Annales de l'institut Fourier

Georges Elencwajg

Pseudo-convexité locale dans les variétés kahlériennes

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 295-314

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_295_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 295-314

PSEUDO-CONVEXITÉ LOCALE DANS LES VARIÉTÉS KAHLÉRIENNES

par Georges ELENCWAJG (*)

Introduction.

Une des méthodes pour étudier la convexité holomorphe d'un domaine D d'une variété analytique complexe X consiste à étudier la pseudo-convexité de D au voisinage de sa frontière ∂D dans X. Le problème de Levi et le théorème de Docquier-Grauert illustrent cette démarche.

On sait que si D est localement pseudo-convexe et X un espace projectif $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, il résulte que D est de Stein.

A. Takeuchi [7], dans le but entre autres d'établir ce théorème, a eu l'idée de faire des calculs sur des géodésiques d'une structure kählérienne sur X pour évaluer la plurisousharmonicité de la fonction $-\log$ (distance au bord), fonction introduite par K. Oka en géométrie analytique.

Le présent article reprend et complète celui de A. Takeuchi [7].

On établit une inégalité précise (cf. lemme principal, inégalité (39)) plutôt que de faire des changements de cartes multiples. Cette inégalité permet de faciliter les passages à la limite, de dégager une relation de la pseudo-convexité avec la positivité du fibré tangent et de remplacer les hypothèses d'analyticité par celles de différentiabilité. De manière plus précise, on obtient les résultats suivants :

Soit X une variété analytique complexe et $D \subset\subset X$ un ouvert relativement compact et localement pseudo-convexe.

(*) Je voudrais remercier vivement A. Hirschowitz et P. Le Barz pour l'aide qu'ils n'ont cessé de m'apporter lors de l'élaboration de ce travail.

Alors

1) Si le fibré tangent T(X) est positif, D est 0 – convexe (théorème I)

2) Si X admet une fonction strictement plurisousharmonique, D est de Stein (théorème II)

3) Si X est l'espace total d'un morphisme de Stein à base de Stein, D est de Stein (corollaire du théorème II).

Soit X une variété analytique complexe de dimension n et g une structure kählérienne de classe C^∞ sur X. Au voisinage de chaque point x de X il existe un système de coordonnées $z = (z_1, \ldots, z_n)$ dites géodésiques en x dans lequel la matrice (g_{ij}) de g vérifie les conditions

i) $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$

ii) $dg_{ij}(x) = 0$

iii) $R_{ijkl}(x) = -\dfrac{\partial^2 g_{ij}(x)}{\partial z_k \, \partial \bar{z}_l}$

(composantes du tenseur de courbure de g dans le système de coordonnées z).

Voir par exemple Grauert [1] pour ces résultats.

La courbure de g sera dite positive si pour tout point x de X et tout couple $\Sigma\, u^i \dfrac{\partial}{\partial z_i}$, $\Sigma\, v^i \dfrac{\partial}{\partial z_i}$ de vecteurs non nuls de $T_x(X)$ on a

iv) $\Sigma\, R_{ijkl}\, u^i \bar{u}^j\, v^k \bar{v}^l > 0$

On dit que la variété analytique X a un fibré tangent positif si on peut munir X d'une structure kählérienne g de classe C^∞ dont la courbure est positive. La terminologie concernant la positivité de fibrés de rang > 1 n'est pas uniforme ; on a adopté ici les définitions de P.A. Griffiths [2].

Les espaces projectifs $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, par exemple, ont un fibré tangent positif, grâce à leur métrique de Fubini (cf. Kobayashi-Nomizu [4]).

Voyons maintenant une grandeur introduite par K. Oka pour apprécier quantitativement la plurisousharmonicité d'une fonction $\varphi : U \to \mathbf{R}$ continue sur un voisinage ouvert U de z dans $\mathbf{C}^n$.

Soit $\lambda \in \mathbf{C}^n$ avec $\|\lambda\| = 1$ ($\|\ \|$ désignera toujours la norme hermitienne usuelle de $\mathbf{C}^n$) et posons $\varphi_\lambda(\tau) = \varphi(z + \lambda\tau)$ pour $\tau \in \mathbf{C}$ de module assez petit et

$$\widetilde{W}\varphi(z, \lambda) = \lim_{r \to 0} \inf \frac{1}{2\pi r^2} \left(\int_0^{2\pi} \varphi_\lambda(re^{i\theta})\, d\theta - 2\pi\, \varphi_\lambda(0) \right) \quad (1)$$

$$W\varphi(z) = \inf_{\|\lambda\|=1} \widetilde{W}\varphi(z, \lambda) \quad (2)$$

Une application facile de la formule de Taylor montre que si φ est de classe C^2 on a

$$\widetilde{W}\varphi(z, \lambda) = \Sigma \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \quad (3)$$

et par suite

$$W\varphi(z) = \inf_{\|\lambda\|=1} \Sigma \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \quad (4)$$

La fonction φ est (strictement) plurisousharmonique sur U si W_φ est (strictement) positive sur U.

LEMME 1. — *Si φ et Ψ sont continues, si $\varphi(z) = \Psi(z)$ et si $\varphi \geqslant \Psi$ alors* $W\varphi(z) \geqslant W\Psi(z)$.

Démonstration. — Elle résulte des formules (1) et (2) puisque $\varphi_\lambda(0) = \Psi_\lambda(0)$ et $\varphi_\lambda(re^{i\theta}) \geqslant \psi_\lambda(re^{i\theta})$.

LEMME 2. — *Si φ et Ψ sont continues et si $k \in \mathbf{R}^+$, on a*

$$W(\varphi + \Psi) \geqslant W(\varphi) + W(\Psi) \quad \text{et} \quad W(k\varphi) = k\, W(\varphi)$$

Démonstration. — Elle résulte des formules (1) et (2) si on se souvient que pour des parties non vides A et B de $\mathbf{R}$ on a

$$\inf (A + B) = \inf A + \inf B \text{ et } \inf (k\, A) = k \inf A.$$

LEMME 3. – *Soit* $(\varphi^j)_{j\in \mathbf{N}}$ *une suite de fonctions continues sur* U *convergeant uniformément sur tout compact de* U *vers* φ, *lorsque* j *tend vers l'infini. Si pour une constante* k *on a*

$$(\forall j \in \mathbf{N})\ \mathrm{W}\varphi^j \geqslant k, \text{ on en déduit } \mathrm{W}\varphi \geqslant k.$$

