 3.2.2. il existe F', ε' tel que

$$\int_{A_{F',\varepsilon',c_1}} \|\nabla^K h\|^2 \, d\sigma \, d\lambda < +\infty$$

d'où par le théorème de Fubini on obtient 3.3.6. presque partout $\sigma \in F'$, c'est-à-dire finalement presque partout $\sigma \in F$.

Remarque. — Cette démonstration n'a utilisé que le fait que h était défini sur $A_{F,\varepsilon,c}$ et y satisfaisait 3.0.2.

3.5. *Réciproque.* — Par toujours le même argument d'uniformité on peut supposer que ε et c_1 sont fixés pour tout $\sigma \in F$ et que $I_{\varepsilon,c_1}(\sigma, F) < m$ pour tout $\sigma \in F$.

Déterminons δ par 3.2.1., soit ensuite F', ε' déterminés par 3.2.2., alors pour tout ε'', $0 < \varepsilon'' < \varepsilon'$,

3.5.1. $$A_{F,\varepsilon'',c} \supset A^*_{F,\varepsilon'',\delta} \supset A_{F',\varepsilon'',c}.$$

Prenons comme mesure initiale la mesure $d\sigma$ sur $\lambda = -\varepsilon''$. Soit $T_{\varepsilon''}$, $T^*_{\varepsilon''}$ les temps de sorties de $A_{F,\varepsilon'',c}$ et $A^*_{F,\varepsilon'',\delta}$.

$$T^*_{\varepsilon''} \leqslant T_{\varepsilon''} \leqslant \varepsilon''.$$

D'après le théorème de Fatou appliqué à h_F

$$\lim_{\varepsilon'' \to 0} \operatorname{Prob}(T^*_{\varepsilon''} = \varepsilon'') = m(F).$$

Fixons ε'' en ε_0 tel que

3.5.2. $$\operatorname{Prob}(T^*_{\varepsilon_0} = \varepsilon_0) > \chi m(F)$$

où $\chi < 1$ a été donné. Soit ρ la loi de $z_\omega(T_{\varepsilon_0})$, alors

3.5.3. $\mathbf{1}_F\, d\rho \leqslant \mathbf{1}_F\, d\sigma$ et 3.5.2. entraîne

3.5.4. $$\int_F d\rho \geqslant \chi m(F).$$

Les identités de Ito donnent

$$\begin{aligned} E(|h(z_\omega(T_{\varepsilon_0})) - h(z_\omega(0))|^2) &= 2E\left(\int_0^{T_{\varepsilon_0}} \|\nabla^K h\|^2(z_\omega(\tau))\, d\tau\right) \\ &\leqslant 2\int_{A_{F,\varepsilon_0,c_1}} \|\nabla^K h\|^2(\sigma, \lambda)\, d\sigma\, d\lambda \\ &\leqslant 2M. \end{aligned}$$

On en déduit que

3.5.5. $$E(|h(z_\omega(T_{\varepsilon_0})|^2) = \int |h(z)|^2\, d\rho(z) < +\infty$$

(cf. Gundy [9] et Burkholder-Gundy [4] pour des approches analogues).

La martingale $h(z_\omega(\tau))$ $0 < \tau < T_{\varepsilon_0}$ est de carré intégrable. D'après le théorème de Fatou pour les martingales elle possède une limite cofine presque partout $d\rho$, c'est-à-dire d'après 3.5.3. et 3.5.4. à l'exception au plus d'un ensemble $G \subset F$, $m(G) < (1 - \chi)m(F)$.

D'après la dernière inclusion 3.5.1., $A_{F,\varepsilon'',c}$ est un voisinage cofin de tous les points de F' pour le processus non stoppé. Par suite les topologies cofines des processus stoppé et non stoppé coïncident pour les points de F'. L'argument de Brelot-Doob combiné avec l'utilisation de Harnack dans $A_{F,\varepsilon_0,c}$ donne enfin 3.3.5.

3.6. Théorème de Littlewood-Paley. — *Soit* f *une fonction holomorphe dans* B, $h = \operatorname{Re} f$. *Supposons qu'il existe* $F \subset \partial B$, F *mesurable tel que*

$$\limsup_{z \in A_{\sigma,\cdot,c}} |h(z)| < +\infty$$

Alors presque partout en $\sigma \in F$, f *possède une limite admissible finie.*

Preuve. — Soit $f = h + iv$, alors les équations de Cauchy Riemann impliquent $\|\nabla^K h\| = \|\nabla^K v\|$ d'où le théorème par application de 3.3.7. puis de 3.3.8.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bonamy, N. Karoui, B. Roynette et H. Reinhardt, *Annales de l'Institut H.-Poincaré* (1971), 31-80.

[2] J. Bony, Principe de Harnack pour les équations hypoelliptiques, *Annales de l'Institut Fourier*, 19 (1969), 277-305.

[3] M. Brelot et J.L. Doob, Convergence fine et convergence angulaire, *Annales de l'Institut Fourier*, 13 (1963), 395-415.

[4] Burkholder-Gundy, Repartition function and aerea integrals, *Acta Mathematica*, 124 (1970), 249-304.

[5] A. Calderon, On Lusin's integrals, *Transaction American Society*, 68 (1954), 55-61.

[6] A. Debiard et B. Gaveau, Enveloppe d'holomorphe et algèbres de fonctions, *C. R. Acad. Sciences*, 279 (1974), 407-410.

[7] J.L. Doob, Heat equation and stochastic process, *Trans. Am. Math. Soc.*, 80 (1955), 216-280.

[8] Folland and E. Stein, Singulars Integrals and the Heisenberg group, *Communication in Pure and Appl. Math.*, déc. (1974).

[9] Gundy, Intégrales d'aire pour le demi-plan, Séminaire Orsay, *Lecture Notes* (1972).

[10] L. Hormander, Hypoelliptic estimates, *Acta Mathematica*, 119 (1967), 147.

[11] J.-J. Kohn, Michigan Conférence 1964.

[12] Kolmogoroff, Retournement du temps.

[13] A. Koranyi, Théorème de Fatou admissible, *Transaction Am. Math. Soc.*, 139 (1969), 507-516.

[14] B. Gaveau, *C.R.A.S.*, 280 (1975), 571 et 281, p. 327.

[15] M. P. Malliavin et P. Malliavin, Réduction radiale de l'holonomie stochastique, *C. R. Acad. Sciences*, 279 (1975), 793.

[16] P. Malliavin, Estimées de la fonction de Green d'un ouvert strictement pseudo-convexe, *C. R. Acad. des Sciences*, 278 (1974), 114.

[17] Putz, Aera integral, *Transaction Americain Math. Soc.*, 168 (1972), 243-258.

[18] E. Stein, Boundary values of holomorphic functions of several complex variables, *Princeton Lecture Notes*, (1972).

[19] Watanabe, On the support of probabilities transition of hypoelliptic operators, *Inventiones* (1974).

Manuscrit reçu le 18 avril 1975.

Paul Malliavin,
Institut Henri-Poincaré
11, rue Pierre-et-Marie-Curie
75005 Paris.