ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROSE-MARIE HERVÉ

Quelques propriétés du faisceau de fonctions harmoniques associé à un opérateur elliptique dégénéré

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 245-261

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_245_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 245-261.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU DE FONCTIONS HARMONIQUES ASSOCIÉ A UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉ

par **Rose-Marie HERVÉ**

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

Cet article complète les propriétés du faisceau $\mathcal{H}$ des fonctions harmoniques associées à un opérateur elliptique dégénéré [4].

On montre d'abord que l'on peut définir les fonctions harmoniques adjointes au faisceau $\mathcal{H}$, et qu'elles coïncident avec les solutions de l'équation adjointe [1]. Puis on compare la solution du problème de Dirichlet donnée par la théorie axiomatique, à la solution au sens variationnel construite par M. Derridj dans un ouvert assez régulier [2].

NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Sur un ouvert $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, on se donne un opérateur elliptique dégénéré de la forme

$$\mathrm{L}u = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{X}_k^2 u + \mathrm{X}_0 u + au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u'_{x_i} + au,$$

où $\mathrm{X}_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, r$, sont des champs de vecteurs réels de classe $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ et a une fonction $\in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Soit

$$\mathrm{L}^* u = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{X}_k^2 u + \mathrm{X}'_0 u + a' u$$

l'adjoint de L.

(1) La démonstration utilise de façon essentielle la notion d'ouverts c.d. due à M. Brelot.

On suppose que l'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_r$, soit $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_r)$, est de rang n en tout point $\in \Omega$: d'après les résultats de J.-M. Bony ([1], corollaire du th. 5.3), le faisceau $\mathscr{H}$ [resp. $\mathscr{H}^*$] des solutions de $Lu = 0$ [resp. $L^*u = 0$] satisfait aux axiomes 1, 2, 3 de l'axiomatique de M. Brelot. On marquera d'une * toutes les notions relatives à $\mathscr{H}^*$.

On suppose en outre l'existence d'un potentiel > 0 sur Ω, ce qui est vérifié en particulier si a est négatif, sans être $\equiv 0$, car alors les constantes > 0 sont surharmoniques sans être harmoniques dans Ω. On en déduit la proportionnalité des potentiels à support ponctuel donné ([4], th. 4).

Dans la suite on note $g(x, y)$ la fonction de Green construite par J.-M. Bony ([1], th. 4.3) dans tout ouvert ω très régulier, c'est-à-dire borné, tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$ et qu'en tout point $x \in \partial\omega$, il existe une normale ν à $\overline{\omega}$ satisfaisant à

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_i\nu_j > 0; \quad g_y : x \longmapsto g(x, y)$$

est (à un facteur constant près) l'unique potentiel de support y dans ω ([4], lemme 6) et $(x, y) \longmapsto g(x, y)$ est s.c.i. sur $\omega \times \omega$, continue pour $x \neq y$. Il résulte alors de ces propriétés de g que tout L-potentiel dans ω peut s'écrire $G_\mu(x) = \int g_y(x)\, d\mu(y)$, μ mesure $\geqslant 0$ sur ω ([3], th. 18.2 et 18.3).

La fonction de Green dans ω relative à L^* est

$$g^*(x, y) = g(y, x), \quad g^*_x : y \longmapsto g(x, y)$$

est le L^*-potentiel dans ω de support x, et tout L^* potentiel dans ω est de la forme $G^*_\mu(y) = \int g^*_x(y)\, d\mu(x)$.

I. LES FONCTIONS HARMONIQUES ADJOINTES ET LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION ADJOINTE

Pour définir les fonctions harmoniques adjointes au faisceau ([3], chapitre VI), il suffit de démontrer l'existence d'une base des ouverts formée de domaines c.d. (c'est-à-dire de domaines δ, $\bar{\delta} \subset \Omega$, tels que, pour tout potentiel p dans Ω, harmonique dans δ, $R_p^{\complement\delta} = p$ dans Ω) — cf. par exemple [3], 11, B —. Cette propriété d'existence étant locale, on peut se placer dans un ouvert ω très régulier.

On va montrer que tout ouvert régulier* $U \subset \omega$ est c.d., et pour cela il suffit de prouver que, pour tout $y \in \partial U$, g_y est conservé par balayage sur $\complement_\omega U$ ([3], lemme 24.1). Ce qui suit a pour but d'établir la formule de réciprocité [2]

$$\hat{R}_{g_y}^{F}(x) = \hat{R}_{g_x^*}^{*F}(y)$$

pour tout fermé $F \subset \omega$, qui conduit au résultat cherché.

Formule de réciprocité pour les ouverts.

Proposition 1. — *Pour tout ouvert* $U \subset \omega$:

$$R_{g_y}^{U}(x) = R_{g_x^*}^{*U}(y) \quad \forall x \quad \textit{et} \quad y \in \omega$$

et $G_{\mu^U}^* = R_{G_\mu^*}^{*U}$ $\forall \mu$ *mesure positive à support compact dans* ω.