Démonstration. – Posons $p(w) = k\ \|w\|^2$. Pour toute fonction φ continue sur U on a :

$$\widetilde{\mathrm{W}}(\varphi - p)\ (z\ ;\ \lambda) = \liminf_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \left[\left(\int_0^{2\pi} \varphi_\lambda(r e^{i\theta})\, d\theta - 2\pi\varphi_\lambda(0)\right) - \left(\int_0^{2\pi} p_\lambda(r e^{i\theta})\, d\theta - 2\pi p_\lambda(0)\right)\right]$$

$$= \liminf_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r^2} \left(\int_0^{2\pi} \varphi_\lambda(r e^{i\theta})\, d\theta - 2\pi\varphi_\lambda(0)\right) - k$$

$$= \widetilde{\mathrm{W}}\varphi(z\ ;\lambda) - k \text{ et par suite } \mathrm{W}(\varphi - p)\ (z) = \mathrm{W}\varphi(z) - k.$$

Appliquons ce résultat au lemme. On a

$$\mathrm{W}(\varphi^j - p) = \mathrm{W}(\varphi^j) - k \geqslant 0$$

donc $\varphi^j - p$ est une suite de fonctions plurisousharmoniques convergeant uniformément sur les compacts de U vers $\varphi - p$; d'après un résultat classique (cf. Richberg [6]) $\varphi - p$ est plurisousharmonique donc $\mathrm{W}(\varphi - p) = \mathrm{W}(\varphi) - k \geqslant 0$, ce qui prouve le lemme.

Rappelons qu'une variété analytique complexe est dite 0 – convexe s'il existe une fonction continue $f : \mathrm{X} \to \mathbf{R}$ strictement plurisousharmonique en dehors d'un compact de X et telle que les ensembles $\{x \in \mathrm{X} \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ soient compacts pour chaque $\alpha \in \mathbf{R}$. Un théorème de R. Narasimhan permet d'affirmer que X est 0 – convexe si et uniquement s'il existe un espace de Stein Y, un morphisme propre $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et un ensemble fini $\mathrm{F} \subset \mathrm{Y}$ tels que $f \mid \mathrm{X} - f^{-1}(\mathrm{F})$ soit un isomorphisme de $\mathrm{X} - f^{-1}(\mathrm{F})$ sur $\mathrm{Y} - \mathrm{F}$.

Enfin un ouvert D de la variété analytique complexe X est dit localement pseudo-convexe si chaque point x de la frontière $\partial\mathrm{D}$ de D admet un voisinage ouvert U_x tel que $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{D}$ soit de Stein. On peut alors énoncer le

THEOREME I. – *Soit* X *une variété analytique complexe à fibré tangent positif et* $D \subset\subset X$ *un ouvert localement pseudo-convexe relativement compact de* X. *Alors* D *est* 0 – *convexe.*

Démonstration. – Soit h une structure C^∞ kählérienne sur X de courbure positive et d_h la métrique déduite sur X. Notons b_h la fonction définie dans D par $b_h(x) = d_h(x, \partial D)$. On va prouver le théorème en montrant que la fonction $-\log b_h$ est strictement plurisousharmonique sur la trace dans D d'un voisinage dans X de ∂D. Pour chaque $p \in \partial D$ on choisit une carte $z^p = (z_1^p, \dots, z_n^p) : W_p \to \mathbf{C}^n$ géodésique en p.

Dans cette carte h s'écrit $\Sigma\, h_{ij}^p\, dz_i^p\, d\bar{z}_j^p$ et la courbure R de h admet les composantes R_{ijkl}^p. La courbure de h étant positive, un argument de compacité implique que si on définit C_p par

$$C_p = \inf_{\|\lambda\| = \|\mu\| = 1} \Sigma\, R_{ijkl}^p(p)\, \lambda_i \bar{\lambda}_j \mu_k \bar{\mu}_l \tag{5}$$

on a $C_p > 0$. Définissons encore $R^*(p)$

$$R^*(p) = \max_{ijkl} |R_{ijkl}^p(p)| \tag{6}$$

On approche alors $h | W_p$ par une suite $({}_\nu g)$ de structures hermitiennes analytiques réelles sur W_p de la manière suivante :

Les dérivées dans la carte z^p de $({}_\nu g)$ d'ordre 0,1 et 2 convergent uniformément sur les compacts de W_p vers les dérivées correspondantes de h et les valeurs de ces dérivées en p coïncident avec les valeurs des dérivées correspondantes de h en p.

L'existence d'une telle suite $({}_\nu g)$ résulte du lemme ci-dessous :

LEMME 4. – *Soit* W *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *contenant* 0 *et* $\varphi \in C^\infty(W)$. *Il existe une suite* (φ_ν) *de fonctions analytiques réelles sur* W *telles que, pour* $\alpha \in \mathbf{N}^m$ *vérifient* $|\alpha| \leqslant 2$

1) *Les suites* $(D^\alpha \varphi_\nu)$ *convergent uniformément sur les compacts de* W *vers* $D^\alpha \varphi$.

2) *Pour chaque* $\nu \in \mathbf{N}$, *on a* $D^\alpha \varphi_\nu(0) = D^\alpha \varphi(0)$

Preuve. – Il existe, d'après un théorème de Whitney cité dans Narasimhan [5], une suite (Ψ_ν) de fonctions analytiques réelles telle que les suites $(D^\alpha \Psi_\nu)$ convergent uniformément sur les compacts de W vers $D^\alpha \varphi$. On prend alors $\varphi_\nu = \Psi_\nu + T_2\ (\varphi - \Psi_\nu)\ (0)$ où $T_2(\varphi - \Psi_\nu)\ (0)$ désigne le développement de Taylor au deuxième ordre de $\varphi - \Psi_\nu$ calculé en zéro. Ceci démontre le lemme 4.

La suite $({}_\nu g)$ vérifie donc

$${}_\nu i)\quad {}_\nu g_{ij}(p) = \delta_{ij}$$

$${}_\nu ii)\quad d_\nu g_{ij}(p) = 0$$

$${}_\nu iii)\quad {}_\nu R_{ijkl}(p) = -\frac{\partial^2\, {}_\nu g_{ij}(p)}{\partial z_k^p\, \partial \bar{z}_l^p} = R_{ijkl}(p)$$

Par suite, si on définit ${}_\nu C_p$ et ${}_\nu R^*$ comme en (5) et (6),

$$C_p = {}_\nu C_p \quad \text{et} \quad R^*(p) = {}_\nu R^*(p) \tag{7}$$

Si on désigne par ${}_\nu d$ la métrique déduite de ${}_\nu g$, la suite $({}_\nu d)$ converge uniformément sur les compacts de $W_p \times W_p$ vers d ; posons ${}_\nu b(z) = {}_\nu d(z\ ; \partial D \cap W_p)$. Pour un voisinage ouvert assez petit Z_p de p dans W_p, la suite ${}_\nu b$ converge uniformément vers b dans $Z_p \cap D$ et en conséquence la suite $(-\log\ {}_\nu b)$ converge uniformément sur les compacts de $Z_p \cap D$ vers $-\log b$. Le théorème sera donc démontré, d'après le lemme 3, si on parvient à trouver un voisinage ouvert $V_p \subset Z_p$ de p tel que $W(-\log\ {}_\nu b)$ soit uniformément en ν minorée par une constante > 0 sur $V_p \cap D$.

