

PIERRE LELONG

**Topologies semi-vectorielles. Application
à l'analyse complexe**

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 3-4 (1975), p. 381-407

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_381_0

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TOPOLOGIES SEMI-VECTORIELLES. APPLICATION A L'ANALYSE COMPLEXE

par Pierre LELONG

*Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion
de son 70^e anniversaire.*

1. Introduction.

Notre but est d'étudier certaines topologies qui sont invariantes par les translations et rendent continue la multiplication sur un espace vectoriel E . On supposera le corps de base K de E valué complet, à valuation non discrète; on précisera certaines propriétés élémentaires quand, de plus, K est localement compact ($K = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$ en particulier).

Un certain intérêt est porté actuellement à l'étude des topologies vectorielles non localement convexes (cf. [5] et [6]) sur les espaces vectoriels réels. Allant plus loin, on considérera ici des topologies qu'on appellera *semi-vectorielles*: elles sont définies par la propriété d'induire une topologie vectorielle sur tous les sous-espaces de dimension finie.

On peut considérer que les topologies localement convexes sur un espace vectoriel E sont particulièrement adaptées à l'étude des formes linéaires $f \in E^*$; l'étude de classes plus générales de fonctions (polynomiales, analytiques...) conduit à des topologies plus fines, invariantes par translation, où le filtre \mathcal{F}_0 des voisinages de l'origine a une base $B = \{V_\alpha\}$, chaque V_α étant défini par $p_\alpha(x) = \sup_j |f_{\alpha,j}(x)| < 1$, les

$f_{\alpha, j}$ n'étant plus linéaires. Rappelons que dans [4b] nous avons considéré le cas où les V_α sont pseudo-convexes et leurs jauges $p_\alpha(x)$ sont plurisousharmoniques sur un espace complexe E ; de telles topologies peuvent être appelées pseudo-convexes (ou plurisousharmoniques). Les p_α doivent vérifier des conditions étudiées par C.-O. Kiselman [3b] pour que \mathcal{F}_0 soit un filtre de voisinages de 0, et d'autres plus précises pour que la topologie invariante par translation qu'on en déduit soit vectorielle. Mais on définit aussi sur E des topologies qui ne sont plus nécessairement vectorielles.

On se limitera ici à l'étude de la classe suivante — notée θ — de topologies sur un espace vectoriel E .

DÉFINITION 1. — *Une topologie T sur un espace vectoriel E de corps de base K valué, non discret, complet, sera dite de classe θ si*

- a) elle est invariante par les translations $x \rightarrow x + a$, $a \in E$.
- b) La multiplication $(u, x) \rightarrow ux$ est une application continue $K \times E \rightarrow E$, K étant muni de la topologie de la valuation et E de la topologie T .

On verra que les topologies θ sont semi-vectorielles quand elles sont séparées. Elles rendent continue l'addition

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

quand l'un des facteurs demeure dans un sous-espace de dimension finie. Cette propriété les rapproche de la topologie T_f , dite « finiment ouverte » sur E étudiée par S. Kakutani et V. Klee [2] sur les espaces réels : en fait dès que K est supposé localement compact, la classe θ a un seul élément maximal qui est la topologie T_f . Rappelons que T_f est semi-vectorielle et non vectorielle quand E ne possède pas de base dénombrable (cf. [2]). Si $K = \mathbb{C}$, les topologies θ sont des topologies plurisousharmoniques et même polynomiales dans E puisque cette propriété est vraie pour T_f comme l'a montré C.-O. Kiselman.

Ce sont les applications à l'analyse complexe qui ont motivé l'étude de la classe θ : les propriétés de base des fonctions plurisousharmoniques demeurent valables dans le cadre plus général des topologies semi-vectorielles, comme on le verra à

la fin de ce travail (cf. aussi [3a]). Nous sommes heureux de dédier cette étude à Marcel Brelot en hommage à ses travaux sur le potentiel et les fonctions sousharmoniques.

2. La topologie finiment ouverte T_f .

Le corps K étant supposé valué complet, à valuation non discrète, la valuation $u \in K \rightarrow |u| \in \mathbb{R}^+$ définit sur K une distance $d(u, v) = |u - v|$ et fait de K un espace métrique complet.

On désigne par $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension n , par $\Lambda(E) = \bigoplus \Lambda_n(E)$ ceux de dimension finie. La seule topologie vectorielle séparée sur $M \in \Lambda_n(E)$ est l'image de celle de K^n donnée par l'application $x = \sum u_k e_k$, où $\{e_k\}$ est une base de M .

La topologie *finiment ouverte* notée T_f sur E est définie comme suit: $\omega \subset E$ est T_f ouvert si et seulement si pour tout $M \in \Lambda(E)$, l'intersection $\omega \cap M$ est un ouvert (éventuellement vide) sur M pour sa topologie vectorielle séparée T_M ; T_f est la limite inductive stricte (en général non dénombrable) des topologies (M, T_M) , pour $M \in \Lambda(E)$. Si $\{e_\lambda\}$ est une base de E , $\lambda \in L$, à toute partie finie $H \subset L$ correspond $M_H \in \Lambda(E)$ engendré par les $e_\lambda, \lambda \in H$: l'espace (E, T_f) est la limite inductive stricte des M_H quand $H' = L - H$ parcourt le filtre φ sur L des complémentaires des parties finies. La topologie T_f sur E est séparée car elle est plus fine que la topologie produit des sous-espaces $\prod_{\lambda} K e_\lambda$ qui est séparée. Si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et L dénombrable, T_f est localement convexe et (E, T_f) est limite inductive stricte d'une suite d'espaces localement convexes. Dans [2] S. Kakutani et V. Klee ont établi la continuité de la multiplication sur (E, T_f) si $K = \mathbb{R}$, ainsi que celle de l'addition

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

si x ou y demeure dans un sous-espace de dimension finie; mais l'addition n'est pas continue si card. L n'est pas dénombrable et T_f est alors une topologie semi-vectorielle non vectorielle séparée; c'est évidemment la *plus fine* des topologies semi-vectorielles.

3. Propriété des topologies de la classe θ .

Indiquons d'abord quelques conséquences immédiates de la définition 1.

1° Si E est muni d'une topologie T de classe θ , alors sur un sous-espace $F \subset E$, la topologie induite par (E, T) est de classe θ . En effet (F, T_F) est invariante par translation et rend continue la multiplication.

2° L'adhérence $\bar{0}$ de 0 dans (E, T) est un cône. En effet $x_0 \in \bar{0}$ entraîne $ux_0 \in \bar{0}$ quel que soit $u \in K$. Il en résulte

PROPOSITION 1. — Soit T une topologie θ sur un espace vectoriel E et M un sous-espace de E , de dimension 1 : ou bien la topologie T_M induite par T sur M est la topologie vectorielle séparée et $M \sim Ke$, $e \in M$, $e \neq 0$ ou bien M est le seul ouvert de T_M et $M \subset \bar{0}$.

En effet T_M est une topologie θ sur M ; elle est invariante par translation, donc si l'adhérence $\bar{0}_M$ de 0 pour T_M est 0 on a, $\bar{x}_M = x$ pour tout $x \in M$, et T_M est séparée. Un raisonnement classique (cf. [1], p. 17) montre que si l'on prend $e \in M$, $e \neq 0$, l'application $x \rightarrow ue$ définit un isomorphisme $K \sim M$, $u(x)$ étant linéaire et continue sur M : T_M est alors la topologie vectorielle séparée sur M .