Pour tout $y \in U$: $R_{g_y}^{U} = g_y$ sur U, donc aussi sur ω ([3], lemme 3.1). D'autre part ([3], th. 10.1) :

$$R_{g_y}^{U}(x) = \int g_y \, d\varepsilon_x^{U} = G_{\varepsilon_x^U}^*(y) ;$$

ainsi $y \longmapsto R_{g_y}^{U}(x)$ est une fonction surharmonique* coïncidant sur U avec g_x^*, donc

$$R_{g_y}^{U}(x) \geqslant R_{g_x^*}^{*U}(y).$$

On obtient l'inégalité inverse en remplaçant g_y par g_x^*. Enfin ([3], th. 10.1 et 22.4) :

$$\begin{aligned} G_{\mu^U}^*(y) = \int g_y \, d\mu^U &= \int R_{g_y}^{U}(x) \, d\mu(x) \\ &= \int R_{g_x^*}^{*U}(y) \, d\mu(x) = R_{G_\mu^*}^{*U}(y). \end{aligned}$$

Quelques propriétés des mesures positives, à support compact, engendrant un potentiel continu.

Soit $\mathfrak{M}(\omega)$ [resp. $\mathfrak{M}^*(\omega)$] la classe des mesures μ posi-

[2] Toutes les balayées sont relatives à l'ouvert ω.

tives sur ω, à support compact dans ω, telles que

$$G_\mu [\text{resp. } G^*_\mu]$$

est fini continu sur ω.

Lemme 1. — *Quel que soit le compact* $K \subset \omega$, *les restrictions à* K *des différences* $G_\mu - G_{\mu'}$, *avec* μ *et* $\mu' \in \mathfrak{M}(\omega)$ [*resp. des différences* $G^*_\mu - G^*_{\mu'}$, *avec* μ *et* $\mu' \in \mathfrak{M}^*(\omega)$] *sont denses dans* $\mathscr{C}(K)$.

En effet, les différences de deux potentiels finis continus dans ω sont denses dans $\mathscr{C}(K)$ ([3], lemme 6.1); il suffit alors de balayer de tels potentiels sur un compact extérieurement régulier contenant K et contenu dans ω ([3], lemme 7.1).

Lemme 2. — *Pour que deux mesures positives* λ *et* λ' *sur* ω, *à support compact dans* ω, *soient égales, il suffit que*

$$\int G_\lambda \, d\mu = \int G_{\lambda'} \, d\mu \quad \textit{pour toute} \quad \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega).$$

L'hypothèse s'écrit $\int G^*_\mu \, d\lambda = \int G^*_\mu \, d\lambda' \ \forall \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$, d'où $\lambda = \lambda'$ grâce au lemme 1.

Lemme 3. — *Soient* λ_n *des mesures positives sur* ω, *portées par un même compact* $\subset \omega$. *Si la suite* (G_{λ_n}) *est décroissante, on a :*

$$\lim G_{\lambda_n} = \widehat{\lim G_{\lambda_n}} \ \mu \ \textit{p.p. pour toute} \ \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega).$$

Si $G_\lambda = \widehat{\lim G_{\lambda_n}}$, on a ([3], corollaire 1 du théorème 23.1) λ limite vague de λ_n, donc $\forall \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$:

$$\int G^*_\mu \, d\lambda = \lim \int G^*_\mu \, d\lambda_n$$

ou

$$\int G_\lambda \, d\mu = \lim \int G_{\lambda_n} \, d\mu = \int (\lim G_{\lambda_n}) \, d\mu.$$

Proposition 2. — *Soit* K *un compact* $\subset \omega$. *Quel que soit* $\mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$: μ^K *est limite vague de* μ^U *selon l'ordonné filtrant décroissant des ouverts* $U \supset K$ *et d'adhérence* $\subset \omega$.

Étant donné G_λ fini continu sur ω, on a ([3], 5 B, propriété 8)

$$R^K_{G_\lambda} = \inf R^U_{G_\lambda},$$

donc il existe une suite décroissante d'ouverts U_n telle que

$$\hat{R}^K_{G_\lambda} = \widehat{\lim R^{U_n}_{G_\lambda}};$$

alors (lemme 3) :

$$\int \hat{R}^K_{G_\lambda}\, d\mu = \lim \int R^{U_n}_{G_\lambda}\, d\mu = \inf \int R^U_{G_\lambda}\, d\mu$$

ou $\int G_\lambda\, d\mu^K = \inf \int G_\lambda\, d\mu^U$ ([3], th. 10.1), et $\int G_\lambda\, d\mu^U$ est fonction croissante de U; on achève grâce au lemme 1.

Formule de réciprocité pour les fermés.

PROPOSITION 3. — *Pour tout* F *fermé dans* ω

$$\hat{R}^F_{g_y}(x) = \hat{R}^{*F}_{g^*_x}(y) \quad \forall x \quad \text{et} \quad y \in \omega.$$

On peut supposer que F est un compact $K \subset \omega$ (cf. [3], démonstration de la proposition 31.3).

Comme dans la proposition 1, $x \longmapsto \hat{R}^{*K}_{g^*_x}(y)$ est le potentiel $G_{\varepsilon^{*K}_y}$ et, d'après le lemme 2, il suffit de montrer que pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$:

$$\int \hat{R}^K_{g_y}(x)\, d\mu(x) = \int \hat{R}^{*K}_{g^*_x}(y)\, d\mu(x).$$

Or

$$\int \hat{R}^K_{g_y}\, d\mu = \int g_y\, d\mu^K = G^*_{\mu^K}(y),$$

et $\int \hat{R}^{*K}_{g^*_x}(y)\, d\mu(x) = \hat{R}^{*K}_{G^*_\mu}(y)$ ([3], th. 22.4).