Pour arriver à cette minoration, on remarque que les hypothèses de convergence uniforme faites sur $({}_\nu g)$ et la locale pseudoconvexité de D dans X permettent d'associer à chaque $\delta_p > 0$ un voisinage ouvert $U_p \subset\subset Z_p$ de p tel que $U_p \cap D$ soit de Stein et que sur U_p on ait

$$(\forall i, j, k, l \in [1, n],\ \forall \nu \in \mathbf{N})\ |{}_\nu g_{ij} - \delta_{ij}| \leqslant \delta_p,$$

$$\left|\frac{\partial_\nu g_{ij}}{\partial z_k}\right| \leqslant \delta_p \ \left(\text{et donc aussi } \left|\frac{\partial_\nu g_{ij}}{\partial \bar{z}_k}\right| \leqslant \delta_p\right)$$

$$\left|{}_\nu R_{ijkl} + \frac{\partial^2\, {}_\nu g_{ij}}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l}\right| \leqslant \delta_p$$

et $|{}_\nu g^{ij}| \leqslant 2$ $(({}_\nu g^{ij})$ est la matrice inverse de $({}_\nu g_{ij}))$

Le théorème résulte alors du lemme local suivant :

LEMME PRINCIPAL. – *Soit* U *la boule* $\|z\| < \mathrm{E}$ *de* $\mathbf{C}^n$ *et* $\mathrm{D} \subset \mathrm{U}$ *un ouvert de Stein tel que* $0 \in \partial\mathrm{D}$. *Soit* g *une structure hermitienne analytique réelle sur* U *(de distance déduite* d*)* vérifiant $g(0) = \mathrm{I}$ *et* $dg(0) = 0$.

Soit V *la boule* $\|z\| < \dfrac{\mathrm{E}}{4n}$ et δ_0 *un réel vérifiant* $0 < \delta_0 \leqslant \dfrac{1}{2n}$.
Posons $\mathrm{C}_0 = \inf\limits_{\|\lambda\| = \|\mu\| = 1} \sum\limits_{i,j,k,l} \mathrm{R}_{ijkl}(0)\, \lambda_i \overline{\lambda}_j\, \mu_k\, \overline{\mu}_l$ *et*

$$\mathrm{R}^*(0) = \max_{i,j,k,l} |\mathrm{R}_{ijkl}(0)| \tag{8}$$

Supposons qu'on ait, quelque soient les entiers i, j, k, l *compris entre* 1 *et* n, *les majorations suivantes sur* U

a) $|g_{ij} - \delta_{ij}| \leqslant \delta_0$

b) $\left|\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial z_k}\right| \leqslant \delta_0 \quad \left|\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial \overline{z}_k}\right| \leqslant \delta_0$

c) $\left|\mathrm{R}_{ijkl} + \dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial z_k\, \partial \overline{z}_l}\right| \leqslant \delta_0$

d) $|g^{ij}| \leqslant 2$

Soit b *la fonction* $\mathrm{D} \cap \mathrm{V} \to \mathbf{R} : z \to b(z) = -\log d(z, \partial\mathrm{D})$. *Alors*

1/ $\mathrm{W}(-\log b)$ *est minorée sur* $\mathrm{D} \cap \mathrm{V}$

2/ *Si la courbure* R *de* g *est positive, on a*

$$\mathrm{W}(-\log b) \geqslant \frac{\mathrm{C}_0}{49n} \tag{9}$$

pour δ_0 *assez petit ne dépendant que des dérivées d'ordre* $\leqslant 2$ *des* g_{ij} *en 0 et de* E. (Cf. inégalité (39)).

Preuve du lemme principal. – Pour chaque $j \in \mathbf{N}$ on définit $D^j \subset\subset D$ de manière que les D^j forment une suite croissante d'ouverts strictement pseudo-convexes à frontière lisse (i.e. C^∞) avec $\bigcup_{j \in \mathbf{N}} D^j = D$ (on peut trouver une telle suite d'après [3, théorème 5.1.6] et le théorème de Sard).

Soit Ω un ouvert relativement compact dans $V \cap D$. Il existe $j_0 \in \mathbf{N}$ tel que $j \geqslant j_0$ entraîne $D^j \supset\supset \Omega$. Pour de tels j on définit $b^j : \Omega \to \mathbf{R} : z \to d(z, \partial D^j)$. La suite (b^j) converge uniformément sur Ω vers b et par suite le lemme 3 implique que

$$W(-\log b) \geqslant \inf_{z \in \Omega, j \geqslant j_0} W(-\log b^j)(z) \tag{10}$$

sur Ω.

Minorons donc $W(-\log b^j)$ sur Ω. Soit $M \in \Omega$ et $j \geqslant j_0$. Soit Q un des points de ∂D^j tels que $d(M, Q) = d(M, \partial D^j)$ et $\hat{\gamma} : [0,1] \to U$ une géodésique joignant M à Q et vérifiant

$$\hat{\gamma}(0) = M, \hat{\gamma}(1) = Q \text{ et } \|\hat{\gamma}'(t)\|_g = s \tag{11}$$

(On a posé $d(M, Q) = s$ et $\|\cdot\|_g$ la norme dans T(U) déduite de g).

Comme D^j est strictement pseudo-convexe à frontière lisse, il existe une hypersurface analytique complexe lisse H localement fermée dans U telle que

$$H \cap \overline{D}^j = \{Q\}$$

Soit alors $\gamma : \vartheta \to U$ un prolongement analytique complexe de $\hat{\gamma}$ à un voisinage convexe ϑ de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$. Pour $\zeta \in \mathbf{C}^n$ assez petit on peut définir la courbe complexe Γ_ζ, translatée de γ,

$$\Gamma_\zeta : \vartheta \to U : z \to \zeta + \gamma(z).$$

Il existe alors un unique germe d'application holomorphe

$$\omega : (\mathbf{C}^n, 0) \to (\Omega, 1)$$

tel que $\Gamma_\zeta(\omega(\zeta)) \in H$. Cela résulte du théorème des fonctions implicites et de ce que $\gamma'(1)$ n'est pas tangent à H en Q.