Si T_M n'est pas séparée, d'après la remarque 2°, on a $M \subset \bar{0}_M$, ce qui entraîne $\bar{0}_M = M$ et $\bar{x}_M = M$ pour tout $x \in M$; M est le seul ouvert de T_M et T_M est la topologie vectorielle non séparée sur M , ce qui établit la proposition.

COROLLAIRE 1. — Sur un espace vectoriel M de dimension 1, la seule topologie θ qui soit séparée est la topologie vectorielle séparée.

3° Concernant le filtre \mathcal{F}_0 des voisinages de l'origine, on a :

PROPOSITION 2. — Si T est une topologie θ , les voisinages de l'origine sont absorbants et il existe une base de voisinages disqués.

Là encore, la démonstration est classique : $(u, x) \rightarrow ux$ est continu pour $u = 0, x = 0, u \in K, x \in E$; soit $W \in \mathcal{F}_0$: il existe $V \in \mathcal{F}_0$ et $\varepsilon > 0$ tels qu'on ait $ux \in W$ pour $|u| \leq \varepsilon$, et $x \in V$. Le voisinage disqué $\bigcup_{|u| \leq \varepsilon} uV$ appartient alors à W , ce qui établit la seconde propriété; la première résulte directement de $ux_0 \rightarrow 0$ pour x_0 donné, et u tendant vers zéro.

La propriété suivante intervient quand on considère l'injection du disque unité $|u| \leq 1$ du corps K dans E . Elle a été introduite par C.-O. Kiselman dans [3, a].

PROPOSITION 3. — *Pour qu'une topologie T sur E soit de classe θ , il faut et il suffit que soit vérifiée la propriété (K) — Pour tout $y \in E$, l'application $K \times E \rightarrow E$ définie par*

$$(u, x) \rightarrow f_y(u, x) = x + uy$$

est continue.

a) La condition (K) est nécessaire. Plaçons-nous d'abord au voisinage d'un couple (u_0, x_0) , où $|u_0| = c > 0$ et montrons la continuité de $(u, x) \rightarrow f_y(u, x) = x + uy$ pour y donné. Pour $|u| > \frac{c}{2}$, $u \rightarrow u^{-1}$ est continu. De plus :

(I) $(u, x) \rightarrow x_1 = u^{-1}x$ est continu de (u, x) , d'après b) de la définition 1.

(II) $x \rightarrow x_1 + y = x_2 = y + u^{-1}x$ est continu d'après la continuité de la translation, condition a) de la définition 1.

(III) $(u, x_2) \rightarrow ux_2 = u(y + u^{-1}x) = x + uy = f_y(u, x)$ est continu d'après la condition b) de la définition 1.

Finalement en composant (I), (II), (III), on obtient

$$(u, x) = f_y(u, x)$$

comme application continue de (u, x) au voisinage de (u_0, x_0) si $u_0 \neq 0$.

Dans le cas $u_0 = 0$, on pose $u = a + u_1, a \in K, |a| \neq 0$, et l'on écrit

$$f_y(u, x) = x + uy = (x + u_1y) + ay = f_y(u_1, x) + ay.$$

Pour a fixé, $|a| > 0, (u, x) \rightarrow (u_1, x) \rightarrow f_y(u_1, x)$ est continu

de (u_1, x) pour $|u_1| = |u - a| \geq \frac{a}{2} > 0$, donc continu de (u, x) pour $|u| < \frac{a}{2}$; $f_y(u, x)$ qui ne diffère de $f_y(u_1, x)$ que par une translation est donc continu de (u, x) , ce qui achève d'établir la nécessité de la condition (K).

b) La condition (K) est *suffisante* pour que T soit une topologie θ sur E . Spécialisons $u = 1$: elle entraîne la continuité de la translation, donc T est une topologie invariante par les translations. De plus $u \rightarrow u^{-1}$ étant continu au voisinage de $u_0 \neq 0$,

$$(u, x) \rightarrow u^{-1}f_y(u, x) = y + u^{-1}x$$

est continue de (u, x) ; il en est de même de

$$u^{-1}f_y(u, x) - y = u^{-1}x,$$

T étant invariante par les translations. Finalement

$$(u, x) \rightarrow u^{-1}x \rightarrow ux$$

est continu de (u, x) au voisinage (u_0, x_0) si l'on a $u_0 \neq 0$. On procède comme plus haut si $u_0 = 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition 3. On a aussi, à partir de la définition 1 :

PROPOSITION 4. — Si T_1 et T_2 sont deux topologies de classe θ sur E , alors $T_3 = \sup(T_1, T_2)$ est encore de classe θ .

Montrons encore :

PROPOSITION 5. — Si M est un sous-espace de (E, T) , où T est une topologie θ , la topologie quotient sur $E/M = E_1$ est une topologie θ .

Soit $x' = p(x)$ la projection canonique $E \rightarrow E/M$; $\omega \subset E_1$ est un ouvert de E_1 si et seulement si $p^{-1}(\omega)$ est un ouvert de (E, T) . Le saturé Ω_s d'un ouvert $\Omega \subset (E, T)$ est ouvert d'après $\Omega_s = \Omega + M = \bigcup_{a \in M} (\Omega + a)$; T étant invariante par translation, $\Omega + a$ et Ω_s sont des ouverts de (E, T) ; ainsi les ouverts dans E_1 sont des projections par p des ouverts saturés de (E, T) ; la topologie quotient est donc invariante par les translations. Montrons la continuité de la

multiplication $(u, \xi) \rightarrow \eta$ dans E_1 . Soit $x \in p^{-1}(\xi)$, et

$$y = ux \in p^{-1}(\eta)$$

Si ω est un ouvert de E_1 contenant η , $\Omega = p^{-1}(\omega)$ est un ouvert de E contenant ux et contient $u'x'$ pour $|u' - u| < c$, $x' \in \Omega_1$, où Ω_1 est un ouvert de (E, T) contenant x . On a alors $u'\xi' \in \omega$ pour $|u' - u| < c$ et $\xi' \in p(\Omega_1)$, où $p(\Omega_1)$ est un voisinage de ξ dans E_1 , ce qui établit la continuité du produit $\eta = u\xi$ et l'énoncé.

4. Topologies séparées de classe θ .

Les topologies θ qui sont séparées sont des topologies semi-vectorielles. On a en effet :

PROPOSITION 6a. — *Toutes les topologies qui sont de classe θ (c'est-à-dire invariantes par translation et rendant continue la multiplication) et qui sont séparées sur un espace vectoriel E induisent sur tout sous-espace vectoriel M de dimension finie la topologie vectorielle séparée T_M .*

Soit d'abord $\dim M = 1$: la topologie trace de T sur M est séparée, donc d'après la proposition 1, c'est la topologie vectorielle séparée T_M sur M .

Montrons alors l'énoncé par récurrence sur $n = \dim M$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de $M \in \Lambda_n(E)$ et $Ke_n = N$: la topologie T induit sur N la topologie vectorielle séparée. Soit M_1 engendré par e_1, \dots, e_{n-1} le supplémentaire algébrique de N ; d'après l'hypothèse de récurrence, M_1 est isomorphe à K^{n-1} , donc complet, donc fermé et la topologie quotient T_1 sur $M/M_1 = N$ est séparée; c'est une topologie θ d'après la proposition 5. Donc elle coïncide avec la topologie vectorielle séparée induite sur N par T ce qui établit que M_1 et N sont supplémentaires topologiques et que M est isomorphe à K^n . On en déduit :

PROPOSITION 6b. — *Toute topologie séparée, de classe θ sur E , rend continue l'addition $(x, y) \rightarrow x + y$ quand x ou y demeure dans un sous-espace de dimension finie.*

Soit $y \in M$, et $M \in \Lambda_n(E)$: $y = \sum_1^n u_k e_k$ où (e_k) est une base de M : d'après la proposition 6a les coordonnées $u_k(y)$ sont continues de y sur M . D'autre part (proposition 3),

$$(x, u_k) \rightarrow x + u_k e_k$$

est continu de (x, u_k) donc de (x, y) , pour $y \in M$, ce qui établit l'énoncé quand $n = 1$. Pour $n > 1$, raisonnons par récurrence en posant $y' = \sum_1^{n-1} u_k e_k$, $y'' = u_n e_n$. Les $u_k(y)$ étant continus de y , y'' est continu de $y \in M$. De même $(u_1, \dots, u_{n-1}) \rightarrow y'$ est continue d'après la proposition 6a, T étant séparée et de classe θ sur M . Alors les applications $y \rightarrow (u_1, \dots, u_{n-1}) \rightarrow y'$ sont continues et y' est continu de y . D'après l'hypothèse de récurrence

$$(x, y') \rightarrow x + y'$$

est continu de (x, y') donc de (x, y) . Alors

$$(x, y) \rightarrow (x + y') + y'' = x + y$$

est continu de $(x + y')$ et de y'' , d'après la propriété pour $n = 1$, donc, finalement, l'application $(x, y) \rightarrow x + y$ est continue de (x, y) .

On résumera ces propriétés dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. — *Pour qu'une topologie séparée T sur E soit une topologie θ , c'est-à-dire soit invariante par les translations et rende la multiplication continue, il faut et il suffit :*

- a) que les voisinages de 0 soient absorbants,
- b) que l'addition $(x, y) \rightarrow x + y$ soit continue quand x ou y demeure dans un sous-espace M de dimension finie.

Dans la condition suffisante on peut remplacer b) par la condition portant sur les seuls sous-espaces de dimension un.

La condition nécessaire résulte de la proposition 6b et de la proposition 2.

Pour montrer la condition suffisante, remarquons que b) entraîne l'invariance de T par les translations. D'autre part $(u, y) \rightarrow uy$ est continu de u pour y donné d'après a) et l'invariance de T par les translations. Enfin $(u, x) \rightarrow x + uy$ pour y donné est continu de (u, x) d'après la condition b)

portant sur les sous-espaces M de dimension un. La propriété (K) est donc établie; elle entraîne la continuité de la multiplication, ce qui achève la démonstration.

Indiquons quelques corollaires :

COROLLAIRE 2. — *La topologie finiment ouverte T_f est plus fine que toute topologie séparée de classe θ .*

En effet, si T est une topologie θ et est séparée, un ouvert Ω de T coupe tout $M \in \Lambda(E)$ selon un ouvert de la topologie vectorielle séparée pour M : il est donc T_f -ouvert. On verra plus loin que si K est localement compact, T_f est une topologie θ ; la question est ouverte dans le cas général.

Une conséquence de la proposition 6a est d'autre part :

COROLLAIRE 3. — *Les topologies θ qui sont séparées sont des topologies semi-vectorielles.*

5. Topologies de classe θ non séparées.

Cherchons à quelles conditions une topologie non séparée de classe θ est semi-vectorielle.

Une condition nécessaire est que l'adhérence $\bar{0}$ de l'origine soit un sous-espace vectoriel. En effet soit $x_1 \in \bar{0}$, $x_2 \in \bar{0}$; le sous-espace M engendré par x_1 et x_0 a alors une topologie vectorielle; on a donc $ux_1 + vx_1 \in \bar{0}$, quels que soient $u, v \in K$; le cône $\bar{0}$ est donc un sous-espace fermé N .

On va montrer :

PROPOSITION 7. — *a) Soit T une topologie non séparée, de classe θ sur E : pour qu'elle soit semi-vectorielle, il faut et il suffit que l'adhérence $\bar{0}$ de l'origine soit un sous-espace vectoriel de E .*

b) S'il en est ainsi, l'addition $(x, y) \rightarrow x + y$ est T -continue quand x ou y demeure dans un sous-espace M de dimension finie.

Il suffit d'établir que si $\bar{0}$ est un espace vectoriel *b)* est vérifié: en effet, T rend alors continues l'addition et la multiplication sur les sous-espaces de dimension finie; T est donc une topologie semi-vectorielle au sens précisé plus haut.

Le sous-espace vectoriel $N = \bar{0}$ est T -fermé; soit $E_1 = E/N$, $M_1 = M/N$, et \hat{x} , \hat{y} les classes de x , y respectivement. Sur E_1 la topologie quotient est une topologie θ (proposition 5); elle est séparée. Alors l'addition $(\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow \hat{x} + \hat{y}$ est continue de \hat{x}, \hat{y} , quand \hat{y} demeure dans le sous-espace M_1 de dimension finie (proposition 6b).

Il en résulte la continuité de $(x, y) \rightarrow (x + y)$ modulo N , c'est-à-dire la continuité de $(x, y) \rightarrow x + y$ pour $y \in M$ car N appartient à l'adhérence de tout point pour la topologie T .

Remarque. — On peut énoncer différemment la proposition 7 en tenant compte du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une topologie T sur E (séparée ou non) soit de classe θ , et semi-vectorielle, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions :*

- a) *l'adhérence de l'origine est un sous-espace vectoriel de E ;*
- b) *les voisinages de 0 sont absorbants;*
- c) *l'addition $(x, y) \rightarrow x + y$ est continue si x ou y demeure dans un sous-espace de dimension finie.*

La nécessité des conditions résulte des propositions 7 et 2. Elles sont d'autre part suffisantes, car c) entraîne (pour $y = a$) l'invariance de T par rapport aux translations; b) entraîne la continuité de $u \rightarrow uy = y'$ pour y donné; enfin c) entraîne la continuité de $(x, y') \rightarrow x + y' = x + uy$ en (u, x) , donc la propriété (K). Celle-ci (proposition 3) entraîne que T soit une topologie de classe θ . La condition a) et la proposition 7 montrent alors que T induit une topologie vectorielle en dimension finie.

Remarque. — Dans l'énoncé du théorème 2, la condition c) peut être remplacée par l'ensemble des conditions suivantes :

- c₁) *T est invariante par les translations.*
- c₂) *Le filtre \mathcal{F}_0 des voisinages de l'origine a la propriété que à tout couple $[M \in \Lambda(E), V \in \mathcal{F}_0]$ correspond $V' \in \mathcal{F}_0$ tel que l'on ait*

$$V' + (V' \cap M) \subset V.$$

En effet cette dernière condition équivaut à la continuité de l'addition à l'origine quand y demeure dans M .

6. Application aux compacts.

Rappelons que si une application $f: X \times Y \rightarrow Z$ est continue de (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$, à valeurs dans Z , où X, Y, Z sont des espaces topologiques, alors si C est un compact de Y et Ω un ouvert de Z , l'ensemble

$$X_C = [x \in X; f(x, y) \in \Omega, \text{ pour tout } y \in C]$$

est un ouvert (éventuellement vide) de X .

D'après ce qui précède, si E est un espace vectoriel muni d'une topologie de classe θ , on pourra appliquer ce résultat à $f(x, y) = x + y$, $x \in E$, $y \in C \subset E$, si C est un compact situé dans un sous-espace $M \in \Lambda(E)$. On a ainsi :

PROPOSITION 8. — *a) Si G est un ouvert dans l'espace vectoriel E muni d'une topologie de classe θ , et si C est un compact situé dans un sous-espace de dimension finie, l'ensemble*

$$(1) \quad G_C = [x \in G; x + y \in G, \text{ pour tout } y \in C]$$

est un ouvert dans E .

b) Si C' est un compact (non nécessairement porté par un sous-espace de dimension finie) dans E , et si pour tout $x \in C'$, on a $x + y \in G$ pour tout $y \in C$, il existe un voisinage ouvert Ω de C' tel que l'on ait $x + y \in G$ pour tout $x \in \Omega$, et tout $y \in C$.

On a alors :

COROLLAIRE 4. — *Soit E un espace vectoriel muni d'une topologie T de classe θ , et soit $f(x)$ une fonction semi-continue supérieurement définie dans un ouvert G de E . Alors si C est un compact dans G , qui est porté par un sous-espace de dimension finie,*

$$g_C(x) = \sup_{y \in C} f(x + y)$$

est semi-continue supérieurement dans l'ouvert G_C défini par (1).

En effet soit $G_C \neq \emptyset$, $x_0 \in G_C$ et $g_C(x_0) = a$: pour $\varepsilon > 0$ l'ensemble $g_C(x) < a + \varepsilon$ est défini par : $f(x + y) < a + \varepsilon$ pour tout $y \in C$; il est donc ouvert et est un voisinage de x_0 , ce qui établit le Corollaire 4.

COROLLAIRE 5. — Soit, comme au corollaire précédent, un ouvert G dans E et C un compact dans G porté par un sous-espace M de dimension finie n . Soit μ une mesure positive portée par C . L'application $K^n \rightarrow M$, soit $y = \sum u_k e_k$ ou e_k est une base de M définit sur M une métrique $d(y, y')$. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, il existe un recouvrement fini $\{C_i\}$ de C par des compacts C_i de diamètre au plus α et tels que $\mu(C_i \cap C_j) = 0$ si $i \neq j$. Alors si $f(x)$ est une fonction semi-continue supérieurement dans un domaine G contenant C , la fonction

$$h(x) = \mu_y[f(x + y)] = \int d\mu(y)f(x + y)$$

est semi-continue supérieurement dans l'ouvert $G_C = [x \in G; x + y \in G \text{ pour tout } y \in C]$.

Démonstration. — On note $f_m(x) = \sup_y f(x + y)$ pour $y \in G$, $d(x, y) \leq \frac{1}{m}$. Les fonctions f_m décroissent et tendent vers f quand $m \rightarrow +\infty$; $f_m(x)$ est définie et semi-continue supérieurement pour $x \in C$ si m surpasse une valeur m_0 . Soit x fixé dans G_C , et $\varepsilon > 0$ donné; fixons $m > m_0$ tel qu'on ait

$$h(x) < \mu_y[f_m(x + y)] < h(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\{C_i\}$ un recouvrement de C , pour lequel on a $\alpha < m^{-1}$.

Posons $M_i(x) = \sup_{y \in C_i} f(x + y)$, et $\mu_i = \mu(C_i)$; on a

$$h(x) \leq \sum_i \mu_i M_i(x) \leq \mu_y[f_m(x + y)]$$

qui entraîne au point x :

$$(2) \quad h(x) \leq \sum_i \mu_i M_i(x) \leq h(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part on a évidemment, quel que soit $x' \in G_C$:

$$(3) \quad h(x') \leq \sum_i \mu_i M_i(x').$$

La somme $\sum \mu_i M_i(x)$ est semi-continue supérieurement d'après le corollaire 1. Il existe donc un voisinage V_x de x tel que

pour $x' \in V_x$ on ait

$$(4) \quad \Sigma \mu_i M_i(x') \leq \Sigma \mu_i M_i(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En comparant (2), (3), (4), on obtient

$$h(x') \leq h(x) + \varepsilon \quad \text{pour } x' \in V_x$$

ce qui démontre le corollaire.

7. Cas où le corps de base K est localement compact.

Dans [2] S. Kakutani et V. Klee ont utilisé la compacité locale du corps R pour montrer que la multiplication

$$(u, x) \rightarrow ux$$

est T_f -continue dans les espaces réels. D'autre part C.-O. Kiselman [3a] a montré que la compacité locale du corps de base permet de passer à la limite inductive sur la propriété (K) de la proposition 3. On établira directement :

PROPOSITION 9. — *Si le corps de base K est localement compact, la topologie finiment ouverte T_f sur l'espace vectoriel E est de la classe θ et en est l'élément maximal unique.*

La topologie T_f étant invariante par les translations, il suffit d'établir la continuité de $(u, x) \rightarrow f_y(u, x) = x + uy$ pour $u = 0, x = 0$, et y donné. Soit W un ensemble T_f ouvert contenant l'origine; soit $M = Ky$ le sous-espace engendré par y ; $\omega = W \cap M$ est un ouvert contenant 0 pour la topologie vectorielle séparée sur M ; il est donc absorbant et il existe $c > 0$ tel qu'on ait $uy \in \omega$ pour $|u| \leq c$; d'autre part $|u| \leq c$ est un compact sur K . Sur tout

$$M' \in \Lambda(E),$$

l'ensemble $W' = [x \in E; x + uy \in W \text{ pour tout } u \in K \text{ vérifiant } |u| \leq c]$ découpe donc un ouvert (éventuellement vide) de la topologie vectorielle séparée de M' : autrement dit W' est T_f -ouvert, ce qui démontre qu'on a $f_y(u, x) \in W$ pour $x \in W'$ et $|u| \leq c$ et établit la continuité de $f_y(u, x)$; T_f est donc une topologie de classe θ d'après la proposition 3.

Elle est plus fine que toute topologie T de cette classe. En effet, d'après la proposition 4, la topologie

$$T' = \sup (T, T_f)$$

est de classe θ ; T' est séparée, donc, d'après le Corollaire 2, elle est moins fine que T_f , ce qui équivaut à dire que T est moins fine que T_f .

PROPOSITION 10. — Soient (E_α, T_α) une famille indexée par $\alpha \in A$ d'espaces vectoriels sur un corps K valué complet non discret, localement compact. Soit E l'espace engendré par les E_α . On suppose A muni d'un préordre: si $\alpha \leq \beta$, E_α est un sous-espace de E_β et l'application canonique $E_\alpha \rightarrow E_\beta$ est continue; pour α, β donnés, il existe $\gamma \in A$ tel que l'on ait $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma, E_\alpha \subset E_\gamma, E_\beta \subset E_\gamma$. On définit la topologie inductive des T sur les E_α : ω est un ouvert de T si et seulement si $\omega \cap E_\alpha$ est T_α -ouvert. Alors si les T_α sont des topologies de classe θ , il en est de même de T .

La démonstration se fait comme à la proposition 9: les T_α , donc aussi T sont invariants par les translations; il suffit de vérifier la continuité de $f_y(u, x) = x + uy$ à l'origine $x = 0, u = 0$. Si W est T -ouvert et contient 0 , et si E_α contient y , il existe $c > 0$, tel que l'on ait $uy \in W$ pour $|u| \leq c$, $W \cap E_\alpha$ étant absorbant. Posons: $G = [x \in E; f_y(u, x) \in W$ pour tout u tel que $|u| \leq 1]$; alors pour $\beta \geq \alpha$, G coupe E_β selon un ouvert non vide; G est donc T -ouvert, c'est un voisinage de l'origine dans (E, T) ; l'on a $f_y(u, x) \in W$ pour $|u| \leq c$, et $x \in G$, et T est de classe θ d'après la proposition 3.

8. Fonction interne $\rho_A(x, y)$ d'un ensemble A .

Soit $A \subset E$ où E est un espace vectoriel sur K valué complet non discret et E a une topologie de classe θ .

DÉFINITION. — On appellera fonction interne relative à A la fonction $\rho_A(x, y), x \in A, y \in E - \{0\}$, application de

$$A \times (E - \{0\})$$

dans \mathbb{R}^+ , définie par

$$\rho_A(x, y) = \sup r, r > 0, x + uy \in A \text{ pour } |u| \leq r.$$

Remarques. — 1) $\rho_A(x, y)$ donne une distance de x au complémentaire de A selon une direction y donnée. La définition et les propriétés de $\rho_A(x, y)$ en dimension finie ont été données dans [4e, chapitre 2].

2) On a d'une manière évidente $\rho_A(x, uy) = |u|^{-1}\rho_A(x, y)$ et encore :

PROPOSITION 11. — Soit $A \subset E$ ou E a une topologie de classe θ . Il est équivalent d'énoncer

1) 0 est point interne de A ; 2) il existe un ensemble disque $A' \subset A$ dont 0 est point interne; 3) A est absorbant; 4) $\rho_A(x, y) > 0$ pour tout $y \in E - \{0\}$.

PROPOSITION 12. — Soit E un espace vectoriel sur un corps K , valué, complet, non discret, localement compact; si la topologie T de E est de classe θ et si A est T -ouvert, sa fonction interne $\rho_A(x, y)$ est semi-continue inférieurement de (x, y) pour $x \in A, y \in E - \{0\}$ sur l'espace produit

$$F = (E, T) \times (E, T),$$

lorsque x ou y demeure dans un sous-espace de dimension finie.

En effet dans le produit F , l'ensemble $\rho_A(x, y) > c$ est défini aussi par la condition: $x + uy \in A$ pour tout u vérifiant $|u| \leq c$. Il est donc T -ouvert sur tout sous-espace M de F qui a comme projection sur l'un des facteurs de F un sous-espace de dimension finie.

9. Étoile d'un point.

Nous supposons désormais le corps de base K localement compact. Dans [4, d] et [4, f] nous avons utilisé la notion d'étoile $S(x, A)$ d'un point x relativement à un ensemble $A \subset E$.

DÉFINITION. — Soit $x \in A$, où A est un ensemble d'un espace vectoriel E , muni d'une topologie de classe θ : on

définit l'étoile $S(x, A)$ de x par rapport à A , comme l'ensemble des disques de centre x contenus dans A .

Un disque s'écrit $\Delta_{x,y} = [z \in A; z = x + uy, x, y \text{ donnés dans } E, y \neq 0; \text{ et } u \text{ variable, } |u| \leq 1]$. $S(x, A)$ est encore l'ensemble des z qui s'écrivent

$$z = x + uy \text{ avec } |u| < \rho_A(x, y) \text{ ou } |u| \leq \rho_A(x, y).$$

PROPOSITION 13. — Si E est muni d'une topologie T , de classe θ , qui fait de A un ouvert, et si le corps de base K de E est localement compact, $S(x, A)$ est ouvert pour tout $x \in E$.

Si $x \notin A$, $S(x, A) = \emptyset$; soit $x \in A$; on peut supposer $x = 0$ et montrer que $S(0, A)$ est ouvert. Alors $x' \in S(0, A)$ équivaut à $ux' \in A$ pour tous les $u \in K$ qui vérifient $|u| \leq 1$; K étant localement compact, on définit ainsi un ouvert de T .

Remarque. — $S(x, A)$ est le plus grand voisinage disque de x dans A .

PROPOSITION 14. — Avec les mêmes hypothèses sur E, T et A , si G est un sous-ensemble de A qui vérifie la condition :

$$\text{pour } x \in G, \text{ on a } S(x, A) \subset G$$

alors G coïncide avec une composante connexe ouverte de A .

On va d'abord démontrer :

LEMME. — Si l'on associe à $S(x, A)$ son homothétique $S_{1/2}(x, A)$ dans l'homothétie de centre x , de rapport $1/2$, alors si l'on a $x' \in S_{1/2}(x, A)$, on a $x \in S(x', A)$.

Si $x' = x$ l'énoncé est évident.

Si l'on a $x' \neq x$, on considère la configuration obtenue sur la droite affine déterminée par x et x' ; posons

$$y = x' - x.$$

On a $z = x + uy \in A$ pour $|u| \leq 2$. Écrivons

$$z = x + uy = x' + \nu y;$$

il vient $\nu = u - 1$. Donc pour $|\nu| \leq 1$, on a $x' + \nu y \in A$; en particulier pour $\nu = -1$, on obtient le point x . On a donc $x \in S(x', A)$.

La proposition 14 en résulte. Montrons que G est ouvert et

fermé pour la topologie T : $x \in G$ entraîne $S(x, A) \subset G$, et $\overline{S(x, A)}$ est ouvert, donc G est ouvert. De plus si l'on a $\xi \in \overline{G}$ et $\xi \in A$, $S(\xi, A)$ et son homothétique $S_{1/2}(\xi, A)$ dans l'homothétie $(\xi, 1/2)$ contiennent un point $x \in G$. Alors, d'après le lemme on a $\xi \in S(x, A)$, donc $\xi \in G$, et G est fermé, ce qui achève la démonstration.

10. Applications à l'analyse complexe.

Dans ce paragraphe, on suppose $K = \mathbf{C}$. Rappelons qu'une fonction $f: E \rightarrow \mathbf{R}$, définie dans un domaine G (pour une topologie de classe θ) est dite plurisousharmonique si elle est semi-continue supérieurement, et vérifie l'inégalité

$$f(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + ye^{i\theta}) d\theta$$

pour tout disque $\Delta_{x,y} = x + Dy \subset G$, où D est le disque unité de \mathbf{C} . Enfin on exige $f(x) \not\equiv -\infty$. La seconde condition équivaut à dire que la restriction $f|L$, soit

$$\varphi(u) = f(x + uy)$$

est localement sousharmonique ou la constante $-\infty$ sur toute droite complexe L .

L'ensemble $P(G)$ des fonctions plurisousharmoniques dans un ouvert G est fonction croissante de la topologie T .

PROPOSITION 15. — *Si G est un ouvert dans un espace vectoriel E muni d'une topologie de classe θ , on a les propriétés suivantes :*

- 1) $P(G)$ est un cône convexe réticulé supérieurement.
- 2) Si G est T_1 ouvert et si l'on a $T_1 \subset T_2$, on a

$$P_1(G) \subset P_2(G).$$

Si T parcourt les topologies θ , $P(G)$ a un élément maximal unique donné par la topologie finiment ouverte T_f sur G .

On démontrera d'abord :

PROPOSITION 16. — *Soit f une fonction plurisousharmonique dans un domaine G d'un espace vectoriel complexe E*

muni d'une topologie de classe θ : l'ensemble

$$A = [x \in G; f(x) = -\infty]$$

a son intérieur \mathring{A} vide.

En effet $x \in \mathring{A}$ entraîne $S(x_0, G) \subset A$; on a alors

$$S(x, G) \subset \mathring{A},$$

car $S(x, G)$ est T -ouvert (proposition 13). Alors d'après la proposition 14, on a $\mathring{A} = G$, ou $\mathring{A} = \emptyset$, mais $\mathring{A} = G$ est exclu car la définition des fonctions plurisousharmoniques exclut la constante $f(x) \equiv -\infty$.

Démontrons la proposition 15 : il est clair que $f \in P(G)$ et $c > 0$ entraînent $cf \in P(G)$. De plus $f_1, f_2 \in P(G)$ entraîne $f_1 + f_2 \in P(G)$. En effet il existe $x_1 \in G$ avec $f_1(x_1) \neq -\infty$; il existe $x_2 \in S(x_1, G)$ avec $f_2(x_2) \neq -\infty$, d'après la proposition 16 et le fait que $S(x_1, G)$ est ouvert.

Sur un disque de centre x_1 contenant x_2 , f_1 et f_2 ont des restrictions sousharmoniques ($\neq -\infty$); leur somme est donc sousharmonique, $\neq -\infty$, ce qui établit

$$f_1 + f_2 \neq -\infty$$

dans G ; $P(G)$ est donc un cône convexe. D'autre part

$$\sup(f_1, f_2)$$

appartient à $P(G)$, en même temps que f_1 et f_2 d'après la définition. Si G est un ensemble T_1 -ouvert, il est T_2 -ouvert si $T_2 \supset T_1$; une fonction $f \in P(G)$ pour T_1 appartient à $P(G)$ pour T_2 , car f semi-continue supérieurement pour T_1 l'est pour T_2 .

Principe du maximum. Soit G un domaine d'un espace vectoriel E muni d'une topologie de classe θ , et $f \in P(G)$. Si en $x_0 \in G$ on a $f(x_0) = \sup_{x \in G} f(x)$, alors f est la constante $f(x_0)$.

En effet l'ensemble $A = [x \in G; f(x) = f(x_0)]$ a la propriété suivante : si l'on a $x \in A$, on a $S(x, G) \subset A$ (d'après le résultat analogue en dimension un). On a donc $A = G$ d'après $A \neq \emptyset$ et la proposition 14.

11. Théorème de la régularisée supérieure pour $\sup f_\alpha$ et $\lim \sup f_\alpha$ pour les fonctions plurisousharmoniques et des topologies de classe θ .

Soit $f_\alpha(x)$ une famille de fonctions plurisousharmoniques localement bornées supérieurement dans un domaine G d'un espace vectoriel complexe E muni d'une topologie de classe θ . On a les deux énoncés :

PROPOSITION 16. — 1° $g = \sup_\alpha f_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, a une régularisée supérieure g^* plurisousharmonique.

2° $h = \lim_\alpha \sup f_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, a une régularisée supérieure h^* plurisousharmonique si pour le préordre sur \mathfrak{A} le filtre des sections a une base dénombrable.

La démonstration ne diffère pas de la démonstration classique (par exemple [4, a]). Elle est possible dans une topologie θ grâce aux propositions précédentes.

Tout d'abord on a par définition $g^*(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \sup g(x')$. D'où $f_\alpha \leq g \leq g^*$ et

$$f_\alpha(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\alpha(x + ye^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*(x + ye^{i\theta}) d\theta$$

donc $g(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*(x + ye^{i\theta}) d\theta$ pour tout disque $\Delta_{x,y} \subset G$.

D'autre part le second membre est une fonction semi-continue supérieurement de $x \in G$ (corollaire 5), donc, en prenant la régularisée supérieure des deux membres on obtient l'inégalité du disque

$$g^*(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^*(x + ye^{i\theta}) d\theta.$$

Démontrons 2° : soit $\{M_\sigma\}$ le filtre des sections $\alpha \geq \sigma$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. On a

$$h = \lim_\sigma [\sup f_\alpha, \alpha \in M_\sigma].$$

Par hypothèse, il existe une sous-suite M_n qui est cofinale

aux M_σ , c'est-à-dire telle que tout M_σ contient un M_n . On peut supposer $M_{n+1} \subset M_n$. On a :

$$h = \lim_n [\sup_{\alpha \in M_n} f_\alpha] = \lim_n g_n \text{ où } g_n = \sup f_\alpha \text{ pour } \alpha \in M_n.$$

Plaçons-nous sur une droite complexe L support du disque $\Delta_{x,y}$. On a, u étant variable dans G :

$$h(x + uy) = \lim_n [g_n(x + uy)].$$

Utilisons un résultat de la dimension 1 en posant :

$$\bar{g}_n(x) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sup g_n(x + u\omega);$$

\bar{g}_n est la régularisée supérieure de g_n selon y et l'on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(x + ye^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}_n(x + ye^{i\theta}) d\theta.$$

D'après le 1^o, $\bar{g}_n(x + uy)$ est fonction sousharmonique de u , ce qui entraîne, pour $\Delta_{x,y} \subset G$:

$$g_n(x) \leq \bar{g}_n(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}_n(x + ye^{i\theta}) d\theta.$$

Soit, de même, \bar{h} la régularisée supérieure de h selon y (elle est aussi celle de la restriction de h à la droite L , support de $\Delta_{x,y}$ dans E). La suite g_n est décroissante de n ;

$$\bar{g}_n(x + uy)$$

est sur $L \cap G$ une suite décroissante de fonctions sousharmoniques de u ; d'après un résultat de la dimension finie, on a sur L : $\lim_n \bar{g}_n(x + uy) = \bar{h}(x + uy)$. En particulier pour $u = 0$, on obtient au point x :

$$\begin{aligned} (5) \quad h(x) &= \lim_n g_n(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_n \bar{g}_n(x + ye^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{h}(x + ye^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Alors si h^* est la régularisée de $h(x)$ sur G , on a

$$h \leq \bar{h} \leq h^*,$$

d'où, d'après (5) :

$$h(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^*(x + ye^{i\theta}) d\theta$$

et l'on termine comme pour le 1^o en prenant les régularisées supérieures des deux membres sur un voisinage de x dans l'espace E .

Remarque. — La partie 2^o de la proposition 16 tombe en défaut, même en dimension un, si l'on supprime l'hypothèse que le filtre \mathcal{F} des sections de \mathfrak{A} a une partie cofinale dénombrable. Donnons-en un exemple, où \mathfrak{A} est l'ensemble des parties finies d'un domaine.

A toute partie finie $(a_1, \dots, a_n) = \alpha$ du disque $|z| \leq 1$ de \mathbf{C} , faisons correspondre

$$f_\alpha(z) = \sup \left[\frac{1}{2^n} \sum_{a_i \in \alpha} \log |z - a_i|, -1 \right]$$

et considérons la famille $f_\alpha(z)$ dans $|z| < 2$. Sur \mathfrak{A} on prend l'ordre déterminé par l'inclusion $\alpha \subset \beta$. Pour que $\varphi(z)$ soit valeur d'adhérence des $f_\alpha(z)$ en z , il faut que pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\alpha \in \Lambda$ donnés, il existe une partie finie β telle qu'on ait

$$\beta \supset \alpha \quad \text{et} \quad |f_\beta(z) - \varphi(z)| < \varepsilon.$$

Prenons α contenant z ; on a alors $f_\beta(z) = -1$ quel que soit $\beta \supset \alpha$; il est donc impossible d'obtenir une valeur d'adhérence $\varphi(z)$ différente de -1 , si l'on a $|z| \leq 1$. En particulier la plus grande valeur d'adhérence, c'est-à-dire $\limsup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(z)$ vaut -1 .

D'autre part si $1 < |z| < 2$, on a

$$n2^{-n} \log [|z| - 1] \leq |f_\alpha(z)| \leq n2^{-n} \log 3$$

ce qui donne les valeurs suivantes de $h(z) = \limsup f_\alpha(z)$:

$$\begin{aligned} h(z) &= -1 & \text{pour } |z| \leq 1; & & h(z) &= 0 & \text{pour } 1 < |z| < 2 \\ h^*(z) &= -1 & \text{pour } |z| < 1; & & h^*(z) &= 0 & \text{pour } 1 \leq |z| < 2. \end{aligned}$$

En conclusion $h^*(z)$ n'est pas sousharmonique dans $|z| < 2$; le théorème de la régularisée supérieure ne s'applique pas si le filtre des sections de \mathfrak{A} n'a pas une base dénombrable.

12. Applications analytiques $E \rightarrow F$.

Rappelons qu'une fonction $E \rightarrow \mathbf{C}$, soit $f(x)$, est dite G -analytique dans un ouvert ω de E si sa restriction aux droites affines soit

$$\varphi(u) = f(x + uy); \quad u \in \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$$

est une fonction analytique de u . Il résulte alors du théorème de Hartogs que la restriction de f à un sous-espace de dimension finie est une fonction analytique. *Les fonctions G -analytiques $E \rightarrow \mathbf{C}$ sont les fonctions analytiques de la topologie T_f sur E .*

Si l'on considère les *applications analytiques* $E \rightarrow F$, des difficultés apparaissent même quand la topologie sur F est vectorielle, dès qu'elle n'est pas supposée localement convexe. Considérons la restriction d'une application f à un sous-espace affine $z = x + uy$, soit

$$(6) \quad f(x + uy) = f(x) + A_{1,x,y}u + \dots + A_{p,x,y}u^p + \dots$$

On définira dans un ouvert $G \subset E$ la classe des applications analytiques $G \rightarrow F$ par les conditions suivantes :

- a) f est une application continue $G \rightarrow F$,
- b) La restriction $f(x + uy)$ à une droite complexe est donnée par un développement (5) qui converge pour

$$|u| < \rho(x, y), \quad \rho(x, y) > 0.$$

Si F a une topologie localement convexe et est de plus séquentiellement complet, le calcul des $A_{p,x,y}$ par l'intégrale de Cauchy montre qu'ils sont des éléments de F lui-même, comme le sont les valeurs prises par $f(x + uy)$ quand u varie dans \mathbf{C} .

On se placera dans le cas où les topologies T_1 et T_2 sur E et F sont seulement supposées de classe θ . On dira que l'application $f: G \rightarrow F$, où G est un ouvert de E est analytique si elle est continue pour T_1 et T_2 et vérifie la condition.

b') Sur tout disque $\Delta_{x,y} \subset G$, donné par $z = x + uy$, pour $|u| \leq 1$, f admet un développement (6) qui est unifor-

mément convergent pour $|u| \leq 1$, les $A_{p,x,y}$ étant des éléments de F .

Montrons alors :

PROPOSITION 17. — Soit f une application analytique $G \rightarrow F$ d'un domaine $G \subset E$ dans F , les espaces vectoriels complexes E, F ayant des topologies T_1, T_2 , de classe θ toutes deux. Alors si V est une fonction plurisousharmonique définie sur un domaine Ω contenant $f(G)$, la fonction composée $V \circ f(x)$ est plurisousharmonique dans G , ou est la constante $-\infty$.

La démonstration ne diffère de celle que nous avons donnée dans [4a] que par des changements mineurs. Tout d'abord $V \circ f$ est semi-continue supérieurement. Montrons ensuite que l'inégalité du disque est vérifiée pour $V \circ f$ en considérant un disque $\Delta_{x,y}$ compact dans G et utilisant (6).

L'image $D = f(\Delta_{x,y})$ est compacte dans Ω , f étant continue sur le compact $\Delta_{x,y}$. Sur $f(\Delta_{x,y})$, la fonction plurisousharmonique V a alors un maximum fini M . Considérons pour $M' > M$ l'ensemble $\Omega' = [x \in \Omega; f(x) < M']$; c'est un voisinage ouvert de D .

Soit $f_q(x + uy) = \varphi_q(u)$ la somme des $q + 1$ premiers termes du développement (6) : elle est fonction continue de u , et, pour u variable, $\varphi_q(u)$ demeure dans le sous-espace N de dimension $q + 1$ déterminé par les $A_{i,x,y}$ et $f(x)$. La restriction de V à N est plurisousharmonique (ou la constante $-\infty$) et il en est de même de la restriction de V à la sous-variété analytique paramétrée par u et décrite dans N par $z = \varphi_q(u)$, pour $|u| \leq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. On aura donc

$$(7) \quad V \circ \varphi_q(0) = V \circ f_q(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \circ f_q(x + ye^{i\theta}) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \circ \varphi_q(e^{i\theta}) d\theta$$

où l'on choisit $q > q_0$ de manière que le compact $f_q(\Delta_{x,y})$ soit dans Ω' ; (7) est obtenu comme application de l'inégalité du disque à la fonction sousharmonique de u définie par $V \circ \varphi_q(u)$. Les fonctions $V \circ f_q(x + ye^{i\theta})$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ sont bornées supérieurement par M' ; on a alors par appli-

cation du lemme de Fatou :

$$\limsup_q \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \circ \varphi_q(e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \limsup_q V \circ \varphi_q(e^{i\theta}) d\theta.$$

Mais

$$\limsup_q V \circ \varphi_q(e^{i\theta}) = \limsup_q V \circ f_q(x + ye^{i\theta}) \leq V \circ f(x + ye^{i\theta})$$

d'après la semi-continuité supérieure de V . On a donc, finalement

$$\begin{aligned} V \circ f(x) = V \circ f_q(x) &\leq \limsup_q \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \circ \varphi_q(e^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \circ f(x + ye^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

qui est l'inégalité du disque pour $V \circ f$. Elle montre que $V \circ f$ qui est semi-continue supérieurement, est soit la constante $-\infty$ dans G , soit une fonction plurisousharmonique dans G .

13. Remarque sur les topologies polynomiales et plurisousharmoniques.

Soit E un espace vectoriel de corps de base K valué, non discret et localement compact. On considère une famille φ de fonctions définies sur E et nulles à l'origine.

Si une topologie T invariante par translation sur E possède une base des voisinages de 0 donnée par des ensembles

$$g_\alpha(x) \leq 1,$$

où $g_\alpha = \sup_j g_{\alpha,j}$, $g_{\alpha,j} \in \varphi$, on dira que T est une φ -topologie.

Faisons sur la famille φ les hypothèses suivantes :

a) Les $g_{\alpha,j}$ et les g_α sont T_f -continues, c'est-à-dire continues sur les sous-espaces vectoriels de dimension finie, pour la topologie vectorielle séparée.

b) On a $g(x) \geq 0$ et $g(ux) = |u|g(x)$ pour $u \in K$, $x \in E$, et $g \in \varphi$.

c) Il existe dans la famille φ une sous-famille g_H indexée à partir d'une base $B = \{e_\lambda\}$ de E , $\lambda \in \Lambda$, de la manière

suivante. A une partie finie $H \subset \Lambda$ on fait correspondre : 1° le sous-espace de dimension finie M_H engendré par les e_λ , $\lambda \in H$; 2° une fonction $g_H \in \varphi$ avec la propriété : l'ensemble $g_H = 0$ coïncide avec la réunion des $M_{H'}$, pour $H' \subset H$. On a alors :

PROPOSITION 18. — Si la famille φ vérifie les conditions précédentes, T_f est une φ -topologie. Plus précisément, étant donné un T_f -voisinage de 0, soit U , et une base e_λ , $\lambda \in \Lambda$, de E , il existe une application $H \rightarrow A(H)$ des parties finies de Λ dans le corps K , et un T_f -voisinage de 0, soit $U' \subset U$, défini par $f(x) \leq 1$, ou l'on a

$$(8) \quad f(x) = \sup_{H' \subset H} |A(H') \cdot g_{H'}(x)|, \quad A(H') \in K.$$

En effet soit $H = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$: $x \in M_H$ s'écrit $x = \sum x_\alpha e_\alpha$, $\alpha \in H$; d'après la condition 2° du c) on a $g_{H'}(x) = 0$ si $H' \supset H$ et $H' \neq H$, donc sur tout sous-espace de dimension finie, on n'a qu'un nombre fini de $g_{H'}(x) \neq 0$ et (8) définit une fonction positive qui est T_f -continue et vérifie encore

$$f(ux) = |u|f(x); \quad 0 \leq f(x) < +\infty; \quad f(0) = 0.$$

Montrons qu'on peut déterminer les $A(H)$ de manière que l'ensemble $f(x) \leq 1$ soit contenu dans U . Un point $x \in M_H$ s'écrivant $x = \sum x_{\alpha_k} e_{\alpha_k}$, $\alpha_k \in H$, il suffit pour cela qu'on puisse déterminer les $A(H)$ de manière que la condition

$$(8) \quad |A(H')g_{H'}(x)| \leq 1$$

réalisée pour tout $H' \subseteq H$ entraîne $\sum x_{\alpha_k} e_{\alpha_k} \in U$ pour $\alpha_k \in H$. Pour $\text{card } H = 1$ et M_H engendré par le seul élément e_α , on choisit $A(\alpha)$ de manière que

$$|A(\alpha)g_\alpha(x_\alpha)| \leq 1$$

entraîne $x_\alpha e_\alpha \in U$.

Ensuite supposons que $K(H')$ ait été déterminé pour tous les $H' \subset H$ et $H' \neq H$, de manière à vérifier (8). On peut choisir $K(H)$ de manière à réaliser encore (8). Dans M_H considérons l'ensemble compact

$$S = \bigcup_{H' \subset H} [x \in M_{H'}; |A(H')g_{H'}(x)| \leq 1],$$

pour $H' \subset H$ et $\text{card } H' = \text{card } H - 1$; S est contenu dans $U \cap M_H$. De plus quand $r > 0$ varie, les ensembles $S_r = [x \in M_H; r|g_H(x)| \leq 1 \text{ et } |A(H')g_{H'}(x)| \leq 1 \text{ pour tout } H' \subset H, H' \neq H, r > 0]$ sont compacts et leur intersection est S . On peut donc choisir $r = |A(H)|$ assez grand pour réaliser $S_r \subset [U \cap M_H]$, et (8) est encore valable pour H .

La fonction $f(x) = \sup |A(H)g_H(x)|$ est T_f -continue et $|f(x)| \leq 1$ est un voisinage disqué de 0 contenu dans U , ce qui établit la proposition.

Exemples. — Si $\text{card } H = n$, et $H = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ considérons

$$g_H(x) = |x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}|^{1/n} [A(H)]^{1/n}.$$

où $x \in M_H$ s'écrit $x_{\alpha_1}e_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_n}e_{\alpha_n}$.

On obtient ainsi : les topologies séparées de classe θ , et en particulier T_f , sont polynomiales si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Si $K = \mathbb{C}$, $g_H(x)$ est une fonction plurisousharmonique qui est T_f -continue; toute topologie de classe θ , en particulier T_f est une topologie plurisousharmonique (cf. [3a]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, *Actualités Hermann*, n° 1189.
- [2] S. KAKUTANI et V. KLEE, The finite topology of a linear space, *Arch. Math.* (Bâle), 14 (1963), 55-58.
- [3] C.-O. KISELMAN, a) Plurisubharmonic functions in vector spaces, Uppsala University Department of Math., Report 39, 1972.
b) On locally pseudo-convex topological vector spaces, Uppsala University Department of Math.
- [4] P. LELONG, a) Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques, *Lecture-Notes* n° 71 (1968), 167-189, (Springer).
b) Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et une extension du théorème de Banach-Steinhaus aux familles d'applications polynomiales, *Comptes rendus du Colloque d'Analyse fonctionnelle de Liège*, 1970, 21-45.
c) Théorème de Banach-Steinhaus pour les polynômes; applications entières d'espaces vectoriels complexes, *Lecture-Notes in Mathematics*, n° 205 (1971), 87-112, (Springer).
d) Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques et sur les algèbres de fonctions analytiques, *Colloque international du C.N.R.S.*, n° 208, Paris (1972), 95-116, *Agora Mathematica* n° 1, Gauthier-Villars, Paris.

- e) Fonctionnelles analytiques et fonctions entières. Cours paru aux Presses de l'Université de Montréal, 1967.
- f) Plurisubharmonic functions in topological vector spaces; polar sets and problems of measure, *Lecture Notes Springer*, n° 364 (1973), 58-68.
- [5] J.-P. LIGAUD, Espaces D. F. non nécessairement localement convexes, *C. R. Acad. Sci.*, 275 (1972), 283-285.
- [6] P. TURPIN, Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz non localement convexes, *Studia Math.*, 46, (1973), 141-148; *Ibidem*, 153-165 et 167-195.

Manuscrit reçu le 22 mars 1975.

Pierre LELONG,
Université P.-et-M.-Curie
Tour 46
4, place Jussieu
75005 Paris.