D'après la proposition 2 et une propriété de la topologie T^* sur l'ensemble des potentiels * ([3], proposition 19.3) :

$$G^*_{\mu^K} = T^* - \lim G^*_{\mu^U};$$

d'autre part

$$\hat{R}^{*K}_{G^*_\mu} = \widehat{\inf R^{*U}_{G^*_\mu}} = T^* - \lim R^{*U}_{G^*_\mu}$$

([3], corollaire 2 du th. 23.1). On conclut grâce à la proposition 1.

Existence d'une base formée de domaines c.d.

THÉORÈME 1. — *Soit* ω *un ouvert très régulier. Tout ouvert régulier** U *contenu dans* ω *est* c.d.

On a déjà remarqué (cf. le début du paragraphe) qu'il suffit de montrer

$$\hat{R}_{g_y}^{\complement U}(x) = g_y(x) \quad \forall y \in \partial U \quad \text{et} \quad x \in \omega.$$

Or

$$\hat{R}_{g_y}^{\complement U}(x) = \hat{R}_{g_x^*}^{*\complement U}(y) \quad \forall x \quad \text{et} \quad y \in \omega \quad \text{(proposition 3)},$$

et $\hat{R}_{g_x^*}^{*\complement U}(y) = g_x^*(y)$ $\forall x \in U$ et $y \in \complement U$, car U est régulier*. Par suite

$$R_{g_y}^{\complement U}(x) = g_y(x) \quad \forall y \in \complement U \text{ et } x \in U,$$

donc aussi $\forall x \in \omega$, et $\hat{R}_{g_y}^{\complement U} \equiv g_y$ en particulier pour tout $y \in \partial U$.

Comparaison des fonctions harmoniques et des fonctions harmoniques adjointes.*

On se place toujours dans un ouvert très régulier ω.

THÉORÈME 2. — *Les fonctions harmoniques adjointes définies à l'aide du potentiel g_y coïncident avec les fonctions harmoniques* (c'est-à-dire les solutions de $L^*u = 0$).*

Il suffit de montrer que, pour tout ouvert $U \subset \overline{U} \subset \omega$, la mesure harmonique adjointe en tout point $y \in U$, qui est la mesure associée à $\hat{R}_{g_y}^{\complement U}$ ([3], nº 29), coïncide avec la mesure harmonique*, c'est-à-dire $\varepsilon_y^{*\complement U}$; et ceci est vérifié car

$$\hat{R}_{g_y}^{\complement U}(x) = \hat{R}_{g_x^*}^{*\complement U}(y) = \int g_x^*(z)\, d\varepsilon_y^{*\complement U}(z) = \int g_z(x)\, d\varepsilon_y^{*\complement U}(z).$$

COROLLAIRE. — *Il y a identité entre les ensembles L-polaires et L*-polaires.*

Cf. [3], th. 32.1.

II. COMPARAISON DES DEUX SOLUTIONS DU PROBLÈME DE DIRICHLET

On compare les deux solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert ω très régulier et de frontière $\in \mathscr{C}^\infty$, et on suppose

$$a(x) + a'(x) \leqslant -2\sigma < 0 \quad \forall x \in \omega.$$

1. Espaces fonctionnels. Rappels.

Espaces fonctionnels associés à l'opérateur L.

Pour construire la solution du problème de Dirichlet au sens variationnel [2], M. Derridj définit les normes suivantes sur l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\omega)$ des fonctions $u \in \mathscr{L}^2(\omega)$ ainsi que leurs dérivées partielles 1^{res}, ω ouvert $\subset \Omega$:

$$\begin{aligned} \|u\|_M &= \|u\|_2 + \sum_{k=1}^{r} \|X_k u\|_2 \\ \|u\|_N &= \|u\|_M + \|X_0 u\|_{\mathcal{M}'} \\ \|u\|_P &= \|u\|_M + \|X_0 u\|_2 \end{aligned}$$

où $\mathscr{M}'(\omega)$ est le dual de $\mathscr{D}(\omega)$ pour $\|.\|_M$, et $\|.\|_2$ désigne la norme dans $\mathscr{L}^2(\omega)$. On a $\|X_0 u\|_{\mathcal{M}'} \leqslant \|X_0 u\|_2$, donc si $M(\omega)$, $N(\omega)$ et $P(\omega)$ sont les complétés de $W^{1,2}(\omega)$ pour les normes $\|.\|_M$, $\|.\|_N$ et $\|.\|_P$ respectivement :

$$W^{1,2}(\omega) \subset P(\omega) \subset N(\omega) \subset M(\omega),$$

les inclusions étant topologiques.

On désigne de même par $\mathscr{M}(\omega)$, $\mathscr{N}(\omega)$ et $\mathscr{P}(\omega)$ les adhérences de $\mathscr{D}(\omega)$ (ou de $W_0^{1,2}(\omega)$ ou encore de l'ensemble des fonctions $\in W^{1,2}(\omega)$ nulles p.p. hors d'un compact de ω), pour les mêmes normes, dans $M(\omega)$, $N(\omega)$ et $P(\omega)$ respectivement.

Quelques propriétés de ces espaces.

1re PROPRIÉTÉ. — *$u \in \mathscr{M}(\omega)$ et $X_0 u \in \mathscr{M}'(\omega) \Longleftrightarrow u \in \mathscr{N}(\omega)$.* Cf. [2], proposition 1.2.