Soit $\Delta(\zeta)$ la longueur (pour g) de la courbe réelle

$$[0,1] \to U : t \to \zeta + \gamma(t\omega(\zeta)).$$

On a

$$\Delta(0) = s = b^j(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \Delta(\zeta) \geqslant b^j(\mathrm{M} + \zeta).$$

Le lemme 1 permet de conclure que

$$\mathrm{W}(-\log b^j)\,(\mathrm{M}) \geqslant \mathrm{W}(-\log \Delta)\,(0) \tag{12}$$

et

$$\mathrm{W}(-\log \Delta)\,(0) = \inf_{\|\lambda\|=1} \sum \frac{-\partial^2 (\log \Delta)\,(0)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j}\,\lambda_i\,\overline{\lambda}_j \tag{13}$$

d'après (4) :

Or $$\Delta(\zeta) = |\omega(\zeta)| \int_0^1 (g(t\,,\zeta))^{1/2}\,\mathrm{d}t = |\omega(\zeta)|\,\mathrm{G}(\zeta) \tag{14}$$

où on pose

$$g(t\,,\zeta) = \Sigma g_{\alpha\beta}\,(\zeta + \gamma(t\omega(\zeta)))\,\gamma'_\alpha\,(t\omega(\zeta))\,\overline{\gamma'_\beta(t\omega(\zeta))} \tag{15}$$

et

$$\mathrm{G}(\zeta) = \int_0^1 (g(t\,,\zeta))^{1/2}\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

Or $$\frac{\partial^2(-\log \Delta)\,(\zeta)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j} = \frac{\partial^2(-\log|\omega|)\,(\zeta)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j} + \frac{\partial^2(-\log \mathrm{G})\,(\zeta)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j}$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{G}(\zeta)}\,\frac{\partial^2\mathrm{G}(\zeta)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j} + \frac{1}{\mathrm{G}^2(\zeta)}\,\frac{\partial\mathrm{G}(\zeta)}{\partial\zeta_i}\,\frac{\partial\mathrm{G}(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}_j}$$

(car $\dfrac{\partial^2(-\log|\omega|)\,(\zeta)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j} = 0$ étant donné que ω est analytique complexe et ne s'annule pas).

Par suite

$$\sum \frac{-\partial^2(\log \Delta)\,(0)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j}\,\lambda_i\,\overline{\lambda}_j \geqslant \sum \frac{-1}{\mathrm{G}(0)}\,\frac{\partial^2\mathrm{G}(0)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j}\,\lambda_i\,\overline{\lambda}_j$$

et d'après (13),

$$\mathrm{W}(-\log \Delta(0) \geqslant \inf \sum \frac{-1}{\mathrm{G}(0)}\,\frac{\partial^2\mathrm{G}(0)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j}\,\lambda_i\,\overline{\lambda}_j \tag{17}$$

D'autre part $g(t\,,\,0) = s^2$ et $G(0) = s$ (18)

d'après (11), (15) et (16) et de plus

$$\frac{\partial^2 G(0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j} = \frac{1}{2}\int_0^1 (g(t\,,\,0))^{-3/2}$$

$$\left(g(t\,,\,0)\,\frac{\partial^2 g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j} - \frac{\partial g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i}\,\frac{\partial g(t\,,\,0)}{\partial\bar{\zeta}_j}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2s^3}\int_0^1 \left(s^2\,\frac{\partial^2 g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j} - \frac{\partial g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i}\,\frac{\partial g(t\,,\,0)}{\partial\bar{\zeta}_j}\right) dt$$

et par suite

$$\sum \frac{-1}{G(0)}\,\frac{\partial^2 G(0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j}\,\lambda_i\bar{\lambda}_j = -\frac{1}{2s^2}\sum \lambda_i\bar{\lambda}_j \int_0^1 \frac{\partial^2 g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j}\,dt$$

$$+ \frac{1}{2s^4}\sum \int_0^1 \frac{\partial g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i}\,\frac{\partial g(t\,,\,0)}{\partial\bar{\zeta}_j}\,\lambda_i\bar{\lambda}_j\,dt$$

$$\geqslant -\frac{1}{2s^2}\sum \lambda_i\bar{\lambda}_j \int_0^1 \frac{\partial g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j}\,dt\;;$$

en comparant à (17) on obtient l'inégalité

$$W(-\log\Delta)\,(0) \geqslant \inf_{\|\lambda\|=1}\left(-\frac{1}{2s^2}\sum \lambda_i\bar{\lambda}_j \int_0^1 \frac{\partial^2 g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j}\right) \tag{19}$$

Il reste à évaluer $\dfrac{\partial^2 g(t\,,\,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\bar{\zeta}_j}$

D'après la définition (15) de $g(t\,,\,\zeta)$, on a

$$\frac{\partial g(t\,,\,\zeta)}{\partial\zeta_i} = \sum_{\alpha,\beta,k} \frac{\partial g_{\alpha\beta}\,(\zeta + \gamma\,(t\,\omega(\zeta)))}{\partial\zeta_k}\left(\delta_{ki} + t\gamma_k'\,(t\,\omega(\zeta))\,\frac{\partial\omega(\zeta))}{\partial\zeta_i}\right)$$

$$\gamma_\alpha'\,(t\,\omega(\zeta))\,\overline{\gamma_\beta'(t\,\omega(\zeta))} + \sum_{\alpha,\beta} t g_{\alpha_\beta}(\beta + \gamma\,(t\,\omega(\zeta)))$$

$$\gamma_\alpha''(t\,\omega(\zeta))\,\frac{\partial\omega(\zeta)}{\partial\zeta_i}\,\overline{\gamma_\beta'(t\,\omega(\zeta))}$$

Si on pose

$$A = \sum_{\alpha,\beta,k,l} \frac{\partial^2 g_{\alpha_\beta}(\gamma(t))}{\partial\zeta_k\,\partial\overline{\zeta}_l}\,\overline{\left(\delta_{lj} + t\gamma_l'(t)\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}\right)}\left(\delta_{ki} + t\gamma_k'(t)\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\right)$$

$$\overline{\gamma_\alpha'(t)\;\gamma_\beta'(t)}$$

$$B = \sum_{\alpha,\beta,k} \frac{\partial g_{\alpha_\beta}(\gamma(t))}{\partial\zeta_k}\left(\delta_{ki} + t\,\gamma_k'(t)\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\right) t\,\gamma_\alpha'(t)\;\overline{\gamma_\beta''(t)}\;\overline{\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}}$$

$$C = \sum_{\alpha,\beta,k} \frac{\partial g_{\alpha_\beta}(\gamma(t))}{\partial\overline{\zeta}_k}\,\overline{\left(\delta_{kj} + t\,\gamma_k'(t)\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}\right)}\,t\,\gamma_\alpha''(t)\;\overline{\gamma_\beta'(t)}\;\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}$$

$$D = \sum_{\alpha,\beta} t^2 g_{\alpha_\beta}(\gamma(t))\;\gamma_\alpha''(t)\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\;\overline{\gamma_\beta''(t)}\;\overline{\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}}$$

On obtient
$$\frac{\partial^2 g(t,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j} = A + B + C + D \tag{20}$$

Pour évaluer ces quatre termes, on exprime que $\gamma'(1)$ est orthogonal, pour g, en Q à H. Comme H est, au voisinage de Q, l'image de $\zeta \to \zeta + \gamma(\omega(\zeta))$ on obtient les conditions

$$\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}(\gamma(1))\left(\delta_{\alpha k} + \gamma_\alpha'(1)\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_k}\right)\overline{g_\beta'(1)} = 0$$

$$(k = 1\,, \ldots, n)$$

où, en désignant par e_k le $k^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{C}^n$ et par $(.|.)_g$ le produit hermitien déduit de g,

$$(e_k\,|\,\gamma'(1))_g + \frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_k}\,(\gamma'(1)\,|\,\gamma'(1))_g = 0 \tag{21}$$

On a donc
$$\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_k} = -\,\frac{(e_k\,|\,\gamma'(1))_g}{s^2} \tag{22}$$

$$(k = 1\,, \ldots, n)$$

Voyons d'autres inégalités. D'après (a) (cf. énoncé du lemme principal) on sait que, sur U, on a

$$|g_{ij}| \leqslant 2 \tag{23}$$

Pour $v = \Sigma\ v_\alpha \dfrac{\partial}{\partial z_\alpha} \in T_z(U)$ on a donc

$$\|v\|_g = (\Sigma g_{\alpha_\beta}(z)\ v_\alpha \overline{v}_\beta)^{\frac{1}{2}} \leqslant (2\,\Sigma\, v_\alpha \overline{v}_\beta)^{\frac{1}{2}} = (2\,|\Sigma\, v_\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (2n\ \|v\|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2n}\ \|v\|$$

de même

$$\|v\| = (\Sigma\ \delta_{\alpha_\beta} v_\alpha v_\beta)^{\frac{1}{2}} = (\Sigma\,((\delta_{\alpha_\beta} - g_{\alpha_\beta}) + g_{\alpha_\beta})\, v_\alpha \overline{v_\beta}\,)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant (\delta_0\ \Sigma\ |v_\alpha|^2 + \|v\|_g^2) \leqslant (n\ \|v\|^2\ \delta_0 + \|v\|_g^2)^{\frac{1}{2}}$$

donc $(1 - n\delta_0)\ \|v\|^2 \leqslant \|v\|_g^2$ et si on se rappelle l'hypothèse $\delta_0 \leqslant \dfrac{1}{2n}$ on voit que $\|v\|^2 \leqslant 2\ \|v\|_g^2$.

En conclusion

$$\|v\|_g \leqslant \sqrt{2n}\ \|v\| \quad \text{et} \quad \|v\| \leqslant 2\ \|v\|_g \tag{24}$$

De ces inégalités on déduit

$$|\gamma_i'(t)| \leqslant \|\gamma'(t)\| \leqslant 2\ \|\gamma'(t)\|_g \quad \text{donc, d'après (11),}$$

$$|\gamma_i'(t)| \leqslant 2s \tag{25}$$

et $\quad \left|\dfrac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_k}\right| \leqslant \left|\dfrac{(e_k\,|\gamma'(1))_g}{s^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{s^2}\ \|e_k\|_g\ \ \|v'(1)\|_g \leqslant \dfrac{1}{s^2}\ \sqrt{2n}\ \ \|e_k\|\ s$

donc
$$\left|\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_k}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2n}}{s} \tag{26}$$

Par ailleurs $\hat{\gamma} = \gamma\ |[0,1]$ est une géodésique et vérifie donc, d'après par exemple Kobayashi-Nomizu [4],

$$\gamma_i''(t) + \sum_{j,k,l} g^{ij}(\gamma(t))\ \frac{\partial g_{kj}(\gamma(t))}{\partial z_l}\ \gamma_k'(t)\ \gamma_l'(t) = 0$$

et par suite $\qquad |\gamma''(t)| \leqslant n^3 \,.\, 2 \,.\, \delta_0 \,.\, 2s \,.\, 2s$

et donc
$$|\gamma_i''(t)| \leqslant 8\ \delta_0\, n^3\, s^2 \tag{27}$$

On peut commencer à évaluer $\dfrac{\partial^2 g(t\,,\,0)}{\partial \zeta_i\, \partial \bar{\zeta}_j} = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}$ à l'aide de ces majorations. On a

$$\begin{aligned} |\mathrm{B}| + |\mathrm{C}| + |\mathrm{D}| \leqslant n^3 & \left(1 + 2s \cdot \frac{\sqrt{2n}}{s}\right) \cdot 2s\,.\, 8\delta_0\, n^3\, s^2\, \frac{\sqrt{2n}}{s} \qquad (28) \\ & + n^3 \left(1 + 2s\, \frac{\sqrt{2n}}{s}\right).\ 2s\,.\, 8\delta_0\, n^3\, s^2\, \frac{\sqrt{2n}}{s} \\ & + n^2\,.\, 8\delta_0\, n^3\, s^2 \cdot \frac{\sqrt{2n}}{s}\, 8\delta_0\, n^3\, s^2\, \frac{\sqrt{2n}}{s} \leqslant \mathrm{K}_0\, s^2\, \delta_0 \end{aligned}$$

où K_0 est une constante ne dépendant que de n.

$\left(\text{on a utilisé le fait que } \delta_0^2 \leqslant \delta_0 \text{ puisque } \delta_0 \leqslant \dfrac{1}{2n}\right)$.

Dans la suite on désignera par K_i des constantes ne dépendant que de n. Si on pose :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1(t) = \sum_{\alpha,\beta,k,l} \left(- \underset{\alpha\beta k l}{\mathrm{R}\,(0)}\right) & \overline{\left(\delta_{lj} + t\gamma_l'(t)\, \frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}\right)} \\ & \left(\delta_{ki} + t\gamma_k'(t)\, \frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\right) \gamma_\alpha'(t)\, \overline{\gamma_\beta'(t)} \\ \mathrm{A}_2(t) = \sum_{\alpha,\beta,k,l} \left(\underset{\alpha\beta k l}{\mathrm{R}\,(0)} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}(\gamma(t))}{\partial\zeta_k\, \partial\bar{\zeta}_1}\right) & \overline{\left(\delta_{lj} + t\gamma_l'(t)\, \frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}\right)} \\ & \left(\delta_{ki} + t\gamma_k'(t)\, \frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\right) \gamma_\alpha'(t)\, \overline{\gamma_\beta'(t)} \end{aligned}$$

on a $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1(t) + \mathrm{A}_2(t)$.

On peut majorer $\mathrm{A}_2(t)$ par

$$|\mathrm{A}_2(t)| \leqslant n^4\, \delta_0 \left(1 + 2s\, \frac{\sqrt{2n}}{s}\right) \left(1 + 2s\, \frac{\sqrt{2n}}{s}\right) 2s\,.\, 2s$$

d'où $$|\mathrm{A}_2(t)| \leqslant \mathrm{K}_1\, s^2\, \delta_0 \qquad (29)$$

D'autre part on peut écrire

$$A_1 = \sum_{\alpha,\beta,k,l} \left(-\underset{\alpha\beta kl}{R(0)}\right) \delta_{lj}\delta_{ki}\gamma'_\alpha(t)\,\overline{\gamma'_\beta(t)} + \sum_{\alpha,\beta,k,l}\left(-\underset{\alpha\beta kl}{R(0)}\right)$$

$$\overline{\delta_{lj}t\gamma'_k(t)\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\,\gamma'_\alpha(t)\,\overline{\gamma'_\beta(t)}} + \sum_{\alpha,\beta,k,l}\left(-\underset{\alpha\beta kl}{R(0)}\right)\delta_{ki}t\gamma'_l(t)\,\overline{\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}}$$

$$\gamma'_\alpha(t)\,\overline{\gamma'_\beta(t)} + \sum_{\alpha,\beta,k,l}\left(-\underset{\alpha\beta kl}{R(0)}\right)t^2\overline{\gamma'_l(t)}\,\gamma'_k(t)\,\overline{\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}}\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\,\gamma'_\alpha(t)\,\overline{\gamma'_\beta(t)}$$

Or $|\gamma'_i(t) - \gamma'_i(1)| \leqslant \sup|\gamma''_i(\xi)| \leqslant 8\,\delta_0 n^3 s^2$ d'après [27]

On peut donc écrire, en remplaçant $\gamma'_i(t)$ par $\gamma'_i(1)$ et en évaluant l'erreur A'_2 comme plus haut $A_1 = A'_1 + A'_2$ avec

$$A'_1 = \sum_{\alpha,\beta,k,l}\left(-\underset{\alpha\beta kl}{R(0)}\right)\delta_{lj}\delta_{ki}\gamma'_\alpha(1)\,\overline{\gamma'_\beta(1)} + \sum_{\alpha,\beta,k,l} -\underset{\alpha\beta kl}{R\ (0)}$$

$$\delta_{lj}t\gamma'_\alpha(1)\,\gamma'_\beta(1) + \sum_{\alpha,\beta,k,l}\left(-\underset{\alpha\beta kl}{R(0)}\right)\delta_{ki}t\gamma'_l(1)\,\overline{\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}}\,\gamma'_\alpha(1)\,\overline{\gamma'_\beta(1)}$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta,k,l}\left(-\underset{\alpha\beta kl}{R(0)}\right)t^2\,\gamma'_l(1)\,\overline{\gamma}'_k(1)\,\overline{\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_j}}\,\frac{\partial\omega(0)}{\partial\zeta_i}\,\gamma'_\alpha(1)\,\overline{\gamma'_\beta(1)}$$

et $$|A'_2| \leqslant K_2 s^3 \delta_0 R^+(0) \tag{30}$$

(Rappelons que $R^*(0) = \max\limits_{i,j,k,l} |\underset{ijkl}{R(0)}|$)

On obtient donc

$$\frac{\partial^2 g(t,0)}{\partial\zeta_i\,\partial\overline{\zeta}_j} = A + B + C + D = A'_1 + A'_2 + A_2 + B + C + D \tag{32}$$

où $A'_2 + A_2 + B + C + D$ est une fonction continue de t vérifiant

$$|A'_2 + A_2 + B + C + D| \leqslant K_2 s^3\,\delta_0 R^*(0) + K_1 s^2\,\delta_0 + K_0 s^2\,\delta_0^2$$

d'après (31), (29) et (28) et donc

$$|A'_2 + A_2 + B + C + D| \leqslant K_3 s^2\,\delta_0 + K_2 s^3 \delta_0 R^*(0) \tag{33}$$

On en déduit (cf. (19), (20), (32) et (33))

$$W(-\log \Delta)(0) \geqslant \inf_{\|\lambda\|=1} \left(-\frac{1}{2s^2} \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda}_j \int_0^1 A_1'\, dt\right)$$

$$- \sup_{\|\lambda\|=1} \left(-\frac{1}{2s^2} \sum_{i,j} \lambda_i \overline{\lambda}_j \,(K_3 s^2 \delta_0 + K_2 s^3 \delta_0 R^*(0))\right)$$

$$\geqslant \inf_{\|\lambda\|=1} \left(-\frac{1}{2s^2} \sum \lambda_i \overline{\lambda}_j \int_0^1 A_1'\, dt\right) - \left(\sup_{\|\lambda\|=1} |\Sigma \lambda_i|^2\right)$$

$$(K_3 s^2 \delta_0 + K_2 s^3 \delta_0 R^*(0))$$

donc

$$W(-\log \Delta)(0) \geqslant \inf \left(-\frac{1}{2s^2} \Sigma \lambda_i \lambda_j \int_0^1 A_1'\, dt\right) - (K_4 s^2 \delta_0 + K_5 s^3 \delta_0 R^*(0)) \tag{34}$$

et comme $s \leqslant 2E$ (s est la distance de deux points de E pour g ; cf. (24)) on voit que

$$W(-\log \Delta)(0) \geqslant \inf \left(-\frac{1}{2s^2} \sum \lambda_i \overline{\lambda}_j \int_0^1 A_1'\, dt\right) - - \delta_0 (K_6 E^2 + K_7 R^*(0)) \tag{35}$$

l'intégrale figurant dans le deuxième membre de cette inégalité se calcule comme suit : on pose, pour $a, b, c, d, \in \mathbf{C}^n$,

$$R(0)(a, b, c, d) = \Sigma \underset{ijkl}{R(0)} a_i \overline{b}_j c_k \overline{d}_l \text{ et } y = \Sigma \lambda_i \frac{\partial \omega(0)}{\partial \zeta_i}$$

et on a, d'après (30)

$$- \Sigma \lambda_i \overline{\lambda}_j \int_0^1 A_1'\, dt = R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1), \lambda)$$

$$+ \frac{1}{2} R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1), \lambda)\, y$$

$$+ \frac{1}{2} R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \lambda, \gamma'(1)\, \overline{y})$$

$$+ \frac{1}{3} R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1))\, |y|^2$$

donc d'après (35)

$$W(-\log \Delta)(0) \geqslant \inf \left\{ \frac{1}{2s^2} \left[R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \lambda, \lambda) \right.\right.$$

$$+ \operatorname{Re} R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1)\, \gamma'(1), \lambda)\, y \tag{36}$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3} R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1)\, \gamma'(1))\, |y|^2 \right] \right\} - \delta_0 (K_6 E^2 + K_7 R^*(0))$$

D'après (10), (12) et (19), on a $W(-\log b) \geqslant W(-\log \boldsymbol{\Delta})(0)$ sur Ω, qui, rappelons-le, est un ouvert relativement compact quelconque de $V \cap D$.

Comme $\|\gamma'(1)\| \leqslant 2s \leqslant 4E$ et $|y| \leqslant \frac{n\sqrt{2n}}{s}$, on voit que $W(-\log b)$ est borné inférieurement sur $V \cap D$, ce qui démontre l'assertion 1) du lemme.

Si maintenant on suppose que la courbure de g est positive, on a, d'après (8),

$$R(0)(a, a, b, b) \geqslant C_0 \; \|a\|^2 \; \|b\|^2 \tag{37}$$

et d'après Cauchy-Schwarz, on déduit

$$(R(0)(a, a, b, c))^2 \leqslant R(0)(a, a, b, b) \,.\, R(0)(a, a, c, c) \tag{38}$$

L'inégalité (36) implique

$$W(-\log \Delta)(0) \geqslant \inf_{\|\lambda\|=1} \left\{ \frac{1}{2s^2} \left[R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \lambda, \lambda) \right.\right.$$

$$- |R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1), \lambda)| \; |y|$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3} R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1)\, \gamma'(1))\, |y|^2 \right] \right\} - \delta_0 (K_6 E^2 + K_7 R^*(0))$$

$$\geqslant \inf_{\|\lambda\|=1} \left\{ \frac{1}{2s^2} \frac{\frac{4}{3} R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1)\, \gamma'(1)) \,.\, R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \lambda, \lambda) - |R(0)\, \gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1) \lambda)|^2}{4 R(0)(\gamma'(1), \gamma'(1), \gamma'(1)\, \gamma'(1))} \right.$$

$$\left. - \delta_0 (K_6 E^2 + K_7 R^*(0)) \right\}$$

(d'après la formule donnant le minimum d'une forme quadratique en $|y|$)

$$\geqslant \inf \quad \frac{1}{2s^2}\cdot\frac{1}{3.4}\, R_0(\gamma'(1)\,,\gamma'(1)\,,\lambda\,,\lambda) \quad - \delta_0(K_0 E^2 + K_7 R^*(0))$$

d'après (38) donc

$$W(-\log \Delta)\ (0) \geqslant \inf \left\{ \frac{1}{24 s^2}\, C_0 \quad \|\gamma'(1)\|^2 \quad \|\lambda\|^2 \right\}$$

$$- \delta_0(K_6 E^2 + K_7 R^*(0))$$

d'après (37).

Comme $\|\gamma'(1)\| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\, \|\gamma'(1)\|_g = \dfrac{s}{\sqrt{2n}}$, on a

$$W(-\log \Delta)\ (0) \geqslant \frac{C_0}{48n} - \delta_0(K_6 E^2 + K_7 R^*(0))$$

et comme cette minoration ne dépend pas de Ω, on a

$$W(-\log b) \geqslant \frac{C_0}{48n} - \delta_0\,(K_6 E^2 + K_7 R^*(0)) \text{ sur } V \cap D \qquad (39)$$

Ce qui démontre le 2) du lemme et par suite termine la preuve du théorème I.

THEOREME II. — *Soit* X *une variété holomorphe munie d'une fonction* φ *continue strictement plurisousharmonique. Tout domaine* $D \subset\subset X$ *relativement compact et localement pseudoconvexe est de Stein.*

Preuve. — On commence par remplacer φ par une fonction $\varphi^* \in C^\infty(X)$ strictement plurisousharmonique, ce qui est possible, d'après Richberg [6, Satz 4.2] par exemple. On considère alors sur X la métrique kählérienne donnée localement par $g_{ij} = \dfrac{\partial^2 \varphi^*}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j}\cdot$

Soit $P \in \partial D$; il existe, d'après le 1) du lemme principal, un voisinage V_P de P tel que $W(-\log b)$ est minorée par une constante K sur $D \cap V$. Le lemme 2 implique que $-\log b + \mu\varphi^*$ est strictement plurisousharmonique pour μ assez grand.

Comme ∂D est recouvrable par un nombre fini de tels ouverts V_p, on voit que $-\log b + \mu\varphi^*$ est strictement plurisousharmonique sur D, en dehors d'un compact Q de D.

Le domaine D est donc 0-convexe ; mais comme il supporte la fonction strictement plurisousharmonique φ^*, il est de Stein. Le théorème est donc prouvé.

Rappelons qu'un morphisme $\pi : X \to Y$ entre variétés analytiques complexes est dit de Stein s'il est possible de recouvrir la base Y par une famille (Y_α) d'ouverts tels que les ouverts $\pi^{-1}(Y_\alpha)$ soient de Stein.

Une conjecture classique est que si le morphisme π est de Stein et que la variété Y est de Stein, la variété X l'est aussi.

Un cas particulier de cette conjecture est la conjecture de Serre selon laquelle l'espace total d'une fibration localement triviale à base et fibre variétés de Stein est de Stein.

Enonçons maintenant le

COROLLAIRE — *Soit* $\pi : X \to Y$ *une submersion de Stein entre variétés holomorphes. Supposons* Y *de Stein. Alors tout ouvert* $D \subset\subset X$ *localement pseudo-convexe et relativement compact dans* X *est de Stein.*

Démonstration. — D'après le théorème II il suffit de prouver qu'il existe une fonction strictement plurisousharmonique φ sur un voisinage ouvert de $\overline{D}$. Soit Ψ_α une fonction strictement plurisousharmonique sur $\pi^{-1}(Y_\alpha)$ et (ζ_α) une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement (Y_α). La fonction $\sigma = \Sigma(\zeta_\alpha \circ \pi) . \Psi_\alpha$ est C^∞ et strictement plurisousharmonique sur les fibres de π.

Soit $\xi \in \overline{D}$; soit $V = V(\xi) \xrightarrow{(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m)} C^{n+m}$ une carte en ξ telle que $z_i = z_i' \circ \pi$ où $(z_1', \ldots, z_n')$ est un système de coordonnées de $\pi(V)$.

Les fibres $\pi^{-1}(x)$ seront donc décrites dans V par des équations z_i = constante. Soit $U = U(\zeta)$ un voisinage ouvert relativement compact de ξ dans V. On va montrer que, pour $k \geqslant k(\xi)$, la fonction indéfiniment différentiable $\sigma + k(\Psi \circ \pi) = \varphi_k$ est strictement plurisousharmonique.

Ceci établira le théorème puisqu'on peut recouvrir $\overline{\mathrm{D}}$ par un nombre fini d'ouverts $\mathrm{U}(\xi_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ et la fonction $\varphi = \varphi_k$ sera strictement plurisousharmonique sur $\bigcup_{i=1,\ldots,p} \mathrm{U}(\xi_i) \supset \overline{\mathrm{D}}$ pour $k \geqslant \sup_{i=1,\ldots,p} k(\xi_i)$. Calculons donc la matrice de Levi de φ_k sur $\mathrm{U}(\xi)$ dans le système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_m)$.

On a
$$\mathrm{L}(\varphi_k\,;(z, w)) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_k(z, w) & \mathrm{B}(z, w) \\ \mathrm{C}(z, w) & \mathrm{D}(z, w) \end{pmatrix}$$

où A_k, B, C, D représentent les matrices suivantes

$$\mathrm{A}_k = \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z_i\, \partial \overline{z}_j}\right) = \mathrm{A} + k\, \mathrm{L}^*(\Psi) \quad \text{où on pose}$$

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij}) \quad \text{avec}$$

$$\mathrm{A}_{ij} = \sum_\beta \frac{\partial^2 \rho_\beta}{\partial z_i\, \partial \overline{z}_j} + \sum_\beta \frac{\partial \rho_\beta}{\partial z_i} + \sum_\beta \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \overline{z}_j} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial z_i} + \sum_\beta \rho_\beta \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial z_i\, \partial \overline{z}_j}$$

$$\mathrm{L}^*(\Psi) = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i\, \partial \overline{z}_j}\right) \quad \text{(matrice définie positive)}$$

$$\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{ij}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{B}_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z_i\, \partial \overline{w}_j} = \sum_\beta \frac{\partial \rho_\beta}{\partial z_i} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \overline{w}_j} + \sum_\beta \rho_\beta \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial z_i\, \partial \overline{z}_j}$$

$$\mathrm{C} = (\mathrm{C}_{ij}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{C}_{ij} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial w_i\, \partial \overline{z}_j} = \sum_\beta \frac{\partial \rho_\beta}{\partial \overline{z}_j} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial w_i} + \sum_\beta \rho_\beta \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial w_i\, \partial \overline{z}_j}$$

$$\mathrm{D} = (\mathrm{D}_{ij}) \quad \text{avec} \quad \mathrm{D}_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial w_i\, \partial \overline{w}_j} = \sum_\beta \rho_\beta \frac{\partial^2 \Psi_\beta}{\partial w_i\, \partial \overline{w}_j}$$

Soient $u \in \mathbf{C}^n$ et $v \in \mathbf{C}^n$ deux vecteurs colonnes tels que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = 1 \quad \text{et} \quad (z, w) \in \mathrm{U}(\xi)$$

On a

$$\mathrm{L}(\varphi_k\,;(z, w))\,(u, v) = {}^t u\, \mathrm{A}(z, w)\, \overline{u} + k\, {}^t u\, \mathrm{L}^*(\Psi\,;(z, w))\, \overline{u}$$
$$+ {}^t u\, \mathrm{B}(z, w)\, \overline{v} + {}^t v\, \mathrm{C}(z, w)\, \overline{u} + {}^t v\, \mathrm{D}(z, w)\, \overline{v}.$$

Les matrices A, B, C étant bornées sur $\mathrm{U}(\xi) \subset\subset \mathrm{V}(\xi)$ et les matrices $\mathrm{L}^*(\Psi\,;(z, w))$ et $\mathrm{D}(z, w)$ étant définies positives on voit que $L(\varphi_k\ ;\ (z\ ,\ w))\ (u\ ,\ v) > 0$ pour k assez grand, indépendant de $(z\ ,\ w) \in U(\xi)$, ce qui prouve le théorème.

Remarques. – On généralise facilement le théorème dans deux directions.

1) On peut se contenter de supposer que Y et les $\pi^{-1}(Y_m)$ possèdent des fonctions strictement plurisousharmoniques.

2) On peut remplacer l'hypothèse $\overline{D}$ compacte par $\pi \mid \overline{D}$ propre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. GRAUERT und O. RIEMENSCHNEIDER, Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper -q-konvexem Rand, in Problems in Analysis, *A Symposium in honour of Salom on Bochner,* Princeton University Press, 1970.

[2] P.A. GRIFFITHS, Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles, in Global Analysis, *Papers in honor of K. Kodaira,* Princeton University Press, 1969.

[3] L. HORMANDER, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand 1966.

[4] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, Foundations of differential geometry, Vol I & II, Interscience, New-York, 1963 et 1969.

[5] R. NARASIMHAN, Analysis on Real and Complex Manifolds, North-Holland, 1968.

[6] R. RICHBERG, Stetige streng pseudo konvexe Funktionen, *Math. Annalen,* 175, (1968) 257-286.

[7] A. TAKEUCHI, Domaines pseudo-convexes sur les variétés kählériennes, *Jour. Math. Kyoto University,* 6-3 (1967), 323-357.

Manuscrit reçu le 14 juin 1974
accepté par J. Dieudonné.

Georges ELENCWAJG,
Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06034 – Nice Cedex.