2e PROPRIÉTÉ. — *Soit $u \in N(\omega)$. Alors Lu défini par*

$$\langle Lu, \varphi\rangle = -\sum_{k=1}^{r} \int_\omega X_k u(X_k\varphi + \varphi \operatorname{div} X_k)\, dx + \langle X_0 u, \varphi\rangle + \int_\omega a u\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega),$$

est dans $\mathscr{M}'(\omega)$, avec $\|Lu\|_{\mathcal{M}'(\omega)} \leqslant \alpha \|u\|_{N(\omega)}$, où

$$\alpha = \sup_\omega (1, |a|, |\operatorname{div} X_1|, \ldots, |\operatorname{div} X_r|),$$

et la constante α est encore valable dans tout ouvert $\subset \omega$.

3e PROPRIÉTÉ. — *Soit* $u \in \mathcal{N}(\omega)$. *Alors*

$$- \langle \mathrm{L}u, u \rangle = \sum_{k=1}^{r} \|\mathrm{X}_k u\|_2^2 - \int_\omega \frac{a+a'}{2} u^2 \, dx \geqslant \beta \|u\|_{\mathrm{M}(\omega)}^2,$$

et par suite

$$\|\mathrm{L}u\|_{\mathcal{M}'(\omega)} \geqslant \beta \|u\|_{\mathrm{M}(\omega)},$$

avec $\beta = \dfrac{\sigma}{1 + r\sigma}$, *et la constante* β *reste valable dans tout ouvert* $\subset \omega$.

Il suffit de supposer $u \in \mathcal{D}(\omega)$, car si la suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\omega)$ tend vers $u \in \mathcal{N}(\omega)$ pour la norme de $\mathrm{N}(\omega)$, c'est vrai *a fortiori* pour les normes de $\mathcal{L}^2(\omega)$ et de $\mathrm{M}(\omega)$, et d'autre part $\mathrm{L}\varphi_n$ tend vers $\mathrm{L}u$ dans $\mathcal{M}'(\omega)$ (2e propriété).

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, un calcul classique (cf. par exemple [5], p. 152) donne

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{L}\varphi, \varphi \rangle &= - \sum_{k=1}^{r} \|\mathrm{X}_k \varphi\|_2^2 + \int_\omega \varphi^2 \Big[a - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathrm{X}_0 \\ &\qquad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} (\mathrm{X}_k \operatorname{div} \mathrm{X}_k + (\operatorname{div} \mathrm{X}_k)^2) \Big] \, dx \\ &= - \sum_{k=1}^{r} \|\mathrm{X}_k \varphi\|_2^2 + \int_\omega \varphi^2 \frac{a+a'}{2} \, dx\end{aligned}$$

d'où

$$- \langle \mathrm{L}\varphi, \varphi \rangle \geqslant \sum_{k=1}^{r} \|\mathrm{X}_k \varphi\|_2^2 + \sigma \|\varphi\|_2^2 \geqslant \beta \|\varphi\|_{\mathrm{M}(\omega)}^2.$$

Rappel de résultats de M. Derridj [2].

1. UN THÉORÈME D'ISOMORPHISME (th. 1.1) :

L'opérateur L *est un isomorphisme de* $\mathcal{N}(\omega)$ *sur* $\mathcal{M}'(\omega)$.

2. UN THÉORÈME DE RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS (th. 2.2) :

Soit u *la solution* $\in \mathcal{N}(\omega)$ *de* $\mathrm{L}u = g$, *où* $g \in \mathcal{M}'(\omega)$; *alors* $g \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega})$ *entraîne* $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\omega})$.

Du théorème d'isomorphisme, on déduit immédiatement la solution du problème de Dirichlet au sens variationnel :

THÉORÈME. — *A toute fonction* $f \in \mathrm{N}(\omega)$ *correspond une solution unique* $u \in \mathrm{N}(\omega)$ *telle que* $\mathrm{L}u = 0$ *dans* ω *et*

$$u - f \in \mathcal{N}(\omega).$$

On note L_f^ω *cette solution et* L^ω *l'opérateur* $f \longmapsto L_f^\omega$ *de* $N(\omega)$ *dans lui-même.*

En effet, si $v = u - f$, $Lv = -Lf$ qui appartient à $\mathcal{M}'(\omega)$, donc cette équation a une solution unique $v \in \mathcal{N}(\omega)$.

Le problème consiste à comparer la solution L_f^ω qu'on vient de définir avec la solution H_f^ω du problème de Dirichlet, dans le cas où f appartient aussi à $\mathscr{C}(\overline{\omega})$.

2. Un principe du maximum pour les sous-solutions (3) $\in P(\omega)$.

On commence par montrer que les espaces $M(\omega)$ et $P(\omega)$ jouissent de propriétés analogues à celles des espaces de Sobolev.

PROPOSITION 4. — *Si* $u \in M(\omega)$ (*resp.* $P(\omega)$ *ou* $N(\omega)$) *et* $u = 0$ p.p. *hors d'un compact* $K \subset \omega$, *alors* $u \in \mathcal{M}(\omega)$ (*resp.* $\mathcal{P}(\omega)$ *ou* $\mathcal{N}(\omega)$).

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\omega)$, égale à 1 sur un voisinage de K et $(u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ tendant vers u dans $M(\omega)$ (resp. $P(\omega)$ ou $N(\omega)$) : $(\chi u_n) \subset W_0^{1,2}(\omega)$; $\lim (\chi u_n) = u$ dans $\mathscr{L}^2(\omega)$; $X_k(\chi u_n) = \chi . X_k u_n + u_n X_k \chi$ tend vers $X_k u$ dans $\mathscr{L}^2(\omega)$. En outre si $u \in N(\omega)$:

$$|\langle(\chi . X_0 u_n - X_0 u), \varphi\rangle| = |\langle(X_0 u_n - X_0 u), \chi\varphi\rangle| \leqslant C^{ste} \|X_0 u_n - X_0 u\|_{\mathcal{M}'} \|\varphi\|_M,$$

donc $X_0(\chi u_n) \to X_0 u$ dans $\mathcal{M}'(\omega)$.

PROPOSITION 5. — $u \in M(\omega)$ [*resp.* $P(\omega)$] *entraîne*

$$u^+ \in M(\omega)$$

[*resp.* $P(\omega)$]. *En outre :*

$$X_k u^+ = (\sigma \circ u) X_k u, \; k = 1, \ldots, r \; (\textit{resp. et } k = 0),$$

où σ *est la fonction caractéristique de* $]0, +\infty[$,

$$X_k u = 0 \text{ p.p. } \textit{sur } \{u = 0\}, \; k = 1, \ldots, r \; (\textit{resp. et } k = 0),$$

et l'application $u \longmapsto u^+$ *est continue.*

(3) Ou pour les fonctions sous-harmoniques $\in P(\omega)$, car on sait que u égale p.p. à une fonction sous-harmonique dans ω équivaut à u localement intégrable dans ω et $Lu \geqslant 0$ dans ω ([4], th. 5).

Soient $(u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ tendant vers u dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$] et h l'application $R \to R$ définie par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0 \\ \sqrt{t^2 + \alpha^2} - \alpha & \text{pour} \quad t \geqslant 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0;$$

alors : $h(t) \leqslant |t|$ et $0 \leqslant h'(t) \leqslant 1 \ \forall t$, $(h \circ u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ car $\dfrac{\partial(h \circ u_n)}{\partial x_i} = (h' \circ u_n)\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$, donc $X_k(h \circ u_n) = (h' \circ u_n)X_k u_n$. D'autre part, dans $\mathscr{L}^2(\omega)$:

$$h \circ u = \lim_n (h \circ u_n),$$

$X_k(h \circ u) = \lim_n X_k(h \circ u_n)$, $k = 1, \ldots, r$ (resp et $k = 0$), car $\lim_n (h' \circ u_n)(X_k u_n - X_k u) = 0$ et, pour une suite partielle, encore notée (u_n), tendant vers u ponctuellement p.p. :

$$\lim_n (h' \circ u_n - h' \circ u)X_k u = 0.$$

Ainsi,

$$h \circ u \in M(\omega) \text{ [resp. } P(\omega)]$$

et

$$X_k(h \circ u) = (h' \circ u)X_k u.$$

On fait tendre α vers 0; dans $\mathscr{L}^2(\omega)$:

$$u^+ = \lim_{\alpha \to 0} h \circ u$$

et

$$(\sigma \circ u)X_k u = \lim_{\alpha \to 0} (h' \circ u)X_k u, \ k = 1, \ldots, r \text{ (resp. et } k = 0).$$

Donc

$$u^+ \in M(\omega) \quad [\text{resp. } P(\omega)] \text{ et } X_k u^+ = (\sigma \circ u)X_k u \text{ p.p.}$$

En appliquant ce résultat à u et à $-u$:

$$X_k u = X_k u^+ - X_k u^- = [\sigma(u) + \sigma(-u)]X_k u \quad \text{p.p.},$$

donc $= 0$ p.p. si $u = 0$.

Enfin, si $u_n \to u$ dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$], dans $\mathscr{L}^2(\omega)$:

$$u^+ = \lim_n u_n^+$$

et $X_k u^+ = \lim_n X_k u_n^+$, $k = 1, \ldots, r$ (resp. et $k = 0$), car $\lim_n (\sigma \circ u_n)(X_k u_n - X_k u) = 0$ et, pour une suite partielle choisie comme ci-dessus, $\lim_n (\sigma \circ u_n - \sigma \circ u) X_k u = 0$.

COROLLAIRE 1. — *$u \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] entraîne $u^+ \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] et même, u^+ est limite dans $\mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] d'une suite contenue dans $\mathcal{D}^+(\omega)$.*

En effet, $u = \lim u_n$ dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$] avec $(u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ et $u_n = 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$. Alors $u^+ = \lim u_n^+$, et (u_n^+) possède les mêmes propriétés que (u_n); en régularisant u_n^+, on obtient une suite

$$(\varphi_n) \subset \mathcal{D}^+(\omega),$$

et tendant vers u^+ dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$].

COROLLAIRE 2. — *$u \in M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$], $u \geqslant 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$ et $v \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] entraînent* $\inf(u, v) \in \mathcal{M}(\omega)$ *[resp. $\mathcal{P}(\omega)$].*

Soit $(v_n) \subset W^{1,2}(\omega)$, chaque v_n étant nulle p.p. hors d'un compact $\subset \omega$, et v_n tendant vers v dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$] : $\inf(u, v_n) \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] (proposition 4), donc aussi la limite $\inf(u, v)$.

COROLLAIRE 3. — *$u \in M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$], $0 \leqslant u \leqslant v$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$ et $v \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] entraînent u dans $\mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$].*

On peut alors démontrer un premier principe du maximum pour les sous-solutions $\in P(\omega)$.

THÉORÈME 3. — *Soit $u \in P(\omega)$, $Lu \geqslant 0$ sur ω et $u \leqslant v$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$, où $v \in \mathcal{M}(\omega)$. Alors $u \leqslant 0$ p.p. dans ω.*

On a :

$(*)$ $\quad 0 \leqslant u^+ \leqslant v^+$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$.

$v^+ \in \mathcal{M}(\omega)$ (corollaire 1); $u^+ \in P(\omega)$ (proposition 5), donc

$$u^+ \in M(\omega) \qquad \text{et} \qquad X_0 u^+ \in \mathcal{L}^2(\omega).$$

L'inégalité $(*)$ montre alors que $u^+ \in \mathcal{M}(\omega)$ (corollaire 3), et comme $X_0 u^+ \in \mathscr{L}^2(\omega)$, $u^+ \in \mathcal{N}(\omega)$ (n° 1, propriété 1). D'autre part $\langle Lu, \varphi\rangle \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}^+(\omega)$ donc aussi

$$\langle Lu, u^+\rangle \geqslant 0.$$

Mais

$$\langle Lu, u^+\rangle = \langle Lu^+, u^+\rangle = -\sum_{k=1}^{r} \|X_k u^+\|_2^2 + \int_\omega \frac{a+a'}{2} u^{+2}\, dx \leqslant 0,$$

et $u^+ = 0$ p.p. dans ω [4].

3. Positivité de l'opérateur L^ω.

Il s'agit de montrer que L_f^ω est $\geqslant 0$ dans ω, si f l'est au voisinage de la frontière, ou plus précisément, si f appartient à l'espace $N^+(\omega)$ ainsi défini :

Définition. — $N^+(\omega)$ *est l'adhérence dans* $N(\omega)$ *de l'ensemble* $\{u \in W^{1,2}(\omega),\ u \geqslant 0$ *p.p. hors d'un compact* $\subset \omega\}$.

Comme on sera amené à régulariser f dans ω, on commence par étudier la limite de $L_f^{\omega_n}$, où les ω_n sont des ouverts de frontière $\mathscr{C}^\infty$ et très réguliers tendant vers ω, et pour cela, on étudie la norme de L_f^ω dans $M(\omega)$.

Proposition 6. — *Pour toute* $f \in N(\omega)$:

$$\|L_f^\omega\|_{M(\omega)} \leqslant \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \|f\|_{N(\omega)}$$

et les constantes α *et* β *sont encore valables dans tout ouvert* $\subset \omega$.

D'après les propriétés 2 et 3 citées au n° 1 :

$$\|L_f^\omega - f\|_{M(\omega)} \leqslant \frac{1}{\beta} \|Lf\|_{\mathcal{M}'(\omega)} \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \|f\|_{N(\omega)}$$

et les constantes α et β sont valables dans tout ouvert $\subset \omega$.

[4] Même en supposant seulement $a + a' < 0$ sur ω.

PROPOSITION 7. — *Soit* (ω_n) *une suite croissante d'ouverts satisfaisant aux mêmes hypothèses que* ω *(c'est-à-dire de frontière* $\mathscr{C}^\infty$ *et très réguliers) et dont la réunion est* ω [5].

Pour $f \in \mathrm{N}(\omega)$, *la fonction*

$$f_n = \begin{cases} \mathrm{L}_f^{\omega_n} & \textit{dans } \omega_n \ (^6) \\ f & \textit{dans } \omega - \omega_n \end{cases} \quad \textit{est dans } \mathrm{M}(\omega),$$

$\|f_n\|_{\mathrm{M}(\omega)} \leqslant \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \|f\|_{\mathrm{N}(\omega)}$ *et* L_f^ω *est limite faible de* f_n *dans* $\mathrm{M}(\omega)$.

Pour chaque n, $\mathrm{L}_f^{\omega_n} - f \in \mathscr{N}(\omega_n)$: cette fonction est limite dans $\mathrm{N}(\omega_n)$ d'une suite $\subset \mathscr{D}(\omega_n)$; son prolongement par 0 hors de ω_n est donc limite dans $\mathrm{M}(\omega)$ de la suite précédente, prolongée par 0 hors de ω_n; ce prolongement appartient donc à $\mathscr{M}(\omega)$ et $f_n \in \mathrm{M}(\omega)$.

Les constantes α et β sont encore valables dans ω_n, d'où

$$\|f_n - f\|_{\mathrm{M}(\omega)} = \|\mathrm{L}_f^{\omega_n} - f\|_{\mathrm{M}(\omega_n)} \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \|f\|_{\mathrm{N}(\omega_n)} \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \|f\|_{\mathrm{N}(\omega)}$$

et

$$\|f_n\|_{\mathrm{M}(\omega)} \leqslant \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \|f\|_{\mathrm{N}(\omega)}.$$

Une suite partielle convenable ayant été extraite, la suite f_n a une limite faible dans $\mathrm{M}(\omega)$, soit g; alors, dans chaque ω_p :

$$\mathrm{L}f_n = 0 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant p,$$

soit

$$\langle \mathrm{X}_0 f_n, \varphi \rangle = \int_\omega \left[\sum_{k=1}^r \mathrm{X}_k f_n (\mathrm{X}_k \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathrm{X}_k) - a f_n \varphi \right] dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega_p).$$

A la limite on a

$$\langle \mathrm{X}_0 g, \varphi \rangle = \int_\omega \left[\sum_{k=1}^r \mathrm{X}_k g (\mathrm{X}_k \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathrm{X}_k) - a g \varphi \right] dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega);$$

ainsi, $\mathrm{X}_0 g \in \mathscr{M}'(\omega)$ et $\mathrm{L}g = 0$ dans ω.

[5] On peut prendre par exemple des ouverts de frontière parallèle à celle de ω et voisine.

[6] Qui a bien un sens, car $f|_{\omega_n} \in \mathrm{N}(\omega_n)$.

Pour que $g = L_f^\omega$ il suffit alors de montrer que

$$g - f \in \mathcal{N}(\omega);$$

on a vu que $f_n - f \in \mathcal{M}(\omega)$, qui est faiblement fermé dans $M(\omega)$, donc à la limite $g - f \in \mathcal{M}(\omega)$; comme

$$X_0(g - f) \in \mathcal{M}'(\omega), \ g - f \in \mathcal{N}(\omega)$$

(nº 1, propriété 1).

Théorème 4. — *Si* $f \in N^+(\omega)$, L_f^ω *est* $\geqslant 0$ *dans* ω. *En particulier, si* $f \in P(\omega)$ *et* $f \geqslant 0$ *p.p. hors d'un compact* $\subset \omega$, L_f^ω *est* $\geqslant 0$ *dans* ω.

Grâce à la proposition 6, on se borne à $f \in W^{1,2}(\omega)$, et $\geqslant 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$; alors (proposition 4) $f - f^+ \in \mathcal{N}(\omega)$, donc $L_f^\omega = L_{f^+}^\omega$, ce qui permet de supposer $f \in W^{1,2}(\omega)$ et $\geqslant 0$ p.p. dans ω; enfin (proposition 7), il suffit de montrer $L_f^{\omega_0} \geqslant 0$ dans ω_0, où ω_0 est un ouvert possédant les mêmes propriétés que ω et d'adhérence $\subset \omega$.

Par régularisation de f appartenant à $W^{1,2}(\omega)$ et $\geqslant 0$ p.p. sur ω, on obtient des fonctions $g_n \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\omega_0})$, $\geqslant 0$, qui tendent vers f dans $W^{1,2}(\omega_0)$ donc *a fortiori* dans $N(\omega_0)$, et la proposition 6 montre encore qu'il suffit de prouver $L_{g_n}^{\omega_0} \geqslant 0$ dans ω_0. Or $g \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\omega_0})$ entraîne $Lg \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\omega_0})$, donc (nº 1, rappel 2) $L_g^{\omega_0} - g \in \mathscr{C}^\infty(\overline{\omega_0})$. Le théorème 3 s'applique à $u = - L_g^{\omega_0}$, qui est en particulier dans $P(\omega_0)$, et à

$$v = g - L_g^{\omega_0}$$

et montre que si g est $\geqslant 0$ dans ω_0, $L_g^{\omega_0}$ est $\geqslant 0$ dans ω_0.

Soit maintenant $f \in P(\omega)$ et $f \geqslant 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$. Pour montrer que $f \in N^+(\omega)$, on écrit

$$f = f^+ + (f - f^+);$$

f est limite dans $P(\omega)$ d'une suite $(u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$, d'où $f^+ = \lim u_n^+$ dans $P(\omega)$; $f - f^+ \in \mathscr{P}(\omega)$ donc est limite, dans $P(\omega)$, d'une suite $(v_n) \subset W^{1,2}(\omega)$, chaque v_n étant nulle p.p. hors d'un compact de ω. Ainsi f est limite dans $P(\omega)$, donc dans $N(\omega)$, de la suite $(u_n^+ + v_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ et

$$u_n^+ + v_n \geqslant 0 \text{ p.p.}$$

hors d'un compact $\subset \omega$.

4. Un principe du maximum pour les solutions. Comparaison des deux solutions du problème de Dirichlet.

On commence par démontrer un principe du maximum pour les solutions de $Lu = 0$, c'est-à-dire pour les fonctions harmoniques [7].

THÉORÈME 5. — *Soit* u *solution de* $Lu = 0$ *dans* ω *et* $u \leqslant v$ *p.p. hors d'un compact de* ω, *où* $v \in \mathcal{N}(\omega)$ *et*

$$v|_{\omega_0} \in P(\omega_0)$$

quel que soit $\omega_0 \subset \overline{\omega}_0 \subset \omega$ [8]; *alors* u *est* $\leqslant 0$ *dans* ω.

Soit K un compact $\subset \omega$ hors duquel $u \leqslant v$ p.p. Si $\omega_0 \supset K$, $(v - u)|_{\omega_0} \in P(\omega_0)$ et est $\geqslant 0$ p.p. sur $\omega_0 - K$ donc (théorème 4), $L_v^{\omega_0} \geqslant L_u^{\omega_0}$ dans ω_0, soit $L_v^{\omega_0} \geqslant u$ dans ω_0. En considérant une suite croissante d'ouverts ω_n possédant les propriétés énoncées dans la proposition 7, et en remarquant que la limite faible de $L_v^{\omega_n}$ est $L_v^{\omega} = 0$, on obtient $u \leqslant 0$ dans ω.

THÉORÈME 6. — *Soit* $f \in \mathscr{C}(\overline{\omega})$. *Si* $f \in N(\omega)$ *et si*

$$f|_{\omega_0} \in P(\omega_0)$$

quel que soit $\omega_0 \subset \overline{\omega}_0 \subset \omega$, *en particulier si* $f \in P(\omega)$, *alors* $H_f^{\omega} = L_f^{\omega}$ *dans* ω.

Il suffit de montrer $H_f^{\omega} \leqslant L_f^{\omega}$ dans ω.

Soit h une fonction harmonique de borne inférieure > 0 sur ω; comme ω est régulier, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$H_f^{\omega} \leqslant f + \varepsilon h$$

hors d'un compact $K_\varepsilon \subset \omega$, soit $H_f^{\omega} - L_f^{\omega} - \varepsilon h \leqslant f - L_f^{\omega}$ hors de K_ε. $f - L_f^{\omega} \in \mathcal{N}(\omega)$ et sa restriction à chaque $\omega_0 \subset \overline{\omega}_0 \subset \omega$ est dans $P(\omega_0)$, par suite (théorème 5)

$$H_f^{\omega} - L_f^{\omega} - \varepsilon h \leqslant 0$$

dans ω, puis $H_f^{\omega} \leqslant L_f^{\omega}$ dans ω.

[7] Rappelons que les fonctions harmoniques sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, d'après le théorème d'hypoellipticité de Hörmander [5].

[8] En particulier si $v \in \mathscr{P}(\omega)$, elle satisfait à ces conditions.

5. Un principe du maximum pour les sous-solutions $\in \mathcal{N}(\omega)$.

On peut enfin démontrer un principe du maximum pour les sous-solutions $\in \mathcal{N}(\omega)$, ce qui permet de caractériser les potentiels $\in \mathrm{N}(\omega)$.

Lemme 4. — *Soit* $u \in \mathcal{N}(\omega)$. *Alors*

$$-\langle \mathrm{L}u, u^+\rangle \geqslant \beta \|u^+\|^2_{\mathrm{M}(\omega)}.$$

Pour $\varphi \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\omega)$, $\varphi^+ \in \mathrm{W}_0^{1,2}(\omega) \subset \mathcal{N}(\omega)$, donc ($n^o$ 1, 3e propriété)

$$-\langle \mathrm{L}\varphi, \varphi^+\rangle = -\langle \mathrm{L}\varphi^+, \varphi^+\rangle \geqslant \beta \|\varphi^+\|^2_{\mathrm{M}(\omega)}.$$

Si $u \in \mathcal{N}(\omega)$, il est limite dans $\mathrm{N}(\omega)$ d'une suite

$$(\varphi_n) \subset \mathrm{W}_0^{1,2}(\omega);$$

$\varphi_n^+ \to u^+$ dans $\mathrm{M}(\omega)$ (proposition 5), et $\mathrm{L}\varphi_n \to \mathrm{L}u$ dans $\mathcal{M}'(\omega)$ (n^o 1, 2e propriété), donc à la limite

$$-\langle \mathrm{L}u, u^+\rangle \geqslant \beta \|u^+\|^2_{\mathrm{M}(\omega)}.$$

Théorème 7. — *Soit* $u \in \mathcal{N}(\omega)$ *et* $\mathrm{L}u \geqslant 0$ *dans* ω. *Alors* $u \leqslant 0$ *p.p. dans* ω.

D'une part :

$$\langle \mathrm{L}u, \varphi\rangle \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^+(\omega)$$

entraîne $\langle \mathrm{L}u, u^+\rangle \geqslant 0$, car $\mathrm{L}u \in \mathcal{M}'(\omega)$ et u^+ est limite dans $\mathcal{M}(\omega)$ d'une suite $\subset \mathcal{D}^+(\omega)$ (corollaire 1 de la proposition 5).

D'autre part (lemme 4) :

$$\langle \mathrm{L}u, u^+\rangle \leqslant 0.$$

Par suite $\langle \mathrm{L}u, u^+\rangle = 0$, $\|u^+\|_{\mathrm{M}(\omega)} = 0$ et $u^+ = 0$ p.p. dans ω.

Corollaire. — *Soit* $u \in \mathrm{N}(\omega)$ *et* $\mathrm{L}u \geqslant 0$ *dans* ω. *Alors* $u \leqslant \mathrm{L}_u^\omega$ *p.p. dans* ω.

En effet $u - \mathrm{L}_u^\omega$ est $\leqslant 0$ p.p. dans ω.

Une classe de potentiels.

THÉORÈME 8. — *Pour toute fonction* u, *surharmonique sur* ω, $\in N(\omega)$ *et telle que* $u|_{\omega_0} \in P(\omega_0)$ $\forall \omega_0$ *relativement compact dans* ω, *la p.g.m.h. de* u *dans* ω *existe et égale* L_u^ω, *donc: u est un potentiel dans* ω *équivaut à* $u \in \mathcal{N}(\omega)$.

u surharmonique sur ω entraîne $Lu \leqslant 0$ dans ω ([4], th. 5); comme $u \in N(\omega)$, on a (corollaire ci-dessus) $u \geqslant L_u^\omega$ p.p., donc partout ([4], proposition 1).

Si h est une minorante harmonique de u dans ω :

$$h - L_u^\omega \leqslant u - L_u^\omega \quad \text{sur} \quad \omega,$$

donc (théorème 5)

$$h \leqslant L_u^\omega \quad \text{sur} \quad \omega;$$

par suite L_u^ω est la p.g.m.h. de u dans ω.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. BONY, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, *Cours du C.I.M.E.*, Stresa, Juillet 1969.

[2] M. DERRIDJ, Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du 2e ordre hypoelliptiques, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 21, fasc. 4 (1971), 99-148, chapitre 3.

[3] R.-M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 12 (1962), 415-571.

[4] M. et R.-M. HERVÉ, Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot associées à un opérateur elliptique dégénéré, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 22, fasc. 2 (1972), 131-145.

[5] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.*, Uppsala, 119 (1967), 147-171.

Manuscrit reçu le 11 janvier 1975.

Rose-Marie HERVÉ,
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75005 Paris